

目 录

第三版序言

第二版序言

~~第~~編 ~~单~~变量函数

第一章 分析引論 1

§ 1. 实数.....	1
§ 2. 級列的理論.....	6
§ 3. 函数的概念.....	20
§ 4. 函数的图形表示法.....	29
§ 5. 函数的极限.....	41
§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶.....	64
§ 7. 函数的連續性.....	69
§ 8. 反函数, 用参数表示的函数.....	79
§ 9. 函数的一致連續性.....	83
§ 10. 函数方程.....	86

第二章 单变量函数的微分學89

§ 1. 显函数的导函数.....	89
§ 2. 反函数的导函数, 用参变数表示的函数的导函数, 隐函数的导函数.....	106
§ 3. 导函数的几何意义.....	109
§ 4. 函数的微分.....	112
§ 5. 高阶的导函数和微分.....	116
§ 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理.....	126
§ 7. 函数的增大与减小, 不等式.....	132
§ 8. 凹凸性, 拐点.....	136
§ 9. 不定形的求值法.....	138
§ 10. 台劳公式.....	142
§ 11. 函数的极值, 函数的最大值和最小值.....	147
§ 12. 依据函数的特征点作函数图形.....	152
§ 13. 函数的极大值与极小值問題.....	155
§ 14. 曲綫的相切, 曲率圓, 漸屈綫.....	159
§ 15. 方程的近似解法.....	161

第三章 不定积分163

§ 1. 最简单的不定积分.....	163
§ 2. 有理函数的积分法.....	173

§ 3. 无理函数的积分法	177
§ 4. 三角函数的积分法	182
§ 5. 各种超越函数的积分法	188
§ 6. 函数的积分法的各种例子	191
第四章 定积分	194
§ 1. 定积分作为和的极限	194
§ 2. 利用不定积分计算定积分的方法	198
§ 3. 中值定理	208
§ 4. 广义积分	211
§ 5. 面积的算法	218
§ 6. 弧长的算法	221
§ 7. 体积的算法	223
§ 8. 旋转曲面表面积的算法	226
§ 9. 矩的算法, 重心的坐标	227
§ 10. 力学和物理学中的问题	229
§ 11. 定积分的近似算法	231
第五章 级数	234
§ 1. 数项级数, 同号级数收敛性的判别法	234
§ 2. 变号级数收敛性的判别法	245
§ 3. 级数的运算	250
§ 4. 函数项级数	252
§ 5. 幂级数	264
§ 6. 福里叶级数	275
§ 7. 级数求和法	281
§ 8. 利用级数求定积分之值	285
§ 9. 无穷乘积	286
§ 10. 斯特林格公式	293
§ 11. 用多项式逼近连续函数	299

第二編 多变量函数

第六章 多变量函数的微分法	297
§ 1. 多变量函数的极限, 连续性	297
§ 2. 偏导函数! 多变量函数的微分	309
§ 3. 隐函数的微分法	318
§	328

§ 7 多变量函数的极值	351
第七章 带参数的积分	360
§ 1. 带参数的常义积分	360
§ 2. 带参数的广义积分, 积分的一致收敛性	365
§ 3. 广义积分中的变量代换, 广义积分号下微分法及积分法	370
§ 4. 尤拉积分	376
§ 5. 福里叶积分公式	379
第八章 重积分和曲线积分	382
§ 1. <u>二重积分</u>	383
§ 2. 面积的算法	391
§ 3. 体积的算法	393
§ 4. 曲面面积算法	396
§ 5. 二重积分在力学上的应用	398
§ 6. 三重积分	401
§ 7. 利用三重积分计算体积法	405
§ 8. 三重积分在力学上的应用	409
§ 9. 二重和三重广义积分	413
§ 10. 多重积分	418
§ 11. 曲线积分	421
§ 12. 格林公式	429
§ 13. 曲线积分的物理应用	434
§ 14. 曲面积分	437
§ 15. 斯托克斯公式	442
§ 16. 奥斯特洛格拉德斯基公式	444
§ 17. 场论初步	449
答案	459

附 录

I 重要常数	568
II 表	568
1. 倒数, 平方根及立方根, 指数函数	568
2. 常用对数的尾数	569
3. 自然对数	569
4. 三角函数	571
5. 双曲函数	571
6. 阶乘及与其有关的函数	572
7. 加玛函数	572

第一編 单变量函数

第一章 分析引論

§ 1. 实数

1° 数学归纳法 为了証明某定理对任意的自然数 n 为真, 只須証明下面两点就够了: (1) 这定理对 $n=1$ 为真, (2) 設这定理对任何的一个自然数 n 为真, 則它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真。

2° 分割 假設分有理数为 A 和 B 两类, 使其滿足于下列条件: (1) 两类均非空集, (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类, (3) 属于 A 类 (下类) 的任一数小于属于 B 类 (上类) 的任何数, 这样的分类法称为分割。 (a) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 則分割 A/B 确定一个有理数。 (b) 若 A 类无最大数, 而 B 类亦无最小数。則分割 A/B 确定一个无理数。有理数和无理数統称为实数^①。

3° 绝对值 假若 x 为实数, 則用下列条件所确定的非負数 $|x|$, 称为 x 的绝对值:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0, \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y , 有以下的不等式成立:

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

4° 上确界和下确界 設 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合。若:

(1) 每一个 $x \in X$ ② 滿足不等式

$$x \geq m;$$

① 以后若沒有相反的附帶說明, 数这个字我們將理解为实数。

② 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X 。

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x' \in X$, 使

$$x' < m + \varepsilon,$$

則数 $m = \inf \{x\}$ 称为集合 X 的下确界。

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leq M,$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x'' \in X$, 使

$$x'' > M - \varepsilon,$$

則数 $M = \sup \{x\}$ 称为集合 X 的上确界。

若集合 X 下方无界, 則通常說

$$\inf \{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界, 則认为

$$\sup \{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差 設 $a (a \neq 0)$ 是被測的量的准确数值, 而 x 是这个量的近似值, 則

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被測的量的相对误差。

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半, 則說 x 有 n 位准确的数字。

利用数学归纳法求証下列等式对任何自然数 n 皆成立:

$$1. \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$3. \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

$$4. \quad 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

5. 設 $a^{[n]} = a(a-h) \cdots [a - (n-1)h]$ 及 $a^{[0]} = 1$ 。求証

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数, 由此推出牛顿的二项式公式。

6. 证明贝努里不等式:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 x_1, x_2, \dots, x_n 是符号相同且大于 -1 的数。

7. 证明若 $x > -1$, 则不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

为真, 且仅当 $x=0$ 时, 等号成立。

8. 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{当 } n > 1。$$

提示 利用不等式

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n=1, 2, \dots)。$$

9. 证明不等式

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{当 } n > 1。$$

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}。$$

11. 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 \sqrt{c} 的分割, 其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理数 b , 而 A 类包含所有其余的有理数。求证在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数。

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成: A 类包含所有的有理数 a , 而 $a^3 < 2$; B 类包含所有其余的有理数。证明在 A 类中无最大数, 而在 B 类中亦无最小数。

13. 作出适当的分割, 然后证明等式:

$$(a) \quad \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18};$$

$$(6) \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割。

15. 求証任何非空且下方有界的数集有下确界, 而任何非空且上方有界的数集有上确界。

16. 証明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$ (式中 m 及 n 为自然数, 且 $0 < m < n$) 的集合无最小及最大的元素。并求集合的上确界及下确界。

17. 有理数 r 满足不等式

$$r^2 < 2,$$

求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界。

18. 設 $\{-x\}$ 为数的集合, 这些数是与 $x \in \{x\}$ 符号相反的数。証明

$$(a) \inf\{-x\} = -\sup\{x\}; \quad (b) \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

19. 設 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 証明等式:

$$(a) \inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\};$$

$$(b) \sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

20. 設 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 且 $x \geq 0$ 及 $y \geq 0$ 。証明等式:

$$(a) \inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}; \quad (b) \sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}.$$

21. 求証不等式:

$$(a) |x-y| \geq \left| |x| - |y| \right|;$$

$$(b) |x+x_1+\cdots+x_n| \geq |x| - (|x_1|+\cdots+|x_n|).$$

解不等式:

$$22. |x+1| < 0.01.$$

$$23. |x-2| \geq 10.$$

$$24. |x| > |x+1|.$$

$$25. |2x-1| < |x-1|.$$

$$26. |x+2| + |x-2| \leq 12.$$

$$27. |x+2| - |x| > 1.$$

$$28. \left| |x+1| - |x-1| \right| < 1. \quad 29. |x(1-x)| < 0.05.$$

30. 証明恒等式

$$\left(\frac{x + |x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2} \right)^2 = x^2.$$

31. 当測量长度 10 厘米时, 绝对誤差为 0.5 毫米; 当測量距离 500 千米时, 绝对誤差等于 200 米。那种測量较为精确?

32. 設数

$$x = 2.3752$$

的相对誤差为 1%, 試求此数包含若干位准确数字?

33. 数

$$x = 12.125$$

包含 3 位准确数字。試求此数的相对誤差?

34. 矩形的边等于:

$$x = 2.50 \text{ 厘米} \pm 0.01 \text{ 厘米},$$

$$y = 4.00 \text{ 厘米} \pm 0.02 \text{ 厘米}.$$

这个矩形的面积 S 界于甚么范围内? 設其边长取平均值时, 矩形面积的绝对誤差 Δ 和相对誤差 δ 为何?

35. 物体的重量 $P = 12.59$ 克 ± 0.01 克, 其体积 $v = 3.2$ 厘米³ ± 0.2 厘米³。若对物体的重量和体积都取其平均值, 試求物体的比重, 并估計比重的绝对誤差和相对誤差。

36. 圆半径

$$r = 7.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

若取 $\pi = 3.14$, 則求出的圆面积的最小相对誤差为何?

37. 对直角平行六面体測得

$$x = 24.7 \text{ 米} \pm 0.2 \text{ 米};$$

$$y = 6.5 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米};$$

$$z = 1.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

这个平行六面体的体积 v 界于甚么范围内？若测量的各結果都取其平均值，則所求出平行六面体的体积可能有的絕對誤差和相對誤差為何？

38. 測量正方形的边 x ，此处 2 米 $< x < 3$ 米，应有多小的絕對誤差，才能使此正方形面积有可能精确到 0.001 米²？

39. 假定矩形每边的长皆不超过 10 米，为了使根据測量所計算出来的面积与原面积之差不超过 0.01 平方厘米，問測量矩形的边 x 与 y 时，許可的絕對誤差 Δ 的值多大？

40. 設 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相對誤差， $\delta(xy)$ 为数 xy 的相對誤差。求證

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)。$$

§ 2. 叙列的理論

1° 叙列的极限的概念 假設对于任何的 $\varepsilon > 0$ ，有数 $N = N(\varepsilon)$ ，使

$$\text{当 } n > N \text{ 时， } |x_n - a| < \varepsilon，$$

則称叙列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 有极限 a (或者說，收敛于 a)，亦即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a，$$

其中，

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0，$$

則称 x_n 为无穷小。

沒有极限的叙列，称为发散的。

2° 极限存在的准則

(1) 設

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c，$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c。$$

(2) 單調而且有界的叙列有极限。

(3) 哥西判別法 叙列 $\{x_n\}$ 的极限存在的必要而且充足的条件是：对于

任何的 $\varepsilon > 0$, 有数 $N = N(\varepsilon)$ 使当 $n > N$ 和 $P > 0$ 时 $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$ 。

3° 关于叙列的极限的基本定理 設

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在, 則有:

$$(1) \quad \text{若 } x_n \leq y_n, \text{ 則 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(4) \quad \text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0, \text{ 則 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

4° 数 e 叙列

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

有确定的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\dots$$

5° 无穷极限 符号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 有数 $N = N(E)$, 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n| > E,$$

6° 聚点 設已知叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 有子叙列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_k}, \dots$$

适合

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \xi,$$

則称数 ξ (或符号 ∞) 为已知叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 的聚点。

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点 (波尔查諾-外尔斯特拉斯原理)。若这个聚点是唯一的, 則它即为已知叙列的有穷极限。

叙列 x_n 的最小聚点 (有穷的或无穷的)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为下极限，而它的最大聚点

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n$$

称为此叙列的上极限。

等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n$$

为叙列 x_n 的(有穷或无穷)极限存在的必要而且充分的条件。

41. 設

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

即:对于任一个給定的 $\varepsilon > 0$, 求数 $N = N(\varepsilon)$ 使得

$$\text{在 } n > N \text{ 时, } |x_n - 1| < \varepsilon.$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
N					

42. 假若

$$(a) \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$(b) \quad x_n = \frac{2n}{n^2+1};$$

$$(c) \quad x_n = \frac{1}{n!};$$

$$(d) \quad x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n,$$

对于任何的 $\varepsilon > 0$, 求出数 $N = N(\varepsilon)$, 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n| < \varepsilon;$$

而証明 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 为无穷小(就是說,有极限值为 0)。

对应着上面四种情形,填下表:

ε	0.1	0.01	0.001
N				

43. 証明叙列

(a) $x_n = (-1)^n n$, (б) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, (B) $x_n = \lg(\lg n)$ ($n \geq 2$)

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有无穷极限 (即成为无穷大), 即: 对任意的 $E > 0$, 求数 $N = N(E)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$ 。

对应着上面的每一种情形填下表:

E	10	100	1000	10000
N					

44. 求証

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

无界, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它并不成为无穷大。

45. 用不等式表示下列各式:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$; (б) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$; (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 。

設 n 跑过自然数列, 求下列各式之值:

$$46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1}。 \quad 47. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})。$$

$$48. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n}{n+1}。 \quad 49. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}。$$

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1)。$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)。$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|。$$

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right]。$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right]。$$

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)。$$

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[2]{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}).$$

証明下列等式：

$$58. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

$$59. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

$$60. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$$

$$61. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

$$62. \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \text{ 若 } |q| < 1.$$

$$63. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

$$64. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1).$$

$$65. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$66. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

67. 当 n 充分大时, 下面的式子那个大些:

(a) $100n + 200$ 或 $0.01n^2$? (b) 2^n 或 n^{1000} ?

(B) 1000^n 或 $n!$?

68. 証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

提示 参問題 10.

69. 証明叙列

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

是单调增的, 且上方有界。而叙列

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

是单调减的, 且下方有界。由此推出这些叙列有公共的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = e.$$

提示 先作出比 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_1}{y_{n-1}}$ 并利用題 7 的不等式。

70. 証明

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

当指数 n 是甚么样的数值时, 表示式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

71. 設 p_n ($n=1, 2, \dots$) 为趋于 $+\infty$ 的任意数列, 而 q_n ($n=1, 2, \dots$) 为趋于 $-\infty$ 的任意数列。求証

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

72. 已知

△

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

求証
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

由此推出公式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$$

其中 $0 < \theta_n < 1$, 并計算数 e 准确到 10^{-5} 。

△ 73. 証明数 e 为无理数。

74. 証明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. 証明不等式

$$(a) \quad \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

式中 n 为任意的自然数。

$$(b) \quad 1 + a < e^a, \quad (1+a)^{\frac{1}{a}} < e$$

其中 a 为异于零的实数。

76. 求証

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \quad (a > 0),$$

式中 $\ln a$ 是取 $e=2.718\cdots$ 作底时, 数 a 的对数。

利用关于单调而且有界的数列的极限存在的定理, 証明以下各数列的收敛性:

$$77. \quad x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

式中 $p_i (i=0, 1, 2, \cdots)$ 是非负的整数, 从 p_1 起不大于 9。

$$78. \quad x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}.$$

$$(79) \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$80. \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

$$81. \quad x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \cdots$$

$$\cdots, \quad x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}, \quad \cdots$$

利用哥西判別法, 証明以下各数列的收敛性。

$$82. \quad x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n,$$

其中 $|a_k| < M \quad (k=0, 1, 2, \cdots)$ 且 $|q| < 1$ 。

$$83. \quad x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$84. \quad x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

$$85. \quad x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

提示 利用不等式 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n=2, 3, \cdots)$ 。

86. 若存在有数 C , 使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n=2, 3, \cdots),$$

則謂叙列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 有有界變差。

証明凡有有界變差的叙列是收斂的。

舉出一個收斂叙列而無有界變差的例子。

87. 試述“某叙列不滿足哥西准則”的意義。

88. 利用哥西判別法，証明叙列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

的發散性。

89. 証明若叙列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 收斂，則它的任何子叙列 x_{p_n} 也收斂且有同一的極限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

90. 証明若單調叙列的某一子叙列收斂，則此單調叙列本身是收斂的。

91. 証明，若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

92. 設 $x_n \rightarrow a$ ，則極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

是甚麼？

93. 証明收斂的數列是有界的。

94. 証明收斂的數列或達到其上確界，或達到其下確界，或兩者都達到。舉出這三類叙列的例子。

95. 証明趨近於 $+\infty$ 的數列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 必定達到其下確界。

求叙列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 的最大項，設：

$$96. x_n = \frac{n^2}{2^n} \circ \quad 97. x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n} \circ \quad 98. x_n = \frac{1000^n}{n!} \circ$$

求叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 的最小項, 若

$$99. x_n = n^2 - 9n - 100, \quad 100. x_n = n + \frac{100}{n} \circ$$

求叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 的 $\inf x_n, \sup x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, 設:

$$101. x_n = 1 - \frac{1}{n} \circ \quad 102. x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2} \circ$$

$$103. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} \circ$$

$$104. x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \circ$$

$$105. x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} \circ \quad 106. x_n = (-1)^n n \circ$$

$$107. x_n = -n[2 + (-1)^n] \circ \quad 108. x_n = n^{(-1)^n} \circ$$

$$109. x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2} \circ \quad 110. x_n = \frac{1}{n - 10.2} \circ$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, 設:

$$111. x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2\pi n}{3} \circ$$

$$112. x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4} \circ$$

$$113. x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4} \circ \quad 114. x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n \cdot (-1)^n}} \circ$$

$$115. x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3} \circ$$

求以下各叙列的聚点:

$$116. \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$$

$$117. 1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

$$118. \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$119. x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n.$$

$$120. x_n = \frac{1}{2} [(a+b) + (-1)^n (a-b)].$$

121. 試举出以已知数

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

作为聚点的数列的例子。

122. 試举出数列的例子, 对此数列而言, 已知数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

的所有各项皆为其聚点。又已知叙列还必有怎样的聚点?

123. 举出叙列的例子:

- (a) 沒有有限的聚点;
- (b) 有唯一有限的聚点, 但非收斂者;
- (c) 有无限多的聚点;
- (d) 以每一实数作为聚点。

124. 証明叙列 x_n 和 $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ ($n=1, 2, \dots$) 有相同的聚点。

125. 証明从有界的叙列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 中, 永远可选出收斂的子叙列 x_{p_n} ($n=1, 2, \dots$)。

126. 証明: 若叙列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 无界, 則存在有子叙列 x_{p_n} 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \infty.$$

127. 設叙列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 收斂, 而叙列 y_n ($n=1, 2, \dots$) 发散, 則能否断定关于叙列

$$(a) x_n + y_n;$$

$$(b) x_n y_n$$

的收斂性?

舉出適當的例子。

128. 設數列 x_n 和 y_n 發散 ($n=1, 2, \dots$)。可否斷定數列

$$(a) x_n + y_n;$$

$$(b) x_n y_n$$

也發散呢?

舉出適當的例子。

129. 設:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

及 y_n ($n=1, 2, \dots$) 為任意數列。能否斷定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0?$$

舉出適當的例子。

130. 設:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

是否由此可得出或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?

考慮例子

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}, y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} \quad (n=1, 2, \dots).$$

131. 證明:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

及

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

舉出在上面關係式中僅不等號成立的例子。

132. 設 $x_n \geq 0$ 和 $y_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$)。證明:

$$(a) \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \leq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \leq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

及

$$(6) \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \leq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \leq \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

举出在这些关系式中仅不等号成立的例子。

133. 証明：若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在，則对任何的叙列 $y_n (n=1, 2, \dots)$ ，

有：

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

及

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (x_n \geq 0)$$

134. 証明：若对于某叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ ，有任何的叙列 $y_n (n=1, 2, \dots)$ ，使下二等式中至少有一成立：

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

或

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad (x_n \geq 0)$$

則叙列 x_n 是收斂的。

135. 証明：若 $x_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1,$$

則叙列 x_n 是收斂的。

136. 証明：若叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 有界，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

則此叙列的聚点密布于下极限和上极限

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{和} \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

之間，即是說間隔 $[l, L]$ 中的任意一个数都是已知叙列的聚点。

137. 設数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 滿足条件

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n=1, 2, \dots)$$

証明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在。

138. 証明：若叙列 x_n 收斂，則算術平均值的叙列

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \quad (n=1, 2, \cdots)$$

也收斂，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n。$$

反之則結論不真，举例以明之。

139. 証明：若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty。$$

140. 証明：若叙列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 收斂且 $x_n > 0$ ，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n。$$

141. 証明：若 $x_n > 0 (n=1, 2, \cdots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}。$$

142. 証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e。$$

143. 証明：若

$$(a) \ y_{n+1} > y_n (n=1, 2, \cdots), \quad (b) \ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

$$(B) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \text{ 存在,}$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}。$$

144. 求：(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{a^n} \quad (a > 1);$

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lg n}{n}.$$

145. 証明：若 p 为自然数，則

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2},$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

146. 証明：級列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

收斂。

因此有公式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

式中 $C=0.577216\cdots$ 称为尤拉常数，且当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 。

147. 求：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

148. 数列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 是由下列各式

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n=3, 4, \cdots)$$

所确定。求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

149. 設 $a > 0$ 和 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 为由以下各式

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

所确定的数列。求証

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

150. 証明由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列 x_n 和 y_n ($n=1, 2, \dots$) 有公共的极限

$$\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(数 a 和 b 的算术-几何平均数)。

§ 3. 函数的概念

1° 函数的概念 若对于集合 $X = \{x\}$ 中的每一个 x , 有一个确定的实数 $y \in Y = \{y\}$ 与之对应, 则变量 y 称为变量 x 在已知变域 X 的单值函数 f , 并記为 $y = f(x)$ 。

集合 X 名为函数 $f(x)$ 的定义域或存在域; Y 称为这个函数的值域。在最简单的情形下, 集合 X 或为开区間 $(a, b): a < x < b$, 或为半开区間 $(a, b]: a < x \leq b$ 或 $[a, b): a \leq x < b$, 或为闭区間 (綫段) $[a, b]: a \leq x \leq b$, 其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 和 $+\infty$ 。

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y = f(x)$ 与之对应, 则 y 称为 x 的多值函数。

2° 反函数 若把 x 了解为满足方程式

$$f(x) = y$$

(式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 中之一固定数值)的任何数值, 则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数,

$$x = f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的反函数, 这个函数一般地說来是多值的。若函数 $y = f(x)$ 是严格地单調的, 即当 $x_2 > x_1$ 时, $f(x_2) > f(x_1)$ [或相应地 $f(x_2) < f(x_1)$], 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 为单值而且严格的单調函数。

求下列函数的存在域:

151. $y = \frac{x^2}{1+x}.$

152. $y = \sqrt{3x - x^2}.$

153. $y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

$$154. (a) y = \log(x^2 - 4),$$

$$(b) y = \log(x+2) + \log(x-2).$$

$$155. y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}.$$

$$156. y = \sqrt{\cos x^2}.$$

$$157. y = \log\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$$

$$158. y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}.$$

$$159. y = \arcsin \frac{2x}{1+x}.$$

$$160. y = \arccos(2 \sin x).$$

$$161. y = \log[\cos(\log x)].$$

$$162. y = (x - [x]) \sqrt{-\sin^2 \pi x}.$$

$$163. y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x).$$

$$164. y = \arcsin(1-x) + \log(\log x).$$

$$165. y = (2x)!$$

求下列函数的存在域和函数值域:

$$166. y = \sqrt{2+x-x^2}.$$

$$167. y = \lg(1-2 \cos x).$$

$$168. y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$169. y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right).$$

$$170. y = (-1)^x.$$

171. 在底为 $AC=b$ 和高为 $BD=h$ 的三角形 ABC 中(图 1) 内接一个高为 $NM=x$ 的矩形 $KLMN$ 。把矩形 $KLMN$ 的周长 P 及其面积 S 表为 x 之函数。

作函数 $P=P(x)$ 及 $S=S(x)$ 的图形。

172. 在三角形 ABC 中, 边 $AB=6$ 厘米, 边 $AC=8$ 厘米, 角 $BAC=x$ 。把边 $BC=a$ 和面积 $ABC=S$ 表为变量 x 的函数。作函数 $a=a(x)$ 及 $S=S(x)$ 的图形。

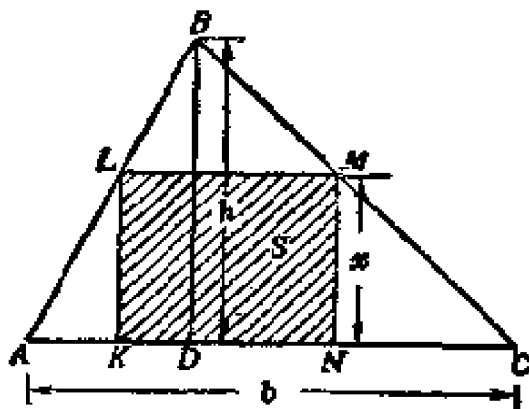


图 1

173. 在等腰梯形 $ABCD$ 中(图 2), 底为 $AD=a$, $BC=b(a>b)$,

高为 $HB=h$, 引直綫 $MN \parallel BH$, MN 与頂点 A 相距 $AM=x$ 。

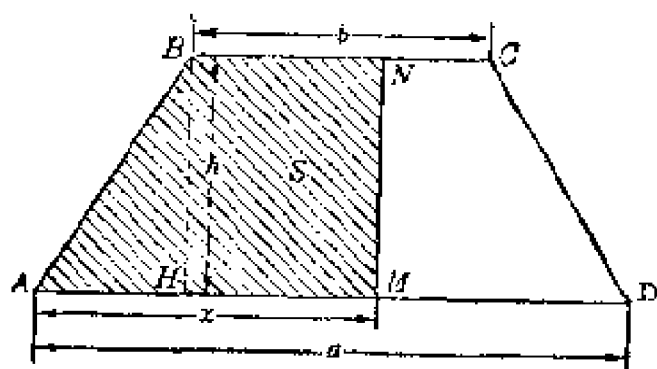


图 2

把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表为变量 x 的函数。作函数 $S=S(x)$ 的图形。

174. 在 Ox 軸上的閉区間 $0 \leq x \leq 1$ 内有等于 2 克的质量均匀地分布着, 而在此軸上的两

点 $x=2$ 和 $x=3$ 有集中的质量各 1 克。

設 $m(x)$ 是介于区間 $(-\infty, x)$ 的质量的值, 求函数 $m=m(x) (-\infty < x < +\infty)$ 的解析表示式。并作这个函数的图形。

175. 函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 用下列方法来定义:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{若 } x > 0; \\ 0, & \text{若 } x = 0; \\ -1, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

作这个函数的图形。証明

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

176. 函数 $y=[x]$ (数 x 的整数部分) 用下法定义: 若 $x=n+r$, 式中 n 为整数且 $0 \leq r < 1$, 則

$$[x] = n$$

作这个函数的图形。

177. 設:

$$y = \pi(x), \quad (x \geq 0)$$

表示不超过数 x 的素数的数目。对于自变数取 $0 \leq x \leq 20$ 的值, 作这个函数的图形。

函数 $y=f(x)$ 在怎样的集合 E_y 上映出集合 E_x , 若:

178. $y=x^2$ $E_x = \{1 \leq x \leq 2\}$ 。

179. $y = \lg x$, $E_x = \{10 < x < 1000\}$ 。

180. $y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} x$, $E_x = \{-\infty < x < +\infty\}$ 。

181. $y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}$, $E_x = \{0 < |x| \leq 1\}$ 。

182. $y = |x|$, $E_x = \{1 \leq |x| \leq 2\}$ 。

变量 x 跑过区间 $0 < x < 1$, 则变量 y 跑过怎样的集合, 若

183. $y = a + (b - a)x$ 。

184. $y = \frac{1}{1-x}$ 。

185. $y = \frac{x}{2x-1}$ 。

186. $y = \sqrt{x-x^2}$ 。

187. $y = \operatorname{ctg} \pi x$ 。

188. $y = x + [2x]$ 。

189. 設:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x,$$

求 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 。

190. 設 $f(x) = \lg x^2$,

求 $f(-1)$, $f(-0.001)$, $f(100)$ 。

191. 設 $f(x) = 1 + [x]$,

求 $f(0.9)$, $f(0.99)$, $f(0.999)$, $f(1)$ 。

192. 設 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{当 } -\infty < x \leq 0, \\ 2^x, & \text{当 } 0 < x < +\infty, \end{cases}$

求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 。

193. 設:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x},$$

求 $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$ 。

194. 設:

(a) $f(x) = x - x^3$;

(b) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$;

$$(B) f(x) = (x + |x|)(1 - x).$$

求使以下各式滿足的 x 值: (1) $f(x) = 0$; (2) $f(x) > 0$; (3) $f(x) < 0$.

195. 設: (a) $f(x) = ax + b$; (b) $f(x) = x^2$; (B) $f(x) = a^x$.

求 $\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

196. 設:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

証明 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0$.

197. 若 $f(0) = -2$, $f(3) = 5$, 求綫性整函数

$$f(x) = ax + b.$$

$f(1)$ 及 $f(2)$ 等于甚么 (綫性补插法)?

198. 若 $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, 求二次有理整函数:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

$f(-1)$ 及 $f(0.5)$ 等于甚么 (二次补插法)?

199. 設 $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$, $f(1) = -3$, $f(2) = 5$.

求三次有理整函数:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

200. 設 $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.

求形状为

$$f(x) = a + bc^x$$

的函数。

201. 証明: 对于綫性函数

$$f(x) = ax + b$$

若自变数的諸值 $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ 組成一等差級数, 則对应的函数值 $y_n = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 也組成一等差級数。

202. 証明: 对于指数函数

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

若自变数 $x = x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 的值組成一等差級数, 則对应的函数值 $y_n = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 組成一等比級数。

203. 設当 $0 < u < 1$ 函数 $f(u)$ 有定义。求下列函数的定义域:

$$(a) f(\sin x); \quad (b) f(\ln x); \quad (c) f\left(\frac{[x]}{x}\right).$$

204. 設:

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \quad (a > 0).$$

証明: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$

205. 設:

$$f(x) + f(y) = f(z).$$

求出 z , 若:

$$(a) f(x) = ax; \quad (b) f(x) = \frac{1}{x};$$

$$(c) f(x) = \arctg x \quad (|x| < 1); \quad (d) f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}.$$

求 $\varphi[\varphi(x)], \psi[\psi(x)], \varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$ 設:

$$\mathbf{206.} \quad \varphi(x) = x^2 \text{ 及 } \psi(x) = 2^x.$$

$$\mathbf{207.} \quad \varphi(x) = \operatorname{sgn} x \text{ 及 } \psi(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\mathbf{208.} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leq 0, \\ x & \text{当 } x > 0. \end{cases} \text{ 及 } \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leq 0 \\ -x^2 & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

209. 設:

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

求 $f[f(x)], f\{f[f(x)]\}.$

210. 設:

$$f_n(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n \text{ 次}}.$$

若

$$f(x) = \sqrt[n]{1+x^2}$$

求 $f_n(x)$ 。

211. 設:

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2,$$

求 $f(x)$ 。

212. 設:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

求 $f(x)$ 。

213. 設:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0)$$

求 $f(x)$ 。

証明下列各函数在所示間隔內是单調增函数:

$$214. f(x) = x^2 \quad (0 \leq x < +\infty).$$

$$215. f(x) = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$216. f(x) = \operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$217. f(x) = 2x + \sin x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

証明下列各函数在所示間隔內是单調減函数:

$$218. f(x) = x^2 \quad (-\infty < x \leq 0).$$

$$219. f(x) = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

$$220. f(x) = \operatorname{ctg} x \quad (0 < x < \pi).$$

221. 研究下列函数的单調性:

$$(a) f(x) = ax + b;$$

$$(b) f(x) = ax^2 + bx + c;$$

$$(r) f(x) = x^3;$$

$$(r) f(x) = \frac{ax+b}{cx+d};$$

$$(1) f(x) = a^x (a > 0).$$

222. 不等式能否逐項取对数?

223. 設 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单調增函数。証明, 若

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x),$$

則

$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)].$$

求反函数 $x = \varphi(y)$ 和它的存在域, 若

$$224. y = 2x + 3 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$225. y = x^2; \quad (a) \quad (-\infty < x \leq 0); \quad (b) \quad (0 \leq x < +\infty).$$

$$226. y = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1).$$

$$227. y = \sqrt{1-x^2}; \quad (a) \quad (-1 \leq x \leq 0); \quad (b) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

$$228. y = \operatorname{sh} x, \text{ 式中 } \operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$229. y = \operatorname{th} x, \text{ 其中 } \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

230.

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{若 } 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x, & \text{若 } 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

231. 函数 $f(x)$ 定义于对称区間 $(-l, l)$ 中, 且若

$$f(-x) = f(x),$$

則称 $f(x)$ 为偶函数; 若

$$f(-x) = -f(x),$$

則称 $f(x)$ 为奇函数。

确定下列各已知函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数:

$$(a) f(x) = 3x - x^3;$$

$$(b) f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2};$$

$$(b) f(x) = a^x + a^{-x} \quad (a > 0);$$

$$(r) f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$(л) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

232. 証明定义于对称区間 $(-l, l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 可以表示为偶函数与奇函数之和的形式。

233. 若存在有数 $T > 0$ (函数的周期——在广义的意义上!) 使对于一切被考虑的自变量 x 满足等式

$$f(x+nT) = f(x) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

則函数 $f(x)$ 称为周期函数。

說明下列各已知函数中哪些是周期函数, 并求它們的最小周期:

設:

$$(a) f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x;$$

$$(б) f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x;$$

$$(в) f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}; \quad (r) f(x) = \sin^2 x;$$

$$(л) f(x) = \sin x^2; \quad (e) f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x};$$

$$(ж) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x};$$

$$(з) f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2}).$$

234. 証明: 对于迪里黑里函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

任何有理数皆为其周期。

235. 証明定义于公共的集合上且周期是可公度的二个周期函数之和及其乘积也是周期函数。

236. 証明: 若对于函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 有等式 $f(x+T) =$

$=kf(x)$ 成立 (式中 k 和 T 为正的常数), 则 $f(x) = a^x \varphi(x)$ [式中 a 为常数, 而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数]。

§ 4. 函数的图形表示法

1° 要作函数 $y=f(x)$ 的图形可用下法来进行: (1) 确定函数的存在域 $X=\{x\}$; (2) 从 X 中选出充分密集的自变数值 x_1, x_2, \dots, x_n 并作出函数

$$y_i=f(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

的对应数值表; (3) 在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 并用线把它们连接起来, 此连线的性质就是可认为是许多中间点的位置。

2° 为了得到函数的正确图形, 应当研究这个函数的一般性质。

首先必须: (1) 解方程式 $f(x)=0$, 求出函数图形与 Ox 轴的交点 (函数值为零的点); (2) 确定使函数为正或为负时自变数的变域; (3) 尽可能地说明函数单调 (增或减) 的区间; (4) 研究当自变数无限趋近于函数存在域的边界点时函数的情况。

这一节里, 要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质, 如幂函数、指数函数、三角函数等。

利用这些性质, 不用作大量的计算工作, 立即可以画出许多函数的略图, 其他的图形有时就是这些最简单图形的组合 (和或乘积等等)。

237. 作出线性齐次函数

$$y=ax$$

当 $a=0, \frac{1}{2}, 1, 2, -1$ 时的图形。

238. 作出线性函数

$$y=x+b$$

当 $b=0, 1, 2, -1$ 时的图形。

239. 作出线性函数的图形:

$$(a) y=2x+3; \quad (b) y=2-0.1x; \quad (B) y=-\frac{x}{2}-1。$$

240. 铁的线膨胀系数 $\alpha=1.2 \times 10^{-6}$ 。在适当的尺度下作出

函数 $l=f(T) \quad (-40^\circ \leq T \leq 100^\circ)$

的图形, 其中 T 表温度 (以度計), l 表当温度为 T 时鉄棒的长。設当 $T=0^\circ$ 时, $l=100$ 厘米。

241. 二质点在数軸上运动, 第一质点在時間 $t=0$ 的时刻在原点左方 20 厘米处, 其速度为 $v_1=10$ 米/每秒; 第二质点当 $t=0$ 时在原点 0 之右方 30 厘米处。其速度为 $v_2=-20$ 米/每秒; 作出此二点运动方程的图形并求它們相遇的时刻和位置。

242. 作出二次有理整函数的图形(拋物綫):

(a) $y=ax^2$, 当 $a=1, \frac{1}{2}, 2, -1$;

(b) $y=(x-x_0)^2$, 当 $x_0=0, 1, 2, -1$;

(B) $y=x^2+c$, 当 $c=0, 1, 2, -1$ 。

243. 把二次三項式

$$y=ax^2+bx+c$$

化为下面的形状

$$y=y_0+a(x-x_0)^2,$$

作出它的图形。研究例子:

(a) $y=8x-2x^2$;

(b) $y=x^2-3x+2$ 。

(B) $y=-x^2+2x-1$;

(r) $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 。

244. 质点以初速度 $v_0=600$ 米/每秒沿与水平面成角 $\alpha=45^\circ$ 的方向射出。作出运动軌道的图形并求最大的升高及飞行的射程 (假定 $g \approx 10$ 米/每秒², 空气的阻力不計)。

作出高于二次的有理整函数的图形:

245. $y=x^3+1$ 。

246. $y=(1-x^2)(2+x)$ 。

247. $y=x^2-x^4$ 。

248. $y=x(a-x)^2(a+x)^3 \quad (a>0)$ 。

作出綫性分式函数的图形(双曲綫):

$$249. y = \frac{1}{x}.$$

$$250. y = \frac{1-x}{1+x}.$$

251. 把綫性分式函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0, c \neq 0).$$

化为下面的形式

$$y = y_0 + \frac{m}{x-x_0}$$

再作它的图形。

研究例子

$$y = \frac{3x+2}{2x-3}.$$

252. 气体当压力 $p_0=1$ 大气压时占有体积 $v_0=12$ 立方米。設气体的温度保持不变作出气体体积 v 随压力变化而变化的图形 (波义耳-馬瑞阿特定律)。

作下列有理分式函数的图形：

$$253. y = x + \frac{1}{x} \text{ (双曲綫)}.$$

$$254. y = x^2 + \frac{1}{x} \text{ (牛頓三次曲綫)}.$$

$$255. y = x + \frac{1}{x^2}.$$

$$256. y = \frac{1}{1+x^2} \text{ (箕舌綫)}.$$

$$257. y = \frac{2x}{1+x^2} \text{ (牛頓蛇形綫)}.$$

$$258. y = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$259. y = \frac{x}{1-x^2}.$$

$$260. y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

$$261. y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

$$262. y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}.$$

263. 把函数

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

化为下面的形状

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}$$

然后作出它的略图。

研究例子

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}。$$

264. 一质点与引力中心相距 x 。設当 $x=1$ 米时引力 $F=10$ 千克, 作出质点的引力 F 的绝对值的图形(牛頓定律)。

265. 根据梵德耳瓦斯定律 (Закон Ван-дер-Ваальса), 当温度不变时, 真实气体的体积 v 和它的压力 p 以关系式

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c$$

相連系。

設 $a=2$, $b=0.1$ 及 $c=10$, 作出函数 $p=p(v)$ 的图形。

作下列无理函数的图形:

266. $y = \pm \sqrt{-x-2}$ (抛物綫)。

267. $y = \pm x\sqrt{x}$ (半三次抛物綫)。

268. $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (橢圓)。

269. $y = \pm \sqrt{x^3-1}$ (双曲綫)。

270. $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 。 **271.** $y = \pm x\sqrt{100-x^2}$ 。

272. $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (蔓叶綫)。

273. $y = \pm \sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$ 。

274. 作幂函数

$$y = x^n$$

当

(a) $n=1, 3, 5$; (б) $n=2, 4, 6$

时的图形。

275. 作幂函数

$$y = x^n$$

当: (a) $n = -1, -3$; (б) $n = -2, -4$ 时的图形。

276. 作根式

$$y = \sqrt[n]{x}$$

当: (a) $n = 2, 4$; (б) $n = 3, 5$ 时的图形。

277. 設:

(a) $m = 2, k = 1$;

(б) $m = 2, k = 3$;

(в) $m = 3, k = 1$;

(г) $m = 3, k = 2$;

(д) $m = 3, k = 4$;

(e) $m = 4, k = 2$;

(ж) $m = 4, k = 3$ 。

作根式的图形

$$y = \sqrt[k]{\frac{1}{x^m}}$$

278. 作指数函数

$$y = a^x$$

当 $a = \frac{1}{2}, 1, 2, e, 10$ 时的图形。

279. 作复合指数函数

$$y = e^{y_1}$$

的图形, 設:

(a) $y_1 = x^2$; (б) $y_1 = -x^2$; (в) $y_1 = \frac{1}{x}$;

(г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; (д) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; (e) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$ 。

280. 作对数函数

$$y = \log_a x$$

当 $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$ 时的图形。

281. 作下列函数的图形：

$$(a) y = \ln(-x); \quad (b) y = -\ln x.$$

282. 設：

$$(a) y_1 = 1 + x^2;$$

$$(b) y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3;$$

$$(c) y_1 = \frac{1-x}{1+x}; \quad (r) y_1 = \frac{1}{x^2}; \quad (n) y_1 = 1 + e^x.$$

作出对数复合函数

$$y = \ln y$$

的图形。

283. 作函数 $y = \log_e 2$ 的图形。

284. 作函数

$$y = A \sin x$$

当 $A = 1, 10, -2$ 时的图形。

285. 作函数

$$y = \sin(x - x_0)$$

在 $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 时的图形。

286. 作函数

$$y = \sin nx$$

的图形。設 $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 。

287. 把函数

$$y = a \cos x + b \sin x$$

化为下面的形状

$$y = A \sin(x - x_0)$$

再作它的图形。研究例子： $y = 6 \cos x + 8 \sin x$ 。

作下列三角函数的图形：

$$288. y = \cos x_0$$

$$289. y = \operatorname{tg} x_0$$

$$290. y = \operatorname{ctg} x_0$$

$$291. y = \sec x_0$$

$$292. y = \csc x_0$$

$$293. y = \sin^2 x_0$$

$$294. y = \sin^3 x_0$$

$$295. y = \operatorname{ctg}^2 x_0$$

$$296. y = \sin x \cdot \sin 3x_0$$

$$297. y = \pm \sqrt{\cos x_0}$$

作下列函数的图形：

$$298. y = \sin x^2_0$$

$$299. y = \sin \frac{1}{x}_0$$

$$300. y = x \cos \frac{\pi}{x}_0$$

$$301. y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{x}_0$$

$$302. y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)_0$$

$$303. y = \pm \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\pi}{x}_0$$

$$304. y = \frac{\sin x}{x}_0$$

$$305. y = e^x \cos x_0$$

$$306. y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}_0$$

$$307. y = \frac{\cos x}{1+x^2}_0$$

$$308. y = \ln(\cos x)_0$$

$$309. y = \cos(\ln x)_0$$

$$310. y = e^{\frac{1}{\sin x}}_0$$

作下列反三角函数的图形：

$$311. y = \arcsin x_0$$

$$312. y = \arccos x_0$$

$$313. y = \operatorname{arctg} x_0$$

$$314. y = \operatorname{arcctg} x_0$$

$$315. y = \arcsin \frac{1}{x}_0$$

$$316. y = \arccos \frac{1}{x}_0$$

$$317. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}_0$$

$$318. y = \arcsin(\sin x)_0$$

$$319. y = \arcsin(\cos x)_0$$

$$320. y = \arccos(\cos x)_0$$

$$321. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)_0$$

$$322. y = \arcsin(2 \sin x)_0$$

$$323. \text{設:}$$

$$(a) \quad y_1 = 1 - \frac{x}{2};$$

$$(b) \quad y_1 = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$(B) \quad y_1 = \frac{1-x}{1+x};$$

$$(r) \quad y_1 = e^x.$$

作函数

$$y = \arcsin y_1$$

的图形。

324. 設:

$$(a) \quad y_1 = x^2;$$

$$(b) \quad y_1 = \frac{1}{x^2};$$

$$(B) \quad y_1 = \ln x;$$

$$(r) \quad y_1 = \frac{1}{\sin x}.$$

作函数

$$y = \arctg y_1$$

的图形。

325. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列各函数的图形:

$$(a) \quad y = -f(x); \quad (b) \quad y = f(-x); \quad (B) \quad y = -f(-x).$$

326. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列各函数的图形:

$$(a) \quad y = f(x - x_0);$$

$$(b) \quad y = y_0 + f(x - x_0);$$

$$(B) \quad y = f(2x);$$

$$(r) \quad y = f(kx + b) \quad (k \neq 0).$$

327. 作函数的图形:

$$(a) \quad y = 2 + \sqrt{1-x};$$

$$(b) \quad y = 1 - e^{-x};$$

$$(B) \quad y = \ln(1+x);$$

$$(r) \quad y = -\frac{\pi}{2} \arcsin(1+x);$$

$$(I) \quad y = 3 + 2 \cos 3x.$$

328. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

$$(a) \quad y = |f(x)|;$$

$$(b) \quad y = \frac{1}{2} [|f(x)| + f(x)];$$

$$(B) \quad y = \frac{1}{2} [|f(x)| - f(x)].$$

329. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

$$(a) \quad y = f^2(x); \quad (b) \quad y = \sqrt{f(x)}; \quad (B) \quad y = \ln f(x);$$

$$(r) \ y=f[f(x)]; \quad (I) \ y=\operatorname{sgn} f(x); \quad (e) \ y=[f(x)].$$

330. 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

$$(a) \ y=f(x)+g(x); \quad (b) \ y=f(x)g(x); \quad (B) \ y=f[g(x)].$$

利用图形的相加法, 作下列函数的图形:

$$\mathbf{331.} \ y=1+x+e^x, \quad \mathbf{332.} \ y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}.$$

$$\mathbf{333.} \ y=x+\sin x, \quad \mathbf{334.} \ y=x+\operatorname{arctg} x.$$

$$\mathbf{335.} \ y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x.$$

$$\mathbf{336.} \ y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x.$$

$$\mathbf{337.} \ y=\sin^4 x+\cos^4 x, \quad \mathbf{338.} \ y=|1-x|+|1+x|.$$

$$\mathbf{339.} \ y=|1-x|-|1+x|.$$

340. 作双曲线函数的图形:

$$(a) \ y=\operatorname{ch} x, \text{ 式中 } \operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x});$$

$$(b) \ y=\operatorname{sh} x, \text{ 式中 } \operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x});$$

$$(B) \ y=\operatorname{th} x, \text{ 式中 } \operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

利用图形的相乘法, 作下列函数的图形:

$$\mathbf{341.} \ y=x \sin x, \quad \mathbf{342.} \ y=x \cos x.$$

$$\mathbf{343.} \ y=x^2 \sin^2 x, \quad \mathbf{344.} \ y=\frac{\sin x}{1+x^2}.$$

$$\mathbf{345.} \ y=e^{-x^2} \cos 2x, \quad \mathbf{346.} \ y=x \operatorname{sgn}(\sin x).$$

$$\mathbf{347.} \ y=[x]|\sin \pi x|, \quad \mathbf{348.} \ y=\cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x).$$

349. 设:

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

作函数

$$y = f(x) f(a-x)$$

当: (1) $a=0$, (2) $a=1$, (3) $a=2$ 时的图形。

350. 作函数 $y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ 的图形。

作函数

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

的图形, 设:

351. $f(x) = x^2(1-x^2)$ 。

352. $f(x) = x(1-x)^2$ 。

353. $f(x) = \sin^2 x$ 。

354. $f(x) = \ln x$ 。

355. $f(x) = e^x \sin x$ 。

356. 设:

$$f(u) = \begin{cases} -1, & \text{若 } -\infty < u < -1; \\ u, & \text{若 } -1 \leq u \leq 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

作复合函数

$$y = f(u)$$

的图形, 其中 $u = 2 \sin x$ 。

357. 设:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ 和 } \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0; \\ x^2, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

作下列函数的图形:

(a) $y = \varphi[\varphi(x)]$;

(б) $y = \varphi[\psi(x)]$;

(в) $y = \psi[\varphi(x)]$;

(г) $y = \psi[\psi(x)]$ 。

358. 设:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1; \end{cases}$$

及

$$\psi(x) = \begin{cases} 2-x^2, & \text{若 } |x| \leq 2; \\ 2, & \text{若 } |x| > 2. \end{cases}$$

作函数: (a) $y = \varphi[\varphi(x)]$, (б) $y = \varphi[\psi(x)]$,
(в) $y = \psi[\varphi(x)]$, (г) $y = \psi[\psi(x)]$

的图形。

359. 由函数 $f(x)$ 定义于正数域 $x > 0$ 内, 把 $f(x)$ 延拓到负数域 $x < 0$ 内, 使所得的函数为: (1) 偶函数; (2) 奇函数。设:

- (a) $f(x) = 1 - x$; (б) $f(x) = 2x - x^2$;
(в) $f(x) = \sqrt{x}$; (г) $f(x) = \sin x$;
(д) $f(x) = e^x$; (e) $f(x) = \ln x$ 。

作出对应的函数图形。

360. 确定下列函数的图形对于什么垂直轴对称:

- (a) $y = ax^2 + bx + c$; (б) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$;
(в) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}$ ($0 < a < b$);
(г) $y = a + b \cos x$ 。

361. 确定下列函数的图形的对称中心:

- (a) $y = ax + b$; (б) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$;
(в) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$; (г) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$;
(д) $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ 。

362. 作周期函数的图形:

- (a) $y = |\sin x|$ 。 (б) $y = \operatorname{sgn} \cos x$ 。 (в) $y = f(x)$,

其中 $f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l} \right)$, 假设 $0 \leq x \leq 2l$ 和 $f(x+2l) \equiv f(x)$ 。

- (г) $y = |x| - 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ 。 (д) $y = (x)$ 。

此处 (x) 为从数 x 至与他最近的整数间的距离。

363. 证明若函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形对于二垂

直軸 $x=a$ 和 $x=b$ ($b>a$) 对称, 則函数 $f(x)$ 为周期函数。

364. 証明若函数 $y=f(x)$ ($-\infty<x<+\infty$) 的图形对于两点 $A(a, y_0)$ 和 $B(b, y_1)$ ($b>a$) 对称, 則函数 $f(x)$ 是綫性函数与周期函数的和。特别是, 若 $y_0=y_1$, 則函数 $f(x)$ 是周期函数。

365. 証明: 若函数 $y=f(x)$ ($-\infty<x<+\infty$) 的图形对于点 $A(a, y_0)$ 和直綫 $x=b$ ($b\neq a$) 成对称, 則函数 $f(x)$ 为周期函数。

366. 設当 $0\leq x\leq 1$ 时, $f(x+1)=2f(x)$ 及 $f(x)=x(1-x)$, 作函数

$$y=f(x) \quad (-\infty<x<+\infty)$$

的图形。

367. 設当 $0\leq x\leq \pi$ 时 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ 且 $f(x)=0$ 。作函数 $y=f(x)$ ($-\infty<x<+\infty$) 的图形。

368. 作函数 $y=y(x)$ 的图形, 設:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad x=y-y^3; & \text{(б)} \quad x=\frac{1-y}{1+y^3}; \\ \text{(в)} \quad x=y-\ln y; & \text{(г)} \quad x^2=\sin y. \end{array}$$

369. 作出下列用参数表示的各函数的图形, 設:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad x=1-t, \quad y=1-t^2; & \\ \text{(б)} \quad x=t+\frac{1}{t}, \quad y=t+\frac{1}{t^2}; & \\ \text{(в)} \quad x=10\cos t, \quad y=\sin t \text{ (橢圓)}; & \\ \text{(г)} \quad x=\operatorname{ch} t, \quad y=\operatorname{sh} t \text{ (双曲綫)}; & \\ \text{(д)} \quad x=5\cos^2 t, \quad y=3\sin^2 t; & \\ \text{(e)} \quad x=2(t-\sin t), \quad y=2(1-\cos t) \text{ (摆綫)}; & \\ \text{(ж)} \quad x=t+\sqrt{t}, \quad y=\sqrt{t+1}, \quad (t>0). & \end{array}$$

370. 作下列隱函数的图形:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad x^2+xy+y^2=1 \text{ (橢圓)}; & \\ \text{(б)} \quad x^3+y^3-3xy=0 \text{ (笛卡尔叶形綫)}; & \end{array}$$

$$(B) \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \text{ (拋物綫)};$$

$$(r) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \text{ (內摆綫)}; \quad (\lambda) \sin x = \sin y;$$

$$(e) \cos(\pi x^2) = \cos(\pi y); \quad (\kappa) x^y = y^x (x > 0, y > 0);$$

$$(3) x - |x| = y - |y|.$$

371. 在极坐标 (r, φ) 系中作出函数 $r = r(\varphi)$ 的图形, 設:

$$(a) r = \varphi \text{ (阿基米德螺綫)}; \quad (6) r = \frac{\pi}{\varphi} \text{ (双曲螺綫)};$$

$$(B) r = \frac{\varphi}{\varphi + 1} \quad (0 \leq \varphi < +\infty);$$

$$(r) r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}} \text{ (对数螺綫)};$$

$$(\lambda) r = 2(1 + \cos \varphi) \text{ (心脏形綫)};$$

$$(e) r = 10 \sin 3\varphi \text{ (三瓣玫瑰綫)};$$

$$(\kappa) r^2 = 36 \cos 2\varphi \text{ (貝努里双紐綫)};$$

$$(3) \varphi = \frac{r}{r-1} (r > 1); \quad (H) \varphi = 2\pi \sin r.$$

372. 作函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图形, 以求方程式

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

的近似解。

用图解法解下列方程式:

$$373. x^3 - 4x - 1 = 0.$$

$$374. x^4 - 4x + 1 = 0.$$

$$375. x = 2^{-x}.$$

$$376. \lg x = 0.1x.$$

$$377. 10^x = x^2.$$

$$378. \operatorname{tg} x = x (0 \leq x \leq 2\pi).$$

用图解法以解下列方程組:

$$379. x + y^2 = 1, 16x^2 + y = 4.$$

$$380. x^2 + y^2 = 100, y = 10(x^2 - x - 2).$$

§ 5. 函数的极限

1° 函数的有界性 設存在有某两数 m 和 M , 使得

当 $x \in (a, b)$ 时, $m < f(x) < M$,

則称函数 $f(x)$ 在这区間 (a, b) 上为有界的。

数 $m_0 = \inf_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区間 (a, b) 上的下确界, 而数 $M_0 = \sup_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区間 (a, b) 上的上确界。

差 $M_0 - m_0$ 称为函数在区間 (a, b) 上的振幅。

2° 函数在某一点的极限 符号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad (1)$$

表示对于任一个数 $\varepsilon > 0$, 都存在有数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于满足条件式 $0 < |x - a| < \delta$, 并使 $f(x)$ 有意义的一切 x , 有下列不等式成立:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

函数的极限 (1) 存在的必要而且充分的条件是: 对于每一个叙列 $x_n \rightarrow a (n=1, 2, \dots)$, 下面的等式都成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A,$$

有两个著名的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

哥西判别法。函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在, 当而且仅当, 对于每一个 $\varepsilon > 0$, 都能找得着 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得, 只要是

$$0 < |x' - a| < \delta \text{ 和 } 0 < |x'' - a| < \delta,$$

就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

式中 x' 和 x'' 是属于函数 $f(x)$ 的定义域內的。

3° 单側的极限 若

$$\text{当 } 0 < a - x < \delta(\varepsilon) \text{ 时, 有 } |A' - f(x)| < \varepsilon,$$

則称数 A' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限:

$$A' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0),$$

同样, 若 当 $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $|A'' - f(x)| < \varepsilon$,

則称数 A'' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限:

$$A'' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$$

函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的必要而且充分的条件为:

$$f(a-0) = f(a+0)。$$

4° 无穷极限 符号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 只要是

$$0 < |x - a| < \delta(E), \text{ 則有 } |f(x)| > E。$$

5° 子列极限 若对于某叙列 $x_n \rightarrow a$ 有等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B,$$

則称数(或符号 ∞) B 为函数 $f(x)$ 在 a 点的子列极限(有穷的或无穷的)。

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 和 } \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

来表示, 分別称为函数 $f(x)$ 在 a 点的下极限和上极限。

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限(有穷的或无穷的)的必要而且充分的条件。

381. 函数 $f(x)$ 由下面的条件所定义:

若 $x = \frac{m}{n}$, 則 $f(x) = n$,

式中 m 和 n 为互质的整数, 且 $n > 0$;

若 x 为无理数, 則

$$f(x) = 0。$$

証明此函数在每一点 x 为有穷的, 但并非有界的(即在这点的任何邻域中是无界的)。

382. 若函数 $f(x)$ 在: (a) 开区間, (b) 閉区間內的每一点确定而有界, 則此函数在这給定的区間内或对应的閉区間内是否为有界的?

举出适当的例子。

383. 証明函数

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

在間隔 $-\infty < x < +\infty$ 中是有界的。

384. 証明函数

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的, 但当 $x \rightarrow 0$ 时不成为无穷大。

385. 研究函数 $f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$ 在区间 $0 < x < \varepsilon$ 内的有界性。

386. 証明函数

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

在域 $0 \leq x < +\infty$ 内有下确界 $m=0$ 和上确界 $M=1$ 。

387. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调上升, 则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于甚么?

求函数的下确界和上确界:

388. $f(x) = x^2$ 在 $(-2, 5)$ 内。

389. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内。

390. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内。

391. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内。

392. $f(x) = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内。

393. $f(x) = \sin x + \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内。

394. $f(x) = 2^x$ 在 $(-1, 2)$ 内。

395. $f(x) = [x]$: (a) 在 $(0, 2)$ 内, (б) 在 $[0, 2]$ 内。

396. $f(x) = x - [x]$ 在 $[0, 1]$ 内。

397. 求函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间内的振幅:

(a) $(1, 3)$; (б) $(1.9, 2.1)$;

(в) $(1.99, 2.01)$; (г) $(1.999, 2.001)$ 。

398. 求函数

$$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

在下列区间的振幅:

$$(a) \quad (-1, +1);$$

$$(b) \quad (-0.1, 0.1);$$

$$(r) \quad (-0.01, 0.01);$$

$$(r) \quad (-0.001, 0.001)。$$

399. 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的下确界和上确界。

证明若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于 (a, b) 内的函数, 则

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2]$$

及

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2]。$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子, 使它们在最后的二关系式中是: (a) 等式的情形, (b) 不等式的情形。

400. 设函数 $f(x)$ 定义于域 $[a, +\infty)$ 内, 并且在每一个闭区间 $[a, b]$ 上是有界的。假定

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$$

及

$$M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)。$$

作函数 $y = m(x)$ 和 $y = M(x)$ 的图形, 设

$$(a) \quad f(x) = \sin x,$$

$$(b) \quad f(x) = \cos x。$$

401. 利用 « ε — δ » 论证法, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4。$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
δ					

402. 以 « E — δ » 的说法, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty。$$

填下表:

N	10	100	1000	10000
δ					

403. 利用不等式表示下列各式:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$; (б) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$; (в) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ 。

举出适当的例子。

利用不等式表示下列各式:并举出适当的例子:

404. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$; (б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$; (в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ 。

405. (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; (б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$;

(в) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$; (г) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$;

(д) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$; (е) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$;

(ж) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$; (з) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$;

(и) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ 。

406. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; (б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$;

(в) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; (г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$;

(д) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; (е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;

(ж) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$; (з) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

(и) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。

407. 命 $y = f(x)$ 。利用不等式表示下列各情况:

(a) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b-0$; (б) 当 $x \rightarrow a-0$ 时, $y \rightarrow b-0$;

(в) 当 $x \rightarrow a+0$ 时, $y \rightarrow b-0$; (г) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b+0$;

(д) 当 $x \rightarrow a-0$ 时, $y \rightarrow b+0$; (е) 当 $x \rightarrow a+0$ 时, $y \rightarrow b+0$;

(ж) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b-0$; (з) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b-0$;

(и) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b-0$; (к) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b+0$;

(Л) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b+0$; (М) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b+0$ 。
举出适当的例子。

408. 設:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

式中 $a_i (i=0, 1, \cdots, n)$ 为实数。

証明 $\lim_{x \rightarrow \infty} |P(x)| = +\infty$ 。

409. 設:

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ 。

証明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{若 } n > m; \\ -\frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } n = m; \\ 0, & \text{若 } n < m. \end{cases}$$

410. 設:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多項式, 且

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

下式有什么可能的值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}?$$

求下列各式之值:

$$411. \quad (\text{a}) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad (\text{б}) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(\text{B}) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

$$412. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

$$413. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^3 + x^5}.$$

$$414. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (m \text{ 与 } n \text{ 为自然数}).$$

$$415. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$$

$$416. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

$$417. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

$$418. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}.$$

$$419. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$$

$$420. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$$

$$421. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}.$$

$$422. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}.$$

$$423. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}.$$

$$424. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}.$$

$$425. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为自然数}).$$

$$426. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} \quad (n \text{ 表自然数}).$$

$$427. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2} \quad (n \text{ 表自然数}).$$

$$428. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为自然数}).$$

$$429. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right].$$

$$430. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right].$$

提示 参閱題 2。

$$431. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}.$$

$$432. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right)。$$

提示 参閱題 3。

$$433. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}。$$

434. 把由拋物綫 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, Ox 軸及直綫 $x = a$ 所圍成的曲边三角形 OAM (图 3) 的面积, 当作以 $\frac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和当 $n \rightarrow \infty$ 的极限值, 求此面积。

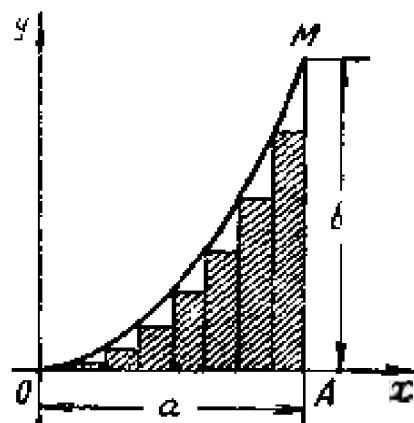


图 3

求极限:

$$435. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}。$$

$$436. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}。$$

$$437. \lim_{x \rightarrow +} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}。 \quad 438. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}。$$

$$439. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}。$$

$$440. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9}。$$

$$441. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}。 \quad 442. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}。$$

$$443. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}。$$

$$444. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n \text{ 为整数})。$$

$$445. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}.$$

$$446. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2}. \quad 447. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}.$$

$$448. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}. \quad 449. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}.$$

$$450. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}}.$$

$$451. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)}.$$

$$452. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$$

$$453. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 表整数}).$$

454. 設 $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 又 m 表整数, 求証:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

求下列的极限:

$$455. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 表整数}).$$

$$456. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.$$

$$457. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x].$$

$$458. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}).$$

$$459. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x).$$

$$460. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right).$$

$$461. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}).$$

$$462. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}).$$

$$463. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$$

$$464. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$$

$$465. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+\alpha_1) \cdots (x+\alpha_n)} - x].$$

$$466. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} \quad (n \text{ 表自然数}).$$

$$467. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} \quad (n \text{ 表自然数}).$$

468. 設二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的系数 a 趋于零, 系数 b 与 c 为常数, 且 $b \neq 0$, 試研究此二次方程式之二根 x_1 及 x_2 的性质。

469. 从条件:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$$

求常数 a 和 b 。

470. 从条件:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1) = 0$$

和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2 x - b_2) = 0$

求常数 a_i 和 b_i ($i=1, 2$)。

求下列的极限:

$$471. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

$$472. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

$$473. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$$

$$474. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$475. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$476. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

$$477. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$478. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}. \quad 479. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$$

$$480. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

481. 証明等式:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a;$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a;$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \left(a \neq \frac{2n-1}{2} \pi; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).$$

求下列的极限:

$$482. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$

$$483. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$$

$$484. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$$

$$485. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}.$$

$$486. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}.$$

$$487. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a}.$$

$$488. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$$

$$489. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}.$$

$$490. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg} a}{x^2}.$$

$$491. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctg} a}{x^2}.$$

$$492. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}.$$

$$493. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}.$$

$$494. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

$$495. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}.$$

$$496. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}.$$

$$497. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}.$$

$$498. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}.$$

$$499. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

$$500. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

$$501. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}, \quad 502. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$$

$$503. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}.$$

$$504. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$$

$$505. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

$$506. \quad (a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$$

$$507. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^x.$$

$$508. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{1-x}}.$$

$$509. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} \right).$$

$$510. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$511. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$512. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}.$$

$$513. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$514. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}.$$

$$515. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b+a}{x-a} \right)^x.$$

$$516. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0).$$

$$517. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot^2 x}.$$

$$518. \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}.$$

$$519. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$520. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$$

$$521. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$522. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$523. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$524. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$525. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$526. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$$

$$527. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n.$$

$$528. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

$$529. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$530. \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x].$$

$$531. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$532. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x].$$

$$533. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}.$$

$$534. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right).$$

$$535. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}.$$

$$536. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}.$$

$$537. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2\log x}{h^2} \quad (x > 0).$$

$$538. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx}.$$

$$539. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$540. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right). \quad 541. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0).$$

$$542. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0). \quad 543. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$544. \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}. \quad 545. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$546. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right). \quad 547. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}.$$

$$548. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} \quad (a > 0). \quad 549. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0).$$

$$550. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} \quad (a > 0).$$

$$551. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$$

$$552. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0).$$

$$553. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \quad (x > 0).$$

$$554. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1 + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$555. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$556. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

$$557. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)。$$

$$558. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0)。$$

$$559. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \quad (a > 0, b > 0)。$$

$$560. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \quad (a > 0)。$$

$$561. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-3^x)}{\ln(1-2^x)}。 \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}。$$

$$562. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)。$$

$$563. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg_x 2。$$

564. 証明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0)。$$

565. 証明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg_a x}{x^{\frac{1}{a}}} = 0 \quad (a > 1, \varepsilon > 0)。$$

求下列的极限:

$$566. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}。$$

$$567. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}。$$

$$568. \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2) \ln(x+2) - 2(x+1) \ln(x+1) + x \ln x]。$$

$$569. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln\left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}}\right) \right] \quad (a > 1)。$$

$$570. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right).$$

$$571. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}.$$

$$572. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

$$573. \lim_{x \rightarrow 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

$$574. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}.$$

$$575. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$576. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)} \quad (\text{参閱題 340}).$$

$$577. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch} x}.$$

$$578. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x).$$

$$579. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}.$$

$$580. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^3}.$$

$$581. \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \sin \frac{1-x}{1+x}.$$

$$582. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \cos (\sqrt{x^2+x} - x).$$

$$583. \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

$$584. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$585. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{h}.$$

$$586. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(1+x) - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1-x)}.$$

$$587. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right].$$

$$588. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

$$589. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right).$$

$$590. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\cos e(n\sqrt{1+n^2})}$$

$$591. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$592. \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x.$$

$$593. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x); (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x).$$

$$594. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}).$$

$$595. (a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}; (b) \lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}.$$

$$596. (a) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}; (b) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

$$597. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}; (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$$

598. 証明:

$$(a) \text{ 当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } \frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0;$$

$$(b) \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } \frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0.$$

599. 証明:

$$(a) \text{ 当 } x \rightarrow -0 \text{ 时, } 2^x \rightarrow 1-0;$$

$$(b) \text{ 当 } x \rightarrow +0 \text{ 时, } 2^x \rightarrow 1+0.$$

$$600. \text{ 設 } f(x) = x + [x^2], \text{ 求 } f(1), f(1-0), f(1+0).$$

601. 設 $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$, 求 $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ ($n=0, \pm 1, \dots$)。

求:

$$\mathbf{602.} \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}.$$

$$\mathbf{603.} \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

$$\mathbf{604.} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

$$\mathbf{605.} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}).$$

$$\mathbf{606.} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n \text{ 个}}.$$

607. 設 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = A$ 及 $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$, 則由此是否可推出

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x)) = B?$$

研究这个例子: 当 $x = \frac{p}{q}$ (其中 p 与 q 是互质的整数) 时, $\varphi(x) = \frac{1}{q}$; 当 x 为无理数时, $\varphi(x) = 0$; 当 $x \neq 0$ 时, $\psi(x) = 1$; 当 $x = 0$ 时, $\psi(x) = 0$; 并且 $x \rightarrow 0$ 。

608. 証明哥西定理: 若函数 $f(x)$ 定义于区間 $(a, +\infty)$ 上, 且在每一个有穷的区間 (a, b) 內是有界的, 則

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)],$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq c > 0),$$

假定在等式右端的极限都存在。

609. 証明: 若 (1) 函数 $f(x)$ 定义于域 $x > a$ 內; (2) 在每一个有限的域 $a < x < b$ 內是有界的; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$, 則

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

610. 証明: 若 (1) 函数 $f(x)$ 定义于域 $x > a$ 內; (2) 在每一个有限的域 $a < x < b$ 內是有界的; (3) 存在着有限的或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l,$$

則

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

611. 証明: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x;$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$

612. 証明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi e/n!) = 2\pi.$

提示 利用 72 題的公式(*)。

作下列函數的图形:

613. (a) $y = 1 - x^{100};$

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2^n}) \quad (-1 \leq x \leq 1).$

614. (a) $y = \frac{x^{100}}{1 + x^{100}} \quad (x \geq 0);$

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n} \quad (x \geq 0).$

615. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0).$

616. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$ **617.** $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x \geq 0).$

618. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0).$

619. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} \quad (x \geq 0).$

620. (a) $y = \sin^{1000} x;$ (b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2^n} x.$

621. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} \quad (x \geq 0).$

$$622. y = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x. \quad 623. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}.$$

$$624. y = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}.$$

$$625. y = \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x} \quad (x > 0).$$

626. 若有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则直线 $y = kx + b$ 称为曲线 $y = f(x)$ 的(斜)渐近线。利用这方程式推出渐近线存在的必要而且充分的条件。

627. 求下列曲线的渐近线并作其图形:

$$(a) y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2};$$

$$(b) y = \sqrt{x^2 + x};$$

$$(B) y = \sqrt[3]{x^2 - x^2};$$

$$(r) y = \frac{xe^x}{e^x - 1};$$

$$(r) y = \ln(1 + e^x);$$

$$(e) y = x + \arccos \frac{1}{x};$$

$$(ж) y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}.$$

求下列极限:

$$628. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right].$$

$$629. \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n})] \quad \text{若 } |x| < 1.$$

$$630. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right).$$

$$631. \text{ 令 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

其中 $\psi(x) > 0$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_m \rightarrow 0$ ($m = 1, 2, \dots$), 换言之, 当 $m = 1, 2, \dots$ 且 $n > N(\varepsilon)$ 时 $|a_{mn}| < \varepsilon$ 。

証明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \cdots + \varphi(\alpha_{nn})] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \cdots + \psi(\alpha_{nn})], \quad (1)$$

此处假定等式(1)右端的极限存在。

利用上边的定理,求

$$632. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right), \quad 633. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right),$$

$$634. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right) \quad (a > 0),$$

$$635. \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right), \quad 636. \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}.$$

637. 叙列 x_n 由以下的等式所給定:

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \quad \cdots (a > 0).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

638. 函数叙列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

用以下的方法来确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

639. 函数叙列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

用下面的方法来确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

640. 为了求克卜勒方程式 (Уравнение Кеплера)

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (1)$$

的近似解, 假设

$$x_0 = m, \quad x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \quad \dots, \quad x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \quad \dots$$

(逐次逼近法)

证明有 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 且数 ξ 为方程式 (1) 的唯一的根。

641. 若 $\omega_h f$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $|x - \xi| \leq h (h > 0)$ 上的振幅, 则数

$$\omega_0(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \omega_h(f)$$

称为函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振幅。

求下列函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的振幅:

$$(a) \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}; \quad (b) \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$(n) \quad f(x) = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right); \quad (r) \quad f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x};$$

$$(л) \quad f(x) = \frac{|\sin x|}{x}; \quad (e) \quad f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

$$(ж) \quad f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}.$$

642. 命

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

证明: 对于满足条件 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 的任何数 α , 可以选出数列 $x_n \rightarrow 0 (n=1, 2, \dots)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

643. 设: (a) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x};$

$$(b) \quad f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x};$$

$$(B) f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2 \frac{1}{x}}.$$

求 $l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 和 $L = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

644. 設:

$$(a) f(x) = \sin x; \quad (b) f(x) = x^2 \cos^2 x;$$

$$(B) f(x) = 2^{\sin x^2};$$

$$(r) f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x} \quad (x \geq 0).$$

求 $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 和 $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶

1° 符号

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x))$$

表示函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $x \rightarrow a$ 的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大, 就是說

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (0 < |k| < +\infty).$$

特别是, 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

則称 $\varphi(x)$ 为对于无穷小 x 是 n 阶无穷小。

仿此, 若当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

則称 $\varphi(x)$ 为对于无穷大 x 是 n 阶无穷大。

2° 符号

$$\varphi(x) = o(\psi(x))$$

表示当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小, 或函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大, 就是說

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3° 若当 $x \rightarrow a$ 时, 无穷小函数 $\varphi(x)$ 的阶 (在广义的意义上) 不低于某一正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶 [或无穷大函数 $\varphi(x)$ 的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶], 即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} = k \quad (0 \leq k < +\infty),$$

则约定写为:

$$\varphi(x) = O(\psi(x)).$$

4° 若

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$$

则称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时为等价的 [$\varphi(x) \sim \psi(x)$]. 例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:

$$\sin x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x;$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0);$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}; \quad \ln(1+x) \sim x.$$

一般地说来, $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$ 。

当求两个函数比的极限时, 已知函数可用其等价的函数来代换。

645. 把圆心角 $AOB = x$ (图 4) 当作 1 阶无穷小, 求下列各量无穷小的阶: (a) 弦 AB ; (б) 矢 CD ; (в) 扇形 AOB 的面积; (г) 三角形 ABC 的面积; (д) 梯形 ABB_1A_1 的面积; (е) 弓形 ABC 的面积。

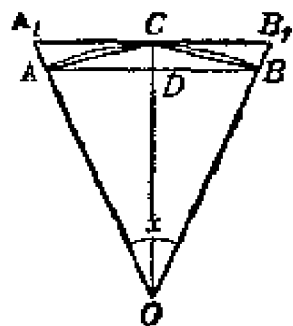


图 4

646. 命 $o(f(x))$ 为当 $x \rightarrow a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数, 且 $O(f(x))$ 为 $x \rightarrow a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶 (在广义的意义上) 的任意无穷大函数, 其中 $f(x) > 0$ 。

证明: (a) $o\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$;

(б) $O\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$;

(в) $o\{O[f(x)]\} = o[f(x)]$;

$$(r) \quad O\{O[f(x)]\} = O[f(x)];$$

$$(d) \quad O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)];$$

$$(e) \quad O[f(x)] \cdot O[g(x)] = O[f(x)g(x)].$$

647. 設 $x \rightarrow 0$ 和 $n > 0$ 。証明

$$(a) \quad CO(x^n) = O(x^n) \quad (C \text{ 为常数});$$

$$(b) \quad O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n < m);$$

$$(B) \quad O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

648. 設 $x \rightarrow +\infty$ 和 $n > 0$ 。証明

$$(a) \quad CO(x^n) = O(x^n);$$

$$(b) \quad O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n > m);$$

$$(B) \quad O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

649. 証明符号 \sim 具有下列性质: (1) 反射性: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; (2) 对称性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 則 $\psi(x) \sim \varphi(x)$; (3) 傳遞性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$ 及 $\psi(x) \sim \chi(x)$, 則 $\varphi(x) \sim \chi(x)$ 。

650. 設 $x \rightarrow 0$ 。証明下列等式:

$$(a) \quad 2x - x^2 = O^*(x); \quad (b) \quad x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}});$$

$$(B) \quad x \sin \frac{1}{x} = O(|x|); \quad (r) \quad \ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right) \quad (\varepsilon > 0);$$

$$(d) \quad \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[3]{x};$$

$$(e) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = O(1); \quad (\pi) \quad (1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

651. 設 $x \rightarrow +\infty$ 。証明下列等式:

$$(a) \quad 2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3); \quad (b) \quad \frac{x+1}{x^3+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$(B) \quad x + x^2 \sin x = O(x^2); \quad (r) \quad \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(d) \quad \ln x = O(x^\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0); \quad (e) \quad x^2 e^{-x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(ж) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x};$$

$$(з) x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2.$$

652. 証明当 x 充分大时, 下边的不等式成立:

$$(a) x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3;$$

$$(б) \ln^{1000} x < \sqrt{x}; \quad (в) x^{10} e^x < e^{2x}.$$

653. 設 $x \rightarrow 0$. 选出下列函数的形如 cx^n (c 为常数) 的主部, 并求其对于无穷小变数 x 的阶:

$$(a) 2x - 3x^3 + x^5;$$

$$(б) \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x};$$

$$(в) \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}; \quad (г) \operatorname{tg} x - \sin x.$$

654. 設 $x \rightarrow 0$, 証明无穷小

$$(a) f(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad (б) f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

无论对任何的 n , 也不能与无穷小 x^n ($n > 0$) 相比較。即, 对于如此的 n , 不能有等式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = k$, 式中 k 为异于零的有限量。

655. 設 $x \rightarrow 1$. 选出下列函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部, 并求其对于无穷小 $x-1$ 的阶:

$$(a) x^3 - 3x + 2;$$

$$(б) \sqrt[3]{1-\sqrt{x}};$$

$$(в) \ln x;$$

$$(г) e^x - e;$$

$$(д) x^x - 1.$$

656. 設 $x \rightarrow +\infty$. 选出下列函数的形如 Cx^n 的主部, 并求其对于无穷大 x 的阶:

$$(a) x^2 + 100x + 10000; \quad (б) \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1};$$

$$(в) \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}; \quad (г) \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

657. 設 $x \rightarrow +\infty$. 选出下列函数的形如 $O\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 的主部, 并

求其对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 的阶:

$$(a) \frac{x+1}{x^4+1};$$

$$(b) \sqrt{x+1} - \sqrt{x};$$

$$(c) \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x};$$

$$(r) \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

658. 設 $x \rightarrow 1$ 。选出下列函数的形如 $O\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ 的主部, 并求其对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 的阶:

$$(a) \frac{x^2}{x^2-1}; \quad (b) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad (c) \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}};$$

$$(r) \frac{1}{\sin \pi x}; \quad (d) \frac{\ln x}{(1-x)^2}.$$

659. 設 $x \rightarrow +\infty$ 和 $f_n(x) = x^n$ ($n=1, 2, \dots$)。証明: (1) $f_n(x)$ 中的每一个函数都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加較快; (2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 中的每一个都增加得較快。

660. 設 $x \rightarrow +\infty$ 和

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x} \quad (n=1, 2, \dots).$$

証明: (1) 函数 $f_n(x)$ 中的每一个都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得較慢; (2) 函数 $f(x) = \ln x$ 比函数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 中每一个都增加得較慢。

661. 証明对于任意的函数叙列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots (x_0 < x < +\infty),$$

可举出一函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时它比函数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 中的每一个都增加得較快。

§ 7. 函数的連續性

1° 函数的連續性 設

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1)$$

即, 若对于每一个 $\varepsilon > 0$, 都有 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 对于 $f(x)$ 的有意义的一切值, 不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

都成立。則称函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时(或在点 x_0)是連續的。

若函数 $f(x)$ 在集合 X 上的每一点都是連續的, 則称函数 $f(x)$ 在已知集合 $X = \{x\}$ (区間, 綫段等等)上是連續的。

若某值 $x = x_0$ 属于函数 $f(x)$ 的定义域 $X = \{x\}$ 或为此集合的聚点, 而当 $x = x_0$ 时, 等式(1)不成立[即, (a) 数 $f(x_0)$ 不存在, 换言之, 函数在点 $x = x_0$ 沒有定义; 或 (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在; 或 (B) 公式(1)的两端虽有意义, 但它們不相等], 則称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不連續点。

分为: (1) 第一类的不連續点 x_0 , 对于这些点存在有单側有限的极限:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \quad \text{和} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)。$$

(2) 第二类的不連續点——其余的一切不連續点。差

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

称为函数在点 x_0 的跳跃。

若等式 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$

成立, 則不連續点 x_0 称为无变化的。若极限 $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 中至少有一个等于符号 ∞ , 則称 x_0 为无穷型不連續点。

若等式 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ [或 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$]

成立, 則称函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左側(或右側)連續。函数 $f(x)$ 在点 x_0 連續的充分而且必要的条件为下面三个数相等:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)。$$

2° 初等函数的連續性 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 連續, 則函数

$$(a) f(x) \pm g(x); \quad (b) f(x)g(x); \quad (B) \frac{f(x)}{g(x)} \quad [g(x_0) \neq 0]$$

也在 $x = x_0$ 連續。

特殊情形：(a) 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

对任何的 x 值都是連續的：(b) 有理分式函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值，都是連續的。

一般地說，基本初等函数： x^n , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x , $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ... 在一切使他們有意义的点都連續。

較普遍的結果如下：若函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时連續，及函数 $g(y)$ 当 $y=f(x_0)$ 时連續，則函数 $g(f(x))$ 当 $x=x_0$ 时連續。

3° 关于連續函数的基本定理 若函数 $f(x)$ 在有限的閉区間 $[a, b]$ 內連續，則：(1) 函数 $f(x)$ 在此閉区間內是有界的；(2) 达到其下确界 m 和上确界 M (外尔什特拉斯定理)；(3) 在每一个区間 $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ 中，函数具有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 間的一切中介值 (哥西定理)。特例，若 $f(\alpha)f(\beta) < 0$ ，則可找到一个数值 $\gamma (\alpha < \gamma < \beta)$ ，使得 $f(\gamma) = 0$ 。

662. 已給連續函数 $y=f(x)$ 的图形。对于給定点 a 与給定数 $\varepsilon > 0$ ，用几何方法表示出这样的数 $\delta > 0$ ，使当 $|x-a| < \delta$ 时， $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ 。

663. 要做一个金属的边长 $x_0 = 10$ 厘米的正方形薄片。若要其面积 $y = x^2$ 与預計的 $y_0 = 100$ 平方厘米的差不超过 (a) ± 1 平方厘米；(b) ± 0.1 平方厘米；(b) ± 0.01 平方厘米；(r) $\pm \varepsilon$ 平方厘米，問其边 x 可以在什么范圍內变更？

664. 立方体的边是在 2 米和 3 米之間。为了使計算这立方体的体积时发生的絕對誤差不超过 ε 立方米，設 (a) $\varepsilon = 0.1$ 立方米；(b) $\varepsilon = 0.01$ 立方米；(b) $\varepsilon = 0.001$ 立方米，問測量此立方体的边 x 时可容許有怎样的絕對誤差 Δ ？

665. 問在 $x_0 = 100$ 的尽可能多大邻域內，函数 $y = \sqrt{x}$ 图形的纵坐标与 $y_0 = 10$ 之差小于 $\varepsilon = 10^{-n} (n \geq 0)$ ？求当 $n = 0, 1, 2, 3$ 时这个邻域的大小。

666. 利用 $\langle \varepsilon - \delta \rangle$ 論証法, 証明函数 $f(x) = x^2$ 当 $x=5$ 时連續。

填下表:

ε	1	0.1	0.01	0.001
δ					

667. 設 $f(x) = \frac{1}{x}$ 和 $\varepsilon = 0.001$ 。对于数值 $x_0 = 0.1; 0.01; 0.001; \dots$ 求出充分大的正数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, 使得可从不等式 $|x - x_0| < \delta$ 推出不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 。

可否对于已知的 $\varepsilon = 0.001$ 选出 $\delta > 0$ 来, 使它对于区間 $(0, 1)$ 中的一切 x_0 值都适用, 換句話說, 对于任意的值 $x_0 \in (0, 1)$, 若 $|x - x_0| < \delta$, 則 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$?

668. 簡明的用 $\langle \varepsilon - \delta \rangle$ 的說法在肯定的意义上来表达下面的論断: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义, 而在这一点不連續。

669. 設对于某些数 $\varepsilon > 0$, 可找到对应的数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ 使得, 只要 $|x - x_0| < \delta$, 則 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 。

設: (a) 諸数 ε 形成一有穷的集合; (b) 数 ε 形成分数 $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的无穷集合。可否断定函数 $f(x)$ 在点 x_0 連續?

670. 設已知函数

$$f(x) = x + 0.001[x]。$$

証明对于每一个 $\varepsilon > 0.001$; 便可选出 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ 使得: 只要 $|x' - x| < \delta$, 則 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ 。而对于 $0 < \varepsilon \leq 0.001$ 这件事对于一切的值 x 都不行。

在怎样的点这个函数失去了連續性?

671. 設对于每一个充分小的数 $\delta > 0$, 都有 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ 使得: 只要 $|x - x_0| < \delta$, 則不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立。从这里

是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 連續？由已知的不等式說明了函数 $f(x)$ 的什么性质？

672. 設对于每一个数 $\varepsilon > 0$, 都有数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ 使得: 若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 則 $|x - x_0| < \delta$ 。从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 連續？由这些不等式說明了函数的什么性质？

673. 設对于每一个数 $\delta > 0$ 及每一个 $x=x_0$, 都有数 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ 使得: 若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 則 $|x - x_0| < \delta$ 。从这里是否应得函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 連續？由已知的不等式說明了函数的什么性质？

研究例子: $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$

674. 利用 $\langle \varepsilon - \delta \rangle$ 論証法証明下列函数的連續性: (a) $ax + b$; (б) x^2 ; (B) x^3 ; (r) \sqrt{x} ; (Д) $\sqrt[3]{x}$; (e) $\sin x$; (ж) $\cos x$; (3) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ 。

研究下列函数的連續性并繪出其图形:

675. $f(x) = |x|$ 。

676. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{若 } x \neq 2, \\ A, & \text{若 } x = 2. \end{cases}$

677. 若 $x \neq -1$, $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ 而 $f(-1)$ 是任意的。

678. (a) 若 $x \neq 0$, $f_1(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ 而 $f_1(0) = 1$;

(б) 若 $x \neq 0$, $f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ 而 $f_2(0) = 1$ 。

679. 若 $x \neq 0$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 而 $f(0)$ 是任意的。

680. 若 $x \neq 0$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 而 $f(0) = 0$ 。

681. 若 $x \neq 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ 而 $f(0) = 0$ 。

682. 若 $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$ 而 $f(1)$ 是任意的。

683. 若 $x \neq 0$, $f(x) = x \ln x^2$ 而 $f(0) = a$ 。

684. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 。

685. $f(x) = [x]$ 。

686. $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$ 。

求出下列函数的不連續点并研究这些点的性质：

687. $y = \frac{x}{(1+x)^2}$ 。

688. $y = \frac{1+x}{1+x^3}$ 。

689. $y = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$ 。

690. $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ 。

691. $y = \frac{x}{\sin x}$ 。

692. $y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}$ 。

693. $y = \cos^2 \frac{1}{x}$ 。

694. $y = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ 。

695. $y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}$ 。

696. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ 。

697. $y = \sqrt{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ 。

698. $y = e^{x+\frac{1}{x}}$ 。

699. $y = \frac{1}{\ln x}$ 。

700. $y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ 。

研究下列函数的連續性并繪出其大略图形。

701. $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$ 。

702. $y = x - [x]$ 。

703. $y = x[x]$ 。

704. $y = [x] \sin \pi x$ 。

705. $y = x^2 - [x^2]$ 。

706. $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ 。

$$707. y = x \left[\frac{1}{x} \right].$$

$$708. y = \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{1}{x} \right).$$

$$709. y = \left[\frac{1}{x^2} \right] \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right).$$

$$710. y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x}.$$

$$711. y = \sec^2 \frac{1}{x}.$$

$$712. y = (-1)^{[x^2]}.$$

$$713. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right).$$

$$714. y = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}.$$

$$715. y = \frac{1}{\sin(x^2)}.$$

$$716. y = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}.$$

$$717. y = e^{-\frac{1}{x}}.$$

$$718. y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$719. y = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2}.$$

研究下列函数的連續性并作出其图形：

$$720. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} \quad (x \geq 0). \quad 721. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$$

$$722. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}. \quad 723. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$$

$$724. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+(2 \sin x)^{2n}}.$$

$$725. y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \operatorname{arc} \operatorname{tg}(n \operatorname{ctg} x)],$$

$$726. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

$$727. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}.$$

$$728. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+x) \operatorname{th} tx.$$

729. 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{若 } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

是否为連續函数？

730. 設：

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{若 } x < 0, \\ a+x, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

当怎样选择数 a , 函数 $f(x)$ 方为連續的?

731. 研究下列函数的連續性并說明不連續点的性质, 設:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{当 } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x & \text{当 } |x| \leq 1, \\ 1 & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{当 } |x| \leq 1, \\ |x-1| & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(r) f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^3 \pi x & \text{当 } x \text{ 非整数,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为整数;} \end{cases}$$

$$(s) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

732. 函数 $d=d(x)$ 是数軸 Ox 上的点 x 与由綫 $0 \leq x \leq 1$ 及 $2 \leq x \leq 3$ 所构成点集間的最短距离。求函数 d 的解析表示式, 作出其图形并研究其連續性。

733. 图形 E 是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成 (图 5)。函数 $S=S(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) 是图形 E 介于平行綫 $Y=0$ 及 $Y=y$ 之間的那一部分面积; 而函数 $b=b(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) 是用平行綫 $Y=y$

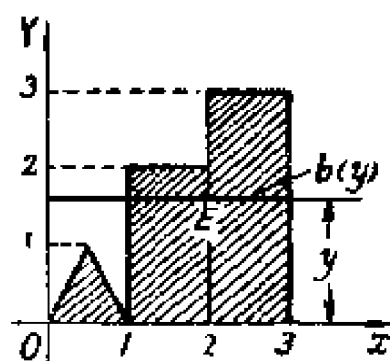


图 5

去截图形所得截痕之长。求函数 S 及 b 的解析表示式, 作出它們的图形并研究其連續性。

734. 証明迪里黑里函数

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) \}$$

当 x 取任一值时都是不連續的。

735. 設有函数

$$f(x) = x\chi(x),$$

式中 $\chi(x)$ 为迪里黑里函数 (参閱上例), 研究此函数 $f(x)$ 的連續性。作出这函数的略图。

736. 証明黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } x = \frac{m}{n}, \text{ 其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互质的数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时是不連續的, 而当 x 取任一个无理值时是連續的。作出这个函数的略图。

737. 若 x 是既約有理分数 $\frac{m}{n}$ ($n \geq 1$) 时,

$$f(x) = \frac{n\pi}{n+1},$$

若 x 是无理数时,

$$f(x) = |x|.$$

試研究函数 $f(x)$ 的連續性并作出此函数的略图。

738. 函数 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 除 $x=0$ 外, 对于自变数 x 的一切值都有定义。为了使此函数当 $x=0$ 是連續的, 則在 $x=0$ 这一点应当以甚么数值作为函数的值?

739. 証明不管怎样选取数 $f(1)$, 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $x=1$ 是不連續的。

740. 当 $x=0$ 时, 函数 $f(x)$ 失去意义。定义 $f(0)$ 的数值, 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 連續:

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1};$$

$$(b) f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x};$$

$$(c) f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x};$$

$$(d) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}};$$

$$(f) f(x) = x^x \quad (x > 0);$$

$$(g) f(x) = x \ln^2 x.$$

741. 設: (a) 函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时是連續的, 而函数 $g(x)$ 当 $x=x_0$ 时是不連續的; (b) 当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不連續的。則此二函数的和 $f(x)+g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不連續的? 举出适当的例子。

742. 設: (a) 函数 $f(x)$ 于 x_0 連續, 而函数 $g(x)$ 于 x_0 不連續; (b) 当 $x=x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都不連續。則此二函数的乘积

$$f(x)g(x)$$

在已知点 x_0 是否必不連續? 举出适当的例子。

743. 可否断定不連續函数平方后仍为不連續函数?

举出处处都有不連續点的函数, 而平方后是連續函数的例子。

744. 研究函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$ 的連續性:

$$(a) f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ 及 } g(x) = 1+x^2;$$

$$(b) f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ 及 } g(x) = x(1-x^2);$$

$$(c) f(x) = \operatorname{sgn} x \text{ 及 } g(x) = 1+x-[x].$$

745. 設

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{若 } 0 < u \leq 1, \\ 2-u, & \text{若 } 1 < u < 2, \end{cases}$$

及

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 2-x, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases} \quad (0 < x < 1)$$

研究复合函数 $y=f(u)$ 的連續性, 其中 $u=\varphi(x)$ 。

746. 証明若 $f(x)$ 是連續函数, 則下列函数也是連續的:

$$F(x) = |f(x)|。$$

747. 証明若函数 $f(x)$ 是連續的, 則函数

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{若 } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{若 } |f(x)| \leq c, \\ c, & \text{若 } f(x) > c, \end{cases}$$

(式中 c 为任意的正数) 也是連續函数。

748. 証明若函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上連續, 則函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \quad \text{和} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在 $[a, b]$ 上也是連續的。

749. 証明若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是連續的, 則函数

$$\varphi(x) = \min[f(x), g(x)] \quad \text{和} \quad \psi(x) = \max[f(x), g(x)]$$

也是連續的。

750. 設函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上有定义并有界。証明函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\} \quad \text{和} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$$

在閉区間 $[a, b]$ 是左方連續的。而函数

$$\bar{m}(x) = \inf_{a < \xi \leq x} \{f(\xi)\} \quad \text{和} \quad \bar{M}(x) = \sup_{a < \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在閉区間 $[a, b]$ 是右方連續的。

751. 証明若函数 $f(x)$ 于区間 $a \leq x < +\infty$ 上連續, 且有有限的

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

則此函数在已知区間上是有界的。

752. 設函数 $f(x)$ 在区間 $(x_0, +\infty)$ 上連續并有界。証明对于任何数 T , 可求得数列 $x_n \rightarrow +\infty$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. 設 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为連續周期函数, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时有定义且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

証明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ 。

754. 証明单調有界函数的一切不連續点皆为第一类的不連續点。

755. 証明若函数 $f(x)$ 具有下列諸性质: (1) 在閉区間 $[a, b]$ 上有定义且单調; (2) 取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之間所有的数作为其函数值則此函数在 $[a, b]$ 上連續。

756. 証明函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a}, \text{ 若 } x \neq a \text{ 及 } f(a) = 0,$$

在任意閉区間 $[a, b]$ 上取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之間的一切中介值, 但在 $[a, b]$ 上并不連續。

757. 証明若函数 $f(x)$ 在区間 (a, b) 內連續, 且 x_1, x_2, \dots, x_n 为此区間中的任意值, 則在它們之間可找到一个数值 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

758. 設函数 $f(x)$ 在区間 (a, b) 上連續, 且

$$l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{及} \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow b} f(x).$$

証明对于任意的数 λ , 此处 $l \leq \lambda \leq L$, 則有数列 $x_n \rightarrow a$ ($n=1, 2, \dots$), 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda.$$

§ 8. 反函数, 用参数表示的函数

1° 反函数的存在及其連續性 若函数 $y=f(x)$ 具有下列性质: (1) 在

區間 (a, b) 上有定義并連續；(2) 在嚴格的意義上說來，于此區間上是單調的，則有單值的反函數 $x=f^{-1}(y)$ ，此函數在區間 (A, B) 上有定義并連續，而且在嚴格的意義上說來，是相應地單調的，其中

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{和} \quad B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)。$$

任何一個單值連續函數 $x=g(y)$ ，它在具有定義的最大區域上適合方程 $f[g(y)]=y$ ，則被了解為已知連續函數 $y=f(x)$ 的多值反函數的一個單值連續分枝。

3° 以參數表示的函數的連續性 若函數 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在區間 (α, β) 上有定義并且是連續的，且函數 $\varphi(t)$ 在此區間上是嚴格地單調的，則方程組

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

在區間 (a, b) 上把 y 定義成 x 的單值連續函數：

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)],$$

其中

$$a = \lim_{t \rightarrow \alpha+0} \varphi(t) \quad \text{及} \quad b = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t)。$$

759. 求綫性分式函數

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

的反函數。在怎樣的情形下，反函數與已知函數相同？

760. 設

$$y = x + [x],$$

求反函數 $x=x(y)$ 。

761. 証明：有唯一的連續函數 $y=y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 滿足于克卜勒方程

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leq \varepsilon < 1)。$$

762. 証明：方程

$$\operatorname{ctg} x = kx$$

對於每一個實數 k ($-\infty < k < +\infty$) 在區間 $0 < x < \pi$ 中有唯一連續的根 $x=x(k)$ 。

763. 非單調的函數 $y=f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 可否有單值的反函數？研究例子：

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

764. 在甚么情形下, 函数 $y=f(x)$ 和反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一的函数?

765. 証明不連續函数

$$y = (1+x^2) \operatorname{sgn} x$$

的反函数是連續函数。

766. 証明若函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上有定义并且是严格地单調的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leq x_n \leq b),$$

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

求下列函数的反函数的連續的单值枝:

$$\mathbf{767.} \quad y = x^3, \quad \mathbf{768.} \quad y = 2x - x^2. \quad \mathbf{769.} \quad y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$\mathbf{770.} \quad y = \sin x, \quad \mathbf{771.} \quad y = \cos x, \quad \mathbf{772.} \quad y = \operatorname{tg} x.$$

773. 証明連續函数 $y = 1 + \sin x$ 对应于区間 $(0 < x < 2\pi)$ 的值的集合是一綫段。

774. 証明等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. 証明等式

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

776. 証明反正切相加的定理:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

式中 $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ 为取值: 0, 1, -1 三者之一的函数。

当已知 x 的值时, 对于怎样的 y 值函数 ε 可能不連續? 在 Oxy

平面上作出函数 ε 連續的对应域，并求此函数在所求得的域內的数值。

777. 証明反正弦相加的定理：

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^\varepsilon \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

式中，若 $xy \leq 0$ 或 $x^2 + y^2 \leq 1$ ， $\varepsilon = 0$ 。

若 $xy > 0$ 及 $x^2 + y^2 > 1$ ， $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$ 。

778. 証明反余弦相加的定理：

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^\varepsilon \arccos (xy - \sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-y^2}) + 2\varepsilon\pi \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

其中，若 $x+y \geq 0$ ， $\varepsilon = 0$ ，

若 $x+y < 0$ ， $\varepsilon = 1$ 。

779. 作函数的图形：

$$(a) \quad y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$(b) \quad y = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2} - 2\arcsin x.$$

780. 函数 $y=y(x)$ 由下面的方程給出：

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t, \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} t \quad (-\infty < t < +\infty),$$

求此函数。在怎样的域上此函数才有定义？

781. 設：

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

参数 t 变化的域怎样，即可視变数 y 为变数 x 的单值函数？

求在各个域上 y 的表示式。

782. 要使方程組

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

把 y 定义为 x 的单值函数的必要而且充分的条件是甚么？

研究例子

$$x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t.$$

783. 在怎样的条件下, 二方程組

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

及 $x = \varphi[\chi(\tau)], \quad y = \psi[\chi(\tau)] \quad (a < \tau < \beta)$

定义出同一的函数 $y = y(x)$?

784. 設函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区間 (a, b) 内有定义并且是連續的, 且

$$A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a < x < b} \varphi(x).$$

在怎样的場合下, 有定义在区間 (A, B) 上的单值函数 $f(x)$, 使得

$$\text{当 } a < x < b \text{ 时, } \psi(x) = f[\varphi(x)]?$$

§ 9. 函数的一致連續性

1° 一致連續性的定义 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在有 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 且对于使 $f(x)$ 有意义的任何数值 $x', x'' \in X$, 由不等式

$$|x' - x''| < \delta$$

可得不等式

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

則称函数 $f(x)$ 在已知集合 (区間綫段等) $X = \{x\}$ 上为一致連續的。

2° 康托尔定理 在有界的閉区間 $[a, b]$ 上有定义的連續函数 $f(x)$ 在此閉区間上一致連續。

785. 某工厂的車間制造正方形薄板, 其边 x 可取由 1 厘米到 10 厘米之間的值。为了使不論何种边长 (在上述的範圍內) 的薄板的面积 y 与原設計的面积差皆小于 ε , 問可以多大的公差 δ 对这些薄板的边长加工, 設 (a) $\varepsilon = 1$ 平方厘米; (б) $\varepsilon = 0.01$ 平方厘米; (в) $\varepsilon = 0.0001$ 平方厘米, 計算 δ 的值。

786. 圓柱形鞘筒之寬度为 ε , 长度为 δ 。将鞘筒套在曲綫 $y = \sqrt[3]{x}$ 上且沿此曲綫滑动, 但筒之軸須保持平行于 Ox 軸。为了使此筒順利地經過此曲綫上由不等式 $-10 \leq x \leq 10$ 所限定的部分, 問 δ 应等于甚么? 設 (a) $\varepsilon = 1$; (б) $\varepsilon = 0.1$; (в) $\varepsilon = 0.001$;

(r) ε 为任意小数。

787. 以 $\langle \varepsilon - \delta \rangle$ 的說法在肯定的意义上表达下面論断的意义: 函数 $f(x)$ 在某集合(区間, 綫段)上連續, 但在此集合上并不一致連續。

788. 証明: 函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在区間 $(0, 1)$ 上是連續的, 但在此区間上并非一致連續的。

789. 証明: 函数

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

在区間 $(0, 1)$ 上是連續的并且有界, 但在此区間上并非一致連續的。

790. 証明: 函数

$$f(x) = \sin x^2$$

在无穷区間 $-\infty < x < +\infty$ 上是連續的并且有界, 但在此区間上并非一致連續的。

791. 証明: 若函数 $f(x)$ 在域 $a \leq x < +\infty$ 上有定义并且是連續的, 而且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

存在, 則 $f(x)$ 在此域上是一致連續的。

792. 証明: 无界函数

$$f(x) = x + \sin x$$

于全軸 $-\infty < x < +\infty$ 上一致連續。

793. 函数 $f(x) = x^2$ 在下列区間中是否为一致連續的: (a) $(-l, l)$, 这里 l 为随便多大的正数; (б) 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 上?

研究下列函数在已知域上的一致連續性:

$$794. f(x) = \frac{x}{4-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)。$$

$$795. f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1)。$$

$$796. f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (0 < x < \pi)。$$

$$797. f(x) = e^x \cos \frac{1}{x} \quad (0 < x < 1)。$$

$$798. f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \quad (-\infty < x < +\infty)。$$

$$799. f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \leq x < +\infty)。$$

$$800. f(x) = x \sin x \quad (0 \leq x < +\infty)。$$

801. 証明：函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在每个区間

$$J_1 = (-1 < x < 0) \quad \text{及} \quad J_2 = (0 < x < 1)$$

上是一致連續的，但在他們的和

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$$

上并非一致連續的。

802. 对于 $\varepsilon > 0$ ，求使函数 $f(x)$ 在已知区間上滿足一致連續的条件的 $\delta = \delta(\varepsilon)$ (任何的!) 設：

$$(a) f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(b) f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5);$$

$$(B) f(x) = \frac{1}{x} \quad (0.1 \leq x \leq 1);$$

$$(r) f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty);$$

$$(D) f(x) = 2 \sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(e) f(x) = x \sin \frac{1}{x} (x \neq 0) \quad \text{及} \quad f(0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi)。$$

803. 需要尽量地把闭区間 $[1, 10]$ 划分为几个彼此相等的綫段，才能使得函数 $f(x) = x^2$ 在这些綫段中的每一段上的振幅是小于 0.0001?

804. 証明：在区間 (a, b) 上有无穷个一致連續函数的和与它們的乘积在此区間內仍是一致連續的。

805. 証明：若單調有界的函数 $f(x)$ 在有穷或无穷的区間 (a, b) 上是連續的，則此函数在区間 (a, b) 上是一致連續的。

806. 証明：在有穷区間 (a, b) 上有定义而且是連續的函数 $f(x)$ ，可用連續的方法延拓到閉区間 $[a, b]$ 上，其必要且充分的条件是函数 $f(x)$ 在区間 (a, b) 上是一致連續的。

807. 函数

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为 (a, b) 中受条件 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 限制的任意两点) 称为函数 $f(x)$ 在区間 (a, b) 上的連續模数。

証明：函数 $f(x)$ 在区間 (a, b) 上是一致連續的必要且充分的条件是

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

808. 設：

$$(a) \quad f(x) = x^b \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$(b) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq a) \quad \text{及} \quad (a < x < +\infty);$$

$$(B) \quad f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

对 $f(x)$ 的連續模数 $\omega_f(\delta)$ (参閱前題) 作下形的估价：

$$\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha,$$

式中 C 和 α 为常数。

§ 10. 函数方程

809. 証明：对于 x 和 y 的一切实数値滿足方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

的唯一的連續函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是齐次綫性函数：

$$f(x) = ax,$$

式中 $a = f(1)$ 是任意的常数。

810. 証明：滿足方程(1)的单調函数 $f(x)$ 是齊次綫性的。

811. 証明：滿足方程(1)且在无論如何小的区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中为有界的函数 $f(x)$ ，是綫性齊次函数。

812. 証明：对 x 和 y 的一切值滿足方程

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2)$$

的唯一不恒等于零的連續函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指數函数：

$$f(x) = a^x,$$

式中 $a = f(1)$ 为正的常数。

813. 証明：在区間 $(0, \varepsilon)$ 中有界并滿足方程(2)的不恒等于零的函数 $f(x)$ 是指數函数。

814. 証明：对于 x 和 y 的一切正值滿足方程

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

的唯一不恒等于零的連續函数 $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) 是对数函数：

$$f(x) = \lg_a x,$$

式中 a 为正的常数。

815. 証明：对于 x 和 y 的一切正值滿足方程

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (3)$$

的唯一不恒等于零的連續函数 $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) 是幂函数：

$$f(x) = x^a,$$

式中 a 为常数。

816. 求对于 x 和 y 的一切实数值滿足方程(3)的一切連續函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$)。

817. 証明：不連續函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x,$$

滿足方程(3)。

818. 求對於 x 和 y 的一切实数值滿足方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

的一切連續函數 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$)。

819. 求對於 x 和 y 的一切实数值滿足方程組：

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

及 $f(0) = 1$ 和 $g(0) = 0$

的一切有界連續函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ ($-\infty < x < +\infty$)。

提示 研究函數

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x)。$$

820. 設：

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

及 $\Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$

分別為函數 $f(x)$ 的一階、二階有限差。

證明：若函數 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是連續的且

$$\Delta^2 f(x) \equiv 0,$$

則此函數是綫性函數，即

$$f(x) = ax + b,$$

式中 a 和 b 為常數。

第二章 单变量函数的微分学

§ 1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义 若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量。

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

有意义, 则称为导函数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数。

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率 [$\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$] (图 6)。

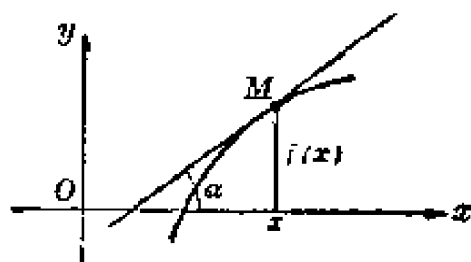


图 6

2° 求导函数的基本法则 若 c 为常数且函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ 都有导函数, 则

$$(1) \quad c' = 0;$$

$$(2) \quad (cu)' = cu';$$

$$(3) \quad (u + v - w)' = u' + v' - w';$$

$$(4) \quad (uv)' = u'v + v'u;$$

$$(5) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

$$(6) \quad (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \text{ 为常数});$$

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数, 则

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3° 基本公式 若 x 为自变数, 则

$$\text{I. } (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ 为常数});$$

$$\text{II. } (\sin x)' = \cos x;$$

$$\text{III. } (\cos x)' = -\sin x;$$

$$\text{IV. } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\text{V. } (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\text{VI. } (\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{VII. } (\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{VIII. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{IX. } (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{X. } (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0); \quad (e^x)' = e^x.$$

$$\text{XI. } (\lg_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0); \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$\text{XII. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$\text{XIII. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$\text{XIV. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\text{XV. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4° 单侧的导函数 表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数。

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5° 无穷的导函数 若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷的导函数。在此种情形下, 函数 $y=f(x)$ 的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直。

821. 若 x 由 1 变到 1000, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = -\lg x$ 的对应的增量 Δy 。

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的对应的增量 Δy 。

823. 設:

$$(a) \ y = ax + b; \quad (b) \ y = ax^2 + bx + c; \quad (B) \ y = a^x.$$

若变量 x 得到增量 Δx , 求增量 Δy 。

824. 証明:

$$(a) \ \Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(b) \ \Delta[f(x)g(x)] = g(x + \Delta x) \Delta f(x) + f(x) \Delta g(x).$$

825. 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2, 4)$ 和 $A'(2+\Delta x, 4+\Delta y)$ 引割线 AA' , 求此割线的斜率, 设: (a) $\Delta x=1$; (б) $\Delta x=0.1$; (в) $\Delta x=0.01$; (г) Δx 为任意小。

在已知曲线上 A 点的切线的斜率等于甚么?

Δ **826.** 把 Ox 轴上的线段 $1 \leq x \leq 1+h$ 利用函数关系 $y=x^3$ 映变到 Oy 轴上。求其平均的伸长系数。设: (a) $h=0.1$; (б) $h=0.01$; (в) $h=0.001$, 计算此系数的值。

当 $x=1$ 时伸长的系数等于甚么?

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x=10t+5t^2,$$

式中 t 为以秒计的时间, x 为以尺计的距离。求在 $20 \leq t \leq 20+\Delta t$ 时间内运动的平均速度。设: (a) $\Delta t=1$; (б) $\Delta t=0.1$; (в) $\Delta t=0.01$, 计算此速度的值。

当 $t=20$ 时运动的速度等于甚么?

Δ **828.** 根据导函数的定义, 直接求下列函数的导函数:

$$(a) x^2; (б) x^3; (в) \frac{1}{x}; (г) \sqrt{x}; (д) \sqrt[3]{x};$$

$$(e) \operatorname{tg} x; (ж) \operatorname{ctg} x; (з) \arcsin x; (и) \arccos x;$$

$$(к) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

829. 设:

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$ 。

830. 设:

$$f(x) = x^2 \sin(x-2),$$

求 $f'(2)$ 。

831. 设:

$$f(x) = x + (x-1) \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x}{x+1}},$$

求 $f'(1)$ 。

832. 設函数 $f(x)$ 在 a 点可微分, 求

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

△ 833. 証明: 若函数 $f(x)$ 可微分及 n 为自然数, 則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (1)$$

反之, 若对于函数 $f(x)$ 有极限 (1) 存在, 則可否断定这个函数有导函数? 研究迪里黑里函数的例子 (参閱第一章第 734 題)。

利用导函数表, 求下列函数的导函数:

834. $y = 2 + x - x^2$. 問 $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$ 等于

甚么?

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. 当 x 为何值时:

(a) $y'(x) = 0$; (b) $y'(x) = -2$; (B) $y'(x) = 10$?

✓ 836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

$$837. y = \frac{ax+b}{a+b}.$$

$$838. y = (x-a)(x-b).$$

$$839. y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3.$$

$$840. y = (x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha). \quad \checkmark$$

$$841. y = (1 + nx^m)(1 + mx^n).$$

$$842. y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3.$$

$$843. y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$$

$$844. \text{証明公式} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}. \quad \checkmark$$

求下列函数之导函数:

$$845. y = \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$846. y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$$

$$847. y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}. \quad 848. y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}.$$

$$849. y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}. \quad 850. y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}.$$

$$851. y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}. \quad 852. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$853. y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}. \quad 854. y = x\sqrt{1+x^2}.$$

$$855. y = (1+x) \cdot \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3}.$$

$$856. y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}.$$

$$857. y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad 858. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

$$859. y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}.$$

$$860. y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}. \quad 861. y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}.$$

$$862. y = \cos 2x - 2 \sin x.$$

$$863. y = (2-x^2) \cos x + 2x \sin x.$$

$$864. y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x).$$

$$865. y = \sin^n x \cos nx. \quad 866. y = \sin[\sin(\sin x)].$$

$$867. y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}. \quad 868. y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}.$$

$$869. y = \frac{1}{\cos^n x}. \quad 870. y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

$$871. y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$872. y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x.$$

$$873. y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^3 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^5 x}.$$

$$874. y = \sec^2 \frac{x}{a} + \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{a}. \quad 875. y = \sin[\cos^3(\operatorname{tg}^3 x)].$$

876. $y = e^{-x^2}.$

877. $y = 2^{\lg \frac{1}{x}}.$

878. $y = e^x (x^2 - 2x + 2).$

879. $y = \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x}.$

880. $y = e^x \cdot \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right).$

881. $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}.$

882. $y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

883. $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$

884. $y = \left(\frac{a}{b} \right)^x \cdot \left(\frac{b}{x} \right)^2 \cdot \left(\frac{x}{a} \right)^b \quad (a > 0, b > 0).$

885. $y = x^{a^2} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$

886. $y = \lg^3 x^2.$

887. $y = \ln [\ln (\ln x)].$

888. $y = \ln [\ln^2 (\ln^3 x)].$

889. $y = \frac{1}{2} \ln (1+x) - \frac{1}{4} \ln (1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}.$

890. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+1}{x^2+1}.$

891. $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}.$

892. $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

893. $y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \quad (0 < k < 1).$

894. $y = \sqrt{x+1} - \ln (1 + \sqrt{x+1}).$

895. $y = \ln (x + \sqrt{x^2+1}).$

896. $y = x \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1-x^2}.$

897. $y = x \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2}) -$
 $- 2\sqrt{1+x^2} \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + 2x.$

898. $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^3}{2} \ln (x + \sqrt{x^2+a^2}). \quad \checkmark$

$$899. y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0). \quad \checkmark$$

$$900. y = \frac{2+3x^2}{x^4} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}. \quad \checkmark ?$$

$$901. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad 902. y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$903. y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x. \quad 904. y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

$$905. y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}.$$

$$906. y = \ln \frac{b+a \cos x + \sqrt{b^2-a^2} \sin x}{a+b \cos x} \quad (0 \leq |a| < |b|).$$

$$907. y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6).$$

$$908. y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}.$$

$$909. y = \frac{3}{2} (1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3 \ln (1 + \sqrt[3]{1+x^2}). \quad \times$$

$$910. y = \ln \left[\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$911. y = x [\sin (\ln x) - \cos (\ln x)]. \quad \times$$

$$912. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x.$$

$$913. y = \arcsin \frac{x}{2}. \quad 914. y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}. \quad \checkmark$$

$$915. y = \arctg \frac{x^2}{a} \quad \times \quad 916. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{2}}{x}. \quad \checkmark \times$$

$$917. y = \sqrt{x} - \arctg \sqrt{x}. \quad 918. y = x + \sqrt{1-x^2} \arccos x. \quad \checkmark$$

$$919. y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \arctg \sqrt{x - \sqrt{x}}. \quad \checkmark$$

$$920. y = \arccos \frac{1}{x}.$$

$$921. y = \arcsin(\sin x).$$

$$922. y = \arccos(\cos^2 x).$$

$$923. y = \arcsin(\sin x - \cos x).$$

$$924. y = \arccos \sqrt{1-x^2}.$$

$$925. y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}.$$

$$926. y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right).$$

$$927. y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) (a > b \geq 0).$$

$$928. y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$929. y = \frac{1}{\arccos^2(x^2)}.$$

$$930. y = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^3).$$

$$931. y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x).$$

$$932. y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$933. y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}.$$

$$934. y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

$$935. y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$936. y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$$

$$937. y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$938. y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$939. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$940. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

$$941. \quad y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$942. \quad y = \frac{x^6}{1 + x^{12}} - \operatorname{arctg} x^6.$$

$$943. \quad y = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2}}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$$

$$944. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

$$945. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}} \quad (a > 0).$$

$$946. \quad y = \frac{3 - x}{2} \sqrt{1 - 2x - x^2} + 2 \operatorname{arcsin} \frac{1 + x}{\sqrt{2}}.$$

$$947. \quad y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1 + x^4} - x}{\sqrt[4]{1 + x^4} + x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x}.$$

$$948. \quad y = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg}^2 x).$$

$$949. \quad y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arcsin} x.$$

$$950. \quad y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2.$$

$$951. \quad y = \ln (e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}). \quad 952. \quad y = \operatorname{arctg} (x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$$953. \quad y = \operatorname{arcsin} \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x} \right).$$

$$954. \quad y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + 2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}.$$

$$955. \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1 + x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4} + x\sqrt{2}}.$$

$$956. \quad y = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{1 + x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$957. y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2).$$

$$958. y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2).$$

$$959. y = e^{m \arcsin x} [\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)].$$

$$960. y = \arctg e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}.$$

$$961. y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0).$$

$$962. y = x^{x^x} + x^{x^x} + a^{x^x} \quad (a > 0, x > 0).$$

$$963. y = \sqrt{x} \quad (x > 0).$$

$$964. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$$

$$965. y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$$

$$966. y = \lg_x e.$$

$$967. y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}. \quad 968. y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln \left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} \right).$$

$$969. y = \arctg(\operatorname{th} x). \quad 970. y = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right).$$

$$971. y = \frac{b}{a} x + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a} \arctg \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th} \frac{x}{2} \right) \quad (0 \leq |b| < a).$$

972. 引入中间变量 $u = \cos^2 x$, 求函数

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$$

的导函数。

利用 972 题所示的方法, 求下列函数的导函数:

$$973. y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2} \right].$$

$$974. y = \frac{1}{2} \arctg(\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}.$$

$$975. y = \frac{e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1-e^{-2x^2}).$$

$$976. y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} \cdot \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \arccotg a^{-x}.$$

—977. 求函数的导函数并作函数及其导函数的图形, 设:

$$(a) y = |x|; \quad (b) y = x|x|; \quad (B) y = \ln|x|.$$

978. 求下列函数的导函数:

$$(a) y = |(x-1)^2(x+1)^3|; \quad (b) y = \sin^3 x;$$

$$(r) y = \arccos \frac{1}{|x|}; \quad (r) y = [x] \sin^2 \pi x.$$

求导函数并作出函数及其导函数的图形:

$$979. y = \begin{cases} 1-x & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{当 } 1 \leq x \leq 2; \\ -(2-x) & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$980. y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{当 } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{在线段 } [a, b] \text{ 之外.} \end{cases}$$

$$981. y = \begin{cases} x & \text{当 } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{当 } x \geq 0. \end{cases}$$

$$982. y = \begin{cases} \arctg x & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

$$983. y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{1}{e} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

984. 由已知函数的对数得来的导函数称为此函数的对数的导函数:

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

已知函数 y , 求其对数的导函数:

$$(a) y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad (b) y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}};$$

$$(r) y = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n};$$

$$(r) y = (x + \sqrt{1+x^2})^n.$$

985. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微分函数。求函数 y 的导函数, 若:

$$(a) \quad y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}; \quad (b) \quad y = \arctg \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

$$(B) \quad y = {}^{\varphi(x)}\sqrt{\psi(x)} [\varphi(x) \neq 0; \psi(x) > 0];$$

$$(r) \quad y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x) [\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0].$$

986. 求 y' , 設

$$(a) \quad y = f(x^2);$$

$$(b) \quad y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x);$$

$$(B) \quad y = f(e^x) \cdot e^{f(x)};$$

$$(r) \quad y = f\{f[f(x)]\},$$

其中 $f(u)$ 表示可微分的函数。

987. 証明 n 阶行列式微分法:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. 設:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$ 。

989. 設:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$ 。

990. 已知函数的图形。近似地作出其导函数的图形。

991. 証明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{当 } x \neq 0; \\ 0 & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

有不連續的导函数。

992. 在甚么条件下函数

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

(a) 在 $x=0$ 处是連續的; (б) 在 $x=0$ 处可微分; (B) 在 $x=0$ 处其导函数是連續的?

△ **993.** 在甚么条件下函数

$$f(x) = |x|^m \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0 \quad (m > 0)$$

有: (a) 于坐标原点的邻域上有有界的导函数; (б) 在此域上有无界的导函数。

994. 設:

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是連續的, 求 $f'(a)$ 。

995. 設:

$$f(x) = |x-a|\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为連續函数及 $\varphi(a) \neq 0$, 証明此函数在 a 点沒有导数。

单側导函数 $f'_-(a)$ 及 $f'_+(a)$ 等于甚么?

996. 举出在已知点: a_1, a_2, \dots, a_n 沒有导数的連續函数的例子。

△ **997.** 証明: 函数

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

在点 $x=0$ 的任何邻域上有不可微分的点, 但在 $x=0$ 这点是可微分的。

作出此函数的略图。

998. 証明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

仅在 $x=0$ 时有导函数。

999. 研究下列函数的可微性:

$$(a) \quad y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|;$$

$$(b) \quad y = |\cos x|; \quad (B) \quad y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x;$$

$$(r) \quad y = \arcsin(\cos x);$$

$$(R) \quad y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{当 } |x| \leq 1; \\ |x| - 1 & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

求函数 $f(x)$ 左侧和右侧的导函数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$, 设:

$$\mathbf{1000.} \quad f(x) = |x|. \quad \mathbf{1001.} \quad f(x) = [x] \sin \pi x.$$

$$\mathbf{1002.} \quad f(x) = x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

$$\mathbf{1003.} \quad f(x) = \sqrt{\sin x^2}.$$

$$\mathbf{1004.} \quad f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

$$\mathbf{1005.} \quad f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}. \quad \mathbf{1006.} \quad f(x) = |\ln |x|| \quad (x \neq 0).$$

$$\mathbf{1007.} \quad f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$\mathbf{1008.} \quad f(x) = (x-2) \arctg \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2), \quad f(2) = 0.$$

1009. 証明: 在 $x \neq 0$ 时函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 在 $x=0$ 时 $f(0)=0$, 在此点連續, 但在此点既无左侧导数, 又无右侧导数。

1010. 設:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax+b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 于点 $x=x_0$ 处連續而且可微分, 应当如何选取系数 a 和 b ?

1011. 設:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 为左方可微分的。应当选择如何的系数 a 和 b , 使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微分?

△ **1012.** 适当地选定参数 A 与 c 用立方抛物线

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c)$$

在区域 $a \leq x \leq b$ 上把两个半直线:

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a) \quad \text{及} \quad y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

光滑地连接起来。

1013. 用抛物线 $y = a + bx^2$ ($|x| \leq c$) (其中 a 与 b 为未知的参数) 去补充曲线 $y = \frac{m^2}{|x|}$ ($|x| > c$) 的部分, 使所得的为一平滑曲线。

△ **1014.** 若: (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在这点没有导数; (b) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数, 可否断定它们的和

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

△ **1015.** 若: (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (b) 在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数, 可否断定它们的积

$$F(x) = f(x)g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

研究二个例子:

$$(a) \quad f(x) = x, \quad g(x) = |x|; \quad (b) \quad f(x) = |x|; \quad g(x) = |x|.$$

△ **1016.** 若 (a) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 没有导数; (b) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 没有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 有导数; (B) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 没有

导数及函数 $g(x)$ 于点 $x=x_0$ 没有导数, 则函数

$$F(x) = f[g(x)]$$

于已知点 $x=x_0$ 的可微性怎样?

研究三个例子:

$$(a) \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = |x|; \quad (b) \quad f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2;$$

$$(B) \quad f(x) = 2x + |x|, \quad g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|.$$

1017. 在函数

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

的图形上哪些点处有垂直切线? 作出这图形。

1018. 函数 $f(x)$ 在其不连续点可否有: (a) 有穷的导数; (b) 无穷的导数?

研究一个例子:

$$f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

1019. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a, b) 上可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

则是否必有

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty; \quad (2) \lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = \infty?$$

研究例子: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 。

1020. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a, b) 上可微分且

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty,$$

是否必有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty?$$

研究一个例子: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时。

1021. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微分且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

存在。由此能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在?

研究一个例子:

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}。$$

1022. 設有界函数 $f(x)$ 在区間 $(x_0, +\infty)$ 上可微分且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在; 由此可否推出有穷的或无穷的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在?

研究一个例子:

$$f(x) = \cos(\ln x)。$$

1023. 对不等式可否逐项微分?

1024. 导出表示和式

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

及

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$$

的公式。

提示 研究 $(x + x^2 + \cdots + x^n)'$ 。

1025. 导出表示和式

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

及

$$T_n = \cos x + 2 \cos 2x + \cdots + n \cos nx$$

的公式。

1026. 利用恒等式:

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

推出表示和式:

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

的公式。

1027. 求証可微分的偶函数的导函数为奇函数, 而可微分的奇函数的导函数为偶函数。

对这个事实加以几何解释。

1028. 求証可微分的周期函数，其导函数仍为具有相同周期的周期函数。

1029. 若圆半径以 2 厘米/每秒的等速度增加，则当圆半径 $R=10$ 厘米时，圆面积增加的速度如何？

1030. 长方形的一边 $x=20$ 米，另一边 $y=15$ 米，若第一边以 1 米/每秒的速度减少，而第二边以 2 米/每秒的速度增加，问这长方形的面积和对角线变化的速度如何？

1031. 二輪船 A 和 B 从同一碼頭同时出发。 A 船往北， B 船往东。若 A 船的速度为 30 千米/每小时， B 船的速度为 40 千米/每小时，问二船间的距离增加的速度如何？

1032. 設：

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2; \\ 2x-2, & \text{若 } 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

又設 $S(x)$ 表示由曲綫 $y=f(x)$ ，軸 Ox 及过点 $x(x \geq 0)$ 而垂直于 Ox 的直綫三者圍成的面积。作出函数 $S(x)$ 的解析表达式，求出导函数 $S'(x)$ ，并作出函数 $y=S'(x)$ 的图形。

1033. 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 、軸 Ox 及通过点 O 和 $a(|x| \leq a)$ 而垂直于軸 Ox 的两条直綫四者圍成的面积。作出函数 $S(x)$ 的解析表达式，求出导函数 $S'(x)$ ，并作其导函数 $y=S'(x)$ 的图形。

§ 2. 反函数的导函数. 用参变数表示的 函数的导函数. 隐函数的导函数

1° 反函数的导函数 若具有导函数 $f'(x) \neq 0$ 的可微分的函数 $y=f(x)$ ($a < x < b$) 有单值連續的反函数 $x=f^{-1}(y)$ ，则此反函数也可微分，且有公式

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

成立。

2° 用参变数表示的函数的导函数 若方程组:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微分的函数, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 确定 y 为 x 的单值连续函数:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导函数存在, 且可用公式

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

求出。

3° 隐函数的导函数 若可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x, y) = 0,$$

则此隐函数之导函数 $y' = y'(x)$ 可从以下的方程求得:

$$\frac{d}{dx} [F(x, y)] = 0,$$

其中 $F(x, y)$ 是当作变量 x 的复合函数。

(关于隐函数微分法的更详细的叙述可参阅第 II 部分第 VI 章 § 3)

1034. 证明由方程 $y^3 + 3y = x$ 定义的单值函数 $y = y(x)$ 存在, 并求它的导函数 y'_x 。

1035. 证明由方程 $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 \leq \varepsilon < 1$) 确定的单值函数 $y = y(x)$ 存在, 并求其导函数 y'_x 。

1036. 设:

$$(a) \ y = x + \ln x \ (x > 0); \quad (b) \ y = x + e^x;$$

$$(B) \ y = \operatorname{sh} x; \quad (r) \ y = \operatorname{th} x.$$

求它们的反函数 $x = x(y)$ 的存在域, 并求它们的导函数。

1037. 设:

$$(a) \ y = 2x^2 - x^4; \quad (b) \ y = \frac{x^2}{1+x^2}; \quad (B) \ y = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

选出反函数 $x = x(y)$ 的单值连续的各枝, 求它们的导函数并作其图形。

1038. 作出函数 $y=y(x)$ 的略图, 并求其导函数 y'_x , 設: $x = -1+2t-t^2$, $y=2-3t+t^3$ 。当 $x=0$ 及 $x=-1$ 时 $y'_x(x)$ 等于甚么? 在何点 $M(x, y)$ 的导函数 $y'_x(x)=0$?

求导函数 y'_x (参数是正数), 設:

1039. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$ 。

1040. $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$ 。 **1041.** $x=a \cos t$, $y=b \sin t$

1042. $x=a \operatorname{ch} t$, $y=b \operatorname{sh} t$ **1043.** $x=a \cos^3 t$, $y=a \sin^3 t$

1044. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$

1045. $y=e^{2t} \cos^2 t$; $y=e^{2t} \sin^2 t$ 。

1046. $x=\arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ 。

1047. 証明由方程組

$$x=2t+|t|, \quad y=5t^2+4t|t|,$$

所确定的函数 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可微分, 但它的导函数不能用普通的公式求得。

求下列隐函数的导函数 y'_x :

1048. $x^2+2xy-y^2=2x$ 。

当 $x=2$ 与 $y=4$ 时及当 $x=2$ 与 $y=0$ 时, y' 等于甚么?

1049. $y^2=2px$ (抛物綫) **1050.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (椭圆)

1051. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (抛物綫)。

1052. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (内摆綫)。

1053. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}=\ln \sqrt{x^2+y^2}$ (对数螺綫)。

1054. 求 y'_x , 設:

(a) $r=a\varphi$ (阿基米德螺綫);

(б) $r=a(1+\cos \varphi)$ (心脏形綫);

(B) $r = ae^{m\varphi}$ (对数螺线),

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ 表极坐标。

§ 3. 导函数的几何意义

1° 切线和法线的方程 可微分的函数 $y=f(x)$ 在其图形上之一点 $M(x, y)$ (图 7) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程的形式分别是:

$$Y - y = y'(X - x)$$

及 $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$

其中 X, Y 为切线或法线上的流动坐标, 而 $y' = f'(x)$ 为切点处导函数的值。

2° 切线长和法线长 PT 为次切线, PN 为次法线, MT 为切线, MN 为法线。设 $\operatorname{tg} \alpha = y'$ (图 7)。我们得下列的值:

$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right|, \quad PN = |yy'|,$$

$$MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}, \quad MN = |y| \sqrt{1 + y'^2}.$$

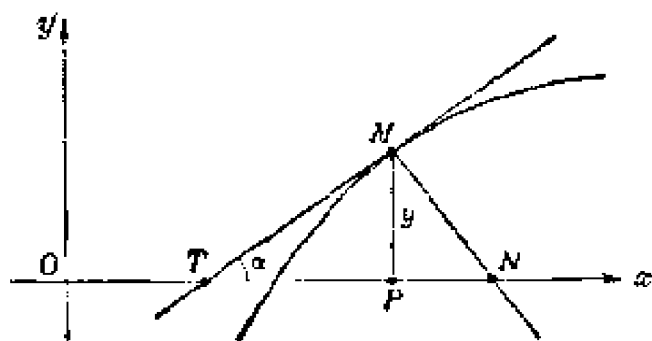


图 7

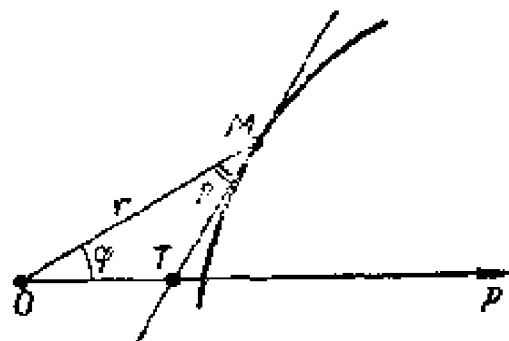


图 8

3° 切线与切点的向径间的夹角 若 $r = f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程及 β 为切线 MT 与切点 M 的向径 OM 所成的角 (图 8), 则

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'}.$$

1055. 写出曲线

$$y = (x+1) \sqrt[3]{3-x}$$

上 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 3)$ 、 $C(3, 0)$ 诸点处的切线和法线方程。

1056. 在曲綫

$$y = 2 + x - x^2$$

上的哪些点其切綫 (a) 平行于 Ox 軸; (b) 平行于第一象限角的平分綫?

1057. 証明拋物綫

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与 Ox 相交所成的两角 α 及 β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) 彼此相等。

1058. 在曲綫

$$y = 2 \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

上求出“曲綫的坡度”(即是 $|y'|$) 大于 1 的区域。

1059. 函数

$$y = x \text{ 及 } y_1 = x + 0.01 \sin 1000 \pi x$$

二者相差不大于 0.01。則这些函数的导函数的差的最大值为何? 作出对应的图形。

1060. 曲綫 $y = \ln x$ 与 Ox 軸相交的角如何?

1061. 曲綫 $y = x^2$ 及 $x = y^2$ 相交的角如何?

1062. 曲綫 $y = \sin x$ 及 $y = \cos x$ 相交的角如何?

1063. 当如何选择参数 n , 以使曲綫

$$y = \arctg nx \quad (n > 0)$$

与 Ox 軸相交所成的角大于 89° ?

1064. 求出曲綫:

$$(a) \ y = \sqrt{1 - e^{-1/2 x^2}} \text{ 于点 } x = 0 \text{ 处,} \quad (b) \ y = \arcsin$$

$\frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x = 1$ 处的左切綫与右切綫間的夹角。

1065. 証明对数螺綫 $r = ae^{m\varphi}$ (a 及 m 为常数) 的切綫与切点的向徑所成的角度为一常量。

1066. 求曲綫 $y = ax^n$ 的次切綫长, 由此給出作这曲綫的切綫

的方法。

1067. 証明拋物綫 $y^2 = 2px$ 的 (a) 次切綫长等于切点的横坐标的两倍; (b) 次法綫为一常量。給出作拋物綫的切綫的方法。

1068. 証明指数曲綫 $y = a^x (a > 0)$ 有定长的次切綫。給出作指数曲綫的切綫的方法。

1069. 求悬鏈綫

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

上任一点 $M(x_0, y_0)$ 处的法綫长。

1070. 証明内摆綫

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$$

的切綫介于坐标軸間的部分的长为一常量。

1071. 若拋物綫 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 相切, 則系数 a, b, c 間的关系如何?

1072. 在甚么条件下三次拋物綫

$$y = x^3 + px + q$$

与 Ox 軸相切?

1073. 当参数 a 为何值时, 拋物綫 $y = ax^2$ 与曲綫 $y = \ln x$ 相切?

1074. 証明曲綫

$$y = f(x) \quad [f(x) > 0]$$

及

$$y = f(x) \sin ax,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数, 于公共点彼此相切。

1075. 証明双曲綫族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一正交网, 就是說这两族中的曲綫成直角相交。

1076. 証明拋物綫族

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0)$$

及 $y^2 = 4b(b+x) \quad (b>0)$

形成正交网。

1077. 写出曲线 $x = 2t - t^2$ 及 $y = 3t - t^3$ 上于 (a) $t=0$ 、(b) $t=1$ 各点处的切线和法线的方程。

1078. 写出曲线

$$x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$$

在 (a) $t=0$ 、(b) $t=1$ 、(c) $t=\infty$ 各点的切线与法线方程。

1079. 写出摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t=t_0$ 处的切线方程。给出摆线的切线的作法。

1080. 证明曳物线

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t \quad (a>0, 0<t<\pi)$$

有一定长的切线段。

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程：

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M(6, 6, 4)$

1082. $xy + \ln y = 1, \quad M(1, 1)。$

§ 4. 函数的微分

1° 函数的微分 若自变数为 x 的函数 $y=f(x)$ 之增量可表为下形

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

其中 $dx = \Delta x$, 则此增量的线性主部称为函数 y 的微分:

$$dy = A(x)dx。$$

函数 $y=f(x)$ 的微分存在的必要且充分的条件为存在有限的导函数 $y' = f'(x)$, 且有

$$dy = y' dx。 \quad (1)$$

若自变数 x 为另一自变数的函数, 公式(1)于这种情形下仍然有效(一阶

微分的不变性)。

2° 函数的微小增量的估计 为了计算可微分的函数 $f(x)$ 的微小增量可利用公式

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x) \neq 0$, 当 $|\Delta x|$ 充分小时, 他的相对误差可以任意的小。

特别情形, 若计算自变数 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$, 则函数 $y=f(x)$ 的绝对误差 $|dy|$ 和相对误差 δy 用下列公式近似地表示出来:

$$|dy| = |f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y = |\ln f(x)|' \Delta x = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x \right|。$$

1083 設:

$$(a) \Delta x = 1, \quad (b) \Delta x = 0.1, \quad (B) \Delta x = 0.01,$$

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1。$$

求出: (1) $\Delta f(1)$, (2) $df(1)$, 并比较他们。

1084. 运动方程是

$$x = 5t^3,$$

其中 t 以秒来度量, x 以公尺来度量。設 (a) $\Delta t = 1$ 秒, (b) $\Delta t = 0.1$ 秒, (B) $\Delta t = 0.001$ 秒, 对 $t = 2$ 秒的时刻, 求出路线的增量 Δx 及路线的微分 dx , 并作比较。

求下列函数 y 的微分:

$$\mathbf{1085.} \quad y = \frac{1}{x}。$$

$$\mathbf{1086.} \quad y = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)。$$

$$\mathbf{1087.} \quad y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|。 \quad \mathbf{1088.} \quad y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|。$$

$$\mathbf{1089.} \quad y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)。$$

1090.

$$(a) \quad d(xe^x);$$

$$(b) \quad d(\sin x - x \cos x);$$

$$(B) \quad d\left(-\frac{1}{x^3}\right);$$

$$(r) \quad d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right);$$

$$(D) \quad d(\sqrt{a^2+x^2});$$

$$(e) \quad d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right);$$

$$(K) \quad d \ln(1-x^2);$$

$$(g) \quad d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right);$$

$$(H) \quad d\left[\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right].$$

設 u 、 v 、 w 为 x 的可微分的函数。求函数 y 的微分, 設:

$$1091. \quad y = uvw.$$

$$1092. \quad y = \frac{u}{v^2}.$$

$$1093. \quad y = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

$$1094. \quad y = \arctg \frac{u}{v}.$$

$$1095. \quad y = \ln \sqrt{u^2+v^2}.$$

1096. 求

$$(a) \quad \frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9);$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right);$$

$$(B) \quad \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)};$$

$$(r) \quad \frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}; \quad \text{或} \quad -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$(D) \quad \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}.$$

1097. 有半徑为 $R=100$ 厘米及圓心角 $\alpha=60^\circ$ 的扇形。若
(a) 其半徑 R 增加 1 厘米; (b) 角 α 减小 $30'$, 則扇形面积的变化若干? 求出精确的和近似的解。

1098. 摆振动的周期(以秒計算)按下式确定:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长以公分計, $g=981$ 厘米/每秒² 为重力加速度。

为了使周期 T 增大 0.05 秒, 对摆长 $l=20$ 厘米的长度需要作多少修改?

利用函数之微分代替函数的增量, 求下列各式之近似值:

1099. $\sqrt[3]{1.02}$ 。✓

1100. $\sin 29^\circ$ 。

1101. $\cos 151^\circ$ 。

1102. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1.05$ 。✓

1103. $\lg 11$ 。

1104. 証明近似公式:

$$\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a>0), \quad \vee$$

其中 $|x| \ll a$ (正数 A 和 B 間的关系式 $A \ll B$ 表示 A 与 B 相比較时, A 为高阶无穷小)。

利用这个公式近似地計算:

(a) $\sqrt{5}$; (б) $\sqrt{34}$; (в) $\sqrt{120}$

并与表中的数值比較。

1105. 証明近似公式:

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a>0)。$$

其中 $|x| \ll a$ 。利用此公式近似地計算:

(a) $\sqrt[3]{9}$; (б) $\sqrt[4]{80}$; (в) $\sqrt[5]{100}$; (г) $\sqrt[10]{1000}$ 。

1106. 正方形的边 $x=2.4$ 米 ± 0.05 米。由此計算所得正方形的面积的相对誤差和绝对誤差如何? ✓

1107. 为了計算出球的体积准确到 1%, 問度量球半径 R 时所允許发生的相对誤差如何?

1108. 借助于摆的振动利用公式 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, (其中 l 为摆长, T 为摆振动的全周期) 以求重力加速度。当測量 (a) 摆长 l , (б) 周期 T 时的相对誤差 δ 影响于值 g 几何?

1109. 求数 $x(x>0)$ 的常用对数的绝对誤差, 設此数的相对誤差等于 δ 。

1110. 証明: 根据正切对数表所求得的角度比用具有同样多

位小数的正弦对数表求得的角度更为精确。

§ 5. 高阶的导函数和微分

1° 基本定义 函数 $y=f(x)$ 的高阶导函数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n=2, 3, \dots).$$

函数 $y=f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \quad (n=2, 3, \dots),$$

其中采取 $d^1 y = dy = y' dx$ 。

若 x 为自变数, 则应有:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0.$$

在这种情形下, 下列公式正确

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{及} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2° 基本公式:

$$\text{I. } (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$\text{II. } (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\text{III. } (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\text{IV. } (x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n};$$

$$\text{V. } (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3° 莱布尼兹公式 若函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 有 n 阶导函数(可微分 n 次), 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$, C_n^i 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数。

同样地对于微分 $d^n(uv)$ 得:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i}u d^i v,$$

其中设 $d^0 u = u$ 及 $d^0 v = v$ 。

求 y'' , 设:

1111. $y = x\sqrt{1+x^2}.$

1112. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

1113. $y = e^{-x^2}.$

1114. $y = \operatorname{tg} x.$

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$

1116. $y = \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

1117. $y = x \ln x.$

1118. $y = \ln f(x).$

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)].$

1120. 設 $y = e^{\sin x} \cos(\sin x)$, 求 $y(0)$, $y'(0)$ 及 $y''(0)$.

設 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 为可微分二次的函数。求 y'' , 設:

1121. $y = u^3.$

1122. $y = \ln \frac{u}{v}.$

1123. $y = \sqrt{u^2 + v^2}$

1124. $y = u^v (u > 0).$

設 $f(x)$ 为可微分三次的函数。求 y'' 及 y''' , 設:

1125. $y = f(x^2).$

1126. $y = f\left(\frac{1}{x}\right).$

1127. $y = f(e^x).$

1128. $y = f(\ln x).$

1129. $y = f[\varphi(x)]$, 其中 $\varphi(x)$ 是可多次微分的函数。

1130. 对于下之二种情形: (a) x 为自变量, (b) x 为中间变量, 求函数 $y = e^x$ 的 d^2y .

若 x 为自变数, 求 d^2y , 設:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}.$

1132. $y = \frac{\ln x}{x}.$

1133. $y = x^x.$

令 u 及 v 为变数 x 的可微分两次的函数, 求 d^2y , 設:

1134. $y = uv.$

1135. $y = \frac{u}{v}.$

1136. $y = u^m v^n$ (m 及 n 为常数)。

1137. $y = a^u$ ($a > 0$)。

1138. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$

1139. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{v}.$

求以参数給出的函数 $y=y(x)$ 的导函数 $y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}$, 設:

1140. $x=2t-t^2, y=3t-t^3$. **1141.** $x=a \cos t, y=a \sin t$.

1142. $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

1143. $x=e^t \cos t, y=e^t \sin t$.

1144. $x=f'(t), y=tf'(t)-f(t)$.

1145. 設函数 $y=f(x)$ 是可微分若干次的。求反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导函数 x', x'', x''', x^{IV} (設这些导函数都存在)。

求由下列隐函数給出的 $y=y(x)$ 的 y'_x, y''_{x^2} 及 y'''_{x^3} :

1146. $x^2+y^2=25$ 。在点 $M(3, 4)$ 的 y', y'' 及 y''' 等于甚么?

1147. $y^2=2px$.

1148. $x^2-xy+y^2=1$.

求 y'_x 及 y''_{x^2} , 設:

1149. $y^2+2 \ln y=x^4$.

1150. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\arcsin \frac{y}{x}}$ ($a>0$).

1151. 設函数 $f(x)$ 当 $x \leq x_0$ 时有定义且可微分两次。应当如何選擇系数 a, b 及 c , 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{若 } x > x_0 \end{cases}$$

是可微分两次的函数?

1152. 点作直綫运动的規律为

$$S=10+20t-5t^2,$$

求其运动的速度和加速度。在 $t=2$ 的时刻, 速度与加速度等于甚么?

1153. 点 $M(x, y)$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 均匀地运动, 每 T 秒走完一圈。求点 M 在 Ox 軸上的射影之速度 v 及加速度 j , 設 $t=0$ 时点的位置为 $M_0(a, 0)$ 。

1154. 质点 $M(x, y)$ 在鉛直平面 Oxy 內以初速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛去。建立(空气的阻力略去不計)运动的方程

并计算速度 v 加速度 j 的大小及运动的轨道。最大的高度和射程等于多少？

1155. 点运动的方程为

$$x = 4 \sin \omega t - 3 \cos \omega t, \quad y = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t$$

(ω 为常数)。求运动的轨道, 速度与加速度的大小。

求下列指定的阶的导函数:

1156. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$; 求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$ 。

1157. $y = \frac{a}{x^m}$; 求 y''' 。 **1158.** $y = \sqrt{x}$; 求 $y^{(10)}$ 。

1159. $y = \frac{x^2}{1-x}$; 求 $y^{(8)}$ 。 **1160.** $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; 求 $y^{(100)}$ 。

1161. $y = x^2 e^{2x}$; 求 $y^{(20)}$ 。 **1162.** $y = \frac{e^x}{x}$; 求 $y^{(10)}$ 。

1163. $y = x \ln x$; 求 $y^{(7)}$ 。 **1164.** $y = \frac{\ln x}{x}$; 求 $y^{(5)}$ 。

1165. $y = x^2 \sin 2x$; 求 $y^{(50)}$ 。 **1166.** $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$; 求 y''' 。

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; 求 $y^{(10)}$ 。

1168. $y = x \operatorname{sh} x$; 求 $y^{(100)}$ 。 **1169.** $y = e^x \cos x$; 求 y^{17} 。

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; 求 $y^{(3)}$ 。

于下列各例中, 视 x 为自变数, 求指定的阶的微分。

1171. $y = x^5$; 求 $d^5 y$ 。 **1172.** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 求 $d^3 y$ 。

1173. $y = x \cos 2x$; 求 $d^{10} y$ 。 **1174.** $y = e^x \ln x$; 求 $d^4 y$ 。

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; 求 $d^6 y$ 。

设 u 为 x 的可微分足够多次的函数, 于下列各例中求指定的阶的微分。

1176. $y = u^2$; 求 $d^{10} y$ 。 **1177.** $y = e^u$; 求 $d^4 y$ 。

1178. $y = \ln u$; 求 $d^3 y$ 。

1179. 視 x 为某个自变数的函数, 由函数 $y=f(x)$ 求 d^2y , d^3y 及 d^4y 。

1180. 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y=f(x)$ 的导函数 y'' 及 y''' , 但不假定 x 为自变量。

1181. 証明: 函数

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' + y = 0.$$

1182. 証明: 函数

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' - y = 0.$$

1183. 証明: 函数

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, λ_1 及 λ_2 为常数, 满足方程

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0.$$

1184. 証明: 函数

$$y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)],$$

其中 C_1 及 C_2 为任意常数, n 为常数, 满足方程:

$$x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0.$$

1185. 証明: 函数

$$\begin{aligned} y = & e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

其中 C_1 、 C_2 、 C_3 及 C_4 为任意常数, 满足方程

$$y^{IV} + y = 0.$$

1186. 証明: 若函数 $f(x)$ 有 n 阶导函数, 則

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

• **1187.** 若

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

求 $P^{(n)}(x)$ 。

求 $y^{(n)}$, 設:

1188. $y = \frac{ax+b}{cx+d}.$

• **1189.** $y = \frac{1}{x(1-x)}.$

• **1190.** $y = \frac{1}{x^3 - 3x - 2}.$

提示 分解已知的函数为最简分式。

1191. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$

1192. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$

1193. $y = \sin^2 x.$

1194. $y = \cos^2 x.$

1195. $y = \sin^3 x.$

1196. $y = \cos^3 x.$

1197. $y = \sin ax \sin bx.$

1198. $y = \cos ax \cos bx.$

1199. $y = \sin ax \cos bx.$

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx.$

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

1202. $y = x \cos ax.$

1203. $y = x^2 \sin ax.$

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$

• **1205.** $y = \frac{e^x}{x}.$

1206. $y = e^x \cos x.$

1207. $y = e^x \sin x.$

1208. $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}.$

• **1209.** $y = e^{ax} P(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式。

1210. $y = x \operatorname{sh} x.$

1211. 求 $d^n y$, 設 $y = x^n e^x.$

1212. 求 $d^n y$, 設 $y = \frac{\ln x}{x}.$

1213. 証明等式:

$$(1) [e^{ax} \sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx+c+n\varphi)$$

及 (2) $[e^{ax} \cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx+c+n\varphi)$,

其中 $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 。

1214. 求 $y^{(n)}$, 設:

$$(a) \ y = \operatorname{ch} ax \cos bx; \quad (b) \ y = \operatorname{ch} ax \sin bx;$$

1215. 將函数

$$f(x) = \sin^{2p} x,$$

其中 p 为自然数, 化为三角多项式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$ 。

提示 設: $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$,

其中 $t = \cos x + i \sin x$ 及 $\bar{t} = \cos x - i \sin x$, 并且利用棣莫弗公式来计算。

1216. 設:

$$(a) \ f(x) = \sin^{2p+1} x; \quad (b) \ f(x) = \cos^{2p} x;$$

$$(B) \ f(x) = \cos^{2p+1} x,$$

其中 p 为正整数, 求 $f^{(n)}(x)$ 。(参阅前题)

若 $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$,

其中 $i = \sqrt{-1}$ 及 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 为实变量 x 的实函数, 則按定义有:

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)。$$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$$

証明

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1) \operatorname{arctg} x]。$$

提示 利用求莫弗公式。

1218. 求函数 $f(x) = \operatorname{arctg} x$ 的 n 阶导函数。

求 $f^{(n)}(0)$, 設:

1219. (a) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$; (b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$,

1220. (a) $f(x) = x^2 e^{ax}$; (b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
(B) $f(x) = \arcsin x$ 。

1221. (a) $f(x) = \cos(n \arcsin x)$;

(b) $f(x) = \sin(n \arcsin x)$ 。

1222. (a) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$; (b) $f(x) = (\arcsin x)^2$ 。

1223. 設

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 于 a 点的邻区内有 $(n-1)$ 阶的連續导函数, 求 $f^{(n)}(a)$ 。

1224. 証明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

(n 为自然数), 于点 $x=0$ 有一直到 n 阶的导函数, 而无 $(n+1)$ 阶导函数。

1225. 証明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

在 $x=0$ 处是无穷次可微分的。作出此函数的图形。

1226. 証明: 契比协夫多項式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

1227. 証明: 勒襄德多項式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

提示 把等式 $(x^2-1)u' = 2mxu$, 作 $m+1$ 次微分, 其中

$$u = (x^2-1)^m,$$

1228. 契比协夫-拉格耳多項式定义如下:

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

求多項式 $L_m(x)$ 的明显的表达式。

証明: $L_m(x)$ 满足方程:

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

提示 利用等式 $xu' + (x-m)u = 0$, 其中 $u = x^m e^{-x}$.

1229. 設 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$, 其中 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 为可微分 n 次的函数。

証明:
$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) 与函数 $f(u)$ 无关。

1230. 証明: 对于复合函数 $y = f(x^2)$ 的 n 阶导函数, 下面的公式正确:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= (2n)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \dots \end{aligned}$$

1231. 契比协夫-厄耳米特多項式定义如下:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的明显的表达式。

证明: $H_m(x)$ 满足方程:

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

提示 利用等式 $u' - 2xu = 0$, 其中 $u = e^{-x^2}$ 。

1232. 证明等式:

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$$

提示 运用数学归纳法。

1233. 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子,

理科阅览室

$$f(D) = \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k$$

为微分符号的多项式, 其中 $p_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) 为 x 的某连续函数。

证明:

$$f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D+\lambda) u(x),$$

其中 λ 为常数。

1234. 证明: 若于方程

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

中, 令

$$x = e^t,$$

其中 t 为自变数, 则此方程具有下形:

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$ 。

§ 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理

1° 洛尔定理 若函数 $f(x)$: (1) 在閉区間 $[a, b]$ 上有定义并且是連續的; (2) 在此区間内有有限的导函数 $f'(x)$; (3) $f(a) = f(b)$, 則至少存在有一个数 c 于区間 (a, b) 內, 使

$$f'(c) = 0, \quad \text{其中 } a < c < b.$$

2° 拉格朗日定理 若函数 $f(x)$: (1) 在閉区間 $[a, b]$ 上有定义并且是連續的; (2) 在区間 (a, b) 內有有限的导函数, 則

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \quad \text{其中 } a < c < b$$

(有限增量公式)。

3° 哥西定理 若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$: (1) 在閉区間 $[a, b]$ 上有定义并且是連續的; (2) 于 (a, b) 內 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导函数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$; (3) 当 $a < x < b$, $f'(x) + g'(x) \neq 0$; (4) $g(a) \neq g(b)$, 則

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad \text{其中 } a < c < b.$$

1235. 檢驗洛尔定理对于函数

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

的正确性。

1236. 函数

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^3}$$

当 $x_1 = -1$ 及 $x_2 = 1$ 时为零, 但是当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f'(x) \neq 0$ 。說明与洛尔定理表面上的矛盾。

1237. 設函数 $f(x)$ 于有穷或无穷的区間 (a, b) 中的任意一点有有限的导函数 $f'(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

証明: $f'(c) = 0$,

其中 c 为区間 (a, b) 中的某点。

1238. 設函数 $f(x)$: (1) 于閉区間 $[x_0, x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的連續导函数 $f^{(n-1)}(x)$; (2) 于区間 (x_0, x_n) 內有 n 阶导

函数 $f^{(n)}(x)$; (3) 有下面的等式成立

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n),$$

証明：在区間 (x_0, x_n) 內最少有一点 ξ , 使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. 設函数 $f(x)$: (1) 于閉区間 $[a, b]$ 上有定义且有 $(p+q)$ 阶的連續导函数 $f^{(p+q)}(x)$; (2) 在区間 (a, b) 內有 $(p+q+1)$ 阶的导函数 $f^{(p+q+1)}(x)$; (3) 有下面的等式成立:

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0$$

及 $f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$

証明：在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为区間 (a, b) 內的某点

1240. 証明：若其实系数 $a_k (k=0, 1, \cdots, n)$ 的多項式

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$

之一切根为实数, 則其逐次的导函数 $P'_n(x)$, $P''_n(x)$, \cdots , $P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根。

1241. 証明：勒襄德多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{ (x^2 - 1)^n \}$$

的一切根都是实数且包含于区間 $(-1, 1)$ 中。

1242. 証明：契比协夫-拉格耳多項式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

所有的根都是正数。

1243. 証明：契比协夫-厄耳米特多項式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

所有的根都是实数。

1244. 在曲线 $y = x^3$ 上某点的切线，平行于连接点 $A(-1, -1)$ 及点 $B(2, 8)$ 所成的弦，求出此点。

1245. 若 $ab < 0$ ，有限增量的公式对于函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是否正确？

1246. 設：

$$(a) f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0); \quad (b) f(x) = x^3;$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x}; \quad (r) f(x) = e^x.$$

求滿足

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

的函数 $\theta = \theta(x, \Delta x)$ 。

1247. 証明：若 $x \geq 0$ ，則

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2},$$

并且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

1248.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上对于函数 $f(x)$ 求有限增量公式中的中间值 c 。

1249. 設：

$$f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)],$$

其中

$$0 < \xi(x) < x.$$

証明：若

$$f(x) = x \sin(\ln x) \quad (x > 0)$$

及 $f(0) = 0$,

則函数 $\xi = \xi(x)$ 于任意小的区間 $(0, \varepsilon)$ 内 (于此 $\varepsilon > 0$) 是不連續的。

1250. 設函数 $f(x)$ 于区間 (a, b) 内有連續的导函数 $f'(x)$ 。对于区間 (a, b) 内任何一点 ξ 可否从此区間中指出另外的两点 x_1 及 x_2 使滿足于

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

研究一个例子;

$$f(x) = x^3 \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

其中 $\xi = 0$ 。

1251. 証明下列不等式:

$$(a) \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$$

$$(b) \quad \text{若 } 0 < y < x \text{ 及 } p > 1, \quad py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y);$$

$$(B) \quad |\operatorname{arc} \operatorname{tg} a - \operatorname{arc} \operatorname{tg} b| \leq |a - b|;$$

$$(r) \quad \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \quad \text{設 } 0 < b < a.$$

1252. 說明在閉区間 $[-1, 1]$ 上哥希定理对于函数 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x^3$ 何以不真?

1253. 設函数 $f(x)$ 在閉区間 $[x_1, x_2]$ 上可微分, 并且 $x_1 x_2 > 0$ 。証明

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$ 。

1254. 証明: 若函数 $f(x)$ 于有穷的区間 (a, b) 内可微分, 但无界, 則其导函数 $f'(x)$ 于区間 (a, b) 内也无界。逆定理不真; 举出例子。

1255. 証明：若函数 $f(x)$ 于有穷或无穷的区間 (a, b) 内有有界的导函数 $f'(x)$ ，則 $f(x)$ 于 (a, b) 中均匀連續。

1256. 証明：若函数 $f(x)$ 于无穷的区間 $(x_0, +\infty)$ 内可微分，且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0,$$

則

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即：当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) = o(x)$ 。

1257. 証明：若函数 $f(x)$ 于无穷的区間 $(x_0, +\infty)$ 内可微分且当

$$x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = o(x);$$

則

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

1258. (a) 証明若函数 $f(x)$ ：(1) 在閉区間 $[x_0, X]$ 上有定义并且是連續的；(2) 于区間 (x_0, X) 内有有限的导函数 $f'(x)$ ；(3) 有有限或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0),$$

則有有限或无穷的單側导函数 $f'_+(x_0)$ 且

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

(6) 証明函数

$$f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \text{ 及 } f(1) = 0$$

有有限的极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x),$$

但是函数 $f(x)$ 沒有單側的导函数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 。

作这个事实的几何图解。

1259. 証明：若当 $a < x < b$ 时， $f'(x) = 0$ ，則当

$a < x < b$ 时, $f(x) = \text{常数}$ 。

✓1260. 証明: 导函数为常数

$$f'(x) = k$$

的唯一函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是綫性函数:

$$f(x) = kx + b_0$$

✓1261. 設 $f^{(n)}(x) = 0$, 則函数 $f(x)$ 有什么性质?

✓1262. 証明: 滿足方程

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{常数})$$

的唯一函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数:

$$y = Ce^{\lambda x}, \quad \text{其中 } C \text{ 为任意常数。}$$

提示 研究 $(ye^{-\lambda x})'$ 。

✓1263. 檢驗函数

$$f(x) = \arctg \frac{x+a}{1-ax}$$

及

$$g(x) = \arctg x$$

于范围: (1) $x < 1$ 及 (2) $x > 1$ 内有相同的导函数。

推出这些函数間的关系。

✓1264. 証明下列恒等式:

$$(a) \quad 2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x, \quad \text{当 } |x| \geq 1;$$

$$(b) \quad 3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi, \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

✓1265. 証明: 若函数 $f(x)$ (1) 在閉区間 $[a, b]$ 上是連續的; (2) 于此綫段内有有穷的导函数 $f'(x)$; (3) 非綫性函数, 則于区間 (a, b) 内至少能找到一点 c , 滿足

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

作出这事实的几何图解釋。

1266 若函数 $f(x)$: (1) 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导函数 $f''(x)$ 及 (2) $f'(a) = f'(b) = 0$, 则在区间 (a, b) 内至少存在有一点 c , 满足

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

1267. 汽车从某点开始行驶, 于 t 秒钟内走完了路程, 于此时间内经过了距离 s 米。证明汽车运动的加速度的绝对值在某瞬时不小于 $\frac{4s}{t^2}$ 米/秒²。

§7. 函数的增大与减小 不等式

1° 函数的增大和减小 若当

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \text{ 时, } f(x_2) > f(x_1)$$

[或当 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$]。则称函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上 增大(或对应地减小)。

若可微分的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上增大(或减小), 则当

$$a \leq x \leq b \text{ 时, } f'(x) \geq 0$$

[或对应地当 $a \leq x \leq b$ 时, $f'(x) \leq 0$]。

2° 函数增大(或减小)的充分条件 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的, 并且在其内有正的(或负的)导函数 $f'(x)$, 则函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 内增大(或对应地减小)。

求下列函数在严格意义上的单调(增大或减小)的区间:

1268. $y = 2 + x - x^2$ 。

1269. $y = 3x - x^3$ 。

1270. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 。

1271. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100} \quad (x \geq 0)$ 。

1272. $y = x + \sin x$ 。

1273. $y = x + \sin 2x$ 。

1274. $y = \cos \frac{\pi}{x}$ 。

1275. $y = \frac{x^2}{2^x}$ 。

1276. $y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x \geq 0)$ 。

1277. $y = x^2 - \ln x^2$ 。

1278. 若 $x > 0$, $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$ 及 $f(0) = 0$.

1279. 证明: 内接于圆的正 n 边形, 当边的数目 n 增加时, 其周界 p_n 增加, 而外切于此圆的正 n 边形的周界 P_n 则减小. 利用这点来证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, p_n 及 P_n 有相同的极限.

1280. 证明: 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

于区间 $(-\infty, -1)$ 及 $(0, +\infty)$ 内增大.

1281. 证明: 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的 (就严格的意义而言), 其中 x_0 为充分大的正数.

1282. 证明有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} \quad (m+n \geq 1, a_nb_m \neq 0)$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的 (就严格的意义而言), 其中 x_0 为充分大的正数.

1283. 单调函数的导函数是否也必为单调的?

研究一个例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

1284. 证明: 若 $\varphi(x)$ 为单调增大的可微分的函数, 且当

$$x \geq x_0 \text{ 时, } |f'(x)| \leq \varphi'(x),$$

则当 $x \geq x_0$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)$.

对这个事实作几何的解释.

1285. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x < +\infty$ 内是连续的, 而且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数. 证明: 若 $f(a) < 0$, 则于区间 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x) = 0$ 有一而且仅有一实根.

1286. 若于某邻域 $x - x_0 < \delta$ 内, 函数增量 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ 的符号与自变数增量 $\Delta x_0 = x - x_0$ 的符号相同, 函数 $f(x)$ 称为在 x_0 点增大。

証明若函数 $f(x)$ ($a < x < b$) 于有穷或无穷的区間 (a, b) 内的每一点增大, 則它在此区間内为增函数。

1287. 証明: 函数

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ 若 } x \neq 0 \text{ 及 } f(0) = 0,$$

于点 $x=0$ 增大, 但在含这点的任何区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中并非增大的, 其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的数。作出此函数的略图。

1288. 証明定理: 設 (1) 函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 可微分 n 次; (2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$); (3) 当 $x > x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 則当 $x > x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x) > \psi(x)。$$

1289. 証明下列不等式:

(a) 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1 + x$;

(б) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$;

(в) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$;

(г) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$;

(д) 当 $x > 0, y > 0$ 及 $0 < \alpha < \beta$ 时, $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ 。

作不等式 (a) — (г) 的几何解釋。

1290. 証明不等式

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x,$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时成立。

1291. 証明当 $x > 0$ 时有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. 等差級数与等比級数的項的数目相同且有相同的首項与末項, 他們的一切項都是正的。証明等差級数各項的和大于等比級数各項的和。

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

其中 $x, a_k, b_k (k=1, \dots, n)$ 为实数, 来証明哥西-布尼雅柯夫斯基不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1294. 証明: 正数的算术平均数不大于这些数的平方的平均数, 即是

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

1295. 証明: 正数的几何平均数不大于这些数的算术平均数, 即是

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

提示 用数学归纳法。

1296. 設 a 及 b 为二正数, 則由下之等式

$$\text{若 } s \neq 0, \quad \Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b)$$

所定义之函数称为正数 a 及 b 之 s 阶平均数。

特別是, 当 $s = -1$ 时得調和平均数, 当 $s = 0$ 时得几何平均数 (試証之!); 当 $s = 1$ 时得算术平均数; 当 $s = 2$ 时得平方平均数。

- 証明: (1) $\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b)$;
 (2) 当 $a \neq b$ 时, 函数 $\Delta_s(a, b)$ 是变量 s 的增函数;
 (3) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$; $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$ 。

提示 考虑 $\frac{d}{ds} [\ln \Delta_s(a, b)]$ 。

1297. 設 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 为可微分二次的函数及

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k=0, 1, 2)。$$

証明不等式:

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2。$$

提示 研究函数 $F(x) = f'(x)^2 - 2M_2f(x)$ 。

§ 8. 凹凸性、拐点

1° 凹的充分条件 若曲线 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 的一段, 位于其任意一点的切线之上(或之下), 則称这个可微分的函数 $y=f(x)$ 的图形于閉区間 $[a, b]$ 上是凹(或对应地, 凸)的。在假設二阶导函数 $f''(x)$ 存在的情况下, 当 $a < x < b$ 时不等式

$$f''(x) > 0 \quad [\text{或对应地 } f''(x) < 0]$$

成立, 为图形是凹(或对应地, 凸)的充分条件。

2° 拐点的充分条件 若函数的图形在某点的凹凸性改变, 則称此点为拐点。

若在点 x_0 , 或是 $f''(x_0) = 0$, 或是 $f''(x_0)$ 不存在, 且当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 变号, 則 x_0 便是拐点。

1298. 研究曲线

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

于 $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ 及 $C(0, 0)$ 諸点的凹凸性。

求下列函数的图形的凹或凸的区域及拐点:

$$\mathbf{1299.} \quad y = 3x^3 - x^5. \qquad \mathbf{1300.} \quad y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)。$$

1301. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$ 。

1302. $y = \sqrt{1+x^2}$ 。

1303. $y = x + \sin x$ 。

1304. $y = e^{-x^2}$ 。

1305. $y = \ln(1+x^2)$ 。

1306. $y = x \sin(\ln x) (x > 0)$ 。

1307. $y = x^x (x > 0)$ 。

1308. 証明曲綫

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直綫上的三个拐点。作出这个函数的图形。

1309. 当如何选择参变数 h 时, “概率曲綫”

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (h > 0)$$

有拐点 $x = \pm \sigma$?

1310. 研究摆綫(旋輪綫)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$$

的凹、凸性。

1311. 設函数 $f(x)$ 于区間 $a \leq x < +\infty$ 中可微分二次, 并且:

(1) $f(a) = A > 0$; (2) $f'(a) < 0$; (3) 当 $x > a$, $f''(x) \leq 0$ 。

証明: 在区間 $(a, +\infty)$ 内有而且仅有方程 $f(x) = 0$ 之一实根。

1312. 若对于区間 (a, b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意二数 λ_1 与 λ_2 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 有不等式:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

[或对应地, 相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$], 則称函数 $f(x)$ 于区間 (a, b) 上是凹(凸)的。

証明: 函数 $f(x)$ (1) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) > 0$, 則于 (a, b) 上是凹的; (2) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) < 0$, 則于 (a, b) 上是凸的。

1313. 証明: 函数

$$x^n \quad (n > 1), \quad e^x, \quad x \ln x$$

于區間 $(0, +\infty)$ 上是凹的；而函數

$$x^n \quad (0 < n < 1), \ln x$$

于區間 $(0, +\infty)$ 上是凸的。

1314. 證明下列不等式，並解釋其幾何意義：

$$(a) \quad \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$(b) \quad \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$(c) \quad x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, \text{ 若 } x > 0 \text{ 及 } y > 0.$$

1315. 證明有界的凸的函數處處連續，並有左側及右側的導函數。

1316. 設函數 $f(x)$ 于區間 (a, b) 內可微分二次，且 $f''(\xi) \neq 0$ ，其中 $a < \xi < b$ 。證明：在區間 (a, b) 中可找出兩個值 x_1 與 x_2 ，滿足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

1317. 證明：若函數 $f(x)$ 在無窮的區間 $(x_0, +\infty)$ 內可微分兩次，且

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

則在區間 $(x_0, +\infty)$ 內最少有一點 ξ ，滿足 $f''(\xi) = 0$ 。

§ 9. 未定形的求值法

洛比塔第一法則（未定形 $\frac{0}{0}$ 的求值法） 若 (1) 函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 a 點的某鄰域 U_a ① 內有定義並且是連續的（此處 a 為數字或符號 ∞ ），並且當

① 所謂 a 點的鄰域 U_a 系指適合于不等式

(1) $|x-a| < \varepsilon$ 若 a 為一個數，及 (2) $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ ，若 a 為符號 ∞ ， x 的集合。

$x \rightarrow a$ 时, 这两个函数都趋近于零:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

(2) 在 a 点的邻域 U_a 内, 除 a 点而外, 在其余各点导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在, 并且当 $x \neq a$ 时, 二者不同时为零; (3) 有限或无穷的极限值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

洛比塔第二法则 (不定形 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法) 若: (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二者都趋于无穷大:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

其中 a 为有限数或符号 ∞ ;

(2) 对于属于 a 点的邻域 U_a 而异于 a 的一切 x 值, 导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在, 并且当 $x \in U_a$ 及 $x \neq a$ 时,

$$f'(x) + g'(x) \neq 0.$$

(3) 有穷或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法, 可使未定形 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^\circ$ 等的求值法化为前面两个类型的未定形:

$$\frac{0}{0} \text{ 与 } \frac{\infty}{\infty}$$

的求值法。

求出下列各式之值:

$$1318. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

$$1319. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}.$$

$$1320. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

$$1321. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}.$$

$$1322. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$1323. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}.$$

$$1324. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$1325. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$1326. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$1327. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}.$$

$$1328. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctg \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctg \sqrt{\frac{x}{b}} \right).$$

$$1329. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a > 0).$$

$$1330. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^x - x}{\ln e - x + 1} \right). \quad 1331. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}.$$

$$1332. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}. \quad 1333. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

$$1334. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$1335. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{ar sh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x},$$

其中 $\operatorname{ar sh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$1336. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0). \quad 1337. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0).$$

$$1338. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$$

$$1339. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}.$$

$$1340. \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x). \quad 1341. \lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \ln x \quad (\varepsilon > 0).$$

$$1342. \lim_{x \rightarrow +0} x^x. \quad 1343. \lim_{x \rightarrow 0} x^{x^2-1}.$$

$$1344. \lim_{x \rightarrow 0} (x^{e^x} - 1). \quad 1345. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}.$$

$$1346. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}. \quad 1347. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{2} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$1348. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$1349. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

$$1350. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$1351. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1352. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}.$$

$$1353. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$1354. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$1355. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$1356. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$1357. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$$

$$1358. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0). \quad 1359. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

$$1360. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$1361. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^x. \quad 1362. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x.$$

$$1363. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arcsin} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}. \quad 1364. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

$$1365. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arccos} x \right)^{\frac{1}{x}}. \quad 1366. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$1367. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[n]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}. \quad 1368. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x}.$$

$$1369. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right].$$

$$1370. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \right].$$

1371. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点 $(0, 0)$ [$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$], 且在此有斜角 a , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = 0.$$

○1372. 若当 $x \rightarrow +0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点 $(0, 0)$ [$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$] 并且当 $0 < x < \varepsilon$ 时, 此曲线完全是在两直线 $y = -kx$ 及 $y = kx$ ($k \neq \infty$) 所组成的锐角之内, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

1373. 证明: 若函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 存在, 则

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

1374. 研究运用洛比塔法则于下列各例的可能性:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x) + e^{-x} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)};$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}}.$$

1375. 设有一弓形, 其弦为 b , 矢为 h , 又有内接于此弓形之内的等腰三角形。若当 R 不变时弓形的弧趋近于零, 求弓形面积与内接等腰三角形面积之比。利用所得之结果推出计算弓形面积之近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3} bh.$$

§ 10. 台劳公式

1° 台劳局部公式 若 (1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x-x_0| < \varepsilon$ 内有定义; (2) 于此邻域内有一直到 $(n-1)$ 阶的导函数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) n 级导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 于 x_0 点存在, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o(|x-x_0|^n), \quad (1)$$

其中
$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k=0, 1, \dots, n)。$$

特例, 当 $x_0=0$ 时, 有:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(|x|^n)。 \quad (2)$$

在所示的条件下, (1)式是唯一的。

从台劳局部公式(2), 得出下列五个重要的展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n); \end{aligned}$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)。$$

2° 台劳公式 若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义; (2) 在此闭区间上有连续的导函数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) 当 $a < x < b$ 时, 有有限值的导函数 $f^{(n)}(x)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日余项公式), 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!} (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(哥希余项公式)。

1376. 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

表成二项式 $x+1$ 的正整数乘幂多项式。

按变数 x 的正整数乘幂，写出下列函数的展开式至含有指出阶数的项：

1377. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项。 $f^{(4)}(0)$ 等于甚么？

1378. $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1-2x)^{60}}$ 到含 x^2 的项。

1379. $\sqrt[n]{a^n+x}$ ($a>0$) 到含 x^2 的项。

1380. $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项。

1381. e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项。 1382. $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项。

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项。

1384. $\ln \cos x$ 到含 x^6 的项。 1385. $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项。

1386. $\operatorname{tg} x$ 到含 x^5 的项。 1387. $\ln \frac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项。

1388. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 正整数乘幂展开式的前三项。

1389. 将函数 $f(x) = x^2 - 1$ 按照 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开至含有 $(x-1)^3$ 的项。

1390. 于点 $x=0$ 的邻域中，用二阶抛物线近似地代替函数

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad (a>0)。$$

1391. 按分式 $\frac{1}{x}$ 的正整数乘幂展开函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ ($x>0$) 到含 $\frac{1}{x^3}$ 的项。

1392. 求函数 $f(h) = \ln(x+h)$ ($x>0$) 按增量 h 的正整数乘幂展开式到含 h^n 的项 (n 为自然数)。

1393. 設：

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$$

$(0 < \theta < 1)$, 且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ 。証明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta = \frac{1}{n+1}。$$

1394. 估計下列近似公式的絕對誤差:

(a) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 当 $0 \leq x \leq 1$;

(б) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ 当 $|x| \leq \frac{1}{2}$;

(в) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ 当 $|x| \leq 0.1$;

(г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ 当 $0 \leq x \leq 1$ 。

1395. 近似公式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

对于怎样的 x 准确到 0.0001。

1396. 利用台劳公式近似地計算:

(a) $\sqrt[3]{30}$; (б) $\sqrt[5]{250}$; (в) $\sqrt[12]{4000}$;

(г) \sqrt{e} ; (д) $\sin 18^\circ$; (e) $\ln 1.2$;

(ж) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 0.8$; (з) $\operatorname{arcsin} 0.45$; (и) $(1.1)^{1.2}$

并估計誤差。

1397. 計算:

(a) e 准确到 10^{-3} ; (б) $\sin 1^\circ$ 准确到 10^{-8} ;

(в) $\cos 9^\circ$ 准确到 10^{-5} ; (г) $\sqrt{5}$ 准确到 10^{-4} ;

(д) $\log_{10} 11$ 准确到 10^{-6} 。

利用展开式 $1-V$, 求下列极限:

1398. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; **1399** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ 。

1400. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$ 。

$$1401. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^6 + x^5} - \sqrt[3]{x^6 - x^5}).$$

$$1402. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right].$$

$$1403. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$1404. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$1405. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right), \quad 1406. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right).$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 求出无穷小量 y 的形如 Cx^n (C 为常数) 的主项, 假设:

$$1407. y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x).$$

$$1408. y = (1+x)^x - 1, \quad 1409. y = 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{e}}}{e}.$$

$$1410. \text{当选择怎样的系数 } a \text{ 与 } b \text{ 时, 量} \\ x - (a + b \cos x) \sin x$$

对于 x 为 5 阶无穷小?

1411. 当 $|x|$ 为小量时, 推出下列各式的简单的近似公式:

$$(a) \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} \quad (R > 0);$$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}; \quad (B) \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-x} \right];$$

$$(r) \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)}.$$

1412. 当 x 的绝对值为小量时, 推出形如

$$x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

且准确到 x^5 项的近似公式。

把这个公式用于小角度的弧长的近似求法。

1413. 估計下面的契比协夫法則的相对誤差: 圓弧近似地等于等腰三角形两腰的和, 此等腰三角形是立于弧所对的弦上, 并且高为此弓形之矢的 $\sqrt{\frac{4}{3}}$ 。

§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1° 有极值的必要条件 若函数于点 x_0 的两侧邻域中有定义, 并且对于某域: $0 < |x - x_0| < \delta$ 內的一切点 x , 有下列的不等式成立:

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{或} \quad f(x) > f(x_0).$$

則說函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值(极大值或极小值)。

在有极值的点导函数 $f'(x_0) = 0$ (假定它存在)。

2° 有极值的充分条件 第一法則: 若 (1) 函数 $f(x)$ 于点 x_0 的某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 內有定义并且是連續的, 且在 x_0 点, $f'(x_0) = 0$ 或不存在(临界点); (2) $f(x)$ 在范围: $0 < |x - x_0| < \delta$ 內有有限值的导函数 $f'(x)$; (3) 导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号, 則函数 $f(x)$ 的性质用下表表示出来:

	导 函 数 的 符 号		結 論
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	无 极 值
II	+	-	极 大 值
III	-	+	极 小 值
IV	-	-	无 极 值

第二法則: 若函数 $f(x)$ 有二阶导函数 $f''(x)$, 并且在点 x_0 有下列条件成立:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{与} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

則函数 $f(x)$ 在此点有极值, 就是說: 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 有极大值; 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 有极小值。

第三法則: 設函数 $f(x)$ 于某区間 $|x - x_0| < \delta$ 內有导函数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$, 并且在点 x_0 有导函数 $f^{(n)}(x_0)$, 及

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k=1, \dots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

这时：(1)若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值，就是说，当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时有极小值；(2)若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值。

3° 绝对极值 在闭区间 $[a, b]$ 内，连续函数 $f(x)$ ，或于其临界点（就是导函数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点），或于所给闭区间的端点 a 和 b ，达到其最大（最小）值。

研究下列函数的极值：

$$1414. \quad y = 2 + x - x^2.$$

$$1415. \quad y = (x-1)^3.$$

$$1416. \quad y = (x-1)^4.$$

$$1417. \quad y = x^m(1-x)^n \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为正整数}).$$

$$1418. \quad y = \cos x + \operatorname{ch} x.$$

$$1419. \quad y = (x+1)^{10}e^{-x}.$$

$$1420. \quad y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} \quad (n \text{ 为自然数}).$$

$$1421. \quad y = |x|.$$

$$1422. \quad y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}.$$

1423. 函数

$$f(x) = (x-x_0)^n \varphi(x)$$

(n 为自然数)，其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续及 $\varphi(x_0) \neq 0$ 。研究此函数在点 $x=x_0$ 的极值。

1424. 设：

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)},$$

及 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点，就是说

$$P_1(x_0) = 0, \quad Q(x_0) \neq 0.$$

证明： $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0)$ 。

1425. 可否断定下面的事实：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值。则在此点的某充分小邻域内，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧上升，而右侧下降？

研究一个例子：若

$$x \neq 0, \quad f(x) = 2 - x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \quad \text{及} \quad f(0) = 2。$$

1426. 已給函数

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{当} \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0。$$

証明: 虽然

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 有极小值。

作出此函数的图形。

1427. 研究下列函数的极值:

$$(a) \quad \text{当} \quad x \neq 0 \quad \text{时}, \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right) \quad \text{及} \quad f(0) = 0;$$

$$(b) \quad \text{当} \quad x \neq 0 \quad \text{时}, \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right) \quad \text{及} \quad f(0) = 0。$$

作出这些函数的图形。

1428. 已給函数

$$f(x) = |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right) \quad \text{当} \quad x \neq 0; \quad f(0) = 0,$$

研究此函数于点 $x=0$ 处的极值, 并作出此函数的图形。

求下列函数的极值:

$$\mathbf{1429} \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4. \quad \mathbf{1430.} \quad y = 2x^2 - x^4.$$

$$\mathbf{1431.} \quad y = x(x-1)^2(x-2)^3. \quad \mathbf{1432.} \quad y = x + \frac{1}{x}。$$

$$\mathbf{1433.} \quad y = \frac{2x}{1+x^2}. \quad \mathbf{1434.} \quad y = \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x+1}。$$

$$\mathbf{1435.} \quad y = \sqrt{2x-x^2}. \quad \mathbf{1436.} \quad y = x\sqrt[3]{x-1}。$$

$$\mathbf{1437.} \quad y = xe^{-x}. \quad \mathbf{1438.} \quad y = \sqrt{x} \ln x。$$

$$\mathbf{1439} \quad y = \frac{\ln^2 x}{x}. \quad \mathbf{1440} \quad y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x。$$

$$\mathbf{1441.} \quad y = \frac{10}{1+\sin^2 x}。$$

$$1442. y = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$1443. y = e^x \sin x.$$

$$1444. y = x[e^{-(x-1)}].$$

求下列函数的最大值和最小值：

$$1445. f(x) = 2^x \quad \text{在閉區間} [-1, 5] \text{上。}$$

$$1446. f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad \text{在閉區間} [-3, 10] \text{上。}$$

$$1447. f(x) = |x^3 - 3x + 2| \quad \text{在閉區間} [-10, 10] \text{上。}$$

$$1448. f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{在閉區間} [0.01, 100] \text{上。}$$

$$1449. f(x) = \sqrt{5-4x} \quad \text{在閉區間} [-1, 1] \text{上。}$$

求下列函数的下界(inf)与上界(sup)：

$$1450. f(x) = xe^{-0.01x} \quad \text{在區間} (0, +\infty) \text{內。}$$

$$1451. f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} \quad \text{在區間} (0, +\infty) \text{內。}$$

$$1452. f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} \quad \text{在區間} (0, +\infty) \text{內。}$$

$$1453. f(x) = e^{-x^2} \cos x^2 \quad \text{在區間} (-\infty, +\infty) \text{內。}$$

$$1454. \text{求函数 } f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2} \text{ 在區間 } x < \xi < +\infty \text{ 內的下界}$$

与上界。

作出下列函数的图形：

$$m(x) = \inf_{x < \xi < +\infty} f(\xi)$$

及

$$M(x) = \sup_{x < \xi < +\infty} f(\xi).$$

1455. 求以下各叙列的最大項：

$$(a) \frac{n^{10}}{2^n} (n=1, 2, \cdots); \quad (b) \frac{\sqrt{n}}{n+10000} (n=1, 2, \cdots);$$

$$(B) \sqrt[n]{n} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

1456. 証明下列不等式：

(e) 当 $|x| \leq 2$ 时, $|3x - x^3| \leq 2$;

(f) 若 $0 \leq x \leq 1$ 及 $p > 1$, 则 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$;

(g) 当 $m > 0, n > 0$ 及 $0 \leq x \leq a$ 时,

$$x^m(a-x)^n \leq \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n};$$

(h) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a \quad (x > 0, a > 0, n > 1);$

(i) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$

1457. 求多项式

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间 $[-2, 1]$ 上“与零的差”, 就是求

$$E_p = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

1458. 应当选择怎样的系数 q , 使多项式

$$P(x) = x^2 + q$$

在闭区间 $[-1, 1]$ 上与零的差最小, 即

$$E_p = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min.$$

1459. 数

$$\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

称为函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上的绝对差。

求函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的绝对差。

1460. 于闭区间 $[x_1, x_2]$ 上用线性函数

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

近似地代替函数

$$f(x) = x^2$$

使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对差 (参阅上题) 为最小, 并求此最小的绝对差。

1461. 求函数

$$f(x) = \max \{2|x|, |1+x|\}$$

的极小值。

确定下列各方程实根的数目,并定出这些根所在的范围:

$$1462. x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0. \quad 1463. x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0,$$

$$1464. 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$$

$$1465. x^5 - 5x = a. \quad 1466. \ln x = kx.$$

$$1467. e^x = ax^2 \quad (a > 0).$$

$$1468. \text{当 } 0 \leq x \leq \pi \text{ 时, } \sin^3 x \cdot \cos x = a.$$

$$1469. \operatorname{ch} x = kx.$$

1470. 在甚么条件下方程

$$x^3 + px + q = 0$$

有: (a) 一个实根; (b) 三个实根。在平面 (p, q) 上描画对应的范围。

§ 12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y=f(x)$ 的图形, 必须: (1) 确定此函数的存在域; 并研究函数在其存在域之边界上各点之性质; (2) 查明图形的对称性和周期性; (3) 求出函数的不连续点及连续的区间; (4) 确定函数的零值点及同号区间; (5) 求出极值点及查明函数上升和下降的区间; (6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间; (7) 若有渐近线存在则求出渐近线; (8) 指出函数图形的各种特性。

记有星号的题, 只求其拐点的近似值。

作出下列函数的图形:

$$1471. y = 3x - x^3.$$

$$1472. y = 1 + x^3 - \frac{x^4}{2}.$$

$$1473. y = (x+1)(x-2)^2.$$

$$1474^* y = \frac{2-x^2}{1+x^2}.$$

$$1475^* y = \frac{x^3-1}{x^2-5x+6}.$$

$$1476^* y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}.$$

$$1477. y = \frac{x^4}{(1+x)^3}.$$

$$1478. y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4.$$

$$1479. y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}.$$

$$1480. y = \frac{x}{(1-x^2)^2}.$$

$$1481. y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

$$1482^*. y = \frac{x^4+8}{x^3+1}.$$

$$1483. y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

$$1484. y = (x-3)\sqrt{x}.$$

$$1485. y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}.$$

$$1486. y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$1487^*. y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}. \quad 1488. y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}.$$

$$1489. y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}.$$

$$1490. y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

$$1491. y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

$$1492. y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}.$$

$$1493. y = \frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

$$1494. y = 1-x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}.$$

$$1495. y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}.$$

$$1496^*. y = \sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}.$$

$$1497. y = \sin x + \cos^2 x.$$

$$1498. y = (7+2\cos x)\sin x.$$

$$1499. y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x.$$

$$1500. y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

$$1501. y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

$$1502. y = \sin x \cdot \sin 3x.$$

$$1503. y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$1504. y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

$$1505. y = 2x - \operatorname{tg} x.$$

$$1506. y = e^{2x-x^2}.$$

$$1507. y = (1+x^2)e^{-x^2}.$$

$$1508. y = x + e^{-x}.$$

$$1509. y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}.$$

$$1510. y = \frac{e^x}{1+x}.$$

$$1511. \quad y = \sqrt{1 - e^{-x^2}} \quad 1512. \quad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$1513. \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$1514. \quad y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$1515. \quad y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad 1516. \quad y = x + \operatorname{arctg} x.$$

$$1517. \quad y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x \quad 1518. \quad y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$1519. \quad y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} \quad 1520. \quad y = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

$$1521. \quad y = (x + 2)e^{\frac{1}{x}} \quad 1522. \quad y = 2^{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$1523^* \quad y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}.$$

$$1524. \quad y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0).$$

$$1525. \quad y = \arccos \frac{1 - x}{1 + 2x} \quad 1526. \quad y = x^x.$$

$$1527. \quad y = x^{\frac{1}{x}} \quad 1528. \quad y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1529^* \quad y = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (x > 0).$$

$$1530^* \quad y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2} \text{ (不研究凸凹性)}.$$

作出下列參數方程所表的曲綫：

$$1531. \quad x = \frac{(t+1)^2}{4}, \quad y = \frac{(t-1)^2}{4}.$$

$$1532. \quad x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3.$$

$$1533^* \quad x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}.$$

$$1534. \quad x = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$1535. \quad x = t + e^{-t}, \quad y = 2t + e^{-2t}.$$

$$1536. \quad x = a \cos 2t, \quad y = a \cos 3t \quad (a > 0).$$

$$1537. \quad x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t. \quad 1538. \quad x = t \ln t, \quad y = \frac{\ln t}{t}.$$

$$1539. \quad x = \frac{a}{\cos^3 t}, \quad y = a \operatorname{tg}^3 t \quad (a > 0).$$

$$1540. \quad x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (a > 0).$$

把下列曲线方程变成参数式, 然后作出这些曲线:

$$1541. \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0).$$

提示 令 $y = tx$.

$$1542. \quad x^2 + y^2 = x^4 + y^4. \quad 1543. \quad x^2 y^2 = x^3 - y^3.$$

$$1544. \quad x^y = y^x \quad (x > 0, y > 0).$$

$$1545. \quad \text{作出曲线 } \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1 \text{ 的图形.}$$

作出下列用极坐标 (φ, γ) ($\gamma \geq 0$) 表示的函数的图形:

$$1546. \quad \gamma = a + b \cos \varphi \quad (0 < a \leq b).$$

$$1547. \quad \gamma = a \sin 3\varphi \quad (a > 0). \quad 1548. \quad \gamma = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} \quad (a > 0).$$

$$1549^*. \quad \gamma = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}, \text{ 其中 } \varphi > 1 \quad (a > 0).$$

$$1550^*. \quad \cos \varphi = \frac{\gamma - 1}{\gamma^2}.$$

作出下列曲线族的图形 (a 表参变量):

$$1551. \quad y = x^2 - 2x + a. \quad 1552. \quad y = x + \frac{a^2}{x}.$$

$$1553. \quad y = x \pm \sqrt{a(1 - x^2)}.$$

$$1554. \quad y = \frac{x}{2} + e^{-ux}. \quad 1555. \quad y = xe^{-\frac{x}{a}}.$$

§ 13. 函数的极大值与极小值问题

1556. 证明: 若函数 $f(x)$ 不为负, 则函数

$$F(x) = Cf^2(x) \quad (C > 0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点。

1557. 証明：若当 $-\infty < x < +\infty$ 时，函数 $\varphi(x)$ 单调增加，則函数

$$f(x) \text{ 与 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点。

1558. 二正数的和等于常数 a ，求此二正数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 相乘积的极大值

1559. 二正数的乘积等于常数 a ，求此二数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 之和的极小值。

1560. 取怎样的数为对数之底时有一个数，它本身和它的对数相等？

1561. 从面积为 S 的一切矩形中，求其周界为最小者。

1562. 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，求有最大面积的直角三角形。

1563. 当有怎样的长度大小时，容积为 V 的圆柱形闭合罐子有最小的表面积？

1564. 在不超过半圆的已知弓形内嵌入有最大面积的矩形。

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

中，嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形。

1566. 在底边为 b 及高为 h 的三角形中，嵌入有最大周长的矩形。研究此问题有解的可能性。

1567. 从直径为 d 的圆形树干切出横截面为矩形的梁，此矩形的底等于 b ，高等于 h 。若梁的强度与 bh^2 成比例，問梁的尺寸如何其强度最大？

1568. 于半径为 R 的半球中, 嵌入有最大体积的直角平行六面体其底为正方形。

1569. 于半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱。

1570. 于半径为 R 的球内嵌入有最大表面积的圆柱。

1571. 对于已知球作具有最小体积的外切圆锥。

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积。

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱。

1574. 求从点 $M(p, p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 的最短距离。

1575. 求从点 $A(2, 0)$ 到圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的最短与最长距离。

1576. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) 的经过顶点 $B(0, -b)$ 的最大弦。

1577. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的点 $M(x, y)$ 引切线, 此切线与坐标轴构成一个三角形, 使此三角形的面积为最小。

1578. 一物体为直圆柱形, 其上端为半球形。若此物体的体积等于 V ; 问这物体的尺寸如何, 才有最小的表面积?

1579. 露天水沟的横断面为等腰梯形。若沟中流水的横断面等于 S , 水面的高等于 h 。问水沟侧边的倾角 φ 如何, 才使横断面被水浸湿的周长为最小?

1580. 设闭曲线所包围的面积为 S 及一圆周也包围同一的面积 S , 则闭曲线的长与圆周长之比称为该闭曲线的“弯曲性”。

设等腰梯形 $ABCD$ ($AD \parallel BC$) 的底边 $AD = 2a$ 及锐角 $BAD = \alpha$, 问等腰梯形的形状如何, 才有最小的弯曲性?

1581. 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形, 才能使余下的部分, 可卷成一漏斗, 其容积为最大?

1582. 从南至北的铁路经过 B 城, 某工厂 A 距此铁路的最短

距离为 a 千米, 距其北面之 B 城 b 千米。为了从 A 至 B 运输货物最经济, 从工厂建筑一条侧轨, 若每吨货物沿侧轨运输的价格是每一千米 p 卢布, 而沿铁路为每一千米 q 卢布 ($p > q$), 则侧轨应向铁路取怎样的角度 φ ?

1583. 两船各以一定的速度 u 和 v 沿直线前进, 二者前进方向所成的角为 θ 。若于某时刻他们与其路线交点之距离分别为 a 和 b , 求二船的最小距离。

1584. 在 A 与 B 二点处各有一光源, 其强度分别为 S_1 枝烛光与 S_2 枝烛光。在线段 $AB = a$ 上求出最小照明的点 M 。

1585. 发光点位于半径为 R 与 r ($R > r$) 的二互不相交之球的连心线上, 并在此二球的外面。此发光点的位置如何, 才可使二球表面上照明部分之和为最大?

1586. 设圆桌面的半径为 a , 应当在圆桌面中央上面怎样高的地方安置电灯, 才使其桌子边沿上的照度为最大?

提示 照度用下列公式表示出来:

$$I = k \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

式中 φ 为光线倾斜的角度, r 为光源与被照面的距离, k 为光源强度。

1587. 向宽为 a 米的河修建一宽为 b 米的运河, 二者成直角相交, 问能驶进这运河的船, 其最大的长度如何?

1588. 船航行一昼夜的耗资由两部分组成: 固定部分等于 a 卢布, 变动部分与速度的立方成比例增加。在怎样的速度 v 时, 船航行最为经济?

1589. 重量为 P 的物体位于粗糙的水平面上, 须用力把物体从原位置移动。若物体摩擦系数等于 k , 问作用力对水平面的倾斜如何, 才使所需的力量为最小?

1590. 有一茶杯, 其形状为半径为 a 的半球, 于茶杯中放一长

为 $l > 2a$ 的棒, 求棒的平衡位置。

§ 14. 曲線的相切, 曲率圓, 漸屈綫

1° n 阶相切 有两曲綫 $y = \varphi(x)$ 及 $y = \psi(x)$, 若于点 x_0 ,

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \text{ 及 } \varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0),$$

便說这两曲綫于点 x_0 有 n 阶相切 (在严格的意义上讲!). 当 $x \rightarrow x_0$ 时在这种情形有:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O(x - x_0)^{n+1}.$$

2° 曲率圓 圓周

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

与已知曲綫 $y = f(x)$ 有不低于 2 阶的相切, 此圓称为在对应点的曲率圓。这个圓的半徑:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为曲率半徑, 而量 $k = \frac{1}{R}$ 为曲率。

3° 漸屈綫 曲率圓中心 (ξ, η) (曲率中心)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

的軌迹称为已知曲綫 $y = f(x)$ 的漸屈綫。

1591. 选择直綫

$$y = kx + b$$

的参数 k 与 b , 使它与曲綫

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

有高于 1 阶的相切。

1592. 应该怎样选择系数 a , b 和 c , 才能使拋物綫

$$y = ax^2 + bx + c$$

于点 $x = x_0$ 与曲綫 $y = e^x$ 有二阶的相切?

1593. 下列曲綫与 Ox 軸在点 $x = 0$ 相切的阶如何:

(a) $y = 1 - \cos x$;

(b) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$;

$$(B) \quad y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

1594. 証明曲綫

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } y = e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad \text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 0$$

在点 $x = 0$ 与 Ox 軸相切的阶为无穷大。

1595. 求双曲綫

$$xy = 1.$$

在下列各点的曲率半徑和曲率中心:

$$(a) \quad M(1, 1);$$

$$(b) \quad N(100, 0.01).$$

求下列曲綫的曲率半徑:

$$\mathbf{1596.} \text{ 抛物綫 } y^2 = 2px. \quad \mathbf{1597.} \text{ 橢圓 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\mathbf{1598.} \text{ 双曲綫 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \mathbf{1599.} \text{ 內摆綫 } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$\mathbf{1600.} \text{ 橢圓 } x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

$$\mathbf{1601.} \text{ 摆綫 } x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

$$\mathbf{1602.} \text{ 圓的漸伸綫 } x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

1603. 証明二次曲綫

$$y^2 = 2px - qx^2$$

的曲率半徑与法綫段的立方成比例。

1604. 写出以极坐标表示的曲綫的曲率半徑公式。

求下列极坐标方程所表曲綫的曲率半徑:

$$\mathbf{1605.} \text{ 阿基米德螺綫 } r = a\varphi. \quad \mathbf{1606.} \text{ 对数螺綫 } r = ae^{m\varphi}.$$

$$\mathbf{1607.} \text{ 心脏形綫 } r = a(1 + \cos \varphi).$$

$$\mathbf{1608.} \text{ 双紐綫 } r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

$$\mathbf{1609.} \text{ 在曲綫 } y = \ln x \text{ 上求曲率最大的点.}$$

$$\mathbf{1610.} \text{ 三次抛物綫 } y = \frac{kx^3}{b} \quad (0 \leq x < +\infty, k > 0) \text{ 的最大曲率}$$

等于 $\frac{1}{1000}$, 求达到此最大曲率的点 x 。

求下列各曲綫的漸屈綫方程：

1611. 拋物綫 $y^2 = 2px$ 的漸屈綫。

1612. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的漸屈綫。

1613. 內擺綫 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的漸屈綫。

1614. 曳物綫 $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 的漸屈綫。

1615. 對數螺綫 $r = ae^{m\varphi}$ 的漸屈綫。

1616. 証明擺綫

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

的漸屈綫仍為一擺綫，僅其位置與已知擺綫不同而已。

§ 15. 方程的近似解法

1° 比例法(弦位法) 若函數 $f(x)$ 于閉區間 $[a, b]$ 上連續及

$$f(a)f(b) < 0,$$

且當 $a < x < b$ 時, $f'(x) \neq 0$, 則方程

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

于區間 (a, b) 內有一個而且僅有一個實根 ξ 。可取下面的值作為此根的第一近似值：

$$x_1 = a + \delta_1,$$

式中

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)。$$

更進而對於區間 (a, x_1) 或 (x_1, b) 中，函數 $f(x)$ 在其兩端異號的那一個區間運用這方法，得到根 ξ 的第二近似值 x_2 ，由此類推。對於第 n 近似值 x_n ，下列公式正確：

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (2)$$

式中 $m = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$ ，並且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi。$$

2° 牛頓法(切綫法) 若在閉區間 $[a, b]$ 內 $f''(x) \neq 0$ 及 $f(a)f''(a) > 0$,

則可取数值

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程(1)的根 ξ 的第一近似值 ξ_1 。

重复利用这个方法，很快就得到趋近于根 ξ 的一系列近似值 $\xi_n (n=1, 2, \dots)$ ，这些近似值的精确性可根据公式(2)来估计。

为了大略的确定方程的根，最好可作函数 $y=f(x)$ 的图形。

利用比例法求下列方程的根(精确到 0.001)：

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$ 。 **1618.** $x^4 - x - 1 = 0$ 。

1619. $x - 0.1 \sin x = 2$ 。 **1620.** $\cos x = x^2$ 。

利用牛頓法，求下列方程的根(精确到所指定的程度)：

1621. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$ x (精确到 10^{-3})。

1622. $x \lg x = 1$ (精确到 10^{-4})。

1623. $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ (精确到 10^{-3}) (二正根)。

1624. $x + e^x = 0$ (精确到 10^{-5})。

1625. $x \operatorname{th} x = 1$ (精确到 10^{-6})。

1626. 求方程

$$\operatorname{tg} x = x$$

最小的三个正根(精确到 0.001)。

1627. 求方程

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

的二正根(精确到 10^{-8})。

第三章 不定积分

§ 1. 最简单的不定积分

1° 不定积分的概念 若 $f(x)$ 为连续函数及 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

式中 C 为任意常数。

2° 不定积分的基本性质:

$$(a) \int [f(x) dx] = f(x) dx; \quad (b) \int d\varphi(x) = \varphi(x) + C;$$

$$(c) \int A f(x) dx = A \int f(x) dx (A = \text{常数});$$

$$(r) \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

3° 最简积分表:

$$I. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1); \quad II. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C (x \neq 0);$$

$$III. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \text{arc tg } x + C, \\ \text{arc ctg } x + C; \end{cases} \quad IV. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

$$V. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \text{arc sin } x + C, \\ -\text{arc cos } x + C; \end{cases}$$

$$VI. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C;$$

$$VII. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0); \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$VIII. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad IX. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$X. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + C; \quad XI. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C;$$

$$XII. \int \text{sh } x dx = \text{ch } x + C; \quad XIII. \int \text{ch } x dx = \text{sh } x + C;$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\text{XV. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

4° 积分的基本方法

(a) 引入新变数法 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

則 $\int f(u) du = F(u) + C$, 式中 $u = \varphi(x)$ 。

(b) 分項积分法 若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

則 $\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$ 。

(B) 代入法 假設

$x = \varphi(t)$, 式中 $\varphi(t)$ 及其导函数 $\varphi'(t)$ 为連續的,

則得: $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$ 。

(r) 分部积分法 若 u 和 v 为 x 的可微分函数, 則

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

利用最簡积分表, 求出下列积分:

$$1628. \int (3-x^2)^3 dx.$$

$$1629. \int x^2 (5-x)^4 dx.$$

$$1630. \int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx.$$

$$1631. \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^3 dx.$$

$$1632. \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx.$$

$$1633. \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1634. \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$1635. \int \frac{(1-x)^3 dx}{x\sqrt[3]{x}}.$$

$$1636. \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$$

$$1637. \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$$

$$1638. \int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx.$$

$$1639. \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}.$$

$$1640. \int \frac{x^2 dx}{1-x^2}.$$

1641. $\int \frac{x^2+3}{x^3-1} dx.$

1642. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$

1644. $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

1645. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$

1646. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$

1647. $\int (1 + \sin x + \cos x) dx.$

1648. $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$

1649. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

1650. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

1651. $\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx.$

1652. $\int \operatorname{th}^2 x dx.$

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x dx.$

1654. 証明: 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

則

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

求出下列积分:

1655. $\int \frac{dx}{x+a}.$

1656. $\int (2x-3)^{10} dx.$

1657. $\int \sqrt[3]{1-3x} dx.$

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$

1660. $\int \frac{\sqrt{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

$$1665. \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$$

$$1666. \int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx.$$

$$1667. \int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$1668. \int \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

$$1669. \int \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

$$1670. \int \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

$$1671. \int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx.$$

$$1672. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$1673. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}.$$

用适当地变换被积函数的方法来求下列积分:

$$1674. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1675. \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$$

$$1676. \int \frac{x dx}{3-2x^2}.$$

$$1677. \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$1678. \int \frac{x dx}{4+x^4}.$$

$$1679. \int \frac{x^3 dx}{x^8-2}.$$

$$1680. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

提示 $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$.

$$1681. \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$$

$$1682. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$1683. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$1684. \int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$1685. \int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$1686. \int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$1687. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

$$1688. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}.$$

$$1689. \int x e^{-x} dx.$$

$$1690. \int \frac{e^x dx}{2+e^x}.$$

$$1691. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$1692. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

$$1693. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$1694. \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

$$1695. \int \sin^5 x \cos x dx.$$

$$1696. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx.$$

$$1697. \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$1698. \int \operatorname{ctg} x dx.$$

$$1699. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$1700. \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx.$$

$$1701. \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$1702. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}.$$

$$1703. \int \frac{dx}{\sin x}.$$

$$1704. \int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$1705. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$$

$$1706. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$$

$$1707. \int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx.$$

$$1708. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}.$$

$$1709. \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1+x^2} dx. \quad \checkmark$$

$$1710. \int \frac{dx}{(\operatorname{arc} \sin x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

$$1711. \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$$

$$1712. \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$$\text{提示} \quad \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = d\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

$$1713. \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx.$$

$$1714. \int \frac{x^{14} dx}{(x^5+1)^4}.$$

$$1715. \int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{1+x^{\frac{n+2}{2}}}}.$$

$$1716. \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$1717. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$$

$$1718. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

$$1719. \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx.$$

$$1720. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

用分項積分法計算下列積分：

$$1721. \int x^2(2-3x^2)^2 dx.$$

$$1722. \int \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$1723. \int \frac{x^2}{1+x} dx.$$

$$1724. \int \frac{x^3}{3+x} dx.$$

$$1725. \int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx.$$

$$1726. \int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx.$$

$$1727. \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx.$$

$$1728. \int \frac{x^5}{x+1} dx.$$

$$1729. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$1730. \int x\sqrt{2-5x} dx.$$

$$\text{提示 } x = -\frac{1}{5} \cdot (2-5x) - \frac{2}{5}.$$

$$1731. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$$

$$1732. \int x^3 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$$

$$1733. \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$$

$$\text{提示 } 1 = \frac{1}{4}[(x+3) - (x-1)].$$

$$1734. \int \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

$$1735. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

$$1736. \int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$$

$$1737. \int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}.$$

$$1738. \int \frac{x dx}{x^4+3x^2+2}.$$

$$1739. \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b).$$

$$1740. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (|a| \neq |b|).$$

$$1741. \int \sin^2 x dx.$$

$$1742. \int \cos^2 x dx.$$

$$1743. \int \sin x \sin(x+\alpha) dx.$$

$$1744. \int \sin 3x \cdot \sin 5x dx.$$

$$1745. \int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx.$$

$$1746. \int \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx.$$

$$1747. \int \sin^3 x dx.$$

$$1748. \int \cos^3 x dx.$$

$$1749. \int \sin^4 x dx.$$

$$1750. \int \cos^4 x dx.$$

$$1751. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$1752. \int \operatorname{tg}^3 x dx.$$

$$1753. \int \sin^2 3x \sin^3 2x dx.$$

理科阅览室

$$1754. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

提示 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

$$1755. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}.$$

$$1756. \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

$$1757. \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx.$$

$$1758. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$1759. \int \frac{dx}{1 + e^x}.$$

$$1760. \int \frac{(1 + e^x)^2}{1 + e^{2x}} dx.$$

$$1761. \int \operatorname{sh}^2 x dx.$$

$$1762. \int \operatorname{ch}^2 x dx.$$

$$1763. \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x dx.$$

$$1764. \int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx.$$

$$1765. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$$

用适当的代换, 求下列积分:

$$1766. \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx.$$

$$1767. \int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$$

$$1768. \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx.$$

$$1769. \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$1770. \int x^5 (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$$

$$1771. \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx.$$

$$1772. \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

$$1773. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx.$$

$$1774. \int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$1775. \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$$

$$1776. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}.$$

$$1777. \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$$

运用三角的代换 $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$, $x = a \sin^2 t$ 等等, 求下列积分(参数为正的):

$$1778. \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$1779. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}.$$

$$1780. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$1781. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$1782. \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx.$$

$$1783. \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$$

$$1784. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

提示 用代换 $x-a = (b-a) \sin^2 t$.

$$1785. \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx.$$

用双曲线代换 $x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$ 等等, 求下列积分(参数为正的):

$$1786. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

$$1787. \int \frac{x^3}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx.$$

$$1788. \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx.$$

$$1789. \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$$

提示 令 $x+a = (b-a) \operatorname{sh}^2 t$.

$$1790. \int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx.$$

用分部积分法, 求下列积分:

$$1791. \int \ln x dx.$$

$$1792. \int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1).$$

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx.$

1794. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$

1795. $\int x e^{-x} dx.$

1796. $\int x^2 e^{-2x} dx.$

1797. $\int x^3 e^{-x^2} dx.$

1798. $\int x \cos x dx.$

1799. $\int x^2 \sin 2x dx.$

1800. $\int x \operatorname{sh} x dx.$

1801. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x dx.$

1802. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx.$

1803. $\int \operatorname{arc} \sin x dx.$

1804. $\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx.$

1805. $\int x^2 \operatorname{arc} \cos x dx.$

1806. $\int \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x^2} dx.$

1807. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

1808. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

1809. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} dx.$

1810. $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx.$

求下列积分:

1811. $\int x^3 e^{x^2} dx.$

1812. $\int (\operatorname{arc} \sin x)^2 dx.$

1813. $\int x (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2 dx.$

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

1815. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

Λ

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

1818. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx.$

1819. $\int \sqrt{x^2+a} dx.$

1820. $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2} dx.$

1821. $\int x \sin^2 x dx.$

1822. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

1823. $\int x \sin \sqrt{x} dx.$

$$1824. \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$1825. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$1826. \int \sin(\ln x) dx.$$

$$1827. \int \cos(\ln x) dx.$$

$$1828. \int e^{ax} \cos bx dx.$$

$$1829. \int e^{ax} \sin bx dx.$$

$$1830. \int e^{2x} \sin^2 x dx.$$

$$1831. \int (e^x - \cos x)^2 dx.$$

$$1832. \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} dx.$$

$$1833. \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$$

$$1834. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$1835. \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$$

下列积分的求法需要把二次三项式化成正则型,并利用下列公式:

$$I. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$$

$$II. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0);$$

$$III. \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C;$$

$$IV. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$V. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$VI. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C;$$

$$VII. \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$VIII. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

求下列积分:

$$1836. \int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab \neq 0). \quad 1837. \int \frac{dx}{x^2-x+2}.$$

$$1838. \int \frac{dx}{3x^2-2x-1}. \quad 1839. \int \frac{x dx}{x^4-2x^2-1}.$$

1840. $\int \frac{(x+1)}{x^2+x+1} dx.$

1841. $\int \frac{x dx}{x^2-2x \cos \alpha + 1}.$

1842. $\int \frac{x^3 dx}{x^4-x^2+2}.$

1843. $\int \frac{x^5 dx}{x^6-x^3-2}.$

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}.$

1845. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}.$

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (b \neq 0).$

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

1848. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}.$

1850. 証明: 若

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

則 当 $a > 0$ 时, $\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right) + C$

当 $a < 0$ 时, $\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}} + C.$

1851. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$

1852. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$

1853. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

1854. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}} dx.$

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}.$

1858. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$

1860. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}.$

1861. $\int \sqrt{2+x-x^2} dx.$

1862. $\int \sqrt{2+x+x^2} dx.$

1863. $\int \sqrt{x^4+2x^2-1} x dx.$

1864. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx.$

$$1865. \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx.$$

§ 2. 有理函数的积分法

利用待定系数法, 求下列积分:

$$1866. \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx. \quad 1867. \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}.$$

$$1868. \int \frac{x^{10} dx}{x^2+x-2}. \quad 1869. \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx.$$

$$1870. \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx. \quad 1871. \int \frac{x dx}{x^3-3x+2}.$$

$$1872. \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx. \quad 1873. \int \left(\frac{x}{x^2-3x+2} \right)^2 dx.$$

$$1874. \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$$

$$1875. \int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}.$$

$$1876. \int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx. \quad 1877. \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$$

$$1878. \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$$

$$1879. \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

$$1880. \int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}.$$

$$1881. \int \frac{dx}{x^3+1}. \quad 1882. \int \frac{x dx}{x^3-1}.$$

$$1883. \int \frac{dx}{x^4-1}. \quad 1884. \int \frac{dx}{x^4+1}.$$

$$1885. \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}. \quad 1886. \int \frac{dx}{x^6+1}.$$

$$1887. \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)^2}$$

$$1888. \int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$1889. \int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1}$$

1890. 在甚么条件下, 积分

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$$

为有理函数?

利用奥斯特洛格拉得斯基方法, 计算积分:

$$1891. \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

$$1892. \int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$$

$$1893. \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

$$1894. \int \frac{x^2 dx}{(x^3+2x+2)^2}$$

$$1895. \int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$$

$$1896. \int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx$$

$$1897. \int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$$

分出下列积分的代数部分:

$$1898. \int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx \quad 1899. \int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$$

$$1900. \int \frac{4x^5-1}{(x^6+x+1)^2} dx$$

1901. 计算积分

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$$

1902. 在甚么条件下, 积分

$$\int \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2} dx$$

为有理函数?

利用各种方法, 计算下列积分:

$$1903. \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx.$$

$$1904. \int \frac{x dx}{x^8 - 1}.$$

$$1905. \int \frac{x^3 dx}{x^8 + 3}.$$

$$1906. \int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx.$$

$$1907. \int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx.$$

$$1908. \int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 10)^2}.$$

$$1909. \int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}.$$

$$1910. \int \frac{x^9 dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}.$$

$$1911. \int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx.$$

$$1912. \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx.$$

$$1913. \int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)}.$$

$$1914. \int \frac{dx}{x(x^{10} + 1)^2}.$$

$$1915. \int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)} dx.$$

$$1916. \int \frac{x^4 - 1}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)} dx.$$

$$1917. \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

$$1918. \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} dx.$$

$$1919. \int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx.$$

$$1920. \int \frac{x^4 + 1}{x^8 + 1} dx.$$

1921. 试导出计算积分

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (a \neq 0)$$

的递推公式。

利用这个公式计算

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

提示 利用恒等式

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2).$$

1922. 利用代换 $t = \frac{x+a}{x+b}$ 来计算积分:

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$$

(m 及 n 为自然数)。

利用这个代换, 求

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2 (x+3)^3}.$$

1923. 若 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 计算

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx.$$

提示、利用台劳公式。

1924. 设 $R(x) = R^*(x^2)$, 其中 R^* 为有理函数。则函数 $R(x)$ 分解为有理分式时有甚么特性?

1925* 计算

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

式中 n 为正整数。

§ 3. 无理函数的积分法

化被积函数为有理函数, 以求下列积分:

1926. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

1927. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$

1929. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$

1930. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}.$

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

1933. $\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a>0).$

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} (n \text{ 为自然数}).$

1935. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$

提示 令 $x = \left(\frac{u^2-1}{2u} \right)^2.$

1936. 証明: 若

$$p+q=kn,$$

式中 k 为整数, 則积分

$$\int R[x, (x-a)^{\frac{p}{n}} (x-b)^{\frac{q}{n}}] dx$$

(式中 R 为有理函数及 p, q, n 为整数) 为初等函数。

求最简单二次无理式的积分:

1937. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$

1938. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}.$

1939. $\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$

1940. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$

1941. $\int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}.$

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$

利用公式

$$\int \frac{P_n(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

式中 $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ 为 n 次多项式, $Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式及 λ 为常数, 求下列积分:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$

1944. $\int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

1945. $\int x^4 \sqrt{a^2-x^2} dx.$

1946. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} dx.$

1947. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}}.$

1948. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-1}}.$

$$1949. \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}}. \quad 1950. \int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}.$$

1951. 在甚么条件下, 积分

$$\int \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

是代数函数?

要求积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)y} dx$, 式中 $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, 应先分解有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为最简分式。

$$1952. \int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}}.$$

$$1953. \int \frac{x dx}{(x^2-1) \sqrt{x^2-x-1}}.$$

$$1954. \int \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)^3} dx.$$

$$1955. \int \frac{x^3}{(1+x) \sqrt{1+2x-x^2}} dx.$$

$$1956. \int \frac{x dx}{(x^2-3x+2) \sqrt{x^2-4x+3}}.$$

$$1957. \int \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{1-x^2}}. \quad 1958. \int \frac{dx}{(x^2+1) \sqrt{x^2-1}}.$$

$$1959. \int \frac{dx}{(1-x^2) \sqrt{1+x^2}}. \quad 1960. \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx.$$

化二次三项式为正则型, 以计算下列积分:

$$1961. \int \frac{dx}{(x^2+x+1) \sqrt{x^2+x-1}}.$$

$$1962. \int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2) \sqrt{2+2x-x^2}}.$$

$$1963. \int \frac{(x+1) dx}{(x^2+x+1) \sqrt{x^2+x+1}}.$$

1964. 利用线性分式的代换 $x = \frac{\alpha + \beta t}{1+t}$, 计算积分:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

1966. 求

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{2x^2 - 2x + 5}}.$$

利用尤拉氏代換

(1) 若 $a > 0$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x + z$;

(2) 若 $c > 0$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz \pm \sqrt{c}$;

(3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1)$.

以求下列积分:

1966. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$

1967. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}.$

1968. $\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx.$

1969. $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx.$

1970. $\int \frac{dx}{[1 + \sqrt{x(1+x)}]^2}.$

利用各种方法, 計算下列积分:

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}.$ 1972. $\int \frac{x dx}{(1 - x^3)\sqrt{1 - x^2}}.$

1973. $\int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}.$

1974. $\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx.$

1975. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx.$ 1976. $\int \frac{(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}} dx.$

1977. $\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^4 + 1}} dx.$ 1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}}.$

1979. $\int \frac{(x^2 + 1)dx}{x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$

1980. 証明积分:

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

(式中 R 为有理函数) 的求法, 归结为有理函数的积分法。

二项微分式

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

(式中 m, n 和 p 为有理数) 仅在下列三种情形可化为有理函数的积分 (契比协夫定理):

第一种情形, p 为整数。假定 $x = z^N$, 其中 N 为分数 m 和 n 的公分母。

第二种情形, $\frac{m+1}{n}$ 为整数。假定 $a + bx^n = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母。

第三种情形, $\frac{m+1}{n} + p$ 为整数。利用代换: $ax^{-n} + b = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母。

计算下列积分:

1981. $\int \sqrt{x^3 + x^4} dx.$

1982. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$

1983. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}.$

1984. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}.$

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}.$

1987. $\int \frac{dx}{x^6 \sqrt{1 + x^6}}.$

1988. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}}.$

1989. $\int \sqrt[3]{3x - x^3} dx.$

1990. 在甚么情形下, 积分

$$\int \sqrt{1 + x^m} dx$$

(式中 m 为有理数) 为初等函数?

§ 4. 三角函数的积分法

形如 $\int \sin^m x \cos^n x dx$

的积分(式中 m 及 n 为整数), 可利用巧妙的变换或运用递推公式计算。

求下列积分:

1991. $\int \cos^5 x dx。$

1992. $\int \sin^6 x dx。$

1993. $\int \cos^6 x dx。$

1994. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx。$

1995. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx。$

1996. $\int \sin^5 x \cos^5 x dx。$

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx。$

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx。$

1999. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}。$

2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}。$

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}。$

2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}。$

2003. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}。$

2004. $\int \operatorname{tg}^5 x dx。$

2005. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx。$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx。$

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}。$

2008. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin^3 x}}。$

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}。$

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}。$

2011. 推出下列积分的递推公式

$$(a) I_n = \int \sin^n x dx; \quad (b) K_n = \int \cos^n x dx \quad (n > 2)。$$

并利用推得的公式来计算

$$\int \sin^6 x dx \quad \text{及} \quad \int \cos^8 x dx。$$

2012. 推出下列积分的递推公式

$$(a) \quad I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \quad (b) \quad K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n > 2).$$

并利用推得的公式计算

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} \quad \text{及} \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

运用公式:

$$\text{I} \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\text{II} \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\text{III} \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

来计算下列的积分。

理科阅览室

求积分:

$$\mathbf{2013.} \quad \int \sin 5x \cos x \, dx.$$

$$\mathbf{2014.} \quad \int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx.$$

$$\mathbf{2015.} \quad \int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} \, dx.$$

$$\mathbf{2016.} \quad \int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b) \, dx.$$

$$\mathbf{2017.} \quad \int \cos^2 ax \cos^2 bx \, dx. \quad \mathbf{2018.} \quad \int \sin^3 2x \cdot \cos^3 3x \, dx.$$

运用恒等式:

$$\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin[(x+\alpha) - (x+\beta)]$$

及

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos[(x+\alpha) - (x+\beta)]$$

来计算下列的积分。

求积分:

$$\mathbf{2019.} \quad \int \frac{dx}{\sin(x+a) \sin(x+b)}.$$

$$\mathbf{2020.} \quad \int \frac{dx}{\sin(x+a) \cos(x+b)}.$$

$$2021. \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}.$$

$$2022. \int \frac{dx}{\sin x - \sin a}.$$

$$2023. \int \frac{dx}{\cos x + \cos a}.$$

$$2024. \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx.$$

形如 $\int R(\sin x, \cos x) dx$

(式中 R 为有理函数) 的积分的一般情形可利用代换 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ 化为有理函数的积分。

(a) 若等式

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

或

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用代换 $\cos x = t$ 或对应的 $\sin x = t$ 。

(b) 若等式

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用代换 $\operatorname{tg} x = t$ 。

求积分:

$$2025. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}. \quad 2026. \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}.$$

$$2027. \int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

$$2028. \int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x};$$

(a) $0 < \varepsilon < 1$;

(b) $\varepsilon > 1$ 。

$$2029. \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx,$$

$$2030. \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$$

$$2031. \int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}.$$

$$2032. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$2033. \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}.$$

$$2034. \int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$$

$$2035. \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$2036. \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx.$$

$$2037. \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx.$$

$$2038. \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$$

$$2039. \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$$

$$2040. \int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}.$$

2041. 求积分:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

先化分母为对数的形状。

2042. 証明:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C,$$

式中 A, B, C 为常数。

提示 令 $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$, 式中 A 和 B 为常数。

求积分:

$$2043. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx. \quad 2044. \int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x}.$$

$$2045. \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx.$$

2046. 証明:

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

式中 A, B, C 都是常系数。

求积分:

$$2047. \int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx.$$

$$2048. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin x + \cos x}}.$$

$$2049. \int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx.$$

2050. 証明:

$$\begin{aligned} \int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = \\ = A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}, \end{aligned}$$

式中 A, B, C 都是常系数。

求积分:

$$2051. \int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$2052. \int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

2053. 証明若 $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, 則

$$\begin{aligned} \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx = \\ = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}, \end{aligned}$$

式中 A, B 为未定系数, λ_1, λ_2 为下方程式的根

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

及

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x \quad \text{及} \quad k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \quad (i = 1, 2).$$

求积分:

$$2054. \int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$2055. \int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} dx.$$

$$2056. \int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} dx.$$

2057. 証明

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + \\ + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$$

式中 A, B, C 为未定系数。

2058. 求

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}.$$

2059. 若 n 为大于 1 的自然数, 証明

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} + B \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}} + \\ + C \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-2}} \quad (|a| \neq |b|),$$

并求出系数 A, B 和 C 。

求积分:

$$2060. \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}. \quad 2061. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} dx.$$

$$2062. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}.$$

$$2063. \int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2} \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

$$2064. \int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} dx.$$

提示 令 $t = \frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}}.$

2065. 推出积分

$$I_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n dx$$

的递推公式(n 为自然数)。

§ 5. 各种超越函数的积分法

2066. 証明若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 則

$$\int P(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C.$$

2067. 証明若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 則

$$\begin{aligned} \int P(x) \cos ax dx &= \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \cdots \right] + \\ &+ \frac{\cos ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^V(x)}{a^4} - \cdots \right] + C \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \int P(x) \sin ax dx &= -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{IV}(x)}{a^4} - \cdots \right] + \\ &+ \frac{\sin ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^V(x)}{a^4} - \cdots \right] + C. \end{aligned}$$

求积分:

2068. $\int x^3 e^{3x} dx.$

2069. $\int (x^2 - 2x + 2) e^{-x} dx.$

2070. $\int x^5 \sin 5x dx.$

2071. $\int (1+x^2)^2 \cos x dx.$

2072. $\int x^7 e^{-x} dx.$

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx.$

2074. $\int e^{3x} \cos^2 bx dx.$

2075. $\int e^{ax} \sin^3 bx dx.$

2076. $\int x e^x \sin x dx.$

2077. $\int x^2 e^x \cos x dx.$

$$2078. \int x e^x \sin^2 x dx.$$

$$2079. \int (x - \sin x)^3 dx.$$

$$2080. \int \cos^2 \sqrt{x} dx.$$

2081 証明若 R 为有理函数及 a_1, a_2, \dots, a_n 为可公度的数, 則积分

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$$

是初等函数。

求下列积分:

$$2082. \int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$$

$$2083. \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx.$$

$$2084. \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$$

$$2085. \int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}.$$

$$2086. \int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{(1 + e^{\frac{x}{4}})^2} dx.$$

$$2087. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

$$2088. \int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx.$$

$$2089. \int \sqrt{e^{3x} + 4e^x - 1} dx.$$

$$2090. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}.$$

2091. 証明积分

$$\int R(x) e^{ax} dx,$$

(式中 R 为有理函数, 其分母仅有实根) 可用初等函数和超越函数

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \text{li}(e^{ax}) + C, \text{ 式中 } \text{li } x = \int \frac{dx}{\ln x}$$

来表示。

2092. 在甚么情形下, 积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx,$$

(式中 $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$ 及 a_0, a_1, \cdots, a_n 为常数) 为初等函数?

求积分:

$$2093. \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx.$$

$$2094. \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$$

$$2095. \int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

$$2096. \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$$

$$2097. \int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$$

求含有 $\ln f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ 等函数的积分, 其中 $f(x)$ 为代数函数:

$$2098. \int \ln^n x dx (n \text{ 为自然数}).$$

$$2099. \int x^3 \ln^3 x dx.$$

$$2100. \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$$

$$2101. \int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$$

$$2102. \int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$2103. \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$$

$$2104. \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$2105. \int x \operatorname{arctg}(x+1) dx.$$

$$2106. \int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$2107. \int x \arcsin(1-x) dx.$$

$$2108. \int \arcsin \sqrt{x} dx.$$

$$2109. \int x \arccos \frac{1}{x} dx.$$

$$2110. \int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

$$2111. \int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$2112. \int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$2113. \int x \arctg x \ln(1+x^2) dx.$$

$$2114. \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$2115. \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

求含有双曲线函数的积分:

$$2116. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx.$$

$$2117. \int \operatorname{ch}^4 x dx.$$

$$2118. \int \operatorname{sh}^3 x dx.$$

$$2119. \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx.$$

$$2120. \int \operatorname{th} x dx.$$

$$2121. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$2122. \int \sqrt{\operatorname{th} x} dx.$$

$$2123. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x}.$$

$$2124. \int \operatorname{sh} ax \sin bx dx.$$

$$2125. \int \operatorname{sh} ax \cos bx dx.$$

§ 6. 函数的积分法的各种例子

求积分:

$$2126. \int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}.$$

$$2127. \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}.$$

$$2128. \int \frac{dx}{1+x^4+x^8}.$$

$$2129. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$2130. \int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$$

$$2131. \int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2132. \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx.$$

$$2133. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$2134. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

$$2135. \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^3+x^6}}.$$

$$2136. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$$

$$2137. \int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2138. \int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}.$$

$$2139. \int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx.$$

$$2140. \int (2x+3) \arccos(2x-3) dx.$$

$$2141. \int x \ln(4+x^4) dx.$$

$$2142. \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2143. \int \frac{x \ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$2144. \int x\sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx.$$

$$2145. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$2146. \int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$$

$$2147. \int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx. \quad 2148. \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1+\cos x}}.$$

$$2149. \int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \arctg x dx. \quad 2150. \int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx.$$

$$2151. \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx. \quad 2152. \int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$2153. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}} dx. \quad 2154. \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2155. \int \frac{x^4 \arctg x}{1+x^2} dx. \quad 2156. \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$2157. \int \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx.$$

$$2158. \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$$

$$2159. \int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x dx.$$

$$2160. \int x^x (1 + \ln x) dx.$$

$$2161. \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

$$2162. \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx.$$

$$2163. \int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2 - (e^{x-1}+1)^2}.$$

$$2164. \int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx.$$

$$2165. \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx.$$

$$2166. \int |x| dx.$$

$$2167. \int x|x| dx.$$

$$2168. \int (x + |x|)^2 dx.$$

$$2169. \int \{|1+x| - |1-x|\} dx.$$

$$2170. \int e^{-|x|} dx.$$

$$2171. \int \max(1, x^2) dx.$$

2172. $\int \varphi(x) dx$, 其中 $\varphi(x)$ 为数 x 至其最接近的整数之距离。

$$2173. \int (x) |\sin \pi x| dx \quad (x \geq 0).$$

$$2174. \int f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{当 } |x| \leq 1; \\ 1-|x| & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

$$2175. \int f(x) dx, \text{ 式中 } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } -\infty < x < 0; \\ x+1, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ 2x, & \text{若 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$2176. \text{ 求 } \int x f''(x) dx.$$

$$2177. \text{ 求 } \int f'(2x) dx.$$

$$2178. \text{ 設 } f'(x^2) = \frac{1}{x} \quad (x > 0), \text{ 求 } f(x).$$

$$2179. \text{ 設 } f'(\sin^2 x) = \cos^2 x, \text{ 求 } f(x).$$

$$2180. \text{ 設 } f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 < x \leq 1; \\ x & \text{当 } 1 < x < +\infty \end{cases} \text{ 及 } f(0) = 0, \text{ 求 } f(x).$$

第四章 定积分

§ 1. 定积分作为和的极限

1° 黎曼积分的意义 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, 则数

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

(式中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分。

极限(1)存在的必要而且充分的条件为: 积分下和

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

及积分上和

$$\bar{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

当 $|\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时有共同的极限, 其中

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \quad \text{及} \quad M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x)。$$

若等式(1)右端的极限存在, 则函数 $f(x)$ 称为在对应的区间上可积分(常义的)。特殊情形: (a) 连续函数, (b) 具有有穷个不连续点的有界函数, (B) 单调有界的函数, ——在任意的有穷闭区间上为可积分的。

2° 可积分的条件

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

式中 ω_i 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅, 上等式成立为函数 $f(x)$ 于已知闭区间 $[a, b]$ 上可积分的充要条件。

2181. 把区间 $[-1, 4]$ 分为 n 个相等的子区间, 并取这些子区间中点的坐标作自变量 ξ_i 的值 ($i=0, 1, \dots, n-1$)。求函数 $f(x) = 1+x$ 在此区间上的积分和 S_n 。

2182. 設:

$$(a) \quad f(x) = x^3 \quad [-2 \leq x \leq 3];$$

$$(6) f(x) = \sqrt{x} \quad [0 \leq x \leq 1];$$

$$(B) f(x) = 2^x \quad [0 \leq x \leq 10].$$

2183. 分闭区间 $[1, 2]$ 为 n 份, 使这 n 份的长构成一等比级数, 以求函数 $f(x) = x^2$ 在 $[1, 2]$ 上的积分下和。当 $n \rightarrow \infty$ 时此和的极限等于甚么?

2184. 从积分的定义出发, 求

$$\int_0^T (v_0 + gt) dt,$$

其中 v_0 及 g 为常数。

以适当的方法进行积分区间的分段, 把积分看作是对应的积分和的极限, 来计算定积分。

$$\mathbf{2185.} \int_{-1}^2 x^2 dx.$$

$$\mathbf{2186.} \int_0^1 a^x dx \quad (a > 0).$$

$$\mathbf{2187.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

$$\mathbf{2188.} \int_0^x \cos t dt.$$

$$\mathbf{2189.} \int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b).$$

提示 令 $t_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$ ($i = 0, 1, \dots, n$)。

$$\mathbf{2190.} \int_a^b x^m dx \quad (0 < a < b; m \neq -1).$$

提示 选择诸分点, 使它们的横坐标 x_i 构成一等比级数。

$$\mathbf{2191.} \int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b).$$

2192. 计算布阿桑积分

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$$

当: (a) $|a| < 1$; (b) $|a| > 1$ 。

提示 分解多项式 $a^{2n} - 1$ 为二次因式。

2193. 设函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

其中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $x_i \leq \theta_i \leq x_{i+1}$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($x_0 = a$, $x_n = b$)。

2194. 証明不連續的函数:

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

于区間 $[0, 1]$ 上可积分。

2195. 証明黎曼函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } x = \frac{m}{n}, \end{cases}$$

(式中 m 及 n ($n \geq 1$) 为互质的整数) 在任何有穷的区間上可积分。

2196. 証明函数

$$\text{当 } x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \text{ 及 } f(0) = 0$$

于閉区間 $[0, 1]$ 上可积分。

2197. 証明迪里黑里函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \end{cases}$$

于任意区間上不可积分。

2198. 設函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积分, 且

$$f_n(x) = \sup f(x), \quad \text{当 } x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

其中

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad \left(\begin{matrix} i=0, 1, \dots, n; \\ n=1, 2, \dots \end{matrix} \right).$$

証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2199. 証明: 若函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积分, 則有連續函数 $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 的叙列存在, 使

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx, \quad \text{当 } a \leq c \leq b.$$

2200. 証明：若有界的函数 $f(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 上可积分，則其絕對值 $|f(x)|$ 于 $[a, b]$ 上也可积分并且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

2201. 若 $f(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 上絕對可积(即积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 存在)。这个函数在 $[a, b]$ 上是否为可积分的函数？

研究例子：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ -1, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

2202. 設函数 $\varphi(x)$ 于閉区間 $[A, B]$ 上有定义并連續，函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积分，并且当 $a \leq x \leq b$ 时 $A \leq f(x) \leq B$ 。証明函数 $\varphi[f(x)]$ 于 $[a, b]$ 上可积分。

2203. 若函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 可积分，則函数 $f[\varphi(x)]$ 是否也必定可积分？

研究例子：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x=0, \\ 1, & \text{若 } x \neq 0, \end{cases}$$

及 $\varphi(x)$ 为黎曼函数(参閱問題 2195)。

2204. 設函数 $f(x)$ 于閉区間 $[A, B]$ 上可积分，証明函数 $f(x)$ 有积分的連續性，即是說

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{a+h} |f(x+h) - f(x)| dx = 0,$$

式中 $[a, b] \subset [A, B]$ 。

2205. 設函数 $f(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 上可积分，証明等式

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0.$$

当而且仅当对属于閉区間 $[a, b]$ 内函数 $f(x)$ 連續的一切点有 $f(x) = 0$ 时方成立。

§ 2. 利用不定积分計算定积分的方法

1° 牛頓-萊布尼茲公式 若函数 $f(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 上有定义而且連續, $F'(x)$ 为它的原函数 (即 $F'(x) = f(x)$), 則

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

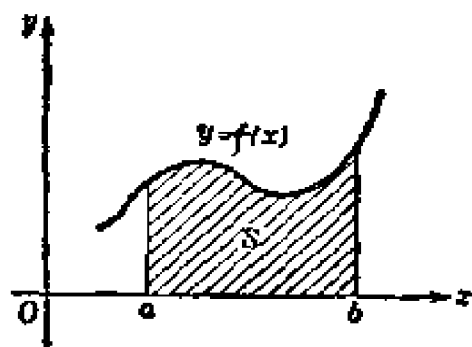


图 9

定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的几何意义表示由曲线 $y = f(x)$, Ox 軸及垂直于 Ox 軸的二直线 $x = a$ 和 $x = b$ 四者所圍成的代数面积 S (图 9)。

2° 部份积分法 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 上連續并有連續导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 則

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx.$$

3° 变数代換 若: (1) 函数 $f(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 內連續, (2) 函数 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆于閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上連續, 其中 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$; (3) 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 于閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上有定义并連續, 則

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

利用牛頓-萊布尼茲公式, 求下列定积分并繪出对应的曲边面积:

2206. $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx.$

2207. $\int_0^{\pi} \sin x dx.$

2208. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$

2209. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2210. $\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

2211. $\int_0^2 |1-x| dx.$

2212. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi).$

2213. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + e \cos x} \quad (0 \leq e < 1).$

$$2214. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \\ (|a| < 1, |b| < 1, ab > 0)。$$

$$2215. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0)。$$

2216. 設:

$$(A) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$$

$$(B) \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$(B) \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right) dx。$$

說明为甚么运用牛頓-萊布尼茲公式会得到不正确的結果。

$$2217. \text{ 求 } \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx。 \quad 2218. \text{ 求 } \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx。$$

利用定积分求下列和的极限值:

$$2219. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)。$$

$$2220. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)。$$

$$2221. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)。$$

$$2222. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)。$$

$$2223. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0)。$$

$$2224. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right)。$$

$$2225. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}。$$

$$2226. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a+k \frac{b-a}{n} \right) \right]。$$

弃掉高阶同无穷小, 求下列和的极限值:

$$2227. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \cdots + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right].$$

$$2228. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}.$$

$$2229. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \quad (x > 0).$$

$$2230. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

2231. 求:

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx, \quad \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx, \quad \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx.$$

2232. 求:

$$(a) \frac{d}{dx} \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt; \quad (b) \frac{d}{dx} \int_x^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$(B) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

2233. 求:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx \right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}.$$

2234. 証明

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}.$$

2235. 求:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx}.$$

2236. 设 $f(x)$ 为连续正值函数, 证明当 $x \geq 0$ 时, 函数

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

增加。

2237. 求:

$$(a) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{当 } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(b) \int_0^1 f(x) dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x & \text{当 } 0 \leq x \leq t, \\ t \cdot \frac{1-x}{1-t} & \text{当 } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2238. 计算下列积分并把它们当作参数 α 的函数作出积分 $I = I(\alpha)$ 的图形, 设:

$$(a) I = \int_0^1 x |x - \alpha| dx;$$

$$(b) I = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx;$$

$$(B) I = \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}}.$$

利用部分积分法的公式, 求下列定积分:

$$2239. \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$$

$$2240. \int_0^x x \sin x dx.$$

$$2241. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$$

$$2242. \int_{\frac{1}{e}}^e |\lg x| dx.$$

$$2243. \int_0^1 \arccos x dx.$$

$$2244. \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx.$$

利用适当的变数代换, 求下列定积分:

$$2245. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

$$2246. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

$$2247. \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}. \quad 2248. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx.$$

$$2249. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

2250. 假设 $x - \frac{1}{x} = t$, 来计算积分

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

2251. 設:

$$(a) \int_{-1}^1 dx, \quad t = x^{\frac{2}{3}};$$

$$(6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad x = \frac{1}{t};$$

$$(n) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = t,$$

說明为甚么用 $\varphi(x)$ 代換 x 会引致不正确的結果。

2252. 在积分

$$\int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^2} dx$$

中, 令 $x = \sin t$ 是否可以?

2253. 于积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 中, 当作变数的代換 $x = \sin t$ 时,

可否取数 π 和 $\frac{\pi}{2}$ 作为新的上下限?

2254. 証明: 若函数 $f(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 內連續, 則:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a+(b-a)x] dx.$$

2255. 証明: 等式

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx \quad (a > 0).$$

原
书
缺
页

原
书
缺
页

原
书
缺
页

原
书
缺
页

2300. 勒让德多项式 $P_n(x)$ 被下面公式来定义:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

証明

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{若 } m = n. \end{cases}$$

2301. 設函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积分, 函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 内除了有限个点 C_i ($i=1, \dots, p$) 及点 a 与 b 外皆有 $F'(x) = f(x)$, 而在这除去的有限个点上 $F(x)$ 有第一类的间断点(广义原函数).

証明

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^p [F(c_i+0) - F(c_i-0)].$$

2302. 設函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上可积分而

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi) d\xi$$

为 $f(x)$ 的不定积分。証明函数 $F(x)$ 連續且在函数 $f(x)$ 連續的一切点处有等式

$$F'(x) = f(x).$$

成立, 問在函数 $f(x)$ 不連續点处函数 $F(x)$ 的导函数为何?

研究例子:

$$(a) \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 及当 } x \neq \frac{1}{n} \text{ 时 } f(x) = 0$$

$$(b) \quad f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

求下列有界非連續函数的不定积分:

$$\mathbf{2303.} \quad \int \operatorname{sgn} x \, dx.$$

$$\mathbf{2304.} \quad \int \operatorname{sgn}(\sin x) \, dx.$$

$$\mathbf{2305.} \quad \int [x] \, dx \quad (x \geq 0).$$

$$\mathbf{2306.} \quad \int x[x] \, dx \quad (x \geq 0).$$

$$2307. \int (-1)^{[x]} dx.$$

$$2308. \int_0^2 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } |x| < 1, \\ 0 & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

計算下列有界非連續函数的定积分：

$$2309. \int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx. \quad 2310. \int_0^2 [e^x] dx.$$

$$2311. \int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx, \quad 2312. \int_0^\pi x \operatorname{sgn}(\cos x) dx.$$

$$2313. \int_1^{n+1} \ln [x] dx, \text{ 其中 } n \text{ 为自然数.}$$

$$2314. \int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)] dx.$$

$$2315. \text{ 求 } \int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx, \text{ 其中 } E \text{ 为閉区間 } [0, 4\pi] \text{ 中使}$$

被积分式有意义的一切值所成之集合。

§ 3. 中值定理

1° 函数的平均值 数

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的平均值。

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，則可求得一点 $C \in (a, b)$ 适合

$$M[f] = f(c).$$

2° 第一中值定理 若：(1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 上有界并可积分；(2) 当 $a < x < b$ 时，函数 $\varphi(x)$ 不变号，則

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx,$$

式中 $m \leq \mu \leq M$ 及 $m = \inf_{a < x < b} f(x)$, $M = \sup_{a < x < b} f(x)$ ；(3) 除此而外，若函数 $f(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 上連續，則 $\mu = f(c)$ ，其中 $a \leq c \leq b$ 。

3° 第二中值定理 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于閉区間 $[a, b]$ 上有界并可积分; (2) 当 $a < x < b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 是單調的, 則

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x) dx + \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x) dx,$$

式中 $a \leq \xi \leq b$; (3) 除此而外, 若函数 $\varphi(x)$ 單調下降 (广义的) 且不为負, 則

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

(3') 若函数 $\varphi(x)$ 單調上升 (广义的) 且不为負, 則

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2316. 确定下列定积分的符号:

理科阅览室

(a) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx;$

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx;$

(B) $\int_{-2}^2 x^3 2^x dx;$

(r) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx.$

2317. 于下列各題中确定那个积分較大:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ 或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx?$

(b) $\int_0^1 e^{-x} dx$ 或 $\int_0^1 e^{-x^2} dx?$

(B) $\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ 或 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx?$

2318. 求下列已知函数在所給区間內的平均值:

(a) $f(x) = x^2$ 在 $[0, 1]$ 上;

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, 100]$ 上;

(B) $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上;

(r) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上。

2319. 求橢圓之焦徑

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

之长的平均值。

2320. 求初速度为 v_0 之自由落体的速度之平均值。

2321. 电流的强度依下面的规律变化

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

其中 i_0 表振幅, t 表时间, T 表周期, φ 表初相, 求电流强度之平方的平均值。

2322. 命

$$\int_0^x f(t) dt = x f(\theta x).$$

求 θ , 設

$$(a) f(t) = t^n \quad (n > -1) \quad (b) f(t) = \ln t;$$

$$(B) f(t) = e^t.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \theta$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta$ 等于甚么?

利用第一中值定理, 估計积分:

$$\mathbf{2323.} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x}. \quad \mathbf{2324.} \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$$

$$\mathbf{2325.} \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$$

2326. 証明等式:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

2327. 設函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 而 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續且在 (a, b) 上可微分, 并且

$$\varphi'(x) \geq 0 \quad \text{当 } a < x < b.$$

应用部分积分法及第一中值定理以証明第二中值定理。

利用第二中值定理, 估計积分:

$$\mathbf{2328.} \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$2329. \int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x \, dx \quad (\alpha \geq 0; 0 < a < b).$$

$$2330. \int_a^b \sin x^2 \, dx \quad (0 < a < b).$$

2331. 設函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 和它們的平方在区間 $[a, b]$ 上可积分。証明 哥西-布尼雅可-夫斯基不等式

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) \, dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) \, dx \int_a^b \psi^2(x) \, dx.$$

2332. 設函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上連續可微分且 $f(a) = 0$ 。証明不等式

$$M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) \, dx,$$

其中

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

2333. 証明等式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} \, dx = 0 \quad (p > 0).$$

§ 4. 广义积分

1° 函数的广义可积分性 若函数 $f(x)$ 于每一个有穷区間 $[a, b]$ 上依尋常的意义是可积分的, 則可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx. \quad (1)$$

若函数 $f(x)$ 于 b 点的邻域内无界且于每一个区間 $(a, b-\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) 内依尋常的意义是可积分的, 則取

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx. \quad (2)$$

若极限(1)或(2)存在, 則对应的积分称为收敛的, 在相反的情形則称为发散的。

2° 哥西准則 积分(1)收敛的充要条件为对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在有数 $b = b(\varepsilon)$, 当 $b' > b$ 及 $b'' > b$ 时, 下面的不等式成立

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) \, dx \right| < \varepsilon.$$

同样地对形状为 (2) 的积分可述出哥西准则。

3° 绝对收敛的判别法 若 $|f(x)|$ 是广义可积分的, 则函数 $f(x)$ 的对应的积分 (1) 或 (2) 称为绝对收敛的, 而且显然也是收敛的积分。

比较判别法 I. 设当 $x \geq a$ 时 $|f(x)| \leq F(x)$ 。

若 $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛。

比较判别法 II. 若 $\psi(x) > 0$ 及

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(x) = O^*[\psi(x)]$,

则积分 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 及 $\int_a^{+\infty} \psi(x) dx$ 同时收敛或同时发散。就特别情形来说,

若当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则上面的结果也成立。

比较判别法 III. (a) 设

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$ 。

在这种情况下, 当 $p > 1$ 时, 积分 (1) 收敛, 当 $p \leq 1$ 时, 积分 (1) 发散。

(6) 设

当 $x \rightarrow b-0$ 时, $f(x) = O^*\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right]$ 。

在这种情况下, 当 $p < 1$ 时, 积分 (2) 收敛; 当 $p \geq 1$ 时, 积分 (2) 发散。

4° 收敛性的较精密的判别法 若 (1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 单调地趋近于零; (2) 函数 $f(x)$ 有有界的原函数

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi,$$

则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$

收敛, 但一般地说, 并非绝对收敛。

特殊情形, 若 $p > 0$, 则积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \quad \text{及} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

收敛。

5° 在哥西意义上的主值 若函数 $f(x)$ 对任意的 $\varepsilon > 0$ 积分

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx \quad \text{及} \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (a < c < b)$$

存在, 则在哥西意义上的主值 (V.P.) 为

$$V. P. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{b-\epsilon} f(x) dx + \int_{b+\epsilon}^b f(x) dx \right].$$

相仿地, $V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$

计算下列积分:

$$2334. \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0).$$

$$2335. \int_0^1 \ln x dx.$$

$$2336. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$2337. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2338. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

$$2339. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$2340. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$2341. \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$$2342. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

$$2343. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^6+x^{10}}}.$$

$$2344. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$2345. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$2346. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0).$$

$$2347. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0).$$

利用递推公式计算下列广义积分 (n 为自然数):

$$2348. I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

$$2349. I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac-b^2 > 0).$$

$$2350. I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

$$2351. I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$$

$$2352. I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$$

2353. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$; (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx$.

2354. 求:

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx,$$

其中 E 表区間 $(0, +\infty)$ 中使被积分式有意义的一切 x 值所成之集合。

2355. 証明等式

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) \, dx,$$

其中 $a > 0$, $b > 0$ (假定等式左端的积分有意义)。

2356. 数

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) \, d\xi$$

称为函数 $f(x)$ 在区間 $(0, +\infty)$ 上的平均值。求下列函数的平均值:

(a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$;

(b) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$;

(B) $f(x) = \sqrt{x} \sin x$ 。

2357. 求:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} \, dx$; (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} \, dt}{x^3}$;

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1} e^{-t} \, dt}{\ln \frac{1}{x}}$;

(r) $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} \, dt$,

其中 $\alpha > 0$, $f(t)$ 为闭区間 $[0, 1]$ 上的連續函数。

研究下列积分的收斂性:

2358. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \, dx}{x^4 - x^2 + 1}$ 。

2359. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}$ 。

$$2360. \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

$$2361. \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

$$2362. \int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$$

$$2363. \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

$$2364. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0).$$

$$2365. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$$

$$2366. \int_0^{+\infty} \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{2+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

$$2367. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$$

$$2368. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

$$2369. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

$$2370. \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$2371. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$$

$$2372. \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

$$2373. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2374. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$$

$$2375. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}.$$

$$2376. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \cdots |x-a_n|^{p_n}}.$$

$$2377. \int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx,$$

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为次数分别为 m 及 n 的互质的多项式。

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性：

$$2378. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

提示 $|\sin x| \geq \sin^2 x$ 。

$$2379. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$$

$$2380. \int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx \quad (q \neq 0).$$

$$2381. \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx \quad (q \geq 0).$$

$$2382. \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx.$$

$$2383. \int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx,$$

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式且若 $x \geq a$, $P_n(x) > 0$.

2384. 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时是否必有 $f(x) \rightarrow 0$?

研究例子:

$$(a) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx; \quad (b) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x]} dx.$$

2385. 于 $[a, b]$ 上有定义的, 无界函数 $f(x)$ 可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

看作对应的积分和式

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

的极限? 式中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

2386. 设:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

收敛, 函数 $\varphi(x)$ 有界, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (2)$$

是否必定收敛? 举出适当的例子。

若积分 (1) 绝对收敛, 问积分 (2) 的收敛性如何?

2387. 証明, 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $f(x)$ 为单调函数, 則 $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ 。

2388. 設函数 $f(x)$ 于区間 $0 < x \leq 1$ 内是单调的函数, 且在点 $x=0$ 的邻域内是无界的, 証明若

$$\int_0^1 f(x) dx$$

存在, 則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx。$$

2389. 証明: 若函数 $f(x)$ 于区間 $0 < x < a$ 内是单调的且

$$\int_0^a x^p f(x) dx$$

存在, 則

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0。$$

2390. 証明

$$(a) \quad V. P. \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = 0; \quad (b) \quad V. P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0;$$

$$(B) \quad V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx = 0。$$

2391. 証明: 当 $x \geq 0$ 时,

$$\operatorname{li} x = V. P. \int_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}$$

存在。

求下列积分:

$$\mathbf{2392.} \quad V. P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}。 \quad \mathbf{2393.} \quad V. P. \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x}。$$

$$\mathbf{2394.} \quad V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx。$$

$$\mathbf{2395.} \quad V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx。$$

§ 5. 面积的計算法

1° 直角坐标系中的面积 由两条連續的曲綫 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ [$y_2(x) \geq y_1(x)$] 与 Ox 軸的两条垂綫 $x=a$ 和 $x=b$ 所圍成的面积 $S=\Delta_1\Delta_2 B_2B_1$ (图 10) 等于

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx,$$

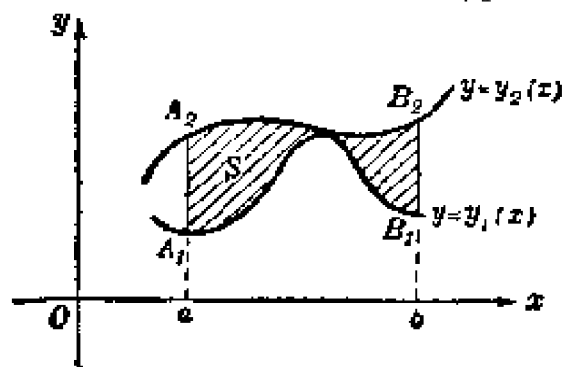


图 10

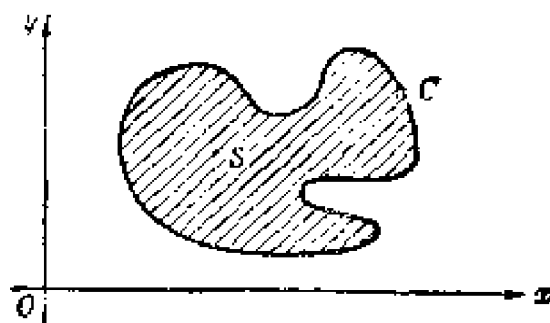


图 11

2° 参数形状表出的曲綫所圍成的面积 若 $x=x(t)$, $y=y(t)$ [$0 \leq t \leq T$] 为一逐段平滑的簡單封閉曲綫 C 的参数方程式, 面积 S 表由此曲綫所圍在它左侧的面积 (图 11), 則

$$S = - \int_0^T y(t) x'(t) dt = \int_0^T x(t) y'(t) dt$$

或
$$S = \frac{1}{2} \int_0^T [x(t) y'(t) - x'(t) y(t)] dt.$$

3° 极坐标系中的面积 由連續的曲綫 $r=r(\varphi)$ 和两条半射綫 $\varphi=\alpha$ 和 $\varphi=\beta$ 所圍成的面积 $S=O\Delta B$ (图 12) 等于

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

2396. 証明: 正抛物綫拱的面积等于

$$S = \frac{2}{3} bh,$$

式中 b 为底, h 为拱的高 (图 13)。

求下列直角坐标方程所表曲綫圍成的面积 ①。

2397. $ax = y^2$, $ay = x^2$. **2398.** $y = x^2$, $x + y = 2$.

① 在第四章的这一节和以后各节都把一切的参数当作是正的。

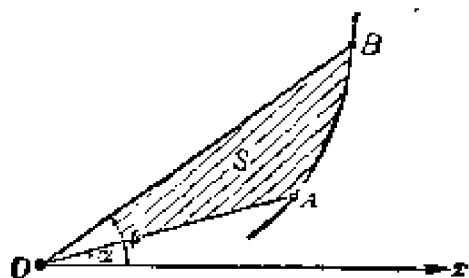


图 12

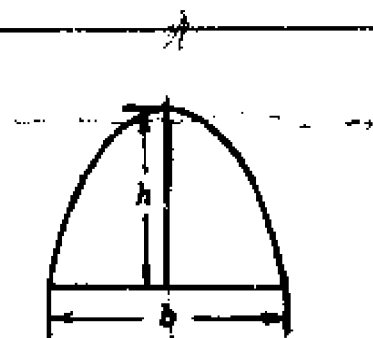


图 13

2399. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$ 。

2400. $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0, 1$, $x = 10$,

2401. $y = x$; $y = x + \sin^2 x$ $[0 \leq x \leq \pi]$ 。

2402. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = 0$ 。

2403. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

2404. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ 。

2405. $y^2 = 2px$, $27py^3 = 8(x-p)^3$ 。

2406. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ ($AC - B^2 > 0$)。

✓ 2407. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (蔓叶綫), $x = 2a$ 。

✓ 2408. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ (曳物綫), $y = 0$ 。

✓ 2409. $y^2 = \frac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}$ ($x > 0$; $n > -2$)。

2410. $y = e^{-x} \sin x$, $y = 0$ ($x \geq 0$)。

2411. 抛物綫 $y^2 = 2x$ 分圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的面积为两部分, 这两部分的比如何?

2412. 把双曲綫 $x^2 - y^2 = a^2$ 上的点 $M(x, y)$ 的坐标表成为双曲綫扇形 $S = OM'M$ 面积的函数, 这个扇形是由双曲綫的弧 $M'M$ 与二射綫 OM 及 OM' 所圍成, 其中 $M'(x, -y)$ 是对于 Ox 軸与 M 对称的点。

求由下列参数方程式所表曲綫圍成的面积:

2413. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $[0 \leq t \leq 2\pi]$ (摆綫) 及 $y = 0$ 。

2414. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$ 。

2415. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ $[0 \leq t \leq 2\pi]$ (圓的漸伸綫) 及 $x = a$, $y \leq 0$ 。

2416. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$ 。

2417. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ ($c^2 = a^2 - b^2$) (橢圓的漸屈綫)。

求由下列极坐标方程式所表曲綫圍成的面积 S ：

2418. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (双紐綫)。

2419. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (心脏形綫)。

2420. $r = a \sin 3\varphi$ (三叶綫)。

2421. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (拋物綫), $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。

2422. $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ ($0 < \varepsilon < 1$) (橢圓)。

2423. $r = a \cos \varphi$, $r = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$ $\left[M\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in S \right]$ 。

2424. 求由曲綫 $\varphi = r \operatorname{arctg} r$ 及二射綫 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所圍成之扇形的面积。

2425. 求封閉曲綫

$$r = \frac{2at}{1+t^2}, \quad \varphi = \frac{\pi t}{1+t}$$

所包圍的面积。

变为极坐标, 以求下列曲綫所圍成的面积：

2426. $x^3 + y^3 = 3axy$ (笛卡尔叶形綫)。

2427. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 。

2428. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (双紐綫)。

化方程式为参数式的形状,以求下列曲綫所圍成的面积:

✓ 2429. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (內摆綫)。

2430. $x^4 + y^4 = ax^2y$ 。

提示 令 $y = tx$ 。

§ 6. 弧长的計算法

1° 在直角坐标系中的弧长 平滑(連續可微分的)曲綫

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

上一段弧的长度等于

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx。$$

2° 参数方程所表曲綫的弧长 若曲綫 C 用参数方程式給出

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_0 \leq t \leq T),$$

式中 $x(t), y(t)$ 为在閉区間 $[t_0, T]$ 內可微分的連續函数,則曲綫 C 的弧长等于

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt。$$

3° 极坐标系中的弧长 若

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta),$$

式中 $r(\varphi)$ 及其导函数 $r'(\varphi)$ 在閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上皆是連續的,則曲綫上对应的一段弧长等于

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi。$$

关于空間曲綫的弧长可参閱第八章。

求下列曲綫的弧长:

2431. $y = x^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leq x \leq 4)。$

2432. $y^2 = 2px \quad (0 \leq x \leq x_0)。$

2433. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 从点 $A(0, a)$ 至点 $B(b, h)。$

2434. $y = e^x \quad (0 \leq x \leq x_0)。$

2435. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y \quad (1 \leq y \leq e)。$

$$2436. \quad y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq b < a)。$$

$$2437. \quad y = \ln \cos x \quad \left(0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}\right)。$$

$$2438. \quad x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (0 < b \leq y \leq a)。$$

$$2439. \quad y^2 = \frac{x^2}{2a - x} \quad \left[0 \leq x \leq \frac{5}{3}a\right]。$$

$$2440. \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ (內摆綫)}。$$

$$2441. \quad x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, c^2 = a^2 - b^2 \text{ (橢圓的漸屈綫)}。$$

$$2442. \quad x = a \cos^4 t, y = a \sin^4 t。$$

$$2443. \quad x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)：$$

$$2444. \quad x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(圓的漸伸綫)。

$$2445. \quad x = a(\operatorname{sh} t - t), y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (0 \leq t \leq T)。$$

$$2446. \quad r = a\varphi \text{ (阿基米德螺綫)} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)。$$

$$2447. \quad r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0) \text{ 当 } 0 < r < a。$$

$$2448. \quad r = a(1 + \cos \varphi)。$$

$$2449. \quad r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\right)。$$

$$2450. \quad r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}。$$

$$2451. \quad r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)。$$

$$2452. \quad \varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r}\right) \quad (1 \leq r \leq 3)。$$

$$2453. \quad \text{証明：橢圓}$$

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

的弧长等于正弦曲线 $y = c \sin \frac{x}{b}$ 的一波之长, 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ 。

2454. 抛物线 $4ay = x^2$ 沿 Ox 轴滚动。证明抛物线的焦点划成悬链线。

2455. 求环线

$$y = \pm \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x}$$

所包围的面积与周长等于这曲线的环线长的圆面积之比。

§ 7. 体积的计算法

1° 由已知横切面计算物体体积 若物体的体积 V 存在及 $S = S(x)$ ($a \leq x \leq b$) 为用平面切下的物体的横断面积, 而此横断面为经过 x 点垂直于 Ox 轴者, 则

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

2° 旋转体的体积 面积

$$a \leq x \leq b; \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

式中 $y(x)$ 为单值连续函数, 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

更普遍的情形: 面积

$$a \leq x \leq b; \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

式中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负的连续函数, 绕 Ox 轴旋转所成的环形的体积等于

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx.$$

2456. 求顶楼的体积, 其底是边长等于 a 及 b 的矩形, 其顶的棱边等于 c , 而高等于 h 。

2457. 求截楔形的体积, 其平行的上下底为边长分别等于 A , B 和 a , b 的矩形, 而高等于 h 。

2458. 求截锥体的体积, 其上下底为半轴长分别等于 A , B 和 a , b 的椭圆, 而高等于 h 。

2459. 求旋轉拋物體的體積，其底為 S ，而高等於 H 。

2460. 設立體之垂直於 Ox 軸的橫截面的面積 $S = S(x)$ 依下面的二次式規律變化：

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad [a \leq x \leq b],$$

其中 A, B 及 C 為常數。

證明此物體之體積等於

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right],$$

其中 $H = b - a$ (辛普森公式)。

2461. 物體是點 $M(x, y, z)$ 的集合，其中 $0 \leq z \leq 1$ ，而且若 z 為有理數時， $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ；若 z 為無理數時， $-1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0$ 。證明雖然對應的積分為

$$\int_0^1 S(z) dz = 1,$$

但此物體的體積不存在。

求下列曲面所圍成的體積：

2462. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = \frac{c}{a}x, z = 0。$

2463. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (橢球)。

2464. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, z = \pm c。$

2465. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2。$

2466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax。$

2467. $z^2 = b(a - x), x^2 + y^2 = ax。$

2468. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 \quad (0 < z < a)。$

2469. $x + y + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0。$

2470. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2。$

2471. 証明：將面积

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

(式中 $y(x)$ 为連續函数) 繞 Oy 軸旋轉所成的旋轉体体积等于

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

求下列曲綫旋轉所成曲面包圍的体积：

✓ **2472.** $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ ($0 \leq x \leq a$) 繞 Ox 軸 (半三次拋物綫)。

2473. $y = 2x - x^2$, $y = 0$; (a) 繞 Ox 軸; (b) 繞 Oy 軸。

2474. $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$): (a) 繞 Ox 軸; (b) 繞 Oy 軸。

2475. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$: (a) 繞 Ox 軸; (b) 繞 Oy 軸。

2476. $y = e^{-x}$, $y = 0$ ($0 \leq x < +\infty$): (a) 繞 Ox 軸; (b) 繞 Oy 軸。

2477. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) 繞 Ox 軸。

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ 繞 Ox 軸。

2479. $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x < +\infty$) 繞 Ox 軸。

2480. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$:

(a) 繞 Ox 軸; (b) 繞 Oy 軸;

(B) 繞直綫 $y = 2a$ 。

2481. $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$):

(a) 繞 Ox 軸; (b) 繞 Oy 軸。

2482. 証明把面积

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r(\varphi)$$

(φ 与 r 为极坐标) 繞极軸旋轉所成的体积等于

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

求下列由极坐标所表出的面积經旋轉后所得的体积：

2483. $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

(a) 繞极軸;

(b) 繞直綫 $r \cos \varphi = -\frac{a}{4}$ 。

2484. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$:

(a) 繞 Ox 軸;

(b) 繞 Oy 軸;

(B) 繞直綫 $y = x$ 。

提示 化为极坐标。

2485. 求繞极軸把面积

$$a \leq r \leq a\sqrt{2\sin 2\varphi}$$

旋轉而成的旋轉体体积。

§ 8. 旋轉曲面表面积的計算法

平滑的曲綫 AB 繞 Ox 軸旋轉所成曲面的面积等于

$$P = 2\pi \int_A^B y \, ds,$$

式中 ds 为弧的微分。

求旋轉下列曲綫所成曲面的面积：

2486. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ ($0 \leq x \leq a$) 繞 Ox 軸。

2487. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$) 繞 Ox 軸。

2488. $y = \operatorname{tg} x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 繞 Ox 軸。

2489. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$): (a) 繞 Ox 軸; (b) 繞 Oy 軸。

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b \leq a$): (a) 繞 Ox 軸; (b) 繞 Oy 軸。

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($b \geq a$) 繞 Ox 軸。

2492. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 繞 Ox 軸。

2493. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$): (a) 繞 Ox 軸; (б) 繞 Oy 軸。

2494. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 繞 Ox 軸。

2495. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$):

(a) 繞 Ox 軸; (б) 繞 Oy 軸; (B) 繞直線 $y = 2a$ 。

2496. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 繞直線 $y = x$ 。

2497. $r = a(1 + \cos \varphi)$ 繞極軸。

2498. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$: (a) 繞極軸; (б) 繞軸 $\varphi = \frac{\pi}{2}$; (B) 繞軸 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 。

2499. 由拋物綫 $ay = a^2 - x^2$ 及 Ox 軸所包圍的图形繞 Ox 旋轉而构成一旋轉體。求其表面积与等体积球的表面积之比。

2500. 由直綫 $x = \frac{p}{2}$ 与拋物綫 $y^2 = 2px$ 所包圍的图形繞直綫 $y = p$ 而旋轉, 求这旋轉體的体积和表面积。

§ 9. 矩的計算法. 重心的坐标

1° 矩 若在 Oxy 平面上, 密度为 $\rho = \rho(y)$ 的质量 M 充滿了某有界連續綫 Ω (曲綫, 平面的区域), 而 $\omega = \omega(y)$ 为 Ω 中纵标不超过 y 的部分的对应的度量(弧长, 面积), 則数

$$M_k = \lim_{\max |\Delta y_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(y_i) y_i^k \Delta \omega(y_i) = \int_{\Omega} \rho y^k d\omega(y) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

称为质量 M 对于 Ox 軸的 k 次矩。

特殊情形, 当 $k=0$ 时得质量 M , 当 $k=1$ 时得靜力矩, 当 $k=2$ 时得轉動慣量。

同样地可定义出质量对于坐标平面的矩。

若 $\rho=1$, 則对应的矩称为几何矩(綫矩, 面积矩, 体积矩等等)。

2° 重心 均匀平面图形 S 的重心的坐标 (x_0, y_0) 根据下面的公式来定义

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中 $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ 为面积 S 对于 Oy 軸和 Ox 軸的几何靜力矩。

2501. 求半徑为 a 的半圓弧对于过此弧两端点直徑的靜力矩和轉动慣量。

2502. 求底为 b , 高为 h 的均匀三角形薄板对于其底边的靜力矩和轉动慣量 ($\rho=1$)。

2503. 求半軸长为 a 和 b 的均匀橢圓形薄板对于其主軸的轉动慣量 ($\rho=1$)。

2504. 求底半徑为 r 和高为 h 的均匀圓錐对于其底平面的靜力矩和轉动慣量 ($\rho=1$)。

2505. 証明古尔金第一定理: 弧 C 繞着不与它相交的軸旋轉而成的旋轉面的面积, 等于这个弧的长度与这弧的重心所划出的圓周之长的乘积。

2506. 証明古尔金第二定理: 面积 S 繞不与它相交的軸旋轉而成的旋轉体, 其体积等于面积 S 与这面积的重心所划出的圓周之长的相乘积。

2507. 求圓弧: $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ ($|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$) 重心的坐标。

2508. 求拋物綫: $ax = y^2$, $ay = x^2$ ($a > 0$) 所圍成面积的重心的坐标。

2509. 求面积

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$$

的重心的坐标。

2510. 求半徑为 a 的均匀半球的重心坐标。

2511. 求对数螺綫

$$r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0)$$

上由点 $O(-\infty, 0)$ 到点 $P(\varphi, r)$ 的弧 OP 的重心 $C(\varphi_0, r_0)$ 之坐标。当 P 点移动时, C 点画出怎样的曲綫?

2512. 求曲綫 $r = a(1 + \cos \varphi)$ 所圍面积的重心坐标。

2513. 求摆綫 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的第一拱与 Ox 軸所圍成面积的重心的坐标。

2514. 求面积 $0 \leq x \leq a; y^2 \leq 2px$ 繞 Ox 軸旋轉所成旋轉体的重心的坐标。

2515. 求半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) 的重心的坐标。

§ 10. 力学和物理学中的問題

作成适当的积分和并找出它們的极限, 来解下列問題:

2516. 軸的长度 $l = 10$ 米, 若該軸的綫性密度按定律 $\delta = 6 + 0.3x$ 千克/米而变更, 其中 x 为距軸两端点中之一端的距离, 求軸的质量。

2517. 把质量为 m 的物体从地球(其半徑为 R) 表面升高到高度为 h 的地位, 需要花費多大的功? 若物体远离至无穷远去, 則功等于甚么?

2518. 若 1 千克的力能使彈簧伸长 1 厘米, 現在要使这彈簧伸长 10 厘米, 問需要花費多大的功?

提示 利用虎克定律。

2519. 直徑为 20 厘米, 长为 80 厘米的圓柱被压力为 10 千克/厘米² 的蒸汽充滿着。假定气体的温度不变, 要使气体的体积减小一半, 須要花費多大的功?

2520. 求水对于垂直壁上的压力, 这壁的形状为半圓形, 半徑为 a 且其直徑位于水的表面上。

2521. 求水对于垂直壁上的压力, 这壁的形状为梯形, 其下底 $a = 10$ 米, 上底 $b = 6$ 米, 高 $h = 5$ 米, 下底沉沒于水面下的距离为

$c = 20$ 米。

作出微分方程式以解下列問題：

2522. 点运动的速度是按下面的規律而变化：

$$v = v_0 + at,$$

問在閉間隔 $[0, T]$ 内这点經過的路程怎样？

2523. 半徑为 R 而密度为 δ 的均匀球壳以角速度 ω 繞其直徑而旋轉。求此球的动能。

2524. 具不变的綫性密度 μ_0 的无穷直綫以怎样的力吸引距此直綫距离为 a 质量为 m 的质点？

2525. 計算半徑为 a 及固定的表面密度为 δ_0 的圓形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P ，此质点位于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的垂直綫上，最短距离 PQ 等于 b 。

2526. 根据托里拆利定律，液体从容器中流出的速度等于

$$v = c\sqrt{2gh},$$

式中 g 为重力加速度， h 为液体表面在开孔上之高， $c = 0.6$ 为实验系数。

直徑为 $D = 1$ 米及高为 $H = 2$ 米的直立圓柱形大桶，充滿之后从其底上直徑为 $d = 1$ 厘米的圓孔流出，須要多长时间，完全流空？

2527. 旋轉体的容器应当是甚么形状，才能使液体流出时，液体表面的下降是均匀的？

2528. 鐳在每一时刻的分解速度与其現存的量成比例。設在开始的时刻 $t = 0$ 有鐳 Q_0 克，經過时间 $T = 1600$ 年它的量减少了一半。求鐳分解的規律。

2529. 变换物质 A 为物质 B 的二阶化学反应之速度与此二物质的濃度相乘之积成正比。問經過 $t = 1$ 小时在容器中所含有的物质 B 之百分率如何？設 $t = 0$ 分时有 20% 的物质 B ，而当 $t = 15$ 分它变成 80%。

2530. 根据虎克定律, 棒的相对伸长率 ε 与在对应的横断面上的应力 σ 成比例, 即是說

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

式中 E 为楊氏模数。

求圓錐形重棒的伸长, 此錐形的頂向下而底固定, 設底半徑等于 R , 圓錐的高为 H , 比重为 γ 。

§ 11. 定积分的近似計算法

1° 矩形公式 若函数 $y=y(x)$ 于有穷的閉区間 $[a, b]$ 上連續且可微分充分多次数, 并且 $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ ($i=0, 1, \dots, n$), $y_i = y(x_i)$, 則

$$\int_a^b y(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$

式中 $R_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} y'(\xi)$ ($a \leq \xi \leq b$)。

2° 梯形公式 用相同的記号有

$$\int_a^b y(x) dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

式中 $R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi')$ ($a \leq \xi' \leq b$)。

3° 拋物綫公式(辛普森公式) 命 $n=2k$, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b y(x) dx = \frac{h}{3} [& (y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1}) + \\ & + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2})] + R_n. \end{aligned}$$

式中 $R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi'')$ ($a \leq \xi'' \leq b$)。

2531. 利用矩形公式 ($n=12$), 近似地計算

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$$

并把結果同精確答数比較。

利用梯形公式計算下列积分并估計它們的誤差:

$$2532. \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8) \circ \quad 2533. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \quad (n=12) \circ$$

$$2534. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} dx \quad (n=6) \circ$$

利用辛普森公式計算下列积分：

$$2535. \int_1^3 \sqrt{x} dx \quad (n=4) \circ$$

$$2536. \int_0^x \sqrt{3 + \cos x} dx \quad (n=6) \circ$$

$$2537. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n=10) \circ$$

$$2538. \int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} \quad (n=6) \circ$$

2539. 取 $n=10$, 計算加达郎常数

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \circ$$

2540. 利用公式

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

計算数 π 精确到 10^{-5} 。

2541. 計算

$$\int_0^1 e^x dx,$$

精确到 0.001。

2542. 計算

$$\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx \text{ 精确到 } 10^{-4} \circ$$

2543. 近似的計算概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \circ$$

提示 令 $x = \frac{t}{1+t}$ 。

2544. 近似地求出半軸为 $a=10$ 及 $b=6$ 的橢圓的周长。

2545. 取 $\Delta x = \frac{\pi}{8}$, 按点子作出函数

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

的图形。

第五章 級数

§ 1. 数項級数. 同号級数收敛性的判別法

1° 一般概念 对于数項級数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (級数的和)

存在, 式中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 則称級数 (1) 为收敛的。反之, 則称級数 (1) 为发散的。

2° 哥西准則 級数 (1) 收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\varepsilon > 0$, 都存在有数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

成立。

特别是, 若級数收敛, 則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0。$$

3° 比較判別法 I. 設除級数 (1) 外, 还有級数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \quad (2)$$

若当 $n \geq n_0$, 不等式

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

成立, 則 1) 从級数 (2) 收敛可推得級数 (1) 收敛; 2) 从級数 (1) 发散可推得級数 (2) 发散。

特别是, 当 $n \rightarrow \infty$ 若 $a_n \sim b_n$, 則正項級数 (1) 和 (2) 同时收敛或同时发散。

4° 比較判別法 II. 設

$$a_n = O^* \left(\frac{1}{n^p} \right)^{\text{①}},$$

則(a)当 $p > 1$ 时級数 (1) 收敛, (б) 当 $p \leq 1$ 时級数 (1) 发散。

① 記号 O^* 的意义参閱第二章, § 6, 1°。

5° 达朗伯判别法 若 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

則 (a) 当 $q < 1$ 时級数 (1) 收敛, (б) 当 $q > 1$ 时級数 (1) 发散。

6° 哥西判别法 若 $a_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

則 (a) 当 $q < 1$ 时級数 (1) 收敛, (б) 当 $q > 1$ 时級数 (1) 发散。

7° 拉阿伯判别法 若 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

則 (a) 当 $p > 1$ 时級数 (1) 收敛, (б) 当 $p < 1$ 时級数 (1) 发散。

8° 高斯判别法 若 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$) 及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中 $|\theta_n| < C$ 而 $\varepsilon > 0$, 則 (a) 当 $\lambda > 1$ 时級数 (1) 收敛, (б) 当 $\lambda < 1$ 时級数 (1) 发散; (в) 当 $\lambda = 1$ 时, 若 $\mu > 1$ 則級数 (1) 收敛; 若 $\mu \leq 1$ 則級数 (1) 发散。

9° 哥西积分的判别法 若 $f(x)$ ($x > 0$) 是非負的不增函数, 則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

与积分

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

同时收敛或同时发散。

直接証明下列級数的收敛性并求它們的和:

$$2546. \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

$$2547. \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

$$2548. \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

$$2549. \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

$$2550. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

$$2551. (a) q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1);$$

$$(b) q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1).$$

$$2552. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

$$2553. \text{研究級數 } \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \text{ 的收斂性}$$

提示 證明當 $x \neq k\pi$ (k 是整數) 時, 要 $\sin nx \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 是不可能的。

2554. 證明, 若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則把該級數的項經過組合而不變更其先後次序所得的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ 其中 } A_n = \sum_{i=p_{n-1}}^{p_n-1} a_i \quad (p_0 = 1, p_1 < p_2 < \cdots),$$

也收斂且有相同的和。反之不真。舉出例子。

2555. 證明, 若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各項是正的, 而把这級數的項經過組合而得到的級數 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收斂, 則原來的級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收斂。

研究下列級數的收斂性:

$$2556. 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$2557. 0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \cdots$$

$$2558. \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

$$2559. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

$$2560. \frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \cdots + \frac{1}{1000n+1} + \cdots$$

$$2561. 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots$$

$$2562. 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

$$2563. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots$$

$$2564. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots$$

2565. 証明, 由等差級数各項的倒数组成的級数是发散的。

2566. 証明, 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (A)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (B)$ 皆收敛且 $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n=1, 2, \dots$), 則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (C)$ 也收敛。若級数 (A) 与 (B) 皆发散, 問級数 (C) 的收敛性若何?

2567. 設已知二发散級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad |a_n - b_n| \geq a_n - b_n$$

的各項不为負数。問下列二級数的收敛性若何:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) \quad \text{及} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n) \quad ? \quad \frac{|a_n - b_n| + a_n + b_n}{2}$$

2568. 証明, 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$ 收敛, 則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛。

倒过来不成立, 举出例子。

2569. 証明, 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛。

2570. 証明若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0,$$

則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

2571. 証明, 若各項为正且其值单调减少的級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

2572. 若当 $p=1, 2, 3, \dots$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$.

問級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收斂?

利用哥西准則, 証明下列正項級數的收斂性:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$ ($|a_n| < 10$).

2574. $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$

2575. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots$
 $\dots + \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n} + \dots$

利用哥西准則, 証明下列級數的发散性:

2576. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

2577. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$

运用达朗伯耳哥西或比較判別法, 研究下列級數的收斂性:

2578. $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \dots$

2580. $\frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$

2581. (a) $\frac{2 \cdot 1!}{1^1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{2^n \cdot n!}{n^n} + \dots;$

(b) $\frac{3 \cdot 1!}{1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{3^n \cdot n!}{n^n} + \dots$

2582. $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^1} + \frac{(3!)^2}{2^0} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots$

$$2583. \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

$$2584. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

$$2585. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{2} - \sqrt[5]{2})(\sqrt[5]{2} - \sqrt[7]{2}) \dots (\sqrt[2n+1]{2} - \sqrt[2n+3]{2}).$$

$$2586. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n} \quad 2587. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$2588. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \quad 2589. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$2590. \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \dots$$

提示 $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$.

2591. 証明：若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (a_n > 0),$$

則 $a_n = O(q^n)$ ，其中 $q_1 > q$ 。

2592. 証明：若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad (a_n > 0),$$

則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

相反的結論不真。研究例子

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

2593. 証明，若對於級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (A)$$

存在,則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (\text{B})$$

也存在。

相反的結論不真:若極限 (B) 存在,則極限 (A) 可以不存在。

研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}。$$

2594. 証明,若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (a_n \geq 0),$$

則 (a) 当 $q < 1$ 时級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂; (b) 当 $q > 1$ 时這級數發散 (哥西判別法的推广)。

研究級數的收斂性

$$2595. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}, \quad 2596. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}。$$

$$2597. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}。$$

利用拉阿伯和高斯判別法,研究下列級數的收斂性:

$$2598. \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots。$$

$$2599. \frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$$

($a > 0, b > 0, d > 0$)。

$$2600. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}。$$

$$2601. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2 + \sqrt{1})(2 + \sqrt{2}) \cdots (2 + \sqrt{n})}。$$

$$2602. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1) \cdots (q+n)} \quad (p > 0, q > 0)。$$

$$2603. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p > 0, q > 0)。$$

$$2604. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

$$2605. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right)^n \quad (p > 0).$$

2606. 証明: 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right) = p,$$

則

$$a_n = o \left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}} \right) \quad (\varepsilon > 0).$$

不他因 n
distinct
inf.

求出通項 a_n 的減小的階, 从而研究級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收斂性, 設

$$2607. a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q}, \text{ 其中 } n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q > 0.$$

$$2608. a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$2609. a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} \quad (n > 1).$$

$$2610. a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n} \right).$$

$$2611. a_n = \lg_b \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2612. a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p.$$

$$2613. a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{k}{\ln n}}}.$$

$$2614. a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{n}}}.$$

$$2615. \text{証明: 若有 } \alpha > 0 \text{ 使当 } n \geq n_0 \text{ 时 } \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha (a_n > 0),$$

則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) 收斂; 若 $n \geq n_0$ 时 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$, 則这級数发散
(对数判別法).

研究具如下通項的級數的收斂性：

2616. $a_n = n^{0.5x} \quad (x > 0)。$

2617. $a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} \quad (n > 1)。$

2618. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \quad (n > 1)。$

利用哥西積分判別法，研究具如下通項的級數的收斂性：

2619. $a_n = \frac{1}{n \ln^p n} \quad (n > 1)。$

2620. $a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n > 2)。$

2621. 研究級數

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

的收斂性。

2622. 證明：設正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的項單調減小，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 與級數 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同時收斂或同時發散。

2623. 設 $f(x)$ 為單調不增加的正值函數。證明，若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收斂，則對於其餘項 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下的估計：

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx。$$

利用此式，求級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和精確到 0.01。

2624. 證明厄耳瑪可夫判別法：設 $f(x)$ 為單調減少正值函數又設

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda。$$

若 $\lambda < 1$ ，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收斂；若 $\lambda > 1$ ，則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 發

散。

2625. 証明罗巴契夫斯基判別法: 設正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的項单调趋于零, 則級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与級数

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$$

同时收斂或同时发散, 其中 p_m 是滿足不等式

$$a_n \geq 2^{-m} \quad (n=1, 2, \dots, p_m)$$

的項 a_n 的最大的指标。

研究下列級数的收斂性:

$$\mathbf{2626.} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\mathbf{2627.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[3]{n^2+n+b}).$$

$$\mathbf{2628.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right).$$

$$\mathbf{2629.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right).$$

$$\mathbf{2630.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}.$$

$$\mathbf{2631.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[n]{n}}.$$

$$\mathbf{2632.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

$$\mathbf{2633.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right).$$

$$\mathbf{2634.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}.$$

$$\mathbf{2635.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$$

$$\mathbf{2636.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2}.$$

$$\mathbf{2637.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right).$$

$$\mathbf{2638.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$$

$$\mathbf{2639.} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

$$2640. \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right) \quad (a > 0, b > 0, c > 0)。$$

$$2641. \sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^a} - 1)。$$

$$2642. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^a} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^a} \right) \right]。$$

$$2643. \sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} \quad (a > 0)。$$

$$2644. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2a}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}} \quad (a > 0, b > 0)。$$

$$2645. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}。$$

研究級數 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收斂性, 其通項如下:

$$2646. u_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}。$$

$$2647. u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}。$$

$$2648. u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx。$$

$$2649. u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx。$$

$$2650. u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx。$$

$$2651. u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}。$$

$$2652. u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^a}。$$

用对应的級數來代替數列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$, 然後研究它們的收斂性, 設:

$$2653. x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}。$$

$$2654. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}。$$

2655. 假如

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!};$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!},$$

約需取級数的多少項来求級数的和方可精确到 10^{-5} 。

§ 2. 变号级数收敛性的判别法

1° 級数的绝对收敛性 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

称为绝对收敛, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (2)$$

收敛。这时級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。绝对收敛級数的和与項相加的顺序无关。

要确定級数 (1) 的绝对收敛性, 只須把对于同号級数收敛性的已知判别法应用于級数 (2) 就够了。

若級数 (1) 收敛, 而級数 (2) 发散, 則称級数 (1) 为条件收敛 (非绝对收敛)。条件收敛級数的各項順序加以改变后可使其和等于任何数 (黎曼定理)。

2° 萊布尼茲判别法 交錯級数

$$b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$$

($b_n \geq 0$) 收敛 (一般說来, 非绝对地), 若 (a) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) 和 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 。在这种情形下, 对于級数的余項

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估計

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1)。$$

3° 亞伯耳判别法 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (3)$$

收敛, 若 1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 2) 数 b_n ($n=1, 2, \dots$) 形成一單調并有界的叙列。

4° 迪里黑里判別法 級數(3)收斂若: 1) 部分和 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 是有界的; 2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时 b_n 單調地趨近于零。

2656. 証明: 可把非絕對收斂級數的各項不變更其順序而分群組合起來使所得的新級數絕對收斂。

2657. 設有級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 若 (a) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 此級數的通項 a_n 趨于零; (b) 由組合已給級數的各項但不變更原有順序所得的某一級數 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收斂; (B) 在項 $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($p_1 < p_2 < \dots$) 中相加項 a_i 的數目是有界的, 証明級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收斂的。

2658. 証明: 若將收斂級數的各項重新排列, 而使每一項離開原有的位置不超過 m 個位置 (m 為預先給定的數), 則其和不變。

証明下列級數的收斂性并求它們的和:

2659. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$ 。

2660. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$ 。

2661. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ 。

提示 運用公式 $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$, 其中 C 為尤拉常數, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ 。

2662. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \ln 2$, 求從已知級數把各項重排後所成級數:

(a) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$

(b) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$

的和。

2663. 把收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的项重排,使它成发散的。

研究变号级数的收敛性

2664. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}。$

2665. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n。$

2666. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots。$

2667. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}。$ 2668. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}。$

2669. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}。$ 2670. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}。$

2671. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+k^2})。$ 2672. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}。$

2673. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}。$

2674. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) > 0,$$

则交错级数 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots$ ($b_n > 0$) 收敛。

研究下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

2675. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}。$ 2676. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p+1}{k}}}$

2677. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right]。$ 2678. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}。$

2679. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}。$ 2680. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}。$

$$2681. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p}.$$

$$2682. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

$$2683. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{100\sqrt[n]{n}}.$$

$$2684. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}. \quad 2685. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt[n]{n}}.$$

$$2686. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}. \quad 2687. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}.$$

$$2688. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}.$$

$$2689. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$$

$$2690. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}. \quad 2691. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2.$$

提示 証明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 \neq 0$ 。

2692. 設

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q}$$

为有理函数, 式中 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ 及当 $x \geq n_0$ 时, $|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q| > 0$ 。

研究級數 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$

的絕對收斂性和条件收斂性。

研究下列級數的收斂性:

$$2693. \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \cdots.$$

$$2694. 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots.$$

$$2695. 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$$

$$2696. 1 - \frac{2}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots$$

2697. 証明：級数

$$(a) \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots,$$

$$(b) \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

在区間 $(0, \pi)$ 內不绝对收敛。

2698. 对于級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

对全体参数 (p, x) 定出：(a) 绝对收敛域；(b) 非绝对收敛域。

2699. 对于級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\dots(n+p)}{n! n^q}$$

定出：(a) 绝对收敛域；(b) 条件收敛域。

2700. 研究級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$$

的收敛性，其中 $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$ 。

2701. 若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

則可否断定級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛？

研究例子 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$ 。

2702. 設 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为非絕對收斂的級數及

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| + a_i}{2}, \quad N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| - a_i}{2}.$$

証明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$ 。

2703. 証明：对于每一个 $p > 0$, 級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和是在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之間。

2704. 証明：若把級數

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

的各項重新安排，而使挨次 p 个正項的一組与挨次 q 个負項的一組相交替，則新級數的和为

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

2705. 証明：若將調和級數

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

之項的符号改变使得 p 个正項之后跟随着 q 个負項 ($p \neq q$)，但不变更原来的順序，則此級數始終是發散的。仅当 $p = q$ 时为收斂的。

§ 3. 級數的运算

二級數的和与积 我們定义：

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n); \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

式中 $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$ 。

若級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收斂，則等式 (a) 非仅有形式上的意义，而等

式(6)当級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛,并且其中最有一个是绝对收敛的,則也有同样的意义。

2706. 若两个級数, (a)一个收敛,而另一个发散; (b)两个級数都发散,問这两个級数的和可以說成什么?

2707. 求二級数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right].$$

求下列級数的和:

2708. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right].$ **2709.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$

2710. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \quad (|xy| < 1).$

2711. 証明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

2712. 証明:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n \quad (|q| < 1).$$

2713. 証明: 收敛級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散級数。

2714. 証明: 下面二級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0) \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \quad (\beta > 0)$$

的积当 $\alpha + \beta > 1$ 时是收敛級数, 而当 $\alpha + \beta < 1$ 时是发散級数。

2715. 验证下面二发散級数

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n \quad \text{和} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

的积是絕對收斂級數。

§ 4. 函数項級數

1° 收斂域 使函数項級數

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, \quad (1)$$

收斂的 x 值的总体 X 叫做此級數的收斂域，而函数

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (x \in X)$$

称为級數的和。

2° 一致收斂性 对于函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

如果： 1) 存在有极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (a < x < b);$$

2) 对于任何的数 $\varepsilon > 0$ 可以确定 $N = N(\varepsilon)$ ，使得当 $n > N$ 和 $a < x < b$ 时，

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

成立，則称这函数序列在区間 (a, b) 內为一致收斂。此种情形写： $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 。

若函数項級數(1)的部分和序列：

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (n=1, 2, \cdots)$$

在区間 (a, b) 內一致收斂，則称(1)在此已知区間內为一致收斂。

3° 哥西判別准則 級數(1)在已知区間 (a, b) 內一致收斂的充分而且必要的条件为：对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，有数 $N = N(\varepsilon)$ 存在，使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \varepsilon \quad (a < x < b)$$

成立。

4° 外耳什特拉斯判別法 对于級數(1)，若有收斂的數項級數

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots \quad (2)$$

存在，使对于 $a < x < b$ 下列不等式都成立

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

則級数(1)在区間 (a, b) 内絕對并一致收斂。

5° 亚伯耳判別法 如果: 1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区間 (a, b) 内一致收斂;
2) 函数 $b_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 全体是有界的并对每一个 x 形成一單調的叙列,
則級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \quad (3)$$

于区間 (a, b) 内一致收斂。

6° 迪里黑里判別法 如果 1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的;
2) 叙列 $b_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 对于每一个 x 都是單調的, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时在
 (a, b) 内一致地趋于零, 則級数(3)在区間 (a, b) 内一致收斂。

7° 函数項級数的性质 (a) 以連續函数为項的一致收斂級数的和是連續函数。

(b) 若函数項級数(1)在区間 (a, b) 内一致收斂且有有穷的极限 $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = A_n$ ($n=1, 2, \dots$), 則 1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收斂, 2) 下之等式成立:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right\}.$$

(B) 若收斂級数(1)的各项当 $a < x < b$ 时皆可微分并且导函数的級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区間 (a, b) 内一致收斂, 則

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

(r) 若級数(1)的各项連續, 并且此級数在有穷区間 (a, b) 内一致收斂, 則

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (4)$$

一般說来若当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\int_a^b R_n(x) dx \rightarrow 0$, 則公式(4)为真, 这里 $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$ 。这个最后的条件对于积分的限是无穷大的时候也适合。

定出下列函数項級数的(絕對的和条件的)收斂域。

2716. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$

2717. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$

2718. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x-1} \right)^n.$

$$2719. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n.$$

$$2720. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n. \quad 2721. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$$

$$2722. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}.$$

$$2723. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \quad (q > 0; 0 < x < \pi).$$

$$2724. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \text{ (拉伯耳特級數)}.$$

$$2725. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n. \quad 2726. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

$$2727. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}.$$

$$2728. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

$$2729. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1+a^{2n}x^2}.$$

$$2730. \sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}}) \quad (x > 0).$$

$$2731. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$$

$$2732. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} \quad (x > 0, y > 0).$$

$$2733. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \geq 0). \quad 2734. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n}.$$

$$2735. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} \quad (x \geq 0).$$

$$2736. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(x + \frac{y}{n} \right).$$

2737. 証明：若勞郎級數 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$

($|x_1| < |x_2|$) 收斂，則此級數当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时也收斂。

2738. 求劳郎级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{n^2}} x^n$$

的收敛域并求它的和。

2739. 求华顿级数的(绝对的与条件的)收敛域:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!};$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!};$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n},$

其中 $x^{[n]} = x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$ 。

2740. 证明: 若迪里黑里级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x=x_0$ 收敛, 则此级数当 $x>x_0$ 时也收敛。

2741. 证明: 叙列 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在区间 (a, b) 内一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分而且必要的条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sup_{a < x < b} r_n(x) \} = 0,$$

其中

$$r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|.$$

2742. 叙列 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$): (a) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛; (6) 在每一个有穷的区间 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$ 上一致收敛; (B) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛是什么意思?

2743. 对于叙列

$$f_n(x) = x^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

求出其项的最小号码 $N = N(\varepsilon, x)$, 使从这项起叙列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001, 设 $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[n]{10}}, \dots$ 。

此叙列在已知区间 $(0, 1)$ 内是否一致收敛?

2744. 应当取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

的若干項方可使部分和 $S_n(x)$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时与級數的和之差小于 ε ? 設:

$$(a) \varepsilon = 0.1; \quad (b) \varepsilon = 0.01;$$

(B) $\varepsilon = 0.001$ 。求出 ε 的数值来。

2745. 对怎样的 n , 不等式

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001 \quad (0 \leq x \leq 10)$$

能保証成立?

研究叙列在所示区間上的一致收敛性:

$$\mathbf{2746.} \quad f_n(x) = x^n; \quad (a) \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad (b) \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\mathbf{2747.} \quad f_n(x) = x^n - x^{n+1}; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\mathbf{2748.} \quad f_n(x) = x^n - x^{2n}; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\mathbf{2749.} \quad f_n(x) = \frac{1}{x+n}; \quad 0 < x < +\infty.$$

$$\mathbf{2750.} \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}; \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\mathbf{2751.} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}; \quad (a) \quad 0 \leq x \leq 1-\varepsilon; \quad (b) \quad 1-\varepsilon \leq x \leq$$

$\leq 1+\varepsilon; \quad (B) \quad 1+\varepsilon \leq x < +\infty, \text{ 其中 } \varepsilon > 0.$

$$\mathbf{2752.} \quad f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}; \quad (a) \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (b) \quad 1 < x < +\infty.$$

$$\mathbf{2753.} \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}; \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$\mathbf{2754.} \quad f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right); \quad 0 < x < +\infty.$$

$$\mathbf{2755.} \quad (a) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}; \quad -\infty < x < +\infty; \quad (b) \quad f_n(x) = \sin \frac{x}{n}; \quad -\infty < x < +\infty.$$

2756. (a) $f_n(x) = \arctg nx$; $0 < x < +\infty$; (b) $f_n(x) = x \arctg nx$; $0 < x < +\infty$ 。

2757. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$; $0 < x < 1$ 。

2758. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$; (a) $-l < x < l$, 其中 l 为任意的正数; (b) $-\infty < x < +\infty$ 。

2759. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$; $0 < x < 1$ 。

2760. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; (a) 在有穷的区间 (a, b) 上; (b) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上。

2761. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$; $1 \leq x \leq a$ 。

2762. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$; $0 \leq x \leq 2$ 。

2763. $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{若 } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x\right), & \text{若 } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{若 } x \geq \frac{2}{n}, \end{cases}$

在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上。

2764. 设 $f(x)$ 为定义于区间 (a, b) 内的任意函数, 且

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n=1, 2, \dots)。$$

证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (a < x < b)。$$

2765. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内有连续的导函数 $f'(x)$, 且

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]。$$

证明: 在闭区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上 (其中 $a < \alpha < \beta < b$), $f_n(x) \rightarrow f'(x)$ 。

2766. 設 $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$, 其中 $f(x)$ 為連續函數。

証明叙列 $f_n(x)$ 在任何有窮閉區間 $[a, b]$ 上一致收斂。

研究下列級數的收斂性：

2767. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; (a) 在區間 $|x| < q$ 內, 此處 $q < 1$; (b) 在區間 $|x| < 1$ 內。

2768. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 在閉區間 $-1 \leq x \leq 1$ 上。

2769. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$; 在閉區間 $0 \leq x \leq 1$ 上。

2770. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$; $-1 \leq x \leq 1$ 。

2771. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0 < x < +\infty$ 。

2772. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0 < x < +\infty$ 。

2773. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$;

(a) $0 \leq x \leq \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$; (b) $\varepsilon \leq x < +\infty$ 。

2774. 利用外耳什特拉斯判別法, 証明下列函數項級數在所
指區間內的一致收斂性：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}$, $-2 < x < +\infty$;

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2}$, $0 \leq x < +\infty$;

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$, $|x| < +\infty$;

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$;

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}, \quad |x| < a, \quad a \text{ 为任意正数};$$

$$(ж) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad |x| < +\infty;$$

$$(з) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad |x| < +\infty;$$

$$(и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \quad |x| < +\infty;$$

$$(к) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right), \quad |x| < a;$$

$$(л) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$(м) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^2}, \quad |x| < +\infty.$$

研究下列函数項級数在指定区間上的一致收斂性:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (a) 在閉区間 $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ 上, 其中 $\varepsilon > 0$;

(б) 在閉区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上。

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$; $0 < x < +\infty$ 。

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0 < x < +\infty$ 。

提示 估計級数的余項。

2778. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$; $0 \leq x \leq 2\pi$ 。

2779. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}}$; $|x| \leq 10$ 。

2780. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}$; $-\infty < x < +\infty$ 。

2781. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0 \leq x < +\infty$ 。

$$2782. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n^2]}}{\sqrt{n(n+x)}}; \quad 0 \leq x < +\infty.$$

2783. 不連續函数的叙列可否一致收斂于連續函数?

研究例子

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \psi(x) \quad (n=1, 2, \dots),$$

其中
$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数;} \\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数。} \end{cases}$$

2784. 証明：若級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上一致收斂，則級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上也一致收斂。

2785. 若級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上絕對并一致收斂，則級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上是否必定一致收斂?

研究例子

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n.$$

其中 $0 \leq x \leq 1$ 。

2786. 証明：絕對收斂且一致收斂的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

其中

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{若 } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{若 } 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

不能用正項的收斂數項級数作为其強級数。

2787. 証明：若各項是單調函数的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

在閉区間 $[a, b]$ 的端点絕對收斂，則此函数在閉区間 $[a, b]$ 上絕對并一致收斂。

2788. 証明：幂級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在全部位于其收斂区間內的任何閉区間上一致收斂。

2789. 設 $a_n \rightarrow \infty$ 且級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收斂。

証明：級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$

在不包含点 $a_n (n=1, 2, \dots)$ 的任何有界閉集合上絕對并一致收斂。

2790. 証明：若級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則迪里黑里級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

当 $x \geq 0$ 时一致收斂。

2791. 設級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。証明：級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

在域 $x \geq 0$ 內一致收斂。

2792. 証明：函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

在域 $-\infty < x < +\infty$ 內連續并有連續的導函數。

2793. 証明：函數

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(a) 除 $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外，在一切點有定義并且是連續的；

(b) 為周期函數，其周期等於 1。

2794. 証明：級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

在閉區間 $0 \leq x \leq 1$ 上收斂但不一致收斂，而它的和在此綫段上是連續函數。

2795. 確定函數 $f(x)$ 的存在域并研究它們的連續性，設：

$$(a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n; \quad (b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2};$$

$$(B) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

2796. 設 $r_k (k=1, 2, \dots)$ 表綫段 $[0, 1]$ 上的有理數。証明函數

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x-r_k|}{3^k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

具有下列性質：1) 連續；2) 在無理點可微分而在有理點不可微分。

2797. 証明：黎曼 ζ 函數

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在域 $x > 1$ 內是連續的并且在此域內有各階的連續導函數。

2798. 証明： θ 函數

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

当 $x > 0$ 时有定义并可微分无穷多次。

2799. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的可微分性, 设:

$$(a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; \quad (b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

2800. 证明: 序列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1).$$

2801. 证明: 叙列

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

2802. 当参数 α 取甚么值: (a) 叙列

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (1)$$

($n=1, 2, \dots$) 在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛; (b) 叙列 (1) 在 $[0, 1]$ 上

一致收敛; (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限?

2803. 证明: 叙列

$$f_n(x) = n x e^{-nx^2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛, 但

$$\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

2804. 证明: 叙列

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

2805. 于下式中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx$$

在积分符号下取极限合理否?

求出:

$$2806. \lim_{x \rightarrow -0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1}.$$

$$2807. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}). \quad 2808. \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

$$2809. \text{逐項微分級數 } \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2} \text{ 合理否?}$$

2810. 在閉區間 $[0, 1]$ 上逐項積分級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}})$$

合理否?

2811. 設 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是可微分任何次的函數, 且其導函數 $f^{(n)}(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 的級列在每一個有窮區間 (a, b) 內一致收斂于函數 $\varphi(x)$ 。証明 $\varphi(x) = Ce^x$, 其中 C 為常數。

§ 5. 幂級數

1° 收斂區間 對於每一個幂級數

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

都存在有收斂區間: $|x-a| \leq R$, 已知的級數在其內收斂, 而在其外發散。收斂半徑 R 可按哥西-哈達瑪公式

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

來確定。

收斂半徑 R 也可按公式

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

來計算(若此極限存在)。

2° 亚伯耳定理 若幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < R$) 在收敛区间的端点 $x=R$ 处收敛, 则

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

3° 台劳级数 在 a 点的解析函数可展为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

可以写成下形

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日形式)或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta_1(x-a)]}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西形式).

必须记得下列五个基本的展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\ (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

4° 幂级数的运算 在公共的收敛区间 $|x-a| < R$ 内有:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x-a)^n;$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

式中

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0;$$

$$(B) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n;$$

$$(r) \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

5° 在复数域內的幂級數 研究級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

式中 $c_n = a_n + ib_n$, $a = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$ 。

对于每一个如像这样的級數都有一收斂圓 $|z-a| < R$, 原来的級數在其內收斂(并且是絕對地), 而在其外發散。收斂半徑 R 等于幂級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

在实数域內的收斂半徑。

求下列幂級數的收斂半徑和收斂區間并研究其在收斂區間端点的性质:

$$2812. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$$

$$2813. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$$

$$2814. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

$$2815. \sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} \cdot x^n \quad (0 < a < 1).$$

$$2816. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

$$2817. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1).$$

$$2818. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

$$2819. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p x^n.$$

$$2820. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n.$$

$$2821. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2822. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$2823. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0).$$

$$2824. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$2825. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$$

$$2826. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$$

$$2827. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

$$2828. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n. \quad 2829. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2 \cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$$

$$2830. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

$$2831. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n \quad (\text{普林斯格木级数}).$$

2832. 求超越几何级数

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n + \cdots$$

的收敛域。

求下列广义的幂级数的收敛域：

$$2833. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n. \quad 2834. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$2835. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}.$$

$$2836. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}.$$

$$2837. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^3 x.$$

2838. 把函数

$$f(x) = x^3$$

按二项式 $x+1$ 的正整数幂来展开。

用二项式展开

2839. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0)$$

按以下方式展为幂级数: (a) 依 x 的乘幂展开; (b) 依二项式 $x-b$ 的乘幂展开, 此处 $b \neq a$; (B) 依 $\frac{1}{x}$ 的乘幂展开。求出对应的收敛域。

2840. 把函数 $f(x) = \ln x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂来展开, 并说明展开式的收敛区间。

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和。

写出下列函数按变数 x 的正整数幂的展开式, 并求出对应的收敛区间:

2841. $f(x) = \operatorname{sh} x_0$

2842. $f(x) = \operatorname{ch} x_0$

2843. $f(x) = \sin^2 x_0$

2844. $f(x) = a^x \quad (a > 0)_0$

2845. $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)_0$

2846. $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)_0$

2847. 写出函数 $f(x) = x^x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂展开式的前三项。

2848. 写出函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (x \neq 0)$ 和 $f(0) = e$ 按变数 x 的正整数幂展开式的前三项。

2849. 把函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按变数 h 的正整数幂展开。

2850. 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6}$ 的幂级数展开式的收敛区间: (a) 依 x 的乘幂展开; (b) 依二项式 $x-5$ 的乘幂展开。

利用 I—V 基本展开式, 写出下列函数关于 x 的幂级数展开式

2851. $e^{-x^2}_0$

2852. $\cos^2 x_0$

2853. $\sin^3 x$ 。

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$ 。

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$ 。

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 。

2857. $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 。

2858. $\frac{x}{1+x-2x^2}$ 。

提示 把所給的分式分解为简单分式。

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$ 。

2860. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ 。

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$ 。

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$ 。

2863. $\frac{x \cos \alpha - x^3}{1-2x \cos \alpha + x^2}$ 。

2864. $\frac{\sin \alpha}{1-2x \cos \alpha + x^2}$ 。

2865. $\frac{x \operatorname{sh} a}{1-2x \operatorname{ch} a + x^2}$ 。

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ 。

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$ 。

2868. $e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$ 。

提示 运用尤拉公式。

首先展开导函数, 然后用逐项积分的方法以求下列函数的幂级数展开式。

2869. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和。

2870. $f(x) = \operatorname{arc} \sin x$ 。

2871. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 。

2872. $f(x) = \ln(1-2x \cos \alpha + x^2)$ 。

2873. 利用各种方法, 求下列函数展为幂级数的展开式:

(a) $f(x) = (1+x) \ln(1+x)$;

(b) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$;

$$(B) f(x) = \arctg \frac{2-2x}{1+4x}; \quad (r) f(x) = \arctg \frac{2x}{2-x^2};$$

$$(I) f(x) = x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2};$$

$$(e) f(x) = \arccos(1-2x^2);$$

$$(K) f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$$

$$(3) f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$$

2874. 利用展开式

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots$$

的唯一性, 求下列函数的 n 阶导函数.

$$(a) f(x) = e^{x^2}; \quad (6) f(x) = e^{\frac{3}{x}};$$

$$(B) f(x) = \arctg x.$$

2875. 把函数

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$$

依二項式 $x+1$ 的正整数乘幂展开。

2876. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

按变数 x 的負乘幂展开成幂級数。

2877. 把函数

$$f(x) = \ln x$$

按分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数乘幂展开成幂級数。

2878. 把函数

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

按分式 $\frac{x}{1+x}$ 的正整数乘幂展开成幂級数。

2879. 設

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

直接証明

$$f(x)f(y) = f(x+y).$$

2880. 假如我們定义

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

及

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

証明: (a) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$; (b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2881. 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1} \right) \right]^{-1}$ 展为幂级数的展开式中之若干項。

对于幂级数进行相应的运算以求下列函数展成幂级数的展开式:

$$\mathbf{2882.} \quad f(x) = (1+x)e^{-x}. \quad \mathbf{2883.} \quad f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}.$$

$$\mathbf{2884.} \quad f(x) = \ln^2(1-x). \quad \mathbf{2885.} \quad f(x) = (1+x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$$\mathbf{2886.} \quad f(x) = e^x \cos x. \quad \mathbf{2887.} \quad f(x) = e^x \sin x.$$

$$\mathbf{2888.} \quad f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}. \quad \mathbf{2889.} \quad f(x) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2.$$

$$\mathbf{2890.} \quad f(x) = \left(\frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} \right)^2.$$

写出下列函数按变数 x 的正乘幂展开成幂级数的展开式 (异于零) 的前三項:

$$\mathbf{2891.} \quad f(x) = \operatorname{tg} x. \quad \mathbf{2892.} \quad f(x) = \operatorname{th} x.$$

$$\mathbf{2893.} \quad f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}.$$

2894. 設 $\sec x$ 的展开式写成下形

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

求出关于系数 E_n (尤拉数) 的递推公式。

2895. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \quad (|x| < 1)$$

展开成幂级数。

2896. 設 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 。写出函数 $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ 的展开式。

2897. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有收敛半径 R_1 , 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有收敛半径 R_2 , 则级数

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

的收敛半径 R 是怎样的?

2898. 設

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ 和 } L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

証明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R 满足下述不等式

$$l \leq R \leq L.$$

2899. 証明: 若函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

且 $|n! a_n| < M \quad (n=1, 2, \dots),$

其中 M 是常数, 則: 1) $f(x)$ 在任一点 a 可微分无限多次; 2) 下述展开式成立:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

2900. 証明: 若 1) $a_n \geq 0$ 及 2) 存在有

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S, \text{ 則 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

将下列函数展成幂级数:

$$2901. \int_0^x e^{-t} dt.$$

$$2902. \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

$$2903. \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

$$2904. \int_0^x \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} dx.$$

$$2905. \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} \text{ (写出四项) }.$$

运用逐项微分法计算下列级数的和:

$$2906. x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots. \quad 2907. x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$$

$$2908. 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots. \quad 2909. \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots.$$

$$2910. 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots.$$

提示 以 $1-x$ 乘级数的导函数。

运用逐项积分法计算下列级数的和:

$$2911. x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots. \quad 2912. x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots.$$

$$2913. 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots.$$

2914. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

满足方程

$$y^{IV} = y.$$

2915. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

满足方程

$$xy'' + y' - y = 0.$$

求在复数域内 ($z = x + iy$) 下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

$$2916. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}. \quad 2917. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}.$$

$$2918. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{(1+i)(1+2i) \cdots (1+ni)}.$$

$$2919. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha+1\beta}}.$$

$$2920. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - e^{i\alpha})^n}{n(1 - e^{i\alpha})^n}.$$

2921. 利用牛頓的二項公式, 近似地計算 $\sqrt[3]{9}$, 并且估計當只取展開式的三項時的誤差。

2922. 近似地計算: (a) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1.2$; (б) $\sqrt[10]{1000}$; (в) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; (г) $\ln 1.25$ 并估計對應的誤差。

利用適當的展開式, 計算下列函數的準確到所指出的程度的值。

2923. $\sin 18^\circ$ 準確到 10^{-5} 。 **2924.** $\cos 1^\circ$ 準確到 10^{-6} 。

2925. $\operatorname{tg} 9^\circ$ 準確到 10^{-3} 。 **2926.** e , 準確到 10^{-6} 。

2927. $\ln 1.2$, 準確到 10^{-4} 。

2928. 由等式

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{arcsin} \frac{1}{2},$$

求數 π , 準確到 10^{-4} 。

2929. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3},$$

計算數 π , 準確到 0.001。

2930. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239},$$

求數 π , 準確到 10^{-9} 。

2931. 利用公式

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots \right],$$

求 $\ln 2$ 和 $\ln 3$, 準確到 10^{-5} 。

2932. 利用被積函數展成級數的展開式以計算下列積分之

值,并准确到 0.001:

$$(a) \int_0^1 e^{-x^2} dx;$$

$$(b) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx;$$

$$(B) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$(r) \int_0^1 \cos x^2 dx;$$

$$(A) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx;$$

$$(c) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

$$(K) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}};$$

$$(s) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

$$(H) \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$$

$$(K) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} dx;$$

$$(L) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} dx;$$

$$(M) \int_0^1 x^x dx.$$

2933. 求正弦曲綫

$$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

波之弧长,并准确到 0.01。

2934. 橢圓之半軸为 $a=1$ 及 $b=\frac{1}{2}$, 求橢圓的弧长,并准确到 0.01。

2935. 电綫是扯在两根木桩上,二桩的距离为 $2l=20$ 米,电綫成拋物綫的形狀。設凹处的矢 $h=40$ 厘米,計算电綫的长度,并准确到 1 厘米。

§ 6. 福里叶級数

1° 展开定理 若函数 $f(x)$ 在区間 $(-l, l)$ 內逐段連續并有逐段連續的导函数 $f'(x)$, 并且一切不連續点 ξ 是正則的 [即 $f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi-0) + f(\xi+0)]$], 則函数 $f(x)$ 在此区間上可用福里叶級数表出

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

式中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

及

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2')$$

特別是:

(a) 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 則有:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3)$$

式中
$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

(b) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 則得:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

式中
$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

一个在区間 $(0, l)$ 中有定义的并具有上面所提到的連續条件的函数 $f(x)$, 可在該区間內用公式(3)及公式(4)表示。

2° 完全性条件 对于任一在区間 $(-l, l)$ 上可积的且其平方也是可积的函数 $f(x)$, 作具有系数(2), (2')的級数(1), 則李雅甫諾夫等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

3° 福里叶級数的积分法 在区間 $(-l, l)$ 內按黎曼意义可积分的函数 $f(x)$ 之福里叶級数(1) (即使是发散的), 可以在 $(-l, l)$ 內逐項积分。

2936. 将函数

$$f(x) = \sin^4 x$$

展开成福里叶級数。

2937. 三角多項式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$$

的福里叶級数是怎样的?

2938. 将函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$$

展开为福里叶級数。

繪出函数的图形及此函数之福里叶級数之若干部分和的图形。

利用展开式, 求萊布尼茲級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

的和。

在所指定的区間內把下列函数展开为福里叶級数:

✓ 2939. 在区間 $(0, 2l)$ 內展开

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{若 } 0 < x < l; \\ 0, & \text{若 } l < x < 2l, \end{cases} \quad \text{其中 } A \text{ 为常数。}$$

✓ 2940. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = x$ 。

✓ 2941. 在区間 $(0, 2\pi)$ 中展开 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ 。

✓ 2942. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = |x|$ 。

✓ 2943. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中展开。

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{若 } -\pi < x < 0; \\ bx, & \text{若 } 0 < x < \pi, \end{cases} \quad \text{其中 } a \text{ 及 } b \text{ 为常数。}$$

✓ 2944. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 。

✓ 2945. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \cos ax$ 。

✓ 2946. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \sin ax$ 。

2947. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \operatorname{sh} ax$ 。

✓ 2948. 在区間 $(-h, h)$ 中展开 $f(x) = e^{ax}$ 。

✓ 2949. 在区間 $(a, a+2l)$ 中展开 $f(x) = x$ 。

✓ 2950. 在区間 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = x \sin x$ 。

✓ 2951. 在区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 中展开 $f(x) = x \cos x$ 。

将下列周期函数展开成福里叶級数:

2952. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ 。 2953. $f(x) = \arcsin(\sin x)$ 。

2954. $f(x) = \arcsin(\cos x)$ 。 **2955.** $f(x) = x - [x]$ 。

2956. $f(x) = \langle x \rangle$ 其中 x 是它到与它最近的整数的距离。

2957. $f(x) = |\sin x|$ 。 **2958.** $f(x) = |\cos x|$ 。

2959. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|\alpha| < 1)$ 。

2960. 把函数

$$f(x) = \sec x \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right)$$

展开为福里叶级数。

提示 推出系数 a_n 与 a_{n+2} 之间的关系。

2961. 将函数 $f(x) = x^2$ 展开成福里叶级数: (a) 按余弦展开; (b) 按正弦展开; (c) 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开。

绘出函数的图形及情形 (a), (b) 与 (c) 的福里叶级数之和的图形。

利用这些展开式, 求级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}。$$

2962. 由展开式

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

用逐项积分的方法, 求函数 x^2 , x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数。

2963. 写出函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| < \alpha; \\ 0, & \text{当 } \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

的李雅甫诺夫等式。

从李雅甫诺夫等式, 求下列级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}。$$

2964. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < x < 2; \\ 3-x, & \text{若 } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

展开成福里叶級数。

利用公式

$$\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$$

式中 $t = e^{ix}$ 及 $\bar{t} = e^{-ix}$, 将下列函数展开成福里叶級数:

2965. $\cos^{2m} x$ (m 为正整数)。

2966. $\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1)$ 。

2967. $\frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1)$ 。

2968. $\frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1)$ 。

2969. $\ln(1 - 2q \cos x + q^2) \quad (|q| < 1)$ 。

将下列无界周期函数展开成福里叶級数:

2970. $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 。 2971. $f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|$ 。

2972. $f(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$ 。

2973. 将函数

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

展开成福里叶級数。

2974. 函数

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq 4a)$$

是正方形 $0 < x < a$, $0 < y < a$ 的圍綫的参数方程式, 其中 s 为依逆时針方向从点 $O(0, 0)$ 起計算的弧长。試将这函数展开成福里叶級数。

2975. 应当如何把給定在區間 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內的可積函數 $f(x)$ 展到區間 $(-\pi, \pi)$ 內, 而使得它展開成福里叶級數的形狀如下

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)?$$

2976. 应当如何把給定在區間 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內的可積函數 $f(x)$ 展到區間 $(-\pi, \pi)$ 內, 而使得它展開成福里叶級數的形狀如下

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)?$$

2977. 在區間 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內把函數

$$f(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

展開: (a) 依角的奇倍數的余弦展開; (b) 依角的奇倍數的正弦展開。

繪出情形 (a) 與 (b) 的福里叶級數之和的圖形。

2978. 設 $f(x)$ 是以 π 為周期的反周期函數, 即

$$f(x+\pi) = -f(x)。$$

問此函數在區間 $(-\pi, \pi)$ 內的福里叶級數具有怎樣的特性?

2979. 設 $f(x+\pi) = f(x)$, 則函數 $f(x)$ 在區間 $(-\pi, \pi)$ 內的福里叶級數具有怎樣的特性?

2980. 一個具周期為 2π 的函數 $y=f(x)$, 如果函數的圖形:

(a) 以點 $(0, 0)$, $(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$ 為對稱中心; (b) 以坐標原點為對稱中心及 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 為對稱軸; 問其福里叶係數 $a_n, b_n (n=1, 2, \dots)$ 具有怎樣的特性?

2981. 如果函數

$$\varphi(-x) = \psi(x),$$

問 $\varphi(x)$ 與 $\psi(x)$ 的福里叶係數 a_n, b_n 與 $\alpha_n, \beta_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 之

間有何关系?

2982. 如果函数

$$\varphi(-x) = -\psi(x),$$

問 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n, b_n 与 $\alpha_n, \beta_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 之間有何关系?

2983. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$, 試計算“平移”了的函数 $f(x+h)$ (h = 常数) 的福里叶系数 $\bar{a}_n, \bar{b}_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 。

2984. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$, 試計算斯且克洛夫函数。

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$$

的福里叶系数 $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 。

2985. 設 $f(x)$ 是以 2π 为周期的連續函数并且 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 为其福里叶系数。求卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$$

的福里叶系数 $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 。

利用所得的結果, 推出李雅甫諾夫等式。

§ 7. 級数求和法

1° 直接求和法 若

$$u_n = v_{n+1} - v_n (n=1, 2, \dots) \text{ 及 } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_\infty,$$

則

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

特別是, 若

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}},$$

其中数 $a_i (i=1, 2, \dots)$ 形成以 d 为公差的等差級数, 則

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形未知級數能表為下列已知級數的綫性組合：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ 等等。}$$

2° 亞伯耳方法 若級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收斂，則

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

在最簡單的例子中，幕級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和借助於逐項微分法或積分法來求。

3° 三角級數求和法 為了求級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

的和，常把它們視為複數域內幕級數： $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ （其中 $z = e^{ix}$ ）的實數部分及對應的虛數部分的係數。

在許多情形下級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$$

是有用的。

求下列級數的和：

$$2986. \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$2987. \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$2988. \quad \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

$$2989. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

$$2990. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} \quad (m \text{ 為自然數}).$$

$$2991. \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$2992. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

$$2993. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

$$2994. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

$$2995. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}.$$

$$2996. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}.$$

$$2997. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

$$2998. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$$

$$2999. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$$

$$3000. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}.$$

3001. 設 $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$. 求級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$$

的和。

求下列級数的和：

$$3002. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$$

$$3003. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n.$$

$$3004. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}.$$

$$3005. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}.$$

利用逐項微分法求級数的和：

$$3006. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$3007. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

$$3008. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

$$3009. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n \quad (d>0).$$

提示 用 $1-x$ 去乘級数的导函数。

$$3010. \frac{1}{3} \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots.$$

利用逐項积分法求級数的和：

$$3011. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

$$3012. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) x^n.$$

$$3013. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

利用並伯耳方法, 求下列級數的和:

$$3014. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots \quad 3015. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

$$3016. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots.$$

$$3017. 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots.$$

求下列三角級數的和:

$$3018. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$3019. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

$$3020. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na \sin nx}{n}.$$

$$3021. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na \sin nx}{n} \quad \left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$3022. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}.$$

$$3023. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}.$$

$$3024. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

$$3025. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

$$3026. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

3027. 作曲綫

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0$$

的图形。

求下列級數的和:

$$3028. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$$

$$3029. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

$$3030. \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots.$$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots$ 在 $x>0, a_n>0 (n=1,$

$2, \dots)$ 同級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散的条件下。

3032. $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} - \frac{x^4}{1-x^8} + \dots$, 若 (a) $|x| < 1$; (b) $|x| > 1$ 。

3033. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, 若 (a) $|x| < 1$; (b) $|x| > 1$ 。

§ 8. 利用級数求定积分之值

利用被积函数展开成級数的展开式以計算下列积分:

3034. $\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx。$

3035. $\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx。$

3036. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx。$

3037. $\int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx \quad (p>0, q>0)。$

3038. $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx。$

3039. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}。$

3040. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}。$

3041. 按模 $k (0 \leq k < 1)$ 的正整数幂展开 第一型完全橢圓积

分

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}。$$

3042. 按模 $k (0 \leq k < 1)$ 的正整数幂展开 第二型完全橢圓积

分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi。$$

3043. 利用按橢圓离心率的正整數展開的級數以表橢圓

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的弧長。

証明下列等式：

$$\mathbf{3044.} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$$\mathbf{3045.} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax \, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

$$\mathbf{3046.} \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx = \frac{\pi}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

求：

$$\mathbf{3047.} \quad \int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(a \sin x - nx) \, dx \quad (n \text{ 是自然数}).$$

$$\mathbf{3048.} \quad \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} \, dx.$$

提示 參閱 2864 題。

$$\mathbf{3049.} \quad \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \, dx.$$

3050. 証明公式

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} \, dx &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $a > 0$ 且 $0 < \theta_n < 1$ 。

若于公式(1)中取兩項來表示積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} \, dx$$

其精確程度如何？

§ 9. 无穷乘积

1° 无穷乘积的收敛性 如果存在有穷而且异于零的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P,$$

則称无穷乘积

$$p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (1)$$

是收敛的。

若 $P=0$ 而乘数 p_n 中无一个等于零, 則称乘积(1)发散于零; 在相反的情形, 則称无穷乘积收敛于零。

乘积(1)的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n \quad (2)$$

的收敛性是一样的。

收敛性的必要条件为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1.$$

若 $p_n = 1 + \alpha_n$ ($n=1, 2, \cdots$) 及 α_n 不变号, 則乘积(1)收敛的必要而且充分的条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \quad (3)$$

收敛。

在一般的情形下, 当 α_n 不保持固定的符号而级数(3)收敛, 則乘积(1)将与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2$$

同时收敛或同时发散, 在发散的情形, 乘积发散于零。

2° 绝对收敛性 乘积(1)称为绝对或条件(非绝对)收敛是随级数(2)是绝对或条件收敛而定。级数(3)绝对收敛就是乘积(1)绝对收敛的充分而且必要的条件。

3° 函数的成无穷乘积展开 当 $-\infty < x < +\infty$ 时有展开式

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right].$$

特别是, 由第一式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时得瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

証明下列等式:

$$3051. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}. \quad 3052. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

$$3053. \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}.$$

$$3054. \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right] = 2. \quad 3055. \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

$$3056. \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}. \quad 3057. \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

$$3058. \prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

$$3059. \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots.$$

$$3060. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

試証下列无穷乘积的收敛性并求出其值:

$$3061. \prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}. \quad 3062. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right].$$

$$3063. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}. \quad 3064. \prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}} \quad (a > 0).$$

3065. 可否由乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 的收敛性得出乘积:

$$(a) \prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n);$$

$$(b) \prod_{n=1}^{\infty} p_n^2;$$

$$(B) \prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n;$$

$$(r) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} \text{ 的收敛性?}$$

研究下列无穷乘积的收敛性:

$$3066. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad 3067. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

$$3068. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right). \quad 3069. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$$3070. \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^p,$$

$$3071. \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}, \text{ 其中当 } n \geq n_0 \text{ 时 } n^2+an+b > 0.$$

$$3072. \prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}, \text{ 其中 } n_0 > b_i \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

$$3073. \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

$$3074. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$3075. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}.$$

$$3076. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}.$$

$$3077. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

$$3078. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n} \right) e^{\frac{x}{n}}, \text{ 其中 } c > 0.$$

$$3079. \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n).$$

$$3080. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n} \right).$$

$$3081. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}{x^n} \right].$$

$$3082. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt[n]{n}} \right) e^{\frac{x}{\sqrt[n]{n}} + \frac{x^2}{2n}}.$$

$$3083. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p} \right) \cos \frac{x^n}{n^q}. \quad 3084. \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^p.$$

$$3085. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}.$$

$$3086. \text{ 証明: 若級数 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ 收斂, 則乘积 } \prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n \text{ 收斂.}$$

$$3087. \text{ 証明: 若級数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 絕對收斂, 則乘积 } \prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + a_n \right) \left(|a_n| < \frac{\pi}{4} \right) \text{ 收斂.}$$

研究下列无穷乘积的絕對收斂性和条件收斂性:

$$3088. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]. \quad 3089. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right].$$

$$3090. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right]. \quad 3091. \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n} \right].$$

$$3092. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}. \quad 3093. \prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}.$$

$$3094. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}. \quad 3095. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right].$$

$$3096. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdots$$

$$3097. \left(1 + \frac{1}{1^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{4^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right)^2 \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{6^\alpha}\right) \cdots$$

3098. 証明：纵使級數

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots$$

發散，而乘積

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdots$$

收斂。

3099. 証明：纵使級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 二者發散，而乘積

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收斂，其中

$$\alpha_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{若 } n = 2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{若 } n = 2k. \end{cases}$$

3100. 設

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(黎曼 ζ 函数) 而 $p_n (n=1, 2, \dots)$ 是素数的叙列。

証明
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x)。$$

3101. 証明: 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

和級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

[其中 $p_n (n=1, 2, \dots)$ 是素数的叙列] 发散 (尤拉)。

3102. 設 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0)。$$

証明:
$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)。$$

提示 研究

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p。$$

3103. 利用瓦里斯公式証明

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}。$$

3104. 証明: 表示式

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时有异于零的极限 A 。

由此推出斯特林格公式

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \varepsilon_n),$$

其中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad \text{和} \quad A = \sqrt{2\pi}。$$

提示 未知的极限是无穷乘积的形式:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}。$$

要求常数 A 可利用瓦里斯公式。

3105. 根据尤拉的定义夏瑪函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

由这个公式出发: (a) 表函数 $\Gamma(x)$ 为无穷乘积的形状; (b) 証明 $\Gamma(x)$ 对于不为負整数的一切实数 x 皆有意义; (B) 推出下面这个性质

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

(r) 对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值。

3106. 設函数 $f(x)$ 在閉区間 $[a, b]$ 上可以积分及

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{in} = f(a + i\delta_n) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

証明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}.$

3107. 証明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a + ib)}}{\sum_{i=0}^{n-1} (a + ib)} = \frac{2}{e},$$

其中

$$a > 0 \quad \text{和} \quad b > 0.$$

3108. 設 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在区間 (a, b) 內为連續函数且 $|f_n(x)| \leq c_n$ ($n=1, 2, \dots$), 其中級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收斂。

証明: 函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)],$$

在区間 (a, b) 上是連續的。

3109. 求函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

的导函数之表示式。 $F'(x)$ 存在的充分条件为何?

3110. 証明：若 $0 < x < y$ ，則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{y(y+1) \cdots (y+n)} = 0。$$

§ 10. 斯特林格公式

斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1)。$$

可用來計算當值 n 甚大時的 $n!$ 。

利用斯特林格公式，近似地計算：

3111. $\lg 100!$ 。

3112. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999。$

3113. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100}。$

3114. $C_{100}^{40}。$

3115. $\frac{100!}{20!30!50!}。$

3116. $\int_0^1 (1-x^2)^{50} dx。$

3117. $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x \, dx。$

3118. 對於乘積

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

推出漸近公式。

3119. 若 n 甚大，近似地計算 $C_{2n}^n。$

3120. 利用斯特林格公式求下列極限：

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}；$

(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}；$

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}；$

(r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}。$

§ 11. 用多項式逼近連續函數

1° 拉格朗日插入公式 拉格朗日多項式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} y_i$$

具有性质 $P_n(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, \dots, n$)。

2° 白恩什坦多項式 若 $f(x)$ 是閉區間 $[0, 1]$ 上的連續函數，則白恩什坦多項式

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时在閉區間 $[0, 1]$ 上一致收斂于函數 $f(x)$ 。

3121. 作出經過下列數組

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

的最低的 n 階多項式 $P_n(x)$ 。

$$P_n(-1), \quad P_n(1), \quad P_n(6)$$

近似地等於甚麼？

3122. 寫出經過三點： $A(x_0-h, y_{-1})$, $B(x_0, y_0)$, $C(x_0+h, y_1)$ 的拋物綫方程

$$y = ax^2 + bx + c.$$

3123. 利用數值 $x_0=1, y_0=1; x_1=25, y_1=5; x_2=100, y_2=10$ ，推出開平方根： $y = \sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 100$) 的近似公式。

3124. 利用數值

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 90^\circ = 1,$$

推出如下形的近似公式

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \leq x \leq 90).$$

利用這個公式，近似地求：

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 40^\circ, \quad \sin 80^\circ.$$

3125. 取数值 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ 作拉格朗日多項式的插值点, 对函数 $f(x) = |x|$ 作出在閉区間 $[-1, 1]$ 上的拉格朗日插入多項式。

3126. 以拉格朗日多項式代換函数 $y(x)$, 近似地計算

$$\int_0^2 y(x) dx,$$

其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

3127. 对于函数 x, x^2, x^3 , 試在閉区間 $[0, 1]$ 上作出白恩什坦多項式 $B_n(x)$ 。

3128. 对于在閉区間 $[a, b]$ 上的已知函数 $f(x)$, 写出白恩什坦多項式 $B_n(x)$ 的公式。

3129. 在閉区間 $[-1, 1]$ 上用白恩什坦多項式 $B_4(x)$ 逼近函数 $f(x) = \frac{|x| + x}{2}$ 。作出函数 $y = \frac{|x| + x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图形。

3130. 在 $-1 \leq x \leq 1$ 內用偶次的白恩什坦多項式逼近函数

$$f(x) = |x|。$$

3131. 对于函数

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leq x \leq b)$$

写出白恩什坦多項式 $B_n(x)$ 。

3132. 在閉区間 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 上, 对于函数 $f(x) = \cos x$ 計算多項式 $B_n(x)$ 。

3133. 証明: 在閉区間 $[-1, 1]$ 上, $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, 其中

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2i)} (1-x^2)^i.$$

3134. 設 $f(x)$ 是對於 $-\pi \leq x \leq \pi$ 的連續函數而 a_n, b_n ($n=0, 1, 2, \dots$) 是它的福里叶係數。證明菲叶耳三角多項式

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

在區間 $(-\pi, \pi)$ 上一致收斂於函數 $f(x)$ 。

3135. 對於函數

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

作出菲叶耳多項式。

第二編 多变量函数

第六章 多变量函数的微分法

§ 1. 多变量函数的极限. 連續性

1° 多变量函数的极限 設函数 $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义。若对于任何的 $\varepsilon > 0$ 存在有 $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$, 使得只要 $P \in E$ 及 $0 < \rho(P, P_0) < \delta$ [其中 $\rho(P, P_0)$ 为 P 和 P_0 二点間的距离], 則

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

我們就說

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

2° 連續性 若

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

則称函数 $f(P)$ 于 P_0 点是連續的。

若函数 $f(P)$ 于已知域內的每一点連續, 則称函数 $f(P)$ 于此域內是連續的。

3° 一致連續性 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在有仅与 ε 有关的 $\delta > 0$ 。使得对于域 G 中的任何点 P', P'' , 只要是

$$\rho(P', P'') < \delta,$$

便有不等式

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon$$

成立, 則称函数 $f(P)$ 于域 G 內是一致連續的。

于有界閉域內的連續函数于此域內是一致連續的。

确定并繪出下列函数存在的域:

3136. $u = w + \sqrt{y}$ 。

3137. $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$ 。

$$3138. \quad u = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \circ \quad 3139. \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} \circ$$

$$3140. \quad u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)} \circ$$

$$3141. \quad u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}} \circ \quad 3142. \quad u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2} \circ$$

$$3143. \quad u = \ln(-x - y) \circ \quad 3144. \quad u = \arcsin \frac{y}{x} \circ$$

$$3145. \quad u = \arccos \frac{x}{x + y} \circ$$

$$3146. \quad u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y) \circ$$

$$3147. \quad u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} \circ \quad 3148. \quad u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \circ$$

$$3149. \quad u = \ln(xyz) \circ$$

$$3150. \quad u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2) \circ$$

作出下列函数的等位綫：

$$3151. \quad z = x + y \circ \quad 3152. \quad z = x^2 + y^2 \circ$$

$$3153. \quad z = x^2 - y^2 \circ \quad 3154. \quad z = (x + y)^2 \circ$$

$$3155. \quad z = \frac{y}{x} \circ \quad 3156. \quad z = \frac{1}{x^2 + 2y^2} \circ$$

$$3157. \quad z = \sqrt{xy} \circ \quad 3158. \quad z = |x| + y \circ$$

$$3159. \quad z = |x| + |y| - |x + y| \circ$$

$$3160. \quad z = e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}} \circ \quad 3161. \quad z = x^y \quad (x > 0) \circ$$

$$3162. \quad z = x^y e^{-x} \quad (x > 0) \circ$$

$$3163. \quad z = \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} \quad (a > 0) \circ$$

$$3164. \quad z = \arctg \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (a > 0) \circ$$

$$3165. \quad z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y) \circ$$

求下列函数的等位面:

$$3166. \quad u = x + y + z.$$

$$3167. \quad u = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$3168. \quad u = x^2 + y^2 - z^2.$$

$$3169. \quad u = (x + y)^2 + z^2.$$

$$3170. \quad u = \operatorname{sgn} \sin(x^2 + y^2 + z^2).$$

根据曲面的已知方程研究其性质:

$$3171. \quad z = f(y - ax).$$

$$3172. \quad z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$3173. \quad z = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$3174. \quad z = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

3175. 作出函数

$$F(t) = f(\cos t, \sin t)$$

的图形, 式中

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } y \geq x, \\ 0, & \text{若 } y < x. \end{cases}$$

3176. 若

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

求 $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

3177. 若

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0),$$

求 $f(x)$.

3178. 設:

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1).$$

若当 $y=1$ 时 $z=x$, 求函数 f 和 z .

3179. 設:

$$z = x + y + f(x - y).$$

若当 $y=0$ 时, $z=x^2$, 求函数 f 及 z .

3180. 若 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

3181. 証明：对于函数

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

有：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \} = 1; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \} = -1,$$

从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在。

3182. 証明：对于函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

有：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \} = \lim_{y \rightarrow 0} \{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \} = 0,$$

然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在。

3183. 証明：对于函数

$$f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \}$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \}$ 不存在，然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ 。

3184. 求 $\lim_{a \rightarrow a} \{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \}$ 及 $\lim_{y \rightarrow b} \{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \}$ ，

設：(a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$, $a = \infty$, $b = \infty$;

(б) $f(x, y) = \frac{x^y}{1+x^y}$, $a = \infty$, $b = +0$;

(в) $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x+y}$, $a = \infty$, $b = \infty$;

(г) $f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}$, $a = 0$, $b = \infty$;

(д) $f(x, y) = \lg_2(x+y)$, $a = 1$, $b = 0$ 。

求下列极限:

$$3185. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

$$3186. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}.$$

$$3187. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x}.$$

$$3188. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}.$$

$$3189. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)^{x^2}.$$

$$3190. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

$$3191. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$3192. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3193. 若 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, 問下列极限沿怎样的方向 φ 有确定的极限值存在:

$$(a) \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}};$$

$$(b) \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy.$$

[求下列函数的不連續点:

$$3194. u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3195. u = \frac{xy}{x+y}.$$

$$3196. u = \frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

$$3197. u = \sin \frac{1}{xy}.$$

$$3198. u = \frac{1}{\sin x \sin y}.$$

$$3199. u = \ln(1-x^2-y^2).$$

$$3200. u = \frac{1}{xyz}.$$

$$3201. u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

3202. 証明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{若 } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{若 } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

分別对于每一个变数 x 或 y (当另一变数的值固定时) 是連續的,

但并非对这些变数的总体是連續的。

3203. 証明：函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

在点 $O(0, 0)$ 沿着过此点的每一射綫

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty)$$

連續, 即

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0);$$

但此函数在点 $(0, 0)$ 并非連續的。

3204. 証明：函数

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}, \text{ 若 } y \neq 0 \text{ 及 } f(x, 0) = 0$$

的不連續点的集合不是封閉的。

3205. 証明：若函数 $f(x, y)$ 在某域 G 内对变数 x 是連續的, 而关于 x 对变数 y 是一致連續的, 則此函数在所考虑的域内是連續的。

3206. 証明：若在某域 G 内函数 $f(x, y)$ 对变数 x 是連續的并滿足对变数 y 的里普什茲条件, 即

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L |y' - y''|,$$

式中 $(x, y') \in G, (x, y'') \in G$ 而 L 为常数, 則此函数在已知域内是連續的。

3207. 証明：若函数 $f(x, y)$ 分別地对每一个变数 x 和 y 是連續的并对于其中的一个是單調的, 則此函数对两个变数的总体是連續的(尤格定理)。

3208. 設函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 上是連續的, 而函数叙列 $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在 $[a, A]$ 上一致收斂并滿足条

件 $b \leq \varphi_n(x) \leq B$ 。証明：函数叙列

$$F_n(x) = f[x, \varphi_n(x)] \quad (n=1, 2, \dots)$$

也在 $[a, A]$ 上一致收敛。

3209. 設：1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $R(a < x < A; b < y < B)$ 內是連續的；2) 函数 $\varphi(x)$ 于区間 (a, A) 內連續并有属于区間 (b, B) 內的值。証明：函数

$$F(x) = f[x, \varphi(x)]$$

于区間 (a, A) 內是連續的。

3210. 設：1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $R(a < x < A; b < y < B)$ 內是連續的；2) 函数 $x = \varphi(u, v)$ 及 $y = \psi(u, v)$ 于域 $R'(a' < u < A'; b' < v < B')$ 內是連續的并有分別属于区間 (a, A) 和 (b, B) 的值。証明：函数

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$$

于域 R' 內連續。

§ 2. 偏导函数. 多变量函数的微分

1° 偏导函数 若所論及的多变数的函数的一切偏导函数是連續的，則微分的結果与微分的次序无关。

2° 多变量函数的微分 若自变数 x, y, z 的函数 $f(x, y, z)$ 的全增量可写为下形

$$\Delta f(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

式中 A, B, C 与 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 无关而 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ ，則称函数 $f(x, y, z)$ 可微分，而增量的綫性主部 $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ 等于

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz, \quad (1)$$

(其中 $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$) 称为此函数的微分。

当变数 x, y, z 为其他自变数的可微分的函数时，公式 (1) 仍有其意义。

若 x, y, z 为自变数，則对于高阶的微分，有符号公式

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(x, y, z)。$$

3° 复合函数的导函数 若 $w=f(x, y, z)$, 其中 $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, $z=\chi(u, v)$ 且函数 φ, ψ, χ 可微分, 则

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导函数时最好用下列符号公式:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{及 } \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) w + \\ + \frac{\partial P_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\text{其中 } P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad R_1 = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\text{及 } P_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° 在已知方向上的导函数 若用方向余弦 $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 表 $Oxyz$ 空间内的方向 l , 且函数 $u=f(x, y, z)$ 可微分, 则沿方向 l 的导函数按下式来计算

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

在已知点函数增加最迅速的速度之大小与方向用矢量——函数的梯度

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k$$

来表示, 它的大小等于

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. 証明:

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx} [f(x, b)].$$

3212. 設:

$$f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x, 1)$ 。

求下列函数的一阶和二阶偏导函数:

$$3213. u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2.$$

$$3214. u = xy + \frac{x}{y}.$$

$$3215. u = \frac{x}{y^2}.$$

$$3216. u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$3217. u = x \sin(x + y).$$

$$3218. u = \frac{\cos x^2}{y}.$$

$$3219. u = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}.$$

$$3220. u = x^y.$$

$$3221. u = \ln(x + y^2).$$

$$3222. u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$3223. u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

$$3224. u = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$3225. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$3226. u = \left(\frac{x}{y}\right)^z.$$

$$3227. u = x^{\frac{y}{z}}.$$

$$3228. u = x^{y^z}.$$

$$3229. \text{ 設 (a) } u = x^2 - 2xy - 3y^2; \quad (\text{б}) u = x^{y^2}; \quad (\text{B}) u = \operatorname{arc} \cos \sqrt{\frac{x}{y}},$$

驗證等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

$$3230. \text{ 設 } f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ 若 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 及 } f(0, 0) = 0.$$

証明

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

3231. 設 $u = f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数, 就下列各題驗證关于齐次函数的尤拉定理:

$$(\text{a}) u = (x - 2y + 3z)^2; \quad (\text{б}) u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad (\text{B}) u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}.$$

3232. 証明: 若可微函数 $u = f(x, y, z)$ 满足方程式

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

則它为 n 次齐次函数。

提示 研究輔助函数

$$F(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}.$$

3233. 証明：若 $f(x, y, z)$ 是可微分的 n 次齐次函数，則其偏导函数 $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ 是 $(n-1)$ 次的齐次函数。

3234. 設 $u = f(x, y, z)$ 是可微分两次的 n 次齐次函数。証明

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = n(n-1)u.$$

求下列函数的一阶和二阶微分 (x, y, z 为自变数)：

3235. $u = x^m y^n.$

3236. $u = \frac{x}{y}.$

3237. $u = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3238. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$

3239. $u = e^{xy}.$

3240. $u = xy + yz + zx.$

3241. $u = \frac{z}{x^2 + y^2}.$

3242. 設 $f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{x}{y}},$

求 $df(1, 1, 1)$ 及 $d^2f(1, 1, 1).$

3243. 証明：若

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

則

$$d^2u \geq 0.$$

3244. 假定 x, y 的绝对值甚小，对下列各式推出近似公式：

(a) $(1+x)^m(1+y)^n;$ (б) $\ln(1+x) \cdot \ln(1+y);$

(B) $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy}.$

3245. 用微分来代替函数的增量, 近似地计算:

- (a) $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$; (б) $\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98} \sqrt[4]{1.05^3}}$;
 (в) $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$; (г) $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$;
 (д) $0.97^{1.05}$.

3246. 设矩形的边 $x=6$ 米和 $y=8$ 米, 若第一个边增加 2 毫米, 而第二个边减少 5 毫米, 问矩形的对角线长度和面积变化多少?

3247. 扇形的中心角 $\alpha=60^\circ$ 增加 $\Delta\alpha=1^\circ$ 。为了使扇形的面积仍然不变, 则应当把扇形的半径 $R=20$ 厘米减少若干?

3248. 证明乘积的相对误差近似地等于乘数的相对误差的和。

3249. 当测量圆柱的底半径 R 和高 H 时所得的结果如下:

$$R=2.5 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}; \quad H=4.0 \text{ 米} \pm 0.2 \text{ 米}.$$

则所计算出圆柱的体积可有怎样的绝对误差 Δ 和相对误差 δ ?

3250. 三角形的边 $a=200 \text{ 米} \pm 2 \text{ 米}$, $b=300 \text{ 米} \pm 5 \text{ 米}$, 它们之间的角 $C=60^\circ \pm 1^\circ$ 。则所计算出三角形的第三边 c 可有怎样的绝对误差?

3251. 证明: 在点 $(0, 0)$ 连续的函数

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

于点 $(0, 0)$ 有两个偏导函数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$, 但在点 $(0, 0)$ 并非可微分的。

说明导函数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域中的性质。

3252. 证明: 函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ 若 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 及 } f(0, 0) = 0$$

于点 $(0, 0)$ 的邻域中连续且有有界的偏导函数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$,

但此函數于點 $(0, 0)$ 不能微分。

3253. 証明：函數

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \text{ 若 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 和 } f(0, 0) = 0$$

于點 $(0, 0)$ 的鄰域中有偏導函數 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ ，這些偏導函數于點 $(0, 0)$ 是不連續的且在此點的任何鄰域中是无界的；然而此函數于點 $(0, 0)$ 可微分。

3254. 証明：于某凸形的域 E 內有有界偏導函數 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 的函數 $f(x, y)$ 于域 E 內一致連續。

3255. 証明：若函數 $f(x, y)$ 對變數 x 是連續的（對每一個固定的值 y ）且有對變數 y 的有界的導函數 $f'_y(x, y)$ ，則此函數對變數 x 和 y 的總體是連續的。

在下列問題中求所指出的偏導函數：

3256. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ ，若

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

3257. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y}$ ，若 $u = x \ln(xy)$ 。

3258. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3 \partial y^3}$ ，若 $u = x^2 \sin y + y^3 \sin x$ 。

3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ，若 $u = \arctg \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz}$ 。

3260. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ，若 $u = e^{xyz}$ 。

3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$ ，若 $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}$ 。

3262. $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$ ，若 $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$ 。

3263. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$ ，若 $u = \frac{x + y}{x - y}$ 。

3264. $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$, 若 $u = (x^2 + y^2)e^{x+y}$ 。

3265. $\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, 若 $u = xyz e^{p+x+q+y+r}$ 。

3266. 若 $f(x, y) = e^x \sin y$, 求 $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0)$ 。

3267. 証明: 若

$$u = f(xyz),$$

則

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(t),$$

式中 $t = xyz$, 并求函数 F 。

3268. 設 $u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$,

求 d^4u 。

导函数 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ 和 $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ 等于甚么?

在下列各題中求所指出的阶的全微分:

3269. d^3u , 若 $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$ 。

3270. d^3u , 若 $u = \sin(x^2 + y^2)$ 。

3271. $d^{10}u$, 若 $u = \ln(x + y)$ 。

3272. d^6u , 若 $u = \cos x \operatorname{ch} y$ 。 3273. d^3u , 若 $u = xyz$ 。

3274. d^4u , 若 $u = \ln(x^x y^y z^z)$ 。 3275. $d^n u$, 若 $u = e^{ax+by}$ 。

3276. $d^n u$, 若 $u = X(x)Y(y)$ 。

3277. $d^n u$, 若 $u = f(x + y + z)$ 。

3278. $d^n u$, 若 $u = e^{ax+by+cz}$ 。

3279. $P_n(x, y, z)$ 为 n 次齐次多项式。証明

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz)。$$

3280. 設:

$$Au = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}。$$

求 Δu 和 $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$, 若

(a) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

(b) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

3281. 設:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}。$$

求 Δu , 若

(a) $u = \sin x \operatorname{ch} y$;

(b) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

3282. 設:

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

及

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}。$$

求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$, 若

(a) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$;

(b) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 。

求下列复合函数的一阶和二阶导函数:

3283. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$ 。 **3284.** $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$ 。

3285. $u = f(x, xy, xyz)$ 。

3286. 設 $u = f(x + y, xy)$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 。

3287. 設 $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, 求 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 。

求下列复合函数的一阶和二阶全微分 (x, y 及 z 为自变量):

3288. $u = f(t)$, 其中 $t = x + y$ 。

3289. $u = f(t)$, 其中 $t = \frac{y}{x}$ 。 **3290.** $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 。

3291. $u = f(t)$, 其中 $t = xyz$ 。 **3292.** $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$ 。

3293. $u=f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi=ax, \eta=by$ 。

3294. $u=f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi=x+y, \eta=x-y$ 。

3295. $u=f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi=xy, \eta=\frac{x}{y}$ 。

3296. $u=f(x+y, z)$ 。

3297. $u=f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ 。

3298. $u=f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$ 。

3299. $v=f(x, y, z)$, 其中 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 。

3300. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi=ax, \eta=by, \zeta=cz$ 。

3301. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi=x^2+y^2, \eta=x^2-y^2, \zeta=2xy$ 。

求 d^2u , 設:

3302. $u=f(ax+by+cz)$ 。 3303. $u=f(ax, by, cz)$ 。

3304. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi=a_1x+b_1y+c_1z, \eta=a_2x+b_2y+c_2z, \zeta=a_3x+b_3y+c_3z$ 。

3305. 設 $u=f(r)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和 f 为可微分两次的函数。証明:

$$\Delta u = F(r),$$

其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, Δ 为拉普拉斯算子, 并求函数 F 。

3306. 設 u 和 v 为可微分两次的函数而 Δ 为拉普拉斯算子 (参閱問題 3305)。証明:

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\Delta(u, v),$$

其中 $\Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$ 。

3307. 証明: 函数

$$u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(a 和 b 为常数) 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3308. 証明：若函数 $u = u(x, y)$ 滿足拉普拉斯方程（參閱問題 3307）。則函数

$$v = u\left(-\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

也滿足這方程。

3309. 証明：函数

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

(a 和 b 为常数) 滿足热傳导的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3310. 証明：若函数 $u = u(x, t)$ 滿足热傳导的方程（參閱 3309 題），則函数

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} u\left(\frac{x}{a^2 t}, -\frac{1}{a^2 t}\right) \quad (t > 0)$$

也滿足該方程。

3311. 証明：函数

$$u = \frac{1}{r},$$

(式中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$) 当 $r \neq 0$ 时，滿足拉普拉斯方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3312. 証明：若函数 $u = u(x, y, z)$ 滿足拉普拉斯方程（參閱 3311 題），則函数

$$v = \frac{1}{r} u\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right).$$

(式中 k 为常数及 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 也滿足該方程。

3313. 証明：函数

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 及 C_1, C_2 为常数) 满足爱尔木戈尔兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u.$$

3314. 設函数 $u_1 = u_1(x, y, z)$ 及 $u_2 = u_2(x, y, z)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 。証明：函数

$$v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)u_2(x, y, z)$$

满足二重調和方程

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

3315. 設 $f(x, y, z)$ 是可微分 m 次的 n 次齐次函数。証明

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z) = n(n-1) \cdots (n-m+1) f(x, y, z).$$

3316. 若

$$z = \sin y + f(\sin x - \sin y),$$

其中 f 为可微分的函数。簡化式子

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

3317. 証明：函数

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

(其中 f 为任意的可微分函数) 满足方程

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. 証明

$$z = yf(x^2 - y^2),$$

(其中 f 为任意的可微分函数) 满足方程

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. 若

$$u = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{6} x^3(y+z) + \frac{1}{2} x^2 yz + f(y-x, z-x),$$

式中 f 為可微分的函數。簡化式子

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

3320. 設:

$$x^2 = vw, \quad y^2 = uw, \quad z^2 = uv$$

及

$$f(x, y, z) = F(u, v, w).$$

證明

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

假定任意函數 φ, ψ 等等為可微分足夠多次的函數，驗證下列等式：

$$3321. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 若 } z = \varphi(x^2 + y^2).$$

$$3322. \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0, \text{ 若 } z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy).$$

$$3323. \quad (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz, \text{ 若 } z = e^y \varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}).$$

$$3324. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu, \text{ 若 } u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right).$$

$$3325. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}, \quad \text{若 } u = \frac{xy}{z} \ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

$$3326. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 若 } u = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$$

$$3327. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ 若 } u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y).$$

$$3328. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{若 } u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$3329. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u,$$

$$\text{若 } u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$3330. \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 若 } u = \varphi[x + \psi(y)].$$

用逐次微分的方法消去任意函数 φ 和 ψ :

$$3331. \quad z = x + \varphi(xyz).$$

$$3332. \quad z = x \varphi\left(\frac{x}{y^2}\right).$$

$$3333. \quad z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$3334. \quad u = \varphi(x-y, y-z).$$

$$3335. \quad u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

$$3336. \quad z = \varphi(x) + \psi(y).$$

$$3337. \quad z = \varphi(x) \psi(y).$$

$$3338. \quad z = \varphi(x+y) + \psi(x-y).$$

$$3339. \quad z = x \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y \psi\left(\frac{x}{y}\right). \quad 3340. \quad z = \varphi(xyz) + \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

3341. 求函数

$$z = x^2 - y^2$$

在点 $M(1, 1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成角 $\alpha = 60^\circ$ 的方向 l 上的导函数。

3342. 求函数

$$z = x^2 - xy + y^2$$

在点 $M(1, 1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 上的导函数。在怎样的方向上此导函数有: (a) 最大的值; (b) 最小的值; (B) 等于 0。

3343. 求函数

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

在点 $M(x_0, y_0)$ 沿与过此点的等位线成垂直的方向上的导函数。

3344. 求函数

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在此点的内法线方向上的导函数。

3345. 求函数

$$u = xyz$$

在点 $M(1, 1, 1)$ 沿方向 $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 上的导函数。

函数在该点的梯度的大小等于甚么?

3346. 求函数

$$u = \frac{1}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处梯度的大小和方向。

3347. 求函数

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

在点 $A(\varepsilon, 0, 0)$ 及 $B(0, \varepsilon, 0)$ 二点的梯度之间的角度。

3348. 在点 $M(1, 2, 2)$ 处, 函数

$$u = x + y + z$$

的梯度之大小与函数

$$v = x + y + z + 0.001 \sin(10^3 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

的梯度之大小相差若干?

3349. 証明: 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处函数

$$u = ax^3 + by^3 + cz^3$$

及 $v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$

(a, b, c, m, n, p 为常数且 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) 二者的梯度之间的角度当点 M_0 无限远移时趋于零。

3350. 設 $u = f(x, y, z)$ 为可微分两次的函数。若 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为方向 l 的方向余弦, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)$ 。

3351. 設 $u = f(x, y, z)$ 为可微分两次的函数及

$$l_1\{\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1\}, l_2\{\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2\}, \\ l_3\{\cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3\}$$

为三个互相垂直的方向。

証明:

$$(a) \left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2;$$

$$(b) \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. 設 $u = u(x, y)$ 为可微分的函数且当 $y = x^2$ 时有:

$$u(x, y) = 1$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x.$$

求当 $y = x^2$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 。

3353. 設函数 $u = u(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

以及下列条件:

$$u(x, 2x) = x, \quad u'_x(x, 2x) = x^2.$$

求: $u''_{xx}(x, 2x), u''_{xy}(x, 2x), u''_{yy}(x, 2x)$ 。

假定 $z = z(x, y)$, 解下列方程:

$$\mathbf{3354.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \quad \mathbf{3355.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0. \quad \mathbf{3356.} \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0.$$

3357. 假定 $u = u(x, y, z)$ 解方程

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

3358. 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$$

的满足条件 $z(x, x^2) = 1$ 的解 $z = z(x, y)$ 。

3359. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

的滿足条件 $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$ 的解 $z = z(x, y)$ 。

3360. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$$

的滿足条件 $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$ 的解 $z = z(x, y)$ 。

§ 3. 隐函数的微分法

1° 存在定理 設: 1) 函数 $F(x, y, z)$ 在某点 $\hat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ 等于零; 2) $F(x, y, z)$ 和 $F'_z(x, y, z)$ 在点 \hat{A}_0 的邻域内有定义并且是連續的; 3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 則在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的某充分小的邻域內存在唯一的連續函数

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

滿足方程 $F(x, y, z) = 0$

而且是 $z_0 = f(x_0, y_0)$ 。

2° 隐函数的可微分性 設除了上面的条件外, 4) 如果函数 $F(x, y, z)$ 在点 $\hat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ 的邻域內可微分, 則函数(1)在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的邻域內也可微分并且它的导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

求得。若函数 $F(x, y, z)$ 可微分任意多次, 則用逐次微分方程(2)的方法也可計算函数 z 的高阶导函数。

3° 由方程組定义的隐函数 設函数 $F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 滿足下列条件:

(1) 于点 $\hat{A}_0(x_{10}, \dots, x_{m0}; y_{10}, \dots, y_{n0})$ 变成为零;

(2) 在点 \hat{A}_0 的邻域內可微分;

(3) 在点 \hat{A}_0 函数行列式 $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$ 。

在这种情况下, 方程組

$$F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

在点 $A_0(x_{10}, \dots, x_{m0})$ 的邻域内唯一地确定出一组可微分的函数:

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

这些方程满足方程(3)及原始条件

$$f_i(x_{10}, \dots, x_{m0}) = y_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

这些隐函数的微分可由方程组

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} dy_k = 0$$

$(i=1, 2, \dots, n)$ ①求得。

3361. 证明: 在每一点都不连续的迪里黑里函数

$$y = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数;} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

满足方程

$$y^2 - y = 0.$$

3362. 设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a, b) 内。问在怎样的情况下方程

$$f(x)y = 0$$

当 $a < x < b$ 时才有唯一连续的解 $y=0$?

3363. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 于区间 (a, b) 内有定义且连续。问在怎样的情况下, 方程

$$f(x)y = g(x)$$

于区间 (a, b) 内才有唯一连续的解?

3364. 设已知方程

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

及

$$y = y(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2)$$

为满足方程(1)的单值函数。

1) 问有多少单值函数(2)满足方程(1)?

① 这一段在简明陈述大多数的问题时无条件地假定隐函数和它们的对应导函数存在的条件满足。

2) 問有多少單值連續函數(2)滿足方程(1)?

3) 設: (a) $y(0) = 1$; (b) $y(1) = 0$, 問有多少單值連續函數(2)滿足方程式(1)?

3365. 設已知方程

$$x^2 = y^2 \quad (1)$$

及

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (2)$$

是滿足方程(1)的單值函數。

1) 問有多少單值函數(2)滿足方程(1)?

2) 問有多少單值連續函數(2)滿足方程(1)?

3) 問有多少單值可微分的函數(2)滿足方程(1)?

4) 設: (a) $y(1) = 1$; (b) $y(0) = 0$, 問有多少單值連續函數(2)滿足方程(1)?

5) 設 $y(1) = 1$ 及 δ 為充分小的數, 問有多少單值連續函數 $y = y(x)$ ($1 - \delta < x < 1 + \delta$) 滿足方程(1)?

3366. 方程

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4$$

是定義 y 為 x 的多值函數。問這個函數在怎樣的域內, 1) 單值, 2) 有二個值, 3) 有三個值, 4) 有四個值? 求此函數的各枝點及它的單值連續的各枝。

3367. 求由方程

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

所定義的多值函數 y 的各枝點和單值連續的各枝 $y = y(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$)。

3368. 設函數 $f(x)$ 當 $a < x < b$ 時連續, 並且函數 $\varphi(y)$ 當 $c < y < d$ 時單調增加而且連續。問在怎樣的條件下方程

$$\varphi(y) = f(x)$$

定义出单值函数

$$y = \varphi^{-1}(f(x))?$$

研究例子: (a) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$; (b) $e^{-y} = -\sin^2 x$ 。

3369. 設:

$$x = y + \varphi(y), \quad (1)$$

其中 $\varphi(0) = 0$ 且当 $-a < y < a$ 时 $|\varphi'(y)| \leq k < 1$ 。証明: 当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时存在有唯一的可微分函数 $y = y(x)$ 满足方程 (1) 且 $y(0) = 0$ 。

3370. 設 $y = y(x)$ 为由方程

$$x = ky + \varphi(y)$$

所定义的隐函数, 其中常数 $k \neq 0$ 且 $\varphi(y)$ 为以 ω 为周期的周期函数, 且 $|\varphi'(y)| < |k|$ 。証明

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数。

对于由下列各方程式所定义的函数 y , 求出 y' 和 y'' :

$$\mathbf{3371.} \quad x^2 + 2xy - y^2 = a^2. \quad \mathbf{3372.} \quad \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$\mathbf{3373.} \quad y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

$$\mathbf{3374.} \quad x^y = y^x \quad (x \neq y). \quad \mathbf{3375.} \quad y = 2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

3376. 証明: 当

$$1 + xy = k(x - y)$$

(式中 k 为常数) 时, 有等式

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

3377. 証明: 若

$$x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

則当 $xy > 0$ 时有等式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0。$$

3378. 証明：方程

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a \neq 0)$$

在点 $x=0, y=0$ 的领域中定义两个可微分的函数： $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 。求 $y'_1(0)$ 及 $y'_2(0)$ 。

3379. 設：

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3,$$

求 y' 当 $x=0$ 和 $y=0$ 时的值。

3380. 設 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 求 y', y'' 及 y''' 。

3381. 設：

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0,$$

求 y', y'' 及 y''' 当 $x=0, y=1$ 时的值。

3382. 証明：对于二次曲綫

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

等式

$$\frac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}] = 0$$

为真。

对于函数 $z=z(x, y)$ 求一阶和二阶的偏导函数, 設：

3383. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 。 **3384.** $z^3 - 3xyz = a^3$ 。

3385. $x + y + z = e^z$ 。

3386. $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ 。

3387. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$ 。

3388. 設：

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \tag{1}$$

及

$$f(x, y, z) = xy^2z^3。$$

求：(a) $f'_x(1, 1, 1)$, 設 $z=z(x, y)$ 是由方程 (1) 所定义的

隐函数, (6) $f'_x(1, 1, 1)$, 设 $y=y(x, z)$ 是由方程 (1) 所定义的隐函数。说明为甚么这些导函数相异。

3389. 设 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 当 $x=1$, $y=-2$, $z=1$ 时的值。

求 dz 和 d^2z , 设

$$\mathbf{3390.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad \mathbf{3391.} \quad xyz = x+y+z.$$

$$\mathbf{3392.} \quad \frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}. \quad \mathbf{3393.} \quad z = x + \arctg \frac{y}{z-x}.$$

$$\mathbf{3394.} \quad \text{设 } u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0, \text{ 求 } du.$$

$$\mathbf{3395.} \quad \text{设 } F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0, \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$\mathbf{3396.} \quad \text{设 } F(x-y, y-z, z-x) = 0, \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$\mathbf{3397.} \quad \text{设 } F(x, x+y, x+y+z) = 0, \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ 和 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$\mathbf{3398.} \quad \text{设 } F(xz, yz) = 0, \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$\mathbf{3399.} \quad \text{设 (a) } F(x+z, y+z) = 0; \quad (\text{b}) \quad F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

求 d^2z 。

3400. 设 $x=x(y, z)$, $y=y(x, z)$, $z=z(x, y)$ 为由方程 $F(x, y, z)=0$ 所定义的函数。证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

$$\mathbf{3401.} \quad \text{设 } x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=1, \text{ 求 } \frac{dx}{dz} \text{ 和 } \frac{dy}{dz}.$$

$$\mathbf{3402.} \quad \text{设 } x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2, x+y+z=2, \text{ 求 } \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{d^2x}{dz^2} \text{ 和}$$

$\frac{d^2y}{dz^2}$ 当 $x=1$, $y=-1$, $z=2$ 时的值。

3403. 設 $xu - yv = 0$, $yu + xv = 1$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 。

3404. 設 $u + v = x + y$, $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$, 求 du , dv , d^2u 和 d^2v 。

3405. 設:

$$e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

求 du , dv , d^2u 和 d^2v 当 $x=1$, $y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$ 时的表达式。

3406. 設:

$$x = t + t^{-1}, \quad y = t^2 + t^{-2}, \quad z = t^3 + t^{-3}.$$

求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 和 $\frac{d^2z}{dx^2}$ 。

3407. 在 Oxy 平面上怎样的域内方程組

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3,$$

(式中参数 u 和 v 取一切可能的实数值) 定义 z 为变数 x 和 y 的函数? 求导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

3408. 設 $x = \cos \varphi \cos \psi$, $y = \cos \varphi \sin \psi$, $z = \sin \varphi$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

3409. 設 $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 。

3410. 設 $z = z(x, y)$ 为由方程組:

$$x = e^{u+v}, \quad y = e^{u-v}, \quad z = uv$$

(u 及 v 为参数) 所定义的函数, 求当 $u=0$ 及 $v=0$ 时的 dz 及 d^2z 。

3411. 設 $z = x^2 + y^2$, 其中 $y = y(x)$ 为由方程 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 所定义的函数, 求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$ 。

3412. 設 $u = \frac{x+z}{y+z}$, 其中 z 为由方程式 $ze^z = xe^x + ye^y$ 所定义

的函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 。

3413. 設方程:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

定义 z 为 x 和 y 的函数。求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

3414. 設:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)。$$

求反函数: $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 的一阶和二阶偏导函数。

3415. 設 (a) $x = u \cos \frac{v}{u}, \quad y = u \sin \frac{v}{u};$

$$(b) \quad x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v,$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 。

3416. 函数 $u = u(x)$ 由方程組

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0$$

定义。求 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d^2u}{dx^2}$ 。

3417. 函数 $u = u(x, y)$ 由方程組

$$u = f(x, y, z, t), \quad g(y, z, t) = 0, \quad h(z, t) = 0$$

定义。求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 。

3418. 設:

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)。$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 。

3419. 設函数 $z = z(x, y)$ 滿足方程組

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad g(x, y, z, t) = 0,$$

式中 t 为参变数。求 dz 。

3420. 設 $u = f(z)$, 其中 z 为由方程式 $z = x + y\varphi(z)$ 所定义
的为变数 x 和 y 的隐函数。

証明 拉格朗日公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

提示 对 $n=1$ 証明公式并运用数学归纳法。

3421. 証明: 由方程

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0 \quad (1)$$

[其中 $\Phi(u, v)$ 是变数 u, v 的任意可微分函数, a 和 b 为常数]所
定义的函数 $z = z(x, y)$ 为方程

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

的解。說明曲面(1)的几何性质。

3422. 証明: 由方程

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0 \quad (2)$$

[其中 $\Phi(u, v)$ 是变数 u 和 v 的任意可微分函数]所定义的函数
 $z = z(x, y)$ 满足方程式

$$(x-x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0.$$

說明曲面(2)的几何性质。

3423. 証明: 由方程

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2) \quad (3)$$

[其中 $\Phi(u)$ 是变数 u 的任意可微分函数, a, b 和 c 为常数]所定义
的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

說明曲面(3)的几何性质。

3424. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = y f\left(\frac{z}{y}\right)$$

所給出。証明：

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz。$$

3425. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$$

所給出。証明：

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy。$$

3426. 証明：由方程組

$$\left. \begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha + \ln z &= f(\alpha), \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha &= f'(\alpha), \end{aligned} \right\}$$

[其中 $\alpha = \alpha(x, y)$ 为参变数及 $f(\alpha)$ 为任意可微分的函数] 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2。$$

3427. 証明：由方程組

$$\left. \begin{aligned} z &= ax + \frac{y}{a} + f(\alpha), \\ 0 &= x - \frac{y}{a^2} + f'(\alpha) \end{aligned} \right\}$$

所給出的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 1。$$

3428. 証明：由方程組

$$\left. \begin{aligned} [z - f(\alpha)]^2 &= x^2 (y^2 - a^2), \\ [z - f(\alpha)] f'(\alpha) &= ax^2 \end{aligned} \right\}$$

所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

3429. 証明：由方程組

$$\begin{cases} z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ 0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha) \end{cases}$$

所給出的函数 $z = z(x, y)$ 滿足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

3430. 証明：由方程

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

所定义的隱函数 $z = z(x, y)$ 滿足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

§ 4. 变量代換

1° 在含有导函数的式子中的变量代換設于式

$$A = \Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots)$$

中需要把 x, y 換为新的变量: t (自变量) 及 u (函数), 这些变量由方程

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u) \quad (1)$$

与原来的变量 x 和 y 連系起来。

把方程式(1)微分, 便有:

$$y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}.$$

同样地可表示出高阶的导函数 y''_{xx}, \dots 因此我們得:

$$A = \Phi_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \dots).$$

2° 在含有偏导函数的式子中自变量的代換。若于下式中

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots\right)$$

令

$$x=f(u, v), \quad y=g(u, v), \quad (2)$$

其中 u 和 v 为新的自变量, 则挨次的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ 由下列方程所确定:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v}, \end{aligned}$$

等等。

3° 在含有偏导函数的式子中自变量和函数的代换在一般的情况下, 设有方程

$$x=f(u, v, w), \quad y=g(u, v, w), \quad z=h(u, v, w), \quad (3)$$

其中 u, v 为新的自变量及 $w=w(u, v)$ 为新的函数, 则对于偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ 得到这样的方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) &= \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) &= \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v}, \end{aligned}$$

等等。

在某些情况下, 使用全微分法进行变量代换是方便的。

3431. 把 y 看作新的自变量, 变换方程

$$y'y''' - 3y''^2 = x.$$

3432. 用同样的方法变换方程

$$y'^2 y^{IV} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0.$$

3433. 取 x 作函数, $t=xy$ 作自变量, 变换方程

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0.$$

引入新变量, 变换下列常微分方程:

3434. $x^2 y'' + xy' + y = 0$, 若 $x = e^t$ 。

3435. $y''' = \frac{6y}{x^3}$, 若 $t = \ln|x|$ 。

3436. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$, 若 $x = \cos t$ 。

3437. $y'' + y' \operatorname{th} x + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 x} y = 0$, 若 $x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ 。

3438. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$,

令 $y = ue^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$ 。

3439. $x^4 y'' + xy y' - 2y^2 = 0$

令 $x = e^t, \quad y = ue^{2t}$,

其中 $u = u(t)$ 。

3440. $(1+x^2)^2 y'' = y$,

若 $x = \operatorname{tg} t, \quad y = \frac{u}{\cos t}$,

其中 $u = u(t)$ 。

3441. $(1-x^2)^2 y'' = -y$,

若 $x = \operatorname{th} t, \quad y = \frac{u}{\operatorname{ch} t}$,

其中 $u = u(t)$ 。

3442. $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$, 若 $x = u+t, y = u-t$, 其中 $u = u(t)$ 。

3443. $y''' - x^3 y'' + xy' - y = 0$, 若 $x = \frac{1}{t}$ 及 $y = \frac{u}{t}$, 其中 $u = u(t)$ 。

3444. 假定

$$u = \frac{y}{x-b}, \quad t = \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|,$$

并取 u 作为变量 t 的函数, 以变换斯托克斯方程

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}。$$

3445. 証明: 若方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

由代换 $x = \varphi(\xi)$ 变换为方程

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + P(\xi) \frac{dy}{d\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

则

$$[2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}} = [2p(x)q(x) + q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

3446. 在方程

$$\Phi(y, y', y'') = 0$$

(其中 Φ 为变量 y, y', y'' 的齐次函数) 中令 $y = e^{\int_{x_0}^x u dx}$ 。

3447. 在方程

$$F(x^2 y'', xy', y) = 0$$

(其中 F 为其变量的齐次函数) 中令 $u = x \frac{y'}{y}$ 。

3448. 证明: 经射影变换

$$x = \frac{a_1 \xi + b_1 \eta + c_1}{a \xi + b \eta + c}, \quad y = \frac{a_2 \xi + b_2 \eta + c_2}{a \xi + b \eta + c},$$

方程式

$$y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

不变其形状。

提示 已知的变换是由下面最简单的变换所构成:

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma, \quad y = Y;$$

$$X = \frac{1}{X_1}, \quad Y = \frac{Y_1}{X_1}$$

及

$$X_1 = a\xi + b\eta + c, \quad Y_1 = a_2\xi + b_2\eta + c_2.$$

3449. 证明:

$$S[x(t)] = \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{x''(t)}{x'(t)} \right]^2$$

对于线性分式变换

$$y = \frac{ax(t) + b}{cx(t) + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

其值不变。

将下列方程式改变为极坐标 r 与 φ 所表的方程；即令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ ：

$$3450. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$3451. \quad (xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2).$$

$$3452. \quad (x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^3.$$

3453. 把式子

$$\frac{x + yy'}{xy' - y}$$

变换为极坐标的式子。

3454. 把平面曲线的曲率

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

用极坐标 r 及 φ 表示之。

3455. 将方程组

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2)$$

改变为极坐标方程。

3456. 引入新函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, 变换式子

$$W = x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

3457. 在勒襄德变换中曲线 $y = y(x)$ 的每一点 (x, y) 对应于点 (X, Y) , 其中

$$X = y', \quad Y = xy' - y.$$

求 Y' , Y'' 及 Y''' 。

引入新变量 ξ 及 η , 解下列方程：

3458. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$, 令 $\xi = x + y$ 和 $\eta = x - y$ 。

3459. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 令 $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$ 。

3460. $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1 (a \neq 0)$, 令 $\xi = x$, $\eta = y - bz$ 。

3461. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, 令 $\xi = x$ 及 $\eta = \frac{y}{x}$ 。

取 u 与 v 作新的自变量, 变换下列方程式:

3462. $x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy$, 若 $u = \ln x$, $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ 。

3463. $(x+y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x-y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 若 $u = \ln \sqrt{x^2+y^2}$, $v = \arctg \frac{y}{x}$ 。

3464. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 若 $u = \frac{y}{x}$, $v = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。

3465. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$, 若 $u = 2x - z^2$, $v = \frac{y}{z}$ 。

3466. $(x+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = x+y+z$, 若 $u = x+z$, $v = y+z$ 。

3467. 取

$$\xi = y + ze^{-x}, \quad \eta = x + ze^{-y}$$

作为新的自变量, 变换式子

$$(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} = (z^2 - e^{x+y}).$$

3468. 假定

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

变换式子 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$

3469. 于方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

中令 $\xi = x, \quad \eta = y - x, \quad \zeta = z - x$ 。

3470. 取 x 作为函数, 而 y 和 z 作为自变量, 变换方程

$$(x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0。$$

3471. 取 x 作为函数, 而 $u = y - z, v = y + z$ 作为自变量, 变换方程

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0。$$

3472. 取 x 作为函数及 $u = xz, v = yz$ 作为自变量, 变换式子

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2。$$

3473. 于方程

$$(y + z + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + z + u) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y + u) \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$$

中, 令: $e^x = x - u, \quad e^y = y - u, \quad e^z = z - u。$

于下列方程中, 代入新的变量 u, v, w , 其中 $w = w(u, v)$:

3474. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$, 令 $u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad w = \ln z - (x + y)。$

3475. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, 令 $u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}。$

3476. $(xy + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + yz$, 设 $u = yz - x, \quad v = xz - y, \quad w = xy - z。$

3477. $\left(x \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$, 令 $x = ue^w$, $y = ve^w$, $z = we^w$ 。

3478. 假定 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \arctg z$, $w = x + y + z$, 其中 $w = w(u, v)$,

变换式子 $(x - y) : \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 。

3479. 假定 $u = xe^z$, $v = ye^z$, $w = ze^z$, 其中 $w = w(u, v)$ 。变换式子

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}。$$

3480. 在方程

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$$

中令: $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$, $\zeta = z$, $w = \frac{u}{z}$,

其中 $w = w(\xi, \eta, \zeta)$ 。

假定 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 改变下列各式为极坐标 r 和 φ 所表示的式子:

$$\mathbf{3481.} \quad w = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}。 \quad \mathbf{3482.} \quad w = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}。$$

$$\mathbf{3483.} \quad w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2。 \quad \mathbf{3484.} \quad w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}。$$

$$\mathbf{3485.} \quad w = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}。$$

$$\mathbf{3486.} \quad w = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right)。$$

3487. 在式子

$$I = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

中, 令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ 。

3488. 引用新的自變量

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

取 u 及 v 作新的自變量, 變換下列方程:

$$\mathbf{3489.} \quad 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 設 } u = x + 2y + 2$$

及 $v = x - y - 1$ 。

$$\mathbf{3490.} \quad (1+x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 設 } u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ 及 } v = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

$$\mathbf{3491.} \quad ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

 $(a, b, c \text{ 为常数}), \text{ 設 } u = \ln x, v = \ln y.$

$$\mathbf{3492.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{設} \quad u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

$$\mathbf{3493.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0,$$

$$\text{設} \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v.$$

$$\mathbf{3494.} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} \quad (y > 0),$$

$$\text{設} \quad u = x - 2\sqrt{y} \quad \text{及} \quad v = x + 2\sqrt{y}.$$

$$\mathbf{3495.} \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{設} \quad u = xy, \quad v = \frac{x}{y}.$$

$$\mathbf{3496.} \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \text{設 } u = x + y,$$

$$v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

$$3497. \quad xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

設 $u = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$ 及 $v = xy$ 。

$$3498. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \sin y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 設 } u = x \operatorname{tg} \frac{y}{2},$$

$v = x$ 。

$$3499. \quad x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0, y > 0), \text{ 設 } x = (u+v)^2 \text{ 及}$$

$y = (u-v)^2$ 。

$$3500. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^3, \text{ 設 } u = x \text{ 及 } v = y + z.$$

3501. 利用綫性变换

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y$$

变换方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

(其中 A, B 和 C 为常数及 $AC - B^2 < 0$) 为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

求滿足方程(1)的函数的普遍形状。

3502. 証明拉普拉斯方程

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

在滿足条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

的非退化的变数代换

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

下形式不变。

3503. 假定 $u = f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 改變方程

$$(a) \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (b) \quad \Delta(\Delta u) = 0.$$

3504. 若令

$$w = f(u),$$

其中

$$u = (x - x_0)(y - y_0),$$

方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0$$

變成怎樣的形狀?

3505. 假定

$$x + y = X, \quad y = XY,$$

變換式子

$$A = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

3506. 証明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z^2 = 0$$

在變換

$$x = uv \quad \text{及} \quad y = \frac{1}{v}$$

下形狀不變。

3507. 証明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

在變換

$$u = x + z \quad \text{及} \quad v = y + z$$

下形狀不變。

3508. 假定

$$x = \eta \zeta, \quad y = \xi \zeta, \quad z = \xi \eta,$$

變換方程

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$$

3509. 假定

$$y_1 = x_2 + x_3 - x_1, \quad y_2 = x_1 + x_3 - x_2, \quad y_3 = x_1 + x_2 - x_3,$$

变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0。$$

3510. 假定

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = \frac{z}{x}, \quad \zeta = y - z,$$

变换方程

$$x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0。$$

提示 写方程为这样的形状 $\Delta^2 u - \Delta u = 0$, 其中

$$\Delta = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}。$$

3511. 假定

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

变换式子 $\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$

及 $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

为球坐标所表的式子。

提示 变量的代换是由两个特殊的代换构成

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = s$$

及 $R = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta。$

3512. 在方程

$$z \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

中引入新函数 w , 假定 $w = z^2$ 。

取 u 和 v 为新的自变量及 $w = w(u, v)$ 为新函数, 变换下列方程

3513. $y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$, 设 $u = \frac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$ 。

$$3514. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 設 } u = x + y, v = \frac{y}{x}, w = \frac{z}{x}.$$

$$3515. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 設 } u = x + y, v = x - y, w = xy - z.$$

$$3516. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z, \text{ 設 } u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}, w = ze^v.$$

$$3517. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 設 } u = x, v = x + y, w = x + y + z.$$

$$3518. \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ 設 } x = \sin u, y = \sin v, z = e^w.$$

$$3519. \quad (1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4}z = 0 \quad (|x| < 1),$$

$$\text{設 } u = \frac{1}{2}(y + \arccos x), v = \frac{1}{2}(y - \arccos x), w = z\sqrt{1-x^2}.$$

$$3520. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}}{x^2 - y^2} - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^2} \quad (|x| > |y|),$$

$$\text{設 } u = x + y, v = x - y, w = \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

3521. 証明：任何方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c 为常数) 用代換

$$z = ue^{\alpha x + \beta y}$$

[其中 α 与 β 为常量, $u = u(x, y)$] 可以化为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \quad (c_1 = \text{常数}).$$

3522. 証明：方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

对于变量代换

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}, \quad u = \frac{u}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

(u' 为变量 x' 与 y' 的函数) 其形状不变。

3523. 在方程

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(其中 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$) 中令 $u = x + z$, $v = y + z$, $w = x + y + z$, 假定 $w = w(u, v)$ 。

3524 在方程

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(z \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

中令 $x = e^\xi$, $y = e^\eta$, $z = e^\zeta$, $u = e^w$, 其中 $w = w(\xi, \eta, \zeta)$ 。

3525. 証明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

的形状与变量 x , y 和 z 所分别担任的角色无关。

3526. 取 x 作为变量 y 和 z 的函数, 解方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0。$$

3527. 运用勒襄德变换

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z,$$

其中 $Z = Z(X, Y)$, 变换方程

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0。$$

§ 5. 几何上的应用

1° 切綫和法平面在曲綫

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t)$$

上的一点 $M(x, y, z)$ 的切綫方程为

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}。$$

在此点的法平面方程为

$$\frac{dx}{dt}(X-x) + \frac{dy}{dt}(Y-y) + \frac{dz}{dt}(Z-z) = 0。$$

2° 切平面和法綫 曲面 $z=f(x, y)$ 上点 $M(x, y, z)$ 处的切平面方程为

$$Z-z = \frac{\partial z}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y-y)。$$

在 M 点处的法綫方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-1}，$$

若曲面的方程給成隱函数的形状 $F(x, y, z)=0$ 則切平面方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0，$$

法綫方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}。$$

3° 平面曲綫族的包綫 含一个参数的曲綫族 $f(x, y, \alpha)=0$ (α 为参数) 的包綫滿足方程組：

$$f(x, y, \alpha)=0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha)=0。$$

4° 曲面族的包面 含一个参数的曲面族 $F(x, y, z, \alpha)=0$ 的包面滿足方程組：

$$F(x, y, z, \alpha)=0, \quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha)=0。$$

在含两个参数的曲面族 $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0$ 的情形, 其包面滿足下面的方程組：

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0, \quad \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta)=0, \quad \Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta)=0。$$

对下列曲线写出在已知点的切线和法平面方程：

3528. $x = a \cos \alpha \cos t, y = a \sin \alpha \cos t, z = a \sin t$; 在点 $t = t_0$ 。

3529. $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$; 在点 $t = \frac{\pi}{4}$ 。

3530. $y = x, z = x^2$; 在点 $M(1, 1, 1)$ 。

3531. $x^2 + z^2 = 10, y^2 + z^2 = 10$; 在点 $M(1, 1, 3)$ 。

3532. $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$; 在点 $M(1, -2, 1)$ 。

3533. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上求出一点, 此点的切线是平行于平面 $x + 2y + z = 4$ 的。

3534. 证明: 螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 的切线与 Oz 轴形成定角。

3535. 证明曲线

$$x = ae^t \cos t, \quad y = ae^t \sin t, \quad z = ae^t$$

与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同。

3536. 证明斜航线

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = e^{k\varphi} \quad (k = \text{常数}),$$

(其中 φ —地球上点的经度, ψ —地球上点的纬度) 与地球的一切子午线相交成定角。

3537. 已知曲线

$$z = f(x, y), \quad \frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha},$$

其中 f 为可微分的函数。求曲线上 $M_0(x_0, y_0)$ 点的切线与 Oxy 平面所成角的正切。

3538. 求函数

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

在点 $M(1, 2, -2)$ 沿曲线

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -2t^4$$

在此点的切綫方向上的导函数。

写出下列曲面上已知点的切面和法綫方程：

3539. $z = x^2 + y^2$; 在点 $M_0(1, 2, 5)$ 。

3540. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; 在点 $M_0(3, 4, 12)$ 。

3541. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; 在点 $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ 。

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$; 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 。

3543. $z = y + \ln \frac{x}{z}$; 在点 $M_0(1, 1, 1)$ 。

3544. $2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y}{2}} = 8$; 在点 $M_0(2, 2, 1)$ 。

3545. $x = a \cos \psi \cos \varphi, y = b \cos \psi \sin \varphi, z = c \sin \psi$; 在点 $M_0(\varphi_0, \psi_0)$ 。

3546. $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r \operatorname{ctg} \alpha$; 在点 $M_0(\varphi_0, r_0)$ 。

3547. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$; 在点 $M_0(u_0, v_0)$ 。

3548. 求曲面

$$x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$$

的切平面当切点 $M(u, v)$ ($u \neq v$) 无限接近于曲面的边界綫 $u = v$ 上的点 $M_0(u_0, v_0)$ 时的极限位置。

3549. 在曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ 上求出切平面平行于坐标平面的諸切点。

3550. 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

上怎样的点, 椭球面的法綫与坐标軸成等角?

3551. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的平行于平面

$$x + 4y + 6z = 0$$

的各切平面。

3552. 証明: 曲面 $xyz = a^3$ ($a > 0$) 的切平面与坐标面形成体

积一定的四面体。

3553. 証明：曲面

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

的切平面在坐标轴上割下的諸綫段，其和为常量。

3554. 証明：錐面

$$z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的切平面經過其頂点。

3555. 証明：旋轉面

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (f' \neq 0)$$

的法綫与旋轉軸相交。

3556. 求橢球面

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

在坐标面上的射影。

3557. 分正方形 $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 为直径 $\leq \delta$ 的有限个部分 σ 。若曲面

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

在属于同一部分 σ 的任何两点 $P(x, y)$ 及 $P_1(x_1, y_1)$ 的法綫方向相差小于 1° ，求数 δ 的上界。

3558. 設：

$$z = f(x, y), \text{ 其中 } (x, y) \in D \quad (1)$$

为曲面的方程， $\varphi(P_1, P)$ 为曲面 (1) 在点 $P(x, y) \in D$ 及 $P_1(x_1, y_1) \in D$ 二点的法綫之間的夹角。

証明，若域 D 有界且为封閉的，函数 $f(x, y)$ 在域 D 内有有界的二阶导函数，則李雅甫諾夫不等式

$$\varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P) \quad (2)$$

成立，其中 C 为常数， $\rho(P_1, P)$ 为点 P 与 P_1 之間的距离。

3559. 圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 与曲面 $bz = xy$ 在公共点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 相交成怎样的角?

3560. 証明: 球坐标的坐标曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y = x \operatorname{tg} \varphi$, $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \theta$ 两两直交。

3561. 証明: 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ 形成三直交系。

3562. 当 $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ 时, 经过每一点 $M(x, y, z)$ 有三个二次曲面:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0)。$$

証明这些曲面是直交的。

3563. 求函数 $u = x + y + z$ 在沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的外法綫方向上的导函数。

在球面上怎样的点使得上述的导函数有: (a) 最大值, (b) 最小值, (b) 等于零?

3564. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在沿橢球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的外法綫方向上的导函数。

3565. 設 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 u 和 v 在沿曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上的点的法綫方向上的导函数。証明:

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n}。$$

求含一个参变数的平面曲綫族的包綫:

3566. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ($p = \text{常数}$)。

3567. $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}。$

3568. $y = kx + \frac{a}{k}$ ($a = \text{常数}$)。 **3569.** $y^2 = 2px + p^2。$

3570. 設有长为 l 的綫段, 其两端点沿坐标軸滑动, 求如此产生的綫段族的包綫。

3571. 求橢圓族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的包綫, 已知此族中橢圓的面积 S 为常数。

3572. 炮彈在真空中以初速度 v_0 射出, 当投射角 α 在鉛垂平面中变化下, 求炮彈軌道的包綫。

3573. 証明: 平面曲綫的法綫的包綫是此曲綫的漸屈綫。

3574. 研究下列曲綫族的判別曲綫的性质 (c —参变数):

(a) 立方拋物綫 $y = (x - c)^3$;

(b) 半立方拋物綫 $y^2 = (x - c)^3$;

(c) 奈尔半立方拋物綫 $y^3 = (x - c)^2$;

(r) 环索綫 $(y - c)^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x}$ 。

3575. 求半徑为 r , 中心在圓周 $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = 0$ (t —参数, $R > r$) 上的球族的包面。

3576. 求球族

$$(x - t \cos \alpha)^2 + (y - t \cos \beta)^2 + (z - t \cos \gamma)^2 = 1$$

(其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 及 t —参变数) 的包面。

3577. 求橢球面族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的包面, 这些橢球的体积 V 是常数。

3578. 求半徑为 ρ , 中心在圓錐面 $x^2 + y^2 = z^2$ 上的球族的包面。

3579. 有一发光点位于坐标原点。若 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$, 求由球

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2$$

投影所生成的阴影圓錐。

3580. 若参变量 p 和 q 受方程

$$p^2 + q^2 = 1$$

的限制。求平面族

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

的包面。

§ 6. 台劳公式

1° 台劳公式 若函数 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 的某邻域内有直到 $n+1$ 阶 (连 $n+1$ 阶的在内) 的一切連續偏导函数, 則在此邻域内下面的公式成立

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^i f(a, b) + R_n(x, y), \quad (1)$$

其中

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f[a + \theta_1(x-a), b + \theta_2(y-b)] \quad (0 < \theta_i < 1).$$

2° 台劳級数 若函数 $f(x, y)$ 可以无穷次地微分及 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, y) = 0$, 則此函数可表成幕級数的形状

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i+j=1}^{\infty} \frac{1}{i!j!} f_{x^i y^j}^{(i+j)}(a, b) (x-a)^i (y-b)^j. \quad (2)$$

特別情形, 当 $a = b = 0$ 时公式(1)和(2)分別名为馬克老林公式和馬克老林級数。

对于多于两个变量的函数有类似的公式。

3° 平面曲綫的奇点 設在某点 $M_0(x_0, y_0)$ 可微分两次的曲綫 $F(x, y) = 0$ 适合下列条件

$$F(x_0, y_0) = 0, F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) = 0$$

及数

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0), B = F''_{xy}(x_0, y_0), C = F''_{yy}(x_0, y_0)$$

不全为零。于是, 若

- (1) $AC - B^2 > 0$, 則 M_0 —孤立点;
- (2) $AC - B^2 < 0$, 則 M_0 —二重点(节);

(3) $AC - B^2 = 0$, 則 M_0 — 上升点或孤立点。

在 $A = B = C = 0$ 的情形, 奇点的种类可能更复杂。至于不属于光滑的曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线, 奇点还可能有更复杂的类型: 中断的点, 角点 等等。

3581. 在点 $A(1, -2)$ 的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^3 - 6x - 3y + 5。$$

3582. 在点 $A(1, 1, 1)$ 的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz。$$

3583. 当从 $x = 1, y = -1$ 变到 $x_1 = 1 + h, y_1 = -1 + k$ 时, 求函数 $f(x, y) = x^2y + xy^2 - 2xy$ 的增量。

3584. 設:

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eax + 2Fyz,$$

按数 h, k 和 l 的正整数幂展开 $f(x+h, y+k, z+l)$ 。

3585. 写出函数

$$f(x, y) = x^y$$

在点 $A(1, 1)$ 的邻域内的展开式, 到二次项为止。

3586. 根据馬克老林公式展开函数

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

到四次项为止。

3587. 若 $|x|$ 和 $|y|$ 同 1 比較为很小的量, 对于下列二式

$$(a) \frac{\cos x}{\cos y};$$

$$(b) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+x+y}{1-x+y}$$

推出准确到二次项的近似公式。

3588. 假定 x, y, z 的绝对值是很小的量, 简化下式

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z。$$

3589. 依 h 的乘幂把函数

$$F(x, y) = \frac{1}{4} [f(x+h, y) + f(x, y+h) + f(x-h, y) + f(x, y-h)] - f(x, y)$$

展开, 准确到 h^4 。

3590. 已知中心在点 $P(x, y)$ 半径为 ρ 的圆周, 设 $f(P) = f(x, y)$ 及 $P_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, 3$) 为已知圆周之内接正三角形的顶点, 并且 $x_1 = x + \rho$, $y_1 = y$ 。依 ρ 的正整数幂把函数

$$F(\rho) = \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)]$$

展开准确到 ρ^3 。

3591. 依 h 与 k 的乘幂把函数

$$\Delta_{x,y} f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

展开。

3592. 依 ρ 的乘幂把函数

$$F(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) d\varphi$$

展开。

将下列函数展开成马克老林级数:

3593. $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$ 。

3594. $f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 。

3595. $f(x, y) = e^x \sin y$ 。 **3596.** $f(x, y) = e^x \cos y$ 。

3597. $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$ 。 **3598.** $f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ 。

3599. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ 。

3600. $f(x, y) = \ln(1+x) \ln(1+y)$ 。

3601. 写出函数

$$f(x, y) = \int_0^1 (1+x)^{ty} dt$$

的马克老林级数的前三项。

3602. 按二项式 $x+1$ 和 $y+1$ 的正整数幂将函数 e^{x+y} 展开成幂级数。

3603. 写出函数 $f(x, y) = \frac{x}{y}$ 在点 $M(1, 1)$ 的邻域内的台劳

級数展开式。

3604. 設 z 为由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 所定义的 x 和 y 的隐函数, 当 $x=1$ 和 $y=1$ 它的值为 $z=1$ 。

写出函数 z 按二項式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干項。

研究下列曲綫的奇点的种类并大略地繪出这些曲綫:

$$\mathbf{3605.} \quad y^3 = ax^2 + x^3, \quad \mathbf{3606.} \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

$$\mathbf{3607.} \quad x^2 + y^2 = x^4 + y^4, \quad \mathbf{3608.} \quad x^2 + y^4 = x^6.$$

$$\mathbf{3609.} \quad (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2), \quad \mathbf{3610.} \quad (y - x^2)^2 = x^5.$$

$$\mathbf{3611.} \quad (a+x)y^2 = (a-x)x^2.$$

3612. 研究参变量 a, b, c ($a \leq b \leq c$) 的值与曲綫 $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ 的形状之关系。

研究超越曲綫的奇点:

$$\mathbf{3613.} \quad y^2 = 1 - e^{-x^2}, \quad \mathbf{3614.} \quad y^2 = 1 - e^{-x}.$$

$$\mathbf{3615.} \quad y = x \ln x, \quad \mathbf{3616.} \quad y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

$$\mathbf{3617.} \quad y = \arctg\left(\frac{1}{\sin x}\right), \quad \mathbf{3618.} \quad y^2 = \sin \frac{\pi}{x}.$$

$$\mathbf{3619.} \quad y^2 = \sin x^2, \quad \mathbf{3620.} \quad y^2 = \sin^3 x.$$

§ 7. 多变量函数的极值

1° 极值的定义 若函数 $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ 于点 P_0 的邻域内有定义并且当 $0 < \rho(P_0, P) < \delta$ 时, $f(P_0) > f(P)$ 或 $f(P_0) < f(P)$, 則說, 函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极值(相应地为极大值或极小值)。

2° 极值的必要条件 可微分的函数 $f(P)$ 仅在静止点 P_0 , 即是說在 $df(P_0) = 0$ 的点 P_0 能达到极值。所以, 函数 $f(P)$ 的极值点应当滿足方程組 $f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, n$)。

3° 极值的充分条件 函数 $f(P)$ 于点 P_0 有:

(a) 极大值, 若 $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) < 0$,

(6) 极小值, 若 $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) > 0$ 。

研究二次微分 $d^2f(P_0)$ 的符号可用化相应的二次式成典式的方法来进行。

特别是, 对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x, y)$ 在静止点 (x_0, y_0) [$df(x_0, y_0) = 0$], $D = AC - B^2 \neq 0$ [其中 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$] 成立时, 有:

(1) 极小值, 若 $D > 0$, $A > 0$ ($C > 0$);

(2) 极大值, 若 $D > 0$, $A < 0$ ($C < 0$);

(3) 极值不存在, 若 $D < 0$ 。

4° 条件极值 在关系式 $\varphi_i(P) = 0$ ($i = 1, \dots, m$; $m < n$) 存在的条件下, 求函数 $f(P_0) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值的问题, 可归结为对于拉格朗日函数

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(P)$$

[其中 λ_i ($i = 1, \dots, m$) 为常数因子] 求普通极值的问题。关于条件极值的存在和性质的问题, 在最简单情况, 根据研究函数 $L(P)$ 于静止点 P_0 的二次微分 $d^2L(P_0)$ 的符号, 并在变量 dx_1, dx_2, \dots, dx_n 由下面的关系式

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

所限制的条件下, 得到解决。

5° 绝对极值 于有界且封闭的区域内可微分的函数 $f(P)$ 在此域内或于静止点, 或于域的边界点达到自己的最大值和最小值。

研究下列多变量函数的极值:

3621. $z = x^2 + (y-1)^2$ 。 **3622.** $z = x^2 - (y-1)^2$ 。

3623. $z = (x-y+1)^2$ 。 **3624.** $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ 。

3625. $z = x^2 y^3 (6-x-y)$ 。 **3626.** $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 。

3627. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 。

3628. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$ 。

3629. $z = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0)$ 。

$$3630. \quad z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0).$$

$$3631. \quad z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3632. \quad z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2).$$

$$3633. \quad z = e^{x^2-y}(5 - 2x + y).$$

$$3634. \quad z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}.$$

$$3635. \quad z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y.$$

$$3636. \quad z = \sin x + \cos y + \cos(x-y) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$3637. \quad z = \sin x \sin y \sin(x+y) \quad (0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi).$$

$$3638. \quad z = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$3639. \quad z = xy \ln(x^2 + y^2). \quad 3640. \quad z = x + y + 4 \sin x \sin y.$$

$$3641. \quad z = (x^3 + y^3)e^{-(x^2+y^2)}.$$

$$3642. \quad u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

$$3643. \quad u = x^3 + y^3 + z^3 + 12xy + 2z.$$

$$3644. \quad u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$3645. \quad u = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z) \quad (a > 0).$$

$$3646. \quad u = \frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - \frac{z^2}{b} \quad (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0).$$

$$3647. \quad w = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$$

$$(0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi; 0 \leq z \leq \pi).$$

$$3648. \quad u = x_1 x_2^2 \cdots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n)$$

$$(x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0).$$

$$3649. \quad u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n} \quad (x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n).$$

3650. 惠更斯問題。在 a 和 b 二正數間插入 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 使得分数

$$u = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_{n-1}+b)}$$

的值是最大。

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值：

3651. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 。

3652. $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$ 。

3653. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$ 。

求下列函数的条件极值点：

3654. $z = xy$, 若 $x + y = 1$ 。

3655. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, 若 $x^2 + y^2 = 1$ 。

3656. $z = x^2 + y^2$, 若 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 。

3657. $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, 若 $x^2 + y^2 = 1$ 。

3658. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, 若 $x - y = \frac{\pi}{4}$ 。

3659. $u = x - 2y + 2z$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。

3660. $u = x^m y^n z^p$, 若 $x + y + z = a$ ($m > 0, n > 0, p > 0, a > 0$)。

3661. $u = x^2 + y^2 + z^2$, 若 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c > 0$)。

3662. $u = xy^2 z^3$, 若 $x + 2y + 3z = a$ ($x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$)。

3663. $u = xyz$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$ 。

3664. $u = \sin x \sin y \sin z$, 若 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$

$$(x > 0, y > 0, z > 0)。$$

3665. $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

$$(a > b > c > 0, \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1)。$$

3666. $u = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$, 若 $Ax + By + Cz = 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \frac{\xi}{\cos \alpha} = \frac{\eta}{\cos \beta} = \frac{\zeta}{\cos \gamma},$$

其中

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

3667. $u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, 若 $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1$

$$(a_i > 0; i = 1, 2, \dots, n).$$

3668. $u = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p (p > 1)$, 若 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$

$$(a > 0).$$

3669. $u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}$, 若 $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n = 1$

$$(\alpha_i > 0, \beta_i > 0; i = 1, 2, \dots, n)$$

3670. $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, 若 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$

$$(a > 0, \alpha_i > 1, i = 1, 2, \dots, n).$$

3671. 若 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$, 求二次型 $u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j (a_{ij} = a_{ji})$ 的极值。

3672. 若 $n \geq 1$ 及 $x \geq 0, y \geq 0$, 证明不等式

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^n.$$

提示 在 $x + y = S$ 的条件下, 求函数 $z = \frac{1}{2} (x^n + y^n)$ 的极小值。

3673. 证明和尔賓不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\left(a_i \geq 0, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; k > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1 \right).$$

提示 在 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$ 的条件下, 求函数

$$u = \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

的极小值。

3674. 对于 n 阶行列式 $A = |a_{ij}|$ 証明哈达馬不等式:

$$A^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

提示 在关系式

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

存在的条件下, 研究行列式 $A = |a_{ij}|$ 的极值。

求下列函数在指定域内的上确界(sup)和下确界(inf):

3675. $z = x - 2y - 3$, 若 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x + y \leq 1$ 。

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, 若 $x^2 + y^2 \leq 25$ 。

3677. $z = x^2 - xy + y^2$, 若 $|x| + |y| \leq 1$ 。

3678. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$ 。

3679. $u = x + y + z$, 若 $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ 。

3680. 求函数

$$u = (x + y + z) e^{-(x-2y+3z)}$$

在域 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 内的下确界(inf)与上确界(sup)。

3681. 証明: 函数 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值。

3682. 函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 有极小值的充分条件是否为此函数在沿着过 M_0 点每一条直綫上有极小值呢?

研究例子 $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ 。

3683. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得他們的倒数的和为最小。

3684. 分解已知正数 a 为 n 个相加数, 使得它們的平方和为最小。

3685. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得它們的已知正乘幂的和为最小。

3686. 已知在平面上的 n 个质点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, \dots ,

$P_n(x_n, y_n)$ 其质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n 。

$P(x, y)$ 点在怎样的位置, 这一体系对于此点的转动惯量为最小?

3687. 已知容积为 V 的开顶长方浴盆, 当其尺寸怎样时, 有最小的表面积?

3688. 横断面为半圆形的圆柱形的张口浴盆, 其表面积等于 S , 当其尺寸怎样时, 此盆有最大的容积?

3689. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求出一点, 这点到 n 个已知点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 距离的平方和为最小。

3690. 由直圆柱及以直圆锥作顶构成一个体。当已知体的全表面积等于 Q 时, 求它的尺寸大小, 使得体的体积为最大。

3691. 一个体, 其体积等于 V , 形为直角平行直六面体, 上底及下底为正的四角锥。当角锥的侧面对它们的底成怎样的倾角, 体的全表面积为最小?

3692. 已知矩形的周长为 $2p$, 将它绕其一边旋转而构成一体积, 求所得体积为最大的那个矩形。

3693. 已知三角形的周长为 $2p$, 求出这样的三角形, 当它绕着自己的一边旋转所构成的体积最大。

3694. 在半径为 R 的半球内嵌入有最大体积的直角平行六面体。

3695. 在已知的直圆锥内嵌入有最大体积的直角平行六面体。

3696. 在橢球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

内嵌入有最大体积的直角平行六面体。

3697. 直圆锥的母线 l 与底平面成倾角 α , 试在此直圆锥中

嵌入具最大全表面积的直角平行六面体。

3698. 在椭圆抛物面 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z=c$ 的一段中嵌入有最大体积的直角平行六面体。

3699. 求点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的最短距离。

3700. 求空間二直綫

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

和

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

之間的最短距离。

3701. 求抛物綫 $y=x^2$ 和直綫 $x-y-2=0$ 之間的最短距离。

3702. 求有心二次曲綫

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

的半軸。

3703. 求有心二次曲面

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx = 1$$

的半軸。

3704. 求用平面

$$Ax + By + Cz = 0$$

与圓柱

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

相交所成橢圓的面积。

3705. 求用平面

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

(其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$) 与橢球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相截所成截面的面积。

3706. 根据飞耳馬原則,从 A 点射出而达于 B 点的光綫,沿着需要最短时间的曲綫傳播。

假定点 A 和点 B 位于以平面所分开的不同的光介质中,并且光散播的速度在第一介质中等于 v_1 ,而在第二个中等于 v_2 ,推出光的折射定律。

3707. 当投射角怎样时,光綫的折射(即投射綫与出射綫之間的角)为最小?(此光綫經過棱鏡的折射角为 α , 折射系数为 n)。求出此最小的折射。

3708. 变量 x 和 y 滿足綫性方程式

$$y = ax + b,$$

它的系数需要确定。由于一系列的等精确測定的結果,对于量 x 和 y 得到值 $x_i, y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。

利用最小二乘方的方法,求系数 a 和 b 的最可靠数值。

提示 根据最小二乘方的方法,系数 a 和 b 的最可靠数值是这样的,对于他們誤差的平方和

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

为最小。

3709. 在平面上已知 n 个点 $M_i(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 。

直綫 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ 在怎样的位置时,已知点与此直綫的偏差的平方和为最小?

3710. 在区間 $(1, 3)$ 內用綫性函数 $ax + b$, 来近似地代替函数 x^2 , 使得絕對偏差

$$\Delta = \sup |x^2 - (ax + b)| \quad (1 \leq x \leq 3)$$

为最小。

第七章 带参数的积分

§ 1. 带参数的常义积分

1° 积分的連續性 若函数 $f(x, y)$ 于有界的域 $R[a \leq x \leq A; b \leq y \leq B]$ 内有定义并且是連續的, 則

$$F(y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

是在閉区間 $b \leq y \leq B$ 上連續的函数。

2° 积分符号下的微分法 若除在 1° 中所已指明的条件之外, 并且偏导函数 $f'_y(x, y)$ 在区域 R 內連續, 則当 $b < y < B$ 时萊布尼茲公式

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A f'_y(x, y) dx$$

为真。

在更普遍的情况下, 当积分的限为参数 y 的可微分函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$ 并且当 $b < y < B$ 时 $a \leq \varphi(y) \leq A, a \leq \psi(y) \leq A$, 有:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx &= f[\psi(y), y] \psi'(y) - f[\varphi(y), y] \varphi'(y) + \\ &+ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx \quad (b < y < B). \end{aligned}$$

3° 积分符号下的积分法 在 1° 的条件下有

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

~3711. 証明: 不連續函数 $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ 的积分

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$$

为連續函数。作出函数 $u = F(y)$ 的图形。

3712. 研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$$

(360)

的連續性, 其中 $f(x)$ 在閉區間 $[0, 1]$ 上是正的連續函數。

3713. 求:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}; & \quad \text{(б)} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2} dx; \\ \text{(B)} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx; & \quad \text{(r)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}. \end{aligned}$$

3714. 設函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, A]$ 上連續。証明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a) \quad (a < x < A).$$

3715. 在下式中可否于积分符号下完成极限运算

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx? \quad \text{是或否?}$$

3716. 当 $y=0$, 可否根据萊布尼茲法則計算函數

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2+y^2} dx$$

的導數?

3717. 若

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy,$$

計算 $F'(x)$ 。

3718. 設:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F(\alpha) &= \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{x\sqrt{1-x^2}} dx; & \text{(б)} \quad F(\alpha) &= \int_{\alpha+\alpha}^{\alpha+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx; \\ \text{(B)} \quad F(\alpha) &= \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx; \\ \text{(r)} \quad F(\alpha) &= \int_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha) dx; \\ \text{(л)} \quad F(\alpha) &= \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2) dy, \end{aligned}$$

求 $F'(\alpha)$ 。

3719. 若

$$F(x) = \int_0^x (x+y) f(y) dy,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$ 。

3720. 設:

$$F(x) = \int_a^b f(y) |x-y| dy,$$

其中 $a < b$ 及 $f(y)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$ 。

3721. 設:

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x+\xi+\eta) d\eta \quad (h>0),$$

其中 $f(x)$ 为連續函数, 求 $F'''(x)$ 。

3722. 設:

$$F(x) = \int_0^x f(t) (x-t)^{n-1} dt,$$

求 $F^{(n)}(x)$ 。

3723. 在区間 $1 \leq x \leq 3$ 上用綫性函数 $a+bx$ 近似地代替函数 $f(x)=x^3$, 使得

$$\int_1^3 (a+bx-x^3)^2 dx = \min.$$

3724. 依条件: 函数 $a+bx$ 及 $\sqrt{1+x^2}$ 在已知区間 $[0, 1]$ 上的平均平方差为最小, 求近似公式

$$\sqrt{1+x^2} \approx a+bx \quad (0 \leq x \leq 1).$$

3725. 求完全橢圓积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

及

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

的导函数并以函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 来表示他們。

証明 $E(k)$ 滿足微分方程式

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

、3726. 証明: 足指数 n 为整数的貝塞尔函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

滿足貝塞尔方程式

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

、3727. 設:

$$I(a) = \int_0^a \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{a-x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导函数 $\varphi'(x)$ 在閉区間 $0 \leq x \leq a$ 上連續。

証明: 当 $0 < a < a$ 有:

$$I'(a) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{a}} + \int_0^a \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a-x}} dx.$$

提示 令 $x = at$ 。

、3728. 設有函数

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) v(y) dy,$$

其中

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{若 } x \leq y; \\ y(1-x), & \text{若 } x > y, \end{cases}$$

及 $v(y)$ 都是連續的。証明已知函数滿足方程式

$$u''(x) = -v(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

、3729. 設:

$$F(x, y) = \int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x-yz) f(z) dz,$$

其中 $f(z)$ 为可微分的函数, 求 $F_{xy}''(x, y)$ 。

、3730. 設 $f(x)$ 为可微分两次的函数及 $F(x)$ 为可微分的函数。証明: 函数

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz$$

滿足弦振动的方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件: $u(x, 0) = f(x)$, $u_t'(x, 0) = F(x)$ 。

3731. 証明: 若函数 $f(x)$ 在閉区間 $[0, l]$ 上連續及当 $0 \leq \xi \leq l$ 时 $(x - \xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, 則函数

$$u(x, y, z) = \int_0^l \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

滿足拉普拉斯方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0。$$

应用对参数的微分法, 計算下列积分:

$$\mathbf{3732.} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx。$$

$$\mathbf{3733.} \quad \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx。$$

$$\mathbf{3734.} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx。$$

$$\mathbf{3735.} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1)。$$

3736. 利用公式

$$\frac{\arctg x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2 y^2},$$

計算积分

$$\int_0^1 \frac{\arctg x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}。 \quad \checkmark$$

3737. 应用积分符号下的积分法, 計算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0)。$$

3738. 計算积分:

$$(a) \quad \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx; \quad \checkmark$$

$$(6) \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

\ 3739. 設 $F(k)$ 和 $E(k)$ 为完全橢圓积分 (参閱問題 3725).
証明公式

$$(a) \int_0^k F(k) k dk = E(k) - k_1^2 F(k);$$

$$(6) \int_0^k E(k) k dk = \frac{1}{3} [(1+k^2) E(k) - k_1^2 F(k)],$$

其中 $k_1^2 = 1 - k^2$.

\ 3740. 証明公式

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x),$$

其中 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 为足指数是 0 与 1 的貝塞耳函数 (参閱問題 3726)。

§ 2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性

1° 一致收敛性的定义 若对于任何的 $\varepsilon > 0$, 都存在有数 $B = B(\varepsilon)$, 使得在 $b \geq B$ 的条件下有

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2),$$

則称广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (1)$$

(其中函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$ 內是連續的) 在区間 (y_1, y_2) 內一致收敛。

积分(1)的一致收敛与形状如下的一切級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y) dx \quad (2)$$

(其中 $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$) 的一致收敛等价。

若积分(1)在区間 (y_1, y_2) 中一致收敛, 則在这个区間內它是参数 y 的連續函数。

2° 哥西判別法則 积分(1)在区間 (y_1, y_2) 內一致收敛的充分而且必

要的条件为, 对于任何的 $\varepsilon > 0$ 便存在有数 $B = B(\varepsilon)$, 使得只要是 $b' > B$ 及 $b'' > B$ 則

$$\text{当 } y_1 < y < y_2 \text{ 时 } \left| \int_{b'}^{b''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

3° 外尔什特拉斯判别法 对于积分 (1) 一致收敛的充分条件为, 与参数 y 无关的强函数 $F(x)$ 存在, 使得

$$(1) \text{ 当 } a \leq x < +\infty \text{ 时 } |f(x, y)| \leq F(x)$$

及

$$(2) \int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty.$$

4° 对于不連續函数的广义积分有类似的定理。

、求积分的收敛域:

$$3741. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx. \quad 3742. \int_x^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^2} dx.$$

$$3743. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p} dx. \quad 3744. \int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}.$$

$$3745. \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 3746. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx \quad (p > 0).$$

、利用与級数比較的方法研究下列积分的收敛性:

$$3747. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx. \quad 3748. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \quad (n > 0).$$

$$3749. \int_x^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[p]{\sin^2 x}}. \quad 3750. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx.$$

3751. 在肯定的意义上表达出来, 甚么是积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在已知区間 (y_1, y_2) 內不一致收敛?

3752. 証明: 若 1) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛, 2) 函数 $\varphi(x, y)$ 有界并关于 x 是单調的, 則积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x, y) dx$$

一致收敛 (在对应的域内)。

3753. 证明: 一致收敛的积分

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} dx \quad (0 < y < 1)。$$

不能以与参数无关的收敛积分为强函数。

3754. 证明: 积分

$$I = \int_0^{+\infty} a e^{-ax} dx$$

1) 在任何区间 $0 < a \leq \alpha \leq b$ 内一致收敛; 2) 在区间 $0 \leq \alpha \leq b$ 内非一致收敛。

3755. 证明迪里黑里积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

1) 在每一个不含数值 $\alpha = 0$ 的闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 2) 在含数值 $\alpha = 0$ 的每一个闭区间 $[a, b]$ 上非一致收敛。

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性:

3756. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx \quad (0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty)。$

3757. $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \quad (a \leq \alpha \leq b)。$

3758. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty)。$

3759. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^2+1} \quad (0 \leq \alpha < +\infty)。$

3760. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty)。$

3761. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} e^{-\alpha x} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty),$

其中 $p > 0$ 是常数。

$$3762. \int_0^{+\infty} \sqrt{a} e^{-ax^2} dx \quad (0 \leq a < +\infty).$$

$$3763. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx; \quad (a) a < \alpha < b; \quad (b) -\infty < a < +\infty.$$

$$3764. \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$3765. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^2} dx \quad (p \geq 0).$$

$$3766. \int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx; \quad (a) p \geq p_0 > 0; \quad (b) p > 0 (q > -1).$$

$$3767. \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (0 \leq n < +\infty).$$

$$3768. \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} \quad (0 < n < 2).$$

$$3769. \int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right).$$

$$3770. \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-a}} dx \quad (0 \leq a \leq 1).$$

3771. 若积分在参数的已知值的某邻域内一致收敛, 则称此积分对参数的已知值一致收敛。

証明积分
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2 x^2}$$

在每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛, 而在 $\alpha = 0$ 非一致收敛。

3772. 在下式中

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

把极限移到积分符号内合理嗎?

3773. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内可积分, 証明公式

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

3774. 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内绝对可积分, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

3775. 证明: 若 (1) 在每一个有穷区间 (a, b) 内 $f(x, y) \rightarrow f(x, y_0)$; (2) $|f(x, y)| \leq F(x)$, 其中 $\int_a^{+\infty} F(x) \, dx < +\infty$, 则

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \, dx.$$

3776. 利用积分符号与极限号互换, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} \right] \, dx.$$

3777. 证明: 积分

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} \, dx$$

是参数 a 的连续函数。

3778. 求函数

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x} \, dx$$

的不连续点。作出函数 $y = F(a)$ 的图形。

研究下列函数在所指定区间内的连续性:

$$3779. F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{2+x^a} \quad \text{当 } a > 2.$$

$$3780. F(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} \, dx \quad \text{当 } a > 0.$$

$$3781. F(a) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2(\pi-x)^a} \, dx \quad \text{当 } 0 < a < 2.$$

$$3782. F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^a} \, dx \quad \text{当 } 0 < a < 1.$$

$$3783. F(a) = \int_0^{+\infty} a e^{-x^a} \, dx \quad \text{当 } -\infty < a < +\infty.$$

§3. 广义积分中的变量代换. 广义积分号下 微分法及积分法

1° 对参数的微分法 若 1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x < +\infty, y_1 < y < y_2$ 内是连续的并对参数 y 可微分; 2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 收敛; 3) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ 于区间 (y_1, y_2) 内一致收敛, 则当 $y_1 < y < y_2$ 时

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

(萊布尼茲法則)。

2° 对参数积分的公式 若 1) 函数 $f(x, y)$ 当 $x \geq a$ 及 $y_1 \leq y \leq y_2$ 时是連續的; 2) $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx$ 在无穷的区间 (y_1, y_2) 内一致收敛, 則

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy. \quad (1)$$

若 $f(x, y) \geq 0$, 則公式(1)在假定等式(1)的一端有意义时, 对于无穷的区间 (y_1, y_2) 也正确。

√ **3784.** 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0),$$

計算积分

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx, \text{ 其中 } m \text{ 为自然数。}$$

3785. 利用公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0),$$

計算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \text{ 其中 } n \text{ 为自然数。}$$

√ **3786.** 証明迪里黑里积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

当 $\alpha \neq 0$ 时有导函数, 但是不能利用莱布尼兹法则来求它。

提示 令 $\alpha x = y$ 。

✓ 3787. 证明: 函数

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + \alpha)^2} dx$$

在区域 $-\infty < \alpha < +\infty$ 内连续并且可微分的。

✓ 3788. 从等式

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$$

出发, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)。$$

~ 3789. 证明傅茹兰公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0),$$

式中 $f(x)$ 为连续函数及积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 对任何的 $A > 0$ 都有意义。

利用傅茹兰公式, 计算积分

$$\checkmark 3790. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)。$$

$$\checkmark 3791. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)。$$

$$3792. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0)。$$

利用对参数的微分法计算下列积分:

$$3793. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)。$$

$$3794. \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)。$$

$$3795. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)。$$

$$3796. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \, dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)。$$

計算下列积分：

$$\sqrt{3797.} \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \, dx \quad (|\alpha| \leq 1)。$$

$$\sqrt{3798.} \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx \quad (|\alpha| \leq 1)。$$

$$\sqrt{3799.} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \, dx, \quad 3800. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} \, dx。$$

$$3801. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} \, dx。$$

$$3802. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} \, dx。$$

3803. 从公式

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} \, dy$$

出发, 計算尤拉-普阿桑积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx。$$

利用尤拉-普阿桑积分, 求下列积分之值:

$$\sqrt{3804.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + 2bx + c)} \, dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0)。$$

$$\sqrt{3805.} \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} \, dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0)。$$

$$\sqrt{3806.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx \, dx \quad (a > 0)。$$

$$3807. \int_0^{+\infty} e^{-(x^4 + \frac{a^2}{x^4})} \, dx \quad (a > 0)。$$

$$\sqrt{3808.} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \, dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)。$$

$$\checkmark \quad 3809. \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \quad (a > 0).$$

$$\sim 3810. \quad \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx \quad (a > 0).$$

$$3811. \quad \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx \quad (n \text{ 为自然数}).$$

3812. 从积分

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx$$

计算迪里黑里积分

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx.$$

利用迪里黑里和傅茹兰积分, 求下列积分之值:

$$3813. \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos \beta x}{x^2} \, dx \quad (a > 0).$$

$$3814. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} \, dx. \quad 3815. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} \, dx.$$

$$3816. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} \, dx. \quad \checkmark \quad 3817. \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 \, dx.$$

$$3818. \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 \, dx. \quad 3819. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} \, dx.$$

$$3820. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} \, dx.$$

$$\checkmark \quad 3821. \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} \, dx.$$

$$3822. \quad \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} \, dx \quad (k \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0).$$

3823. 对于不同的 x 值, 求迪里黑里间断乘数

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda},$$

作出函数 $y = D(x)$ 的图形。

3824. 计算积分

$$(a) \quad V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx, \quad (b) \quad V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx.$$

3825. 利用公式

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy,$$

計算拉普拉斯积分

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx.$$

3826. 計算积分

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

計算积分:

$$3827. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$$

$$3828. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$3829. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{ax^2+2bx+c} dx \quad (a>0, ac-b^2>0).$$

3830. 利用公式

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy \quad (x>0),$$

計算傅倫涅耳积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

及

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

求下列积分之值:

$$3831. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2+2bx+c) dx \quad (a \neq 0).$$

$$3832. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx. \quad 3833. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax dx.$$

3834. 証明公式:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \sin a\alpha;$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{a^2 - x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \cos a\alpha,$$

这里 $a \neq 0$, 积分应了解为在哥西意义上的主值。

3835. 对于函数 $f(t)$, 求拉普拉斯变换

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (p > 0);$$

設:

$$(a) f(t) = t^n (n \text{ 为自然数}); \quad (b) f(t) = \sqrt{t};$$

$$(B) f(t) = e^{\alpha t}; \quad (r) f(t) = te^{-\alpha t};$$

$$(d) f(t) = \cos t; \quad (e) f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t};$$

$$(ж) f(t) = \sin \alpha \sqrt{t}.$$

3836. 証明公式(李普希茲积分)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (a > 0),$$

其中 $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) d\varphi$ 为足指数为 0 的貝塞耳函数 (参閱 3726 題)。

3837. 求外耳什特拉斯变换

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy$$

$$\text{設: } (a) f(y) = 1; \quad (b) f(y) = y^2;$$

$$(B) f(y) = e^{2ay}; \quad (r) f(y) = \cos ay.$$

3838. 契貝协夫-厄耳米特多项式由公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

而定义, 証明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{若 } m = n. \end{cases}$$

3839. 計算在概率論中有重要意义的积分

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}} d\xi \quad (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0).$$

3840. 設函数 $f(x)$ 在区間 $(-\infty, +\infty)$ 內絕對可积分。証明: 积分

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(t-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

滿足热傳导方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x).$$

§ 4. 尤拉积分

1° Γ-函数 当 $x > 0$ 有:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Γ 函数的基本性质由下面的递推公式所表示出来

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

設 n 为正整数, 則

$$\Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

2° 余元公式 当 x 不等于整数时有

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

此公式可用來求自变量为負值的 Γ 函数。

3° β-函数 当 $x > 0$ 及 $y > 0$ 有

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

下公式正确

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

3841. 証明 Γ -函数 $\Gamma(x)$ 在域 $x > 0$ 內是連續的并有各阶連續导函数。

3842. 証明 β 函数 $\beta(x, y)$ 在域 $x > 0, y > 0$ 內是連續的并有各阶連續导函数。

利用尤拉积分計算下列积分：

$$\mathbf{3843.} \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx. \quad \mathbf{3844.} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \quad (a > 0).$$

$$\mathbf{3845.} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x)^2} dx. \quad \mathbf{3846.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$\mathbf{3847.} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}. \quad \mathbf{3848.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^4 x dx.$$

$$\mathbf{3849.} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n > 0). \quad \mathbf{3850.} \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \text{ 为正整数}).$$

求下列积分的存在域,并用尤拉积分来表示下面这些积分:

$$\mathbf{3851.} \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx \quad (n > 0). \quad \mathbf{3852.} \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^n} dx.$$

$$\mathbf{3853.} \int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} \quad (a > 0, b > 0, n > 0).$$

$$\mathbf{3854.} \int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}} dx. \quad \mathbf{3855.} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m > 0).$$

$$\mathbf{3856.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx. \quad \mathbf{3857.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x dx.$$

$$\mathbf{3858.} \int_0^\pi \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx \quad (0 < |k| < 1).$$

$$\mathbf{3859.} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n > 0). \quad \mathbf{3860.} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^n} dx.$$

$$\mathbf{3861.} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx.$$

$$\mathbf{3862.} \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (a > 0).$$

$$\mathbf{3863.} \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx \quad (p > 0).$$

$$3864. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} dx \quad (p>0)。$$

$$3865. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x) \ln x} dx。$$

$$3866. \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} dx \quad (0<p<1)。$$

提示 这个积分可看作

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)]。$$

$$3867. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} \beta x} dx \quad (0<a<\beta)。$$

$$3868. \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx, \quad 3869. \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx \quad (a>0)。$$

$$3870. \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx。$$

$$3871. \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2n\pi x dx \quad (n \text{ 为自然数})。$$

証明等式:

$$3872. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}。$$

$$3873. \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}。$$

$$3874. \prod_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}。$$

$$3875. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1。$$

利用等式 $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt \quad (x>0)$, 求积分

$$3876. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx \quad (0<m<1)。$$

$$3877. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m} dx \quad (0<m<2)。$$

3878. 証明尤拉公式:

$$(a) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x;$$

$$(b) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x$$

$$\left(\lambda > 0, x > 0, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

3879. 求曲线

$$r^n = a^n \cos n\varphi \quad (a > 0, n \text{ 为自然数})$$

的弧长。

3880. 求由曲线

$$|x|^n + |y|^n = a^n \quad (n > 0, a > 0)$$

所界的面积。

§ 5. 福里叶积分公式

1° 用福里叶积分表示函数 如果: 1) 函数 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内有定义 (2) 在每一个有穷的区间内此函数和它的导函数 $f'(x)$ 皆是逐段连续, (3) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积分, 则在函数连续的一切点, 可把函数表成福里叶积分的形状

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (1)$$

式中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \text{ 及 } b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

在函数 $f(x)$ 不连续的各点, 公式(1)的左端应用 $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ 代换。

对于偶函数 $f(x)$ 关于不连续的点应加以同样的附注, 公式(1)给出:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad (2)$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi.$$

同样对于奇函数 $f(x)$ 可得:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (3)$$

其中
$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

2° 在区間 $(0, +\infty)$ 內用福里叶积分表示函数 已知函数 $f(x)$ 于区間 $(0, +\infty)$ 內绝对可积分并有性质 (2), 則在已知区間內可按我們的愿望用公式 (2) (偶式展拓的时候), 或用公式 (3) (奇式展拓的时候) 来表示出函数 $f(x)$ 。

用福里叶积分表示下列函数:

$$3881. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x < 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

$$3882. f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{若 } |x| < 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

$$3883. f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b) \quad (b > a).$$

$$3884. f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{x}{a}\right), & \text{若 } |x| \leq a; \\ 0, & \text{若 } |x| > a. \end{cases}$$

$$3885. f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$3886. f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$3887. f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{若 } |x| \leq \pi; \\ 0, & \text{若 } |x| > \pi. \end{cases}$$

$$3888. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{若 } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{若 } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3889. f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t, & \text{若 } |t| \leq \frac{2\pi n}{\omega}; \\ 0, & \text{若 } |t| > \frac{2\pi n}{\omega} \end{cases}$$

(n 为自然数)。

$$3890. f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0)。$$

$$3891. f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x \quad (\alpha > 0)。$$

$$3892. f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x \quad (\alpha > 0)。$$

$$3893. f(x) = e^{-x^2}。$$

$$3894. f(x) = xe^{-x^2}。$$

3895. 用福里叶积分来表示函数

$$f(x) = e^{-x^2} \quad (0 < x < +\infty),$$

(a) 用偶式延拓; (b) 用奇式延拓。

对于函数 $f(t)$, 求出福里叶变换

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt$$

若:

$$3896. f(x) = e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0)。3897. f(x) = xe^{-\alpha|x|} \quad (\alpha > 0)。$$

$$3898. f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}。$$

$$3899. f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos ax。$$

3900. 求函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$, 設

$$(a) \int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy \, dy = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(b) \int_0^{+\infty} \psi(y) \sin xy \, dy = e^{-x} \quad (x > 0)。$$

第八章 重积分和曲线积分

§ 1. 二重积分

1° 二重积分的直接算法 所谓连续函数 $f(x, y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, 而其和为对所有 i, j 使 $(x_i, y_j) \in \Omega$ 的那些值来求的。

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2° 二重积分中的变量代换 若可微分的连续函数

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

把平面 Oxy 上的有限闭域 Ω 单值唯一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω' 及雅哥比式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0,$$

则下之公式正确:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f[x(u, v), y(u, v)] |I| du dv.$$

特别是, 根据公式 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 的情形有

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

3901. 把积分 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx \, dy$, 当作积分和的极限, 用直綫

$$x = \frac{i}{n}, \quad y = \frac{j}{n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

把积分域分为許多正方形, 并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值, 計算所論积分的值。

3902. 用直綫

$$x = 1 + \frac{i}{n}, \quad y = 1 + \frac{2j}{n} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

把域 $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ 分为許多矩形。作出函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在此域內的积分下和 \underline{S} 与积分上和 \overline{S} 。

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上和与下和的极限等于甚么?

3903. 用一系列內接正方形作为积分域的近似域, 这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点, 并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值。近似地計算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx \, dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比較。

3904. 用直綫 $x = \text{常数}$, $y = \text{常数}$, $x+y = \text{常数}$ 把域 S 分为四个相等的三角形, 并取被积函数在每个三角形的中綫交点之值。近似地計算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y} \, dS,$$

其中 S 表由直綫 $x=0$, $y=0$ 及 $x+y=1$ 所圍成的三角形。

3905. 把域 $S \{x^2+y^2 \leq 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子域 $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。对于怎样的值 δ 能保証不等式:

$$\left| \iint_S \sin(x+y) \, dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i+y_i) \Delta S_i \right| < 0.001,$$

成立? 其中 $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$.

計算积分

$$3906. \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy. \quad 3907. \int_0^1 dx \int_x^2 xy^2 dy.$$

$$3908. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr.$$

3909. 設 R 为矩形

$$a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B,$$

証明等式

$$\iint_R X(x)Y(y)dx dy = \int_a^A X(x)dx \int_b^B Y(y)dy.$$

3910. 設:

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y),$$

計算:

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

3911. 設 $f(x)$ 为在閉区間 $a \leq x \leq b$ 內的連續函数。証明不等式

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

此处仅当 $f(x) = \text{常数}$ 时等号成立。

提示 研究积分

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy.$$

3912. 下列积分有怎样的符号:

$$(a) \iint_{|x|+|y| \leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy;$$

$$(b) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy;$$



$$(B) \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy?$$

3913. 求函数

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

在正方形: $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ 内的平均值,

3914. 利用中值定理, 估计积分

$$I = \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

之值。

3915. 求圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ 上的点到原点的距离之平方的平均值。

在問題 3916—3922 中对二重积分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 内按所指示的区域 Ω 依两个不同的顺序安置积分的上下限。

3916. Ω —以 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ 为顶点的三角形。

3917. Ω —以 $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$ 为顶点的三角形。

3918. Ω —以 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 2)$, $C(0, 1)$ 为顶点的梯形。

3919. Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 。 **3920.** Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq y$ 。

3921. Ω —由曲线 $y = x^2$ 及 $y = 1$ 所包围的抛物线的一节。

3922. Ω —圆环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ 。

3923. 证明迪里黑里公式

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx \quad (a > 0)。$$

在下列积分中改变积分的顺序:

$$\textbf{3924.} \quad \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy, \quad \textbf{3925.} \quad \int_{-8}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy。$$

$$3926. \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy.$$

$$3927. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

$$3928. \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$3929. \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0).$$

$$3930. \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy. \quad 3931. \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

計算下列积分:

$$3932. \iint_{\Omega} xy^2 dx dy, \text{ 設 } \Omega \text{ 是由拋物綫 } y^2 = 2px \text{ 和直綫 } x = \frac{p}{2} (p > 0) \text{ 所界的区域。}$$

$$3933. \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}} \quad (a > 0), \text{ 設 } \Omega \text{ 是由圓心在点 } (a, a) \text{ 半徑为 } a \text{ 且与坐标軸相切的圓周的較短弧和坐标軸所圍成的区域。}$$

$$3934. \iint_{\Omega} |xy| dx dy, \text{ 設 } \Omega \text{ 是以 } a \text{ 为半徑, 坐标原点为圓心的圓。}$$

$$3935. \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy, \text{ 設 } \Omega \text{ 是以 } y = x, y = x + a, y = a \text{ 和 } y = 3a (a > 0) \text{ 为边的平行四边形。}$$

$$3936. \iint_{\Omega} y^2 dx dy, \text{ 設 } \Omega \text{ 是由橫軸和摆綫}$$

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的第一拱所界的区域。

在二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

中, 假定 $x = r \cos \varphi$ 和 $y = r \sin \varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ , 并配置积分的限, 設:

$$3937. \Omega - \text{圓 } x^2 + y^2 \leq a^2.$$

$$3938. \Omega - \text{圓 } x^2 + y^2 \leq ax \quad (a > 0).$$

$$3939. \Omega - \text{環 } a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2.$$

$$3940. \Omega - \text{三角形 } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x.$$

$$3941. \Omega - \text{拋物綫形 } -a \leq x \leq a; \frac{x^2}{a} \leq y \leq a.$$

3942. 在怎样的情况下, 当变换为极坐标之后, 积分的限是常数?

在下列积分中, 假定 $x = r \cos \varphi$ 和 $y = r \sin \varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ , 并依两种不同的順序配置积分的限:

$$3943. \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy. \quad 3944. \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$3945. \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$$

$$3946. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy. \quad 3947. \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

其中 Ω 是由曲綫

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (x \geq 0)$$

所界的域。

假定 r 和 φ 为极坐标, 在下列积分中变更积分的順序:

$$3948. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \quad (a \geq 0).$$

$$3949. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$$

$$3950. \int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r) dr \quad (0 < a < 2\pi).$$

变换成极坐标,以一重积分来代替二重积分。

$$3951. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy.$$

$$3952. \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy, \text{ 其中 } \Omega = \{|y| \leq |x|; |x| \leq 1\}.$$

$$3953. \iint_{x^2+y^2 < \infty} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy.$$

变换成极坐标,以计算下列二重积分:

$$3954. \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$$

$$3955. \iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$$

3956. 利用函数组

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}.$$

把矩形 $S = \{a < x < a+h, b < y < b+h\}$, ($a > 0, b > 0$) 变换为域 S' 。求域 S' 的面积与 S 的面积之比。当 $h \rightarrow 0$ 时此比值的极限等于甚么?

引入新的变量 u, v 来代替 x, y , 并确定下列二重积分中的积分限:

$$3957. \int_a^b dx \int_{ax}^{\beta x} f(x, y) dy \quad (0 < a < b; 0 < \alpha < \beta), \text{ 若 } u = x, \\ v = \frac{y}{x}.$$

$$3958. \int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy, \text{ 若 } u = x+y, v = x-y.$$

$$3959. \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由曲线 } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},$$

$x=0, y=0 (a>0)$ 所界的区域,若

$$x = u \cos^4 v, \quad y = u \sin^4 v.$$

3960. 証明: 变数代換

$$x + y = \xi, \quad y = \xi \eta$$

把三角形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$ 变为单位正方形 $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$ 。

3961. 在怎样的变数代換下, 由曲綫 $xy=1, xy=2, x-y+1=0, x-y-1=0 (x>0, y>0)$ 所界的曲綫四边形变换成矩形, 其边平行于坐标軸?

进行适当的变数代換, 化二重积分为一重的。

$$\mathbf{3962.} \quad \iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy.$$

$$\mathbf{3963.} \quad \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy \quad (a^2+b^2 \neq 0).$$

$$\mathbf{3964.} \quad \iint_{\Omega} f(x-y) dx dy, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为由曲綫 } xy=1, xy=2,$$

$y=x, y=4x (x>0, y>0)$ 所界的域。

$$\mathbf{3965.} \quad \iint_{\Omega} (x+y) dx dy, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由曲綫}$$

$$x^2+y^2=x+y$$

所包圍的域。

計算下列二重积分:

$$\mathbf{3966.} \quad \iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x|+|y|) dx dy.$$

$$\mathbf{3967.} \quad \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \text{ 其积分域 } \Omega \text{ 是由橢圓 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 所界的域。}$$

$$3968. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2) dx dy.$$

$$3969. \iint_{\Omega} (x+y) dx dy, \text{ 其積分域 } \Omega \text{ 是由曲綫 } y^2=2x, x+y=$$

$=4, x+y=12$ 所界的域。

$$3970. \iint_{\Omega} xy dx dy, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由曲綫 } xy=1, x+y=\frac{5}{2} \text{ 所界的域。}$$

$$3971. \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy.$$

$$3972. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy.$$

$$3973. \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy.$$

計算不連續函數的積分

$$3974. \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2) dx dy.$$

$$3975. \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] dx dy. \quad 3976. \iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{[y-x^2]} dx dy.$$

3977. 設 m 及 n 為正整數且其中至少有一個是奇數, 証明

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

3978. 求:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy,$$

其中 $f(x, y)$ 為連續函數。

3979. 設:

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{tx}{y^2}} dx dy,$$

求 $F'(t)$ 。

3980. 設:

$$F(t) = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

求 $F'(t)$ 。

3981. 設:

$$F(t) = \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy \quad (t > 0),$$

求 $F'(t)$ 。

3982. 設 $f(x, y)$ 是連續的, 求証函数

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

滿足方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

3983. 設函数 $f(x, y)$ 的等位綫是簡單封閉曲綫, $S(v_1, v_2)$ 是由曲綫 $f(x, y) = v_1$ 及 $f(x, y) = v_2$ 所圍成的域。証明

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv,$$

其中 $F(v)$ 为由曲綫 $f(x, y) = v_1$ 与 $f(x, y) = v_2$ 所包圍的面积。

提示 用函数 $f(x, y)$ 的无限接近的等位綫把积分域分为許多部分。

§ 2. 面积的計算法

Oxy 平面上域 S 的面积由公式

$$S = \iint_S dx dy.$$

所給出。

求下列曲綫所界的面积：

$$3984. \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (a > 0)。$$

$$3985. \quad y^2 = 2px + p^2, \quad y^2 = -2qx + q^2 \quad (p > 0, q > 0)。$$

$$3986. \quad (x - y)^2 + x^2 = a^2 \quad (a > 0)。$$

变换为极坐标以計算由下列曲綫所界的面积：

$$3987. \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); \quad x^2 + y^2 \geq a^2。$$

$$3988. \quad (x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2; \quad x \geq 0, y \geq 0。$$

$$3989. \quad (x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2) \quad (a > 0)。$$

$$3990. \quad (x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy; \quad (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2 \quad (a > 0)。$$

根据公式

$$x = ar \cos^\alpha \varphi, \quad y = br \sin^\alpha \varphi \quad (r \geq 0)$$

引入普遍的极坐标(其中 a , b 和 α 为以适当的方法选出的常数, 且

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = aabr \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi), \text{ 以求由下列曲綫所界的面积}$$

(假定参数是正的)：

$$3991. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}。$$

$$3992. \quad \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; \quad x = 0, y = 0。$$

$$3993. \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0)。$$

$$3994. \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0)。$$

$$3995. \quad \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1; \quad x = 0, y = 0。$$

进行适当的变量代換, 求由下列曲綫所界的面积：

$$3996. \quad x + y = a, \quad x + y = b, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x$$

$$(0 < a < b; 0 < \alpha < \beta)。$$

3997. $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x$, $y = 2x$ ($x > 0$; $y > 0$)。

3998. $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$, $x^2 = 2ry$, $x^2 = 2sy$
($0 < p < q$; $0 < r < s$)。

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $4\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$
($a > 0$, $b > 0$)。

4000. $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$, 其中 λ 取下列各值: $\frac{1}{3}c^2$, $\frac{2}{3}c^2$,
 $\frac{4}{3}c^2$, $\frac{5}{3}c^2$ ($x > 0$, $y > 0$)。

4001. 求由椭圆

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$$

(其中 $\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$) 所界的面积。

4002. 求由椭圆

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u} = c^2 \quad (u = u_1, u_2)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2 \quad (v = v_1, v_2)$$

$$(0 < u_1 < u_2; 0 < v_1 < v_2; x > 0, y > 0)$$

所界的面积。

提示 令 $x = c \operatorname{ch} u \cos v$, $y = c \operatorname{sh} u \sin v$ 。

4003. 求用平面 $x + y + z = b$ 与曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$ 相截所得截断面之面积。

4004. 求用平面 $z = 1 - 2(x + y)$ 与曲面 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ 相截所得截断面之面积。

§ 3. 体积的计算法

设柱体上顶是连续的曲面 $z = f(x, y)$, 下底是平面 $z = 0$, 及侧面为从平

面 Oxy 中的可求面积的区域 Ω (图 14) 竖起的垂直柱面所界定。

柱体的体积等于

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

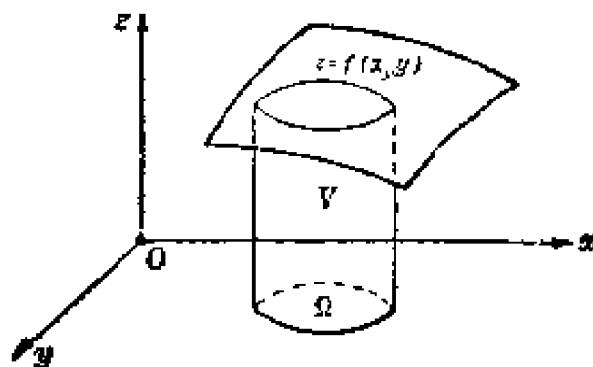


图 14

4005. 試繪出一物体, 其体积等于积分

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy$$

4006. 描出下列二重积分所表的体积:

(a) $\iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 1 \\ x > 0, y > 0}} (x+y) dx dy;$

(b) $\iint_{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy;$

(B) $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy;$ (Г) $\iint_{x^2+y^2 \leq x} \sqrt{x^2+y^2} dx dy;$

(A) $\iint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} \sqrt{xy} dx dy;$

(e) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sin \pi \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$

求由下列曲面所界的体积:

4007. $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$

4008. $x+y+z=a$, $x^2+y^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($a \geq R\sqrt{2}$)。

4009. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$ 。

4010. $z=\cos x \cos y$, $z=0$, $|x+y| \leq \frac{\pi}{2}$, $|x-y| \leq \frac{\pi}{2}$ 。

4011. $z=\sin \frac{\pi y}{2x}$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=\pi$ 。

4012. $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$ 。

变换成极坐标, 以求由下列曲面所界的体积:

4013. $z^2=xy$, $x^2+y^2=a^2$ 。

4014. $z=x+y$, $(x^2-y^2)^2=2xy$, $z=0$ ($x>0$, $y>0$)。

4015. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$ 。

4016. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2 \geq a|x|$ ($a>0$)。

4017. $x^2+y^2-az=0$, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $z=0$ ($a>0$)。

4018. $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$ 。

4019. $z=c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $x^2+y^2=a^2$, $y=x \operatorname{tg} \alpha$, $y=x \operatorname{tg} \beta$ ($a>0$, $c>0$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$)。

4020. $z=x^2+y^2$, $z=x+y$ 。

求由下列曲面所界的体积(假定参数是正的):

4021. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ ($z>0$)。

4022. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

4023. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, $z=0$ 。

4024. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1$, $z=0$ 。

4025. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 。

$$4026. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

$$4027. z^2 = xy, x + y = a, x + y = b \quad (0 < a < b).$$

$$4028. z = x^2 + y^2, xy = a^2, xy = 2a^2, y = \frac{x}{2}, y = 2x, z = 0.$$

$$4029. z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0.$$

$$4030. z = c \sin \frac{\pi xy}{a^2}, z = 0, xy = a^3, y = ax, y = \beta x \quad (0 < \alpha < \beta; x > 0).$$

$$4031. z = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$$

$$4032. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1, \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} = 1, z = 0.$$

$$4033. z = c \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}, z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (y \geq 0).$$

$$4034. \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (n > 0).$$

$$4035. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^n + \left(\frac{z}{c} \right)^m = 1, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (n > 0, m > 0).$$

§ 4. 曲面面积計算法

1° 曲面由显函数給出的情形 平滑曲面 $z = z(x, y)$ 的面积由积分

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

(其中 Ω 为已知曲面在 Oxy 平面上的射影) 所表出。

2° 曲面由参数方程給出的情形 若曲面的方程是用参数給出

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

其中 $(u, v) \in \Omega$, Ω 为封閉可求积的有限区域, 假定函数 x, y 和 z 为在域 Ω 內連續的且可微分的函数, 則对于曲面的面积有公式

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

其中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. 求曲面 $az = xy$ 包含在圓柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 內那部分的面积。

4037. 求由曲面 $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ 所界物体的面积。

4038. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b \leq a)$ 內那部分的面积。

4039. 求曲面 $z^2 = 2xy$ 被平面 $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 所截下那部分的面积。

4040. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在圓柱 $x^2 + y^2 = \pm ax$ 外那部分的面积(維維安尼問題)。

4041. 求曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 包含在圓柱 $x^2 + y^2 = 2x$ 內那部分的面积。

4042. 求曲面 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 內那部分的面积。

4043. 求曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ 被平面 $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$ 所截那部分的面积。

4044. 求曲面 $x^2 + y^2 = 2az$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ 內那部分的面积。

4045. 求曲面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被平面 $x + z = 0$, $x - z = 0$ ($x^2 > 0$, $y > 0$) 所截那部分的面积。

4046. 求由曲面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$, $x + y + z = 2a$ ($a > 0$) 所界物

体的表面积和体积。

4047. 求球壳被包含在两条緯綫和两条經綫間那部分的面积。

4048. 求螺旋面

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h\varphi, \quad \text{其中 } 0 < r < a, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

那部分的面积。

4049. 求环面

$$\begin{aligned} x &= (b + a \cos \psi) \cos \varphi, & y &= (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \\ z &= a \sin \psi & (0 < a \leq b) \end{aligned}$$

被两条經綫 $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ 和两条緯綫 $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$ 所界那部分的面积。

整个环的表面积等于甚么?

4050. 求立体角 ω , 在这个角里从坐标原点看得見矩形

$$x = a > 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c.$$

若 a 很大, 对于 ω 推出近似公式。

§ 5. 二重积分在力学上的应用

1° 重心 若 x_0 和 y_0 为平面 Oxy 内薄板 Ω 的重心坐标, $\rho = \rho(x, y)$ 为薄板的密度, 则

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho x \, dx \, dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho y \, dx \, dy, \quad (1)$$

其中 $M = \iint_{\Omega} \rho \, dx \, dy$ 为薄板的质量。

若薄板是均匀的, 则于公式 (1) 中应令 $\rho = 1$ 。

2° 轉动慣量 I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对于坐标軸 Ox 和 Oy 的轉动慣量——用公式来表示

$$I_x = \iint_{\Omega} \rho y^2 \, dx \, dy, \quad I_y = \iint_{\Omega} \rho x^2 \, dx \, dy, \quad (2)$$

其中 $\rho = \rho(x, y)$ 为薄板的密度。

于公式(2)中假定 $\rho=1$, 我們得到平面图形的几何轉动慣量。

4051. 求边长为 a 的正方形薄板的质量, 設薄板上每一点的密度与該点距正方形頂点之一的距离成比例且在正方形的中点等于 ρ_0 。

求由下列曲綫所界均匀薄板的重心坐标:

4052. $ay = x^2, x + y = 2a \quad (a > 0)。$

4053. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0。$

4054. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0, y > 0)。$

4055. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (綫圈)。

4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy \quad (x > 0, y > 0)。$

4057. $r = a(1 + \cos \varphi), \varphi = 0。$

4058. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi), y = 0。$

4059. 求圆形薄板 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 的重心坐标, 設它在点 $M(x, y)$ 的密度与 M 点到 $A(a, 0)$ 点的距离成比例。

4060. 求由变动的面积的重心所描写出来的曲綫, 所指的变动面积是被曲綫

$$y = \sqrt{2px}, \quad y = 0, \quad x = X$$

所界的。

求由下列曲綫所界的面积($\rho=1$)对于坐标軸 Ox 和 Oy 的轉动慣量 I_x 和 I_y :

4061. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, y = 0 \quad (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0)。$

4062. $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2, x = 0, y = 0 \quad (0 \leq x \leq a)。$

4063. $r = a(1 + \cos \varphi)。$ **4064.** $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)。$

4065. $xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y \quad (x > 0, y > 0)。$

4066. 求面积 S 的极轉动慣量

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy,$$

面积 S 是由曲线

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

所界的。

4067. 証明公式

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2,$$

其中 I_l , I_{l_0} 是面积 S 对于二平行轴 l 和 l_0 的转动惯量, 其中 l_0 是通过面积的重心, 而 d 为两轴间的距离。

4068. 証明面积 S 对于通过重心 $O(0, 0)$ 并与 Ox 轴组成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为面积 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及 I_{xy} 为离心惯量:

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy dx dy.$$

4069. 求以 a 为边的正三角形的面积对于通过三角形重心并与它的高成 α 角的直线的转动惯量。

4070. 設有水平面为 $z=h$ 的圆柱形容器 $x^2 + y^2 = a^2$, $z=0$, 求它侧壁上 ($x \geq 0$) 水的压力。

4071. 半径为 a 的球体沈入密度为 δ 的液体中的深度为 h (由球心量起), 这里 $h \geq a$ 。求在球表面的上部和下部的液体压力。

4072. 底半径为 a 高为 b 的直圆柱完全沈入密度为 δ 的液体中, 其中心在水面下的深度为 h , 而圆柱的轴与铅垂线成 α 角。求在圆柱上底和下底的液体压力。

4073. 求均匀的圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$ 对质点 $P(0, 0, b)$ 的引力, 設圆柱的质量等于 M , 而点的质量等于 m 。

4074. 物体在橢圓面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

上压力的分布由公式

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

所给出。求物体在此面上的平均压力。

4075. 草地的形状为以 a 和 b 为边的矩形，均匀地盖上密度为 p 千克/平方米的砍倒的草。假设运送 P 千克重到距离为 r 远的地方所花的功为 kPr ($0 < k < 1$)。要把所有的干草聚集在草地的中心，最少必须花多少功？

§ 6 三重积分

1° 三重积分的直接算法 设函数 $f(x, y, z)$ 是连续的，且有界域 V 由下列不等式确定出来：

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

其中 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ 皆为连续函数，则函数 $f(x, y, z)$ 展布于域 V 内的三重积分可按公式

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

来计算。有时采用下面的公式也很方便

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz,$$

其中 $S(x)$ 是用平面 $X=x$ 截域 V 所得的截断面。

2° 三重积分中的变量代换 若 $Oxyz$ 空间的有界三维闭域 V 借助于下列连续可微分的函数双方单值地反应到 $O'uvw$ 空间的域 V'

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

并且当 $(u, v, w) \in V'$ 时，

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0,$$

则下面的公式成立

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Gamma} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |I| du dv dw. \end{aligned}$$

在特殊情况下, 有: 1) 圆柱坐标系 φ, r, h , 其中

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h,$$

及

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, h)} = r,$$

2) 球坐标系 φ, ψ, r , 其中

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi,$$

ON. 封
及

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi.$$

計算下列三重积分:

4076. $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$, 此处 V 是由曲面 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 所界的区域。

$x = 1, z = 0$ 所界的区域。

4077. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 此处 V 是由曲面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所界的区域。

$x=0, y=0, z=0$ 所界的区域。

4078. $\iiint_V xyz dx dy dz$, 此处 V 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0$ 所界的区域。

$x=0, y=0, z=0$ 所界的区域。

4079. $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, 此处 V 是由曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所界的区域。

4080. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$, 其中 V 是由曲面

$$x^2+y^2=z^2, \quad z=1$$

所界的区域。

于下列三重积分内用各种的方法来配置积分的限：

$$4081. \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz.$$

$$4082. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$$

$$4083. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz.$$

用一重积分以代替三重积分：

$$4084. \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta.$$

$$4085. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz.$$

4086. 設 $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$ 及 a, b, c, A, B, C 为常数, 求：

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z) dz.$$

变换为球坐标以计算积分。

4087. $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$, 此处 V 是由曲面

$$x^2+y^2+z^2=z$$

所界的区域。

▷ 4088. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$

4089. 于积分中变换为球坐标

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz,$$

此处 V 是由曲面 $z=x^2+y^2$, $x=y$, $x=1$, $y=0$, $z=0$ 所界的区域。

4090. 进行适当的变量代换, 以计算三重积分

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz,$$

此处 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的内部。

4091. 变换为圆柱坐标, 以计算积分

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

此处 V 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$ 所界的区域。

4092. 计算积分

$$\iiint_V x^2 dx dy dz,$$

此处 V 是由曲面 $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ ($0 < a < b$), $z = \alpha x$, $z = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$), $z = h$ ($h > 0$) 所界的区域。

4093. 求积分

$$\iiint_V xyz dx dy dz,$$

其中 V 位于 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 这一卦限内且由下列曲面所界:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, z = \frac{x^2 + y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y = \beta x$$

$$(0 < a < b; 0 < \alpha < \beta; 0 < m < n).$$

4094. 求函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 内的平均值。

4095. 求函数

$$f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}$$

在域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 内的平均值。

4096. 利用中值定理, 估计积分之值

$$u = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

其中

$$a^2 + b^2 + c^2 > R^2.$$

4097. 证明: 若函数 $f(x, y, z)$ 于域 V 内是连续的且对于任何的域 $\omega \subset V$

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0,$$

用中值定理证

则当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) \equiv 0$ 。

4098. 求 $F'(t)$, 设:

(a) $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$, 其中 f 为可微

分函数;

* (6) $F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz$, 其中 f 为可微分函数。

4099. 求:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz,$$

其中 m, n, p 为非负整数。

4100. 计算迪里黑里积分

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz$$

$$(p > 0, q > 0, r > 0, s > 0),$$

此处 V 是由平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所界的区域, 假定

$$x+y+z=\xi, \quad y+z=\xi\eta, \quad z=\xi\eta\zeta.$$

§ 7. 利用三重积分计算体积法

域的体积 V 由下公式来表示

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

求由下列曲面所界的体积:

4101. $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$ 。

4102. $z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0$ 。

4103. $x^2 + z^2 = a^2, x + y = \pm a, x - y = \pm a$ 。

4104. $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0)$ 。

4105. $az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0$
($a > 0$)。

4106. $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。

变换为球坐标或圆柱坐标,以计算曲面所界的体积

4107. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2$ 。

4108. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$ 。

4109. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$ 。

4110. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \geq 0)$
($0 < a < b$)。

在下列各例中最好利用普遍的极坐标

$$r, \varphi \text{ 及 } \psi \left(r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

根据下列各式来引入他們

$$x = ar \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi,$$

$$y = br \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi,$$

$$z = cr \sin^\beta \psi$$

(a, b, c, α, β 为常数), 并且

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha \beta a b c r^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi.$$

计算下列曲面所界的体积:

4111. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}$ 。

$$4112. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

$$4113. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

$$4114. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1. \quad 4115. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

利用适当的变量代换, 以计算由曲面所界的体积(假定参数是正的)

$$4116. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$4117. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{xyz}{abc} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$\sqrt{4118. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$4119. z = x^2 + y^2, \quad z = 2(x^2 + y^2), \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad x = 2y, \\ 2x = y \quad (x > 0, y > 0).$$

$$\sqrt{4120. x^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (x > 0).$$

$$4121. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$$

$$4122. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{z}{h} \cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

$$4123. \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right), \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$x = 0, \quad x = a.$$

$$\sqrt[4]{4124. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, \quad x = 0, z = 0, \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

4125. 求曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 将球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$ 分成两部分的体积的比。

4126. 求由曲面

$$x^2 + y^2 = az, \quad z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0)$$

所界的体积和表面积。

4127. 求由平面

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$$

所界平行六面体的体积, 設

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4128. 求由曲面

由球体积
公式直接得到
所界的体积, 設

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

4129. 求曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-1} \quad (n > 1)$$

所界的体积。

4130. 求在正卦限 $Oxyz (x > 0, y > 0, z > 0)$ 内由曲面

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1 \quad (m > 0, n > 0, p > 0), \quad x=0, y=0, z=0$$

所界的体积。

§ 8. 三重积分在力学上的应用

1° 物体的质量 若一物体占有体积 V , $\rho = \rho(x, y, z)$ 为在点 (x, y, z) 的密度, 則該物体的质量 等于

$$M = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz.$$

2° 物体的重心 物体的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) 按下列公式来计算

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho x \, dx \, dy \, dz, \\ y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho y \, dx \, dy \, dz, \\ z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho z \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

若物体是均匀的, 則在公式(1)中可令 $\rho = 1$ 。

3° 轉动慣量 积分

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_V \rho x^2 \, dx \, dy \, dz, \quad I_{yz} = \iiint_V \rho y^2 \, dx \, dy \, dz, \\ I_{zx} &= \iiint_V \rho z^2 \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

分別称为物体对于坐标平面的轉动慣量。

积分

$$I_l = \iiint_V \rho r^2 \, dx \, dy \, dz$$

(其中 r 为物体的动点 (x, y, z) 与軸 l 的距离) 称为物体对于某軸 l 的轉动慣量。特別是, 对于坐标軸 Ox, Oy, Oz 分別有

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yz} + I_{yx}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

积分

$$I_0 = \iiint_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

称为物体对于坐标原点的轉动慣量。

显而易见, 有

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

4° 引力場的位 积分

$$u(x, y, z) = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

(其中 V 为物体的体积, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ 为物体的密度, 及

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

称为物体在点 $P(x, y, z)$ 的牛頓位。

质量为 m 的质点吸引物体的力在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的射影 X, Y, Z 等于

$$X = km \frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint_V \rho \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Y = km \frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint_V \rho \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Z = km \frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

其中 k 为引力定律常数。

4131. 設物体在点 $M(x, y, z)$ 的密度由公式 $\rho = x + y + z$ 所給出, 求占有单位体积 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 之物体的质量。

4132. 若物体的密度按規律 $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (其中 $\rho_0 > 0$ 及 $k > 0$ 为常数) 而变更, 求占有无限域 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ 的物体的质量。

求由下列曲面所界的均匀物体的重心坐标:

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c。$

4134. $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0。$

4135. $x^2 = 2pz, y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}, z = 0。$

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0。$

4137. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 (z > 0)。$

4138. $x^2 + y^2 = 2z, x + y = z$ 。

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$ 。

4140. $z = x^2 + y^2, z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), x + y = \pm 1, x - y = \pm 1$ 。

4141. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$

$(n > 0, x > 0, y > 0, z > 0)$ 。

4142. 求形状为立方体

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

的物体的重心坐标, 设此物体在点 (x, y, z) 的密度等于

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1$ 。

求由下列曲面(参变量是正的)所界均匀物体对于坐标平面的转动惯量:

4143. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 。

4144. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。 **4145.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c$ 。

4146. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$ 。

4147. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ 。

求由下列曲面所界均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量:

4148. $z = x^2 + y^2, x + y = \pm 1, x - y = \pm 1, z = 0$ 。

4149. $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 = z^2 \quad (z > 0)$ 。

4150. 设球在动点 $P(x, y, z)$ 的密度与该点至球心距离成比例, 求质量为 M 的非均匀球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 对于其直径的转动惯量。

4151. 証明等式

$$I_l = I_{l_0} + Md^2,$$

其中 I_l 为物体对于某轴 l 的转动惯量, I_{l_0} 为对于平行于 l 并通过物体重心的轴 l_0 的转动惯量, d 为轴与轴之间的距离及 M 为物体的质量。

4152. 証明: 体积为 V 的物体对于过其重心 $O(0, 0, 0)$ 并与坐标轴成角 α, β, γ 的轴 l 的转动惯量等于:

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - \\ - 2K_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

其中 I_x, I_y, I_z 为物体对于坐标轴的转动惯量及

$$K_{xy} = \iiint_V \rho xy \, dx \, dy \, dz,$$

$$K_{xz} = \iiint_V \rho xz \, dx \, dy \, dz,$$

$$K_{yz} = \iiint_V \rho yz \, dx \, dy \, dz$$

为离心距。

4153. 求 密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2, z = \pm h$ 对于直线 $x=y=z$ 的转动惯量。

4154. 求 密度为 ρ_0 , 由曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

所界均匀物体对于坐标原点的转动惯量。

4155. 求 密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿位。

提示 令 $O\xi$ 轴通过点 $P(x, y, z)$ 。

4156. 設 密度 $\rho = f(R)$, 此处 f 为已知函数, 而

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

求球壳层 $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2$ 在点 $P(x, y, z)$ 的牛頓位。

4157. 求有固定密度 ρ_0 的圓柱 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2$, $0 \leq \zeta \leq h$ 在点 $P(0, 0, z)$ 的牛頓位。

4158. 半徑为 R 和质量为 M 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 以怎样的力吸引质量为 m 的质点 $P(0, 0, a)$?

4159. 求密度为 ρ_0 的均匀圓柱 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2$, $0 \leq \zeta \leq h$ 对具单位质量的质点 $P(0, 0, z)$ 的吸引力。

4160. 求密度为 ρ_0 的均匀球錐体对于在其頂点为一单位质量的质点的吸引力, 設球的半徑为 R , 而軸截面的扇形的角等于 2α 。

§ 9. 二重和三重广义积分

1° 无界領域的情形 若二維的域 Ω 是无界的及函数 $f(x, y)$ 在域 Ω 上連續, 則定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

其中 Ω_n 为域 Ω 中可求积的有界封閉子域的任意序列, 并且 Ω 中每一点 ρ 从某一个号碼起, 属于以后一切的 Ω_n 。若在右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关, 則对应的积分称为收敛的; 在相反的情形称为发散的。

同样定义出連續函数展布在无界的三維域上的三重广义积分。

2° 不連續函数的情形 若函数 $f(x, y)$ 在有界封閉域 Ω 內除了点 $P(a, b)$ 而外处处是連續的, 則定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{\Omega - U_{\varepsilon}} f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

其中 U_{ε} 是点 P 的 ε 邻域, 当极限存在的情形, 所研究的积分称为收敛的; 在相反的情形称为发散的。

假定在点 $P(a, b)$ 的邻近有等式

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^{\alpha}},$$

其中函数 $\varphi(x, y)$ 的絕對值是介于二正数 m 和 M 之間且

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

則 1) 当 $\alpha < 2$ 时, 积分 (2) 收敛; (2) 当 $\alpha \geq 2$ 时, 积分 (2) 发散。

若函数 $f(x, y)$ 有不連續的綫, 同样可定义出广义积分 (2)。

不連續函数的广义积分定义易于引伸到三重积分的情形。

研究下列具无界积分域的广义积分的收敛性 ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$):

$$4161. \iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy.$$

$$4162. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$$

$$4163. \iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy.$$

$$4164. \iint_{|x|+|y| \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

$$4165. \iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy.$$

4166. 証明, 若連續函数 $f(x, y)$ 不为負及 $S_n (n=1, 2, \dots)$ 为有界閉域的任一序列, 这个序列可以盖滿域 S , 則

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义。

4167. 証明当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 < 2\pi n} \sin(x^2+y^2) dx dy = 0$$

时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2+y^2) dx dy = \pi$$

(n 为自然数)。

4168. 証明纵使二次积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{及} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

收敛, 但积分

$$\iint_{x>1, y>1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

发散。

計算下列积分:

$$\mathbf{4169.} \quad \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x > 1}} \frac{dx dy}{x^2 y^2}.$$

$$\mathbf{4170.} \quad \iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^2}.$$

$$\mathbf{4171.} \quad \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

$$\mathbf{4172.} \quad \iint_{x^2 - y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\mathbf{4173.} \quad \iint_{y > x^2 + 1} \frac{dx dy}{x^4 + y^2}.$$

$$\mathbf{4174.} \quad \iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy.$$

变换为极坐标而計算积分

$$\mathbf{4175.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

$$\mathbf{4176.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy.$$

$$\mathbf{4177.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy.$$

計算积分

$$\mathbf{4178.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f} dx dy,$$

其中

$$a < 0, \quad ac - b^2 > 0.$$

$$\mathbf{4179.} \quad \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy.$$

$$\mathbf{4180.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2s\frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \quad (0 < |s| < 1).$$

研究不連續函数的二重广义积分的收斂性 ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$)

4181. $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$, 式中域 Ω 是由条件 $|y| \leq x^2$; $x^2 + y^2 \leq 1$ 所

确定。

4182. $\iint_{x^2 + y^2 < 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + xy + y^2)^p} dx dy$ 。

4183. $\iint_{|x| + |y| < 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$ ($p > 0, q > 0$)。

4184. $\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x - y|^p} dx dy$ 。

4185. $\iint_{x^2 + y^2 < 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1 - x^2 - y^2)^p} dx dy$ 。

4186. 証明: 如果 1) 函数 $\varphi(x, y)$ 在有界域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 內是連續的; 2) 函数 $f(x)$ 在閉区間 $a \leq x \leq A$ 上連續; 3) $p < 1$, 則积分

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$$

收斂。

計算下列积分:

4187. $\iint_{x^2 + y^2 < 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ 。

4188. $\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a > 0)$ 。

4189. $\iint_{\Omega} \ln \sin(x - y) dx dy$, 这里域 Ω 是由直綫 $y = 0, y = x, x = \pi$ 所界。

4190. $\iint_{x^2 + y^2 < 2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 。

研究下列三重积分的收敛性:

$$4191. \iiint_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz, \text{ 这里 } 0 < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M.$$

$$4192. \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz, \text{ 这里 } 0 < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M.$$

$$4193. \iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} \quad (p>0, q>0, r>0).$$

$$4194. \int_0^c \int_0^a \int_0^2 \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y-\varphi(x)]^2 + [z-\psi(x)]^2\}^p},$$

其中 $0 < m \leq |f(x, y, z)| \leq M$, 而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是在闭区间 $[0, a]$ 上的连续函数。

$$4195. \iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}.$$

计算积分

$$4196. \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r}.$$

$$4197. \iiint_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

$$4198. \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$$

$$4199. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$$

4200. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

其中 $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 为正定形。

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}.$$

4201. 設 $K(x, y)$ 为域 $R[a \leq x \leq b; a \leq y \leq b]$ 內的連續函数及

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, y) dt_1 dt_2 \cdots dt_n.$$

証明:

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt.$$

4202. 設 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为域 $0 \leq x_i \leq x (i = 1, 2, \dots, n)$ 內的連續函数。証明等式

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1 \quad (n \geq 2).$$

4203. 証明:

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^1 f(\tau) d\tau \right\}^n,$$

其中 f 为連續函数。

計算下列多重积分:

4204. (a) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n;$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

4205. $I_n = \iiint \cdots \int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq a}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

4206. $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n.$

4207. $\iiint \cdots \int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1}} \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

4208. 求由平面

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

所界的 n 維平行 $2n$ 面体的体积, 这里設 $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$ 。

4209. 求 n 維角錐

$$x_i \geq 0 \ (i=1, 2, \dots, n), \quad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1 \ (a_i > 0, \ i=1,$$

$2, \dots, n)$ 的体积。

4210. 求由曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n$$

所界的 n 維圓錐的体积。

4211. 求 n 維球体

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2$$

的体积。

4212. 求 $\iiint_{\Omega} x_n^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n$,

其中域 Ω 是由下不等式所确定出来的:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}.$$

4213. 計算

$$\iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}}.$$

4214. 証明等式

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$$

4215. 証明等式

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.$$

4216. 証明迪里黑里公式

$$\iiint_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)} \quad (p_1, p_2, \cdots, p_n > 0).$$

4217. 証明柳維耳公式

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1}} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du \quad (p_1, p_2, \cdots, p_n > 0), \end{aligned}$$

式中 $f(u)$ 为連續函数。

提示 运用数学归纳法。

4218. 將展布于域 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$ 上的 n 重积分 ($n \geq 2$)

$$\int \cdots \int_{\Omega} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

(其中 $f(u)$ 为連續函数) 化为单积分。

4219. 計算半徑为 R , 密度为 ρ_0 的均匀球对自己的位, 即是求积分

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \int \cdots \int \int \int \int \int_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq R^2 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq R^2}} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ 。

4220. 設 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 为正定形, 計算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

§ 11. 曲綫积分

1° 第一型的曲綫积分 若 $f(x, y, z)$ 在平滑曲綫 C

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

的各点上有定义并且是連續的函数, ds 为弧的微分, 則

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^T f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

这个积分的特性在于它与曲线 C 的方向无关。

2° 第一型曲线积分在力学方面的应用 若 $\rho = \rho(x, y, z)$ 为曲线 C 在流动点 (x, y, z) 的线密度, 则曲线 C 的质量等于

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

此曲线的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) 由下面的公式来表示

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds, \quad y_0 = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds.$$

3° 第二型的曲线积分 若函数 $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ 在曲线(1)上的各点是连续的, 这曲线的方向是使参数 t 增加的方向, 则

$$\begin{aligned} & \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{t_0}^T \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + \\ & \quad + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

当曲线 C 环行的方向变更时此积分的符号也变更。在力学上积分(2)是当其作用点描绘出曲线 C 时变力 $\{P, Q, R\}$ 所作的功。

4° 全微分的情形 若

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = du,$$

式中 $u = u(x, y, z)$ 为域 V 内的单值函数, 则与完全位于域 V 内的曲线 C 的形状无关, 而有:

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

式中 (x_1, y_1, z_1) 为路径的始点, (x_2, y_2, z_2) 为路径的终点。最简单的情况是域 V 是单联通的而函数 P, Q, R 有连续的一级偏导函数, 对于此事的充分而且必要的条件为: 在域 V 内, 下列条件恒满足:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

这时, 函数 u 可按下面的公式来求得

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x_0, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz,$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为域 V 内某一固定的点。

在力学上这个情况对应于位力所作的功。

計算下列第一型的曲綫积分：

4221. $\int_C (x+y) ds$, 其中 C 为以 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ 和 $B(0, 1)$ 为頂点的三角形圍綫。

4222. $\int_C y^2 ds$, 其中 C 为摆綫 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $[0 \leq t \leq 2\pi]$ 的一拱。

4223. $\int_C (x^2+y^2) ds$, 其中 C 为曲綫 $x=a(\cos t+t \sin t)$, $y=a(\sin t-t \cos t)$ $[0 \leq t \leq 2\pi]$ 。

4224. $\int_C xy ds$, 其中 C 为双曲綫 $x=a \operatorname{ch} t$, $y=a \operatorname{sh} t$ $[0 \leq t \leq t_0]$ 的弧。

4225. $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}) ds$, 其中 C 为內摆綫 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的弧。

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 C 为由曲綫 $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (r 和 φ 为极坐标) 所界的凸圍綫。

4227. $\int_C |y| ds$, 其中 C 为双紐綫 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的弧。

4228. $\int_C x ds$, 其中 C 为对数螺綫 $r=ae^{k\varphi}$ ($k>0$) 在圓 $r=a$ 內的部分。

4229. $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$, 其中 C 为圓周 $x^2+y^2=ax$ 。

4230. $\int_C \frac{ds}{y^2}$, 其中 C 为悬鏈綫 $y=a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 。

求下列空間曲綫的弧长(参数是正的)：

4231. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(3, 3, 2)$ 。

4232. $x=e^{-t} \cos t$, $y=e^{-t} \sin t$, $z=e^{-t}$, 当 $0 < t < +\infty$ 。

4233. $y = a \arcsin \frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a-x}{a+x}$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$ 。

4234. $(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8} z^2$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$ 。

4235. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$ 。

4236. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch}\left(\arcsin \frac{y}{x}\right) = a$ 从点 $A(a, 0, 0)$ 到点 $B(x, y, z)$ 。

計算沿空間曲綫所取的第一型曲綫积分

4237. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 C 为螺綫 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ $[0 \leq t \leq 2\pi]$ 的一段。

4238. $\int_C x^2 ds$, 其中 C 为圓周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ 。

4239. $\int_C z ds$, 其中 C 为圓錐螺綫 $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ $[0 \leq t \leq t_0]$ 。

4240. $\int_C z ds$, 其中 C 为曲綫 $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ 上从点 $O(0, 0, 0)$ 到点 $A(a, a, a\sqrt{2})$ 的弧。

4241. 設曲綫 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $[0 \leq t \leq 2\pi]$ 在点 (x, y) 的綫密度等于 $\rho = |y|$, 求其质量。

4242. 求曲綫 $x = at$, $y = \frac{a}{2} t^2$, $z = \frac{a}{3} t^2$ $(0 \leq t \leq 1)$ 的弧之质量, 其密度依規律 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ 而变化。

4243. 計算均匀的曲綫 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 从点 $A(0, a)$ 到点 $B(b, h)$ 的弧的重心的坐标。

4244. 求摆綫

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad [0 \leq t \leq \pi]$$

的弧的重心。

4245. 計算球面上的三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x > 0, y > 0, z > 0$ 的圍綫的重心的坐标。

4246. 求均匀的弧 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t \quad (-\infty < t \leq 0)$ 的重心的坐标。

4247. 求螺綫 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t \quad [0 \leq t \leq 2\pi]$ 的一枝对于坐标軸的轉动慣量。

4248. 計算第二型的曲綫积分

$$\int_{OA} x dy - y dx,$$

式中 O 为坐标原点, A 点的坐标为 $(1, 2)$ 并設: (a) OA 为直綫段; (b) OA 为抛物綫, 其軸为 Oy ; (B) OA 为由 Ox 軸上的綫段 OB 和平行于 Oy 軸的綫段 BA 所組成的折綫。

4249. 对于上題中所指示的途徑 (a), (b), (B), 計算

$$\int_{OA} x dy + y dx.$$

在参数增加的方向, 沿所指示的曲綫来計算下列第二型曲綫积分:

4250. $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 C 为抛物綫

$$y = x^2 \quad [-1 \leq x \leq 1].$$

4251. $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, 其中 C 为曲綫

$$y = 1 - |1 - x| \quad [0 \leq x \leq 2].$$

4252. $\oint_C (x + y) dx + (x - y) dy$, 其中 C 为依反时針方向通过

的橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

$$4253. \int_C (2a - y) dx + x dy,$$

其中 C 为摆綫 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $[0 \leq t \leq 2\pi]$ 的一拱。

4254. $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为依反时針方向通过的圓周 $x^2 + y^2 = a^2$ 。

4255. $\oint_{ABCD A} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, 其中 $ABCD A$ 为以 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ 为頂点的正方形的圓綫。

4256. $\int_{AB} dx \sin y + dy \sin x$, 其中 AB 为介于点 $A(0, \pi)$ 和点 $B(\pi, 0)$ 之間的直綫段。

4257. $\oint_{OmAnO} dy \arctg \frac{y}{x} - dx$, 其中 OmA 为拋物綫段 $y = x^2$, OnA 为直綫段 $y = x$ 。

驗證被积函数为全微分, 并計算下列曲綫积分:

$$4258. \int_{(-1, 2)}^{(2, 3)} x dy + y dx. \quad 4259. \int_{(0, 1)}^{(3, -4)} x dx + y dy.$$

$$4260. \int_{(0, 1)}^{(2, 3)} (x+y) dx + (x-y) dy.$$

$$4261. \int_{(1, -1)}^{(1, 1)} (x-y) (dx - dy).$$

$$4262. \int_{(0, 0)}^{(a, b)} f(x+y) (dx + dy), \text{ 其中 } f(u) \text{ 为連續函数。}$$

$$4263. \int_{(2, 1)}^{(1, 2)} \frac{y dx - x dy}{x^2} \text{ 沿着不与 } Oy \text{ 軸相交的途徑。}$$

$$4264. \int_{(1, 0)}^{(6, 8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ 沿着不通过坐标原点的途徑。}$$

$$4265. \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy, \text{ 其中 } \varphi \text{ 和 } \psi \text{ 为連續函数。}$$

$$4266. \int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy.$$

$$4267. \int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2} \text{ 沿着不与直綫 } y = x \text{ 相交的途徑。}$$

$$4268. \int_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy \text{ 沿着}$$

不与 Oy 軸相交的途徑。

$$4269. \int_{(0, 0)}^{(a, b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$$

4270. 証明: 若 $f(u)$ 为連續函数且 C 为逐段光滑的封閉圍綫, 則

$$\oint_C f(x^2 + y^2) (x dx + y dy) = 0.$$

求原函数 z , 設

$$4271. dz = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy.$$

$$4272. dz = \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$$

$$4273. dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy}{(x + y)^3}.$$

$$4274. dz = e^x [e^y (x - y + 2) + y] dx + e^x [e^y (x - y) + 1] dy.$$

$$4275. dz = \frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^{n+1} \partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+m+1} u}{\partial x^n \partial y^{m+1}} dy.$$

$$4276. dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dy,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4277. 証明下面的估計对于曲綫积分是正确的:

$$\left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq LM,$$

式中 L 为积分途徑的长及 $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ (在弧 C 上)。

4278. 估計积分

$$I_R = \oint_{x^2 + y^2 = R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

証明 $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$ 。

計算沿空間曲綫所取的綫积分(假定坐标系是右手的)

$$4279. \int_C (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz,$$

式中 C 为依参数增加的方向进行的曲綫 $x=t, y=t^2, z=t^3$ [$0 \leq t \leq 1$]。

4280. $\int_C y dx + z dy + x dz$, 式中 C 为依参数增加方向进行的
紐形螺綫 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ [$0 \leq t \leq 2\pi$]。

4281. $\int_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$, 式中 C 为圓周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x \operatorname{tg} \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$), 若从 x 軸的正向看去, 这圓周是沿逆时針方向进行的。

4282. $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 式中 C 为維維安尼曲綫 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$ ($z \geq 0, a > 0$), 若从 Ox 軸的正的部分 ($x > a$) 看去, 此曲綫是沿逆时針方向进行的。

4283. $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 式中 C 为球面的一部分 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0$ 的圍綫, 当沿着它的正向进行时該曲面的外面保持在左方。

計算下列全微分的曲綫积分:

$$4284. \int_{(1, 1, 1)}^{(2, 3, -4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz.$$

$$4285. \int_{(1, 2, 3)}^{(6, 1, 1)} yz dx + xz dy + xy dz.$$

$$4286. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ 其中点 } (x_1, y_1, z_1) \text{ 位于球}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 之上, 而点 (x_2, y_2, z_2) 位于球 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 之上 ($a > 0, b > 0$)。

$$4287. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz,$$

式中 φ, ψ, χ 为連續函数。

$$4288. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z) (dx+dy+dz), \text{ 其中 } f \text{ 为連續函数。}$$

$$4289. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) (x dx + y dy + z dz), \text{ 式中 } f$$

为連續函数。

理科阅览室

求原函数 u , 若

$$4290. du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz.$$

$$4291. du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

$$4292. du = \frac{(x+y-z) dx + (x+y-z) dy + (x+y+z) dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}.$$

4293. 求当质量为 m 的点从位置 (x_1, y_1, z_1) 移动到位置 (x_2, y_2, z_2) 时, 重力所产生的功 (Oz 轴的方向是垂直向上)。

4294. 弹性力的方向向着坐标原点, 力的大小与质点距坐标原点的距离成比例。設此点依反时針方向描繪出橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正四分之一, 求弹性力所作的功。

4295. 当单位质量从点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 时, 求作用于单位质量的引力 $F = \frac{k}{r^2}$ (其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) 所作的功。

§ 12. 格林公式

1° 曲綫积分与二重积分的关系。設 C 为逐段光滑的简单封閉圓綫, 它圍成单联通的有界域 S , 这圓綫的方向是这样的: 域 S 保持在左边, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 与他們自己的一阶偏导函数在域 S 內及其边緣上皆是連續

的,則有格林公式

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1)$$

若把域 S 的边界 C 了解为一切边界圍綫的和,而圍綫繞轉的方向是選擇來使得域 S 保持在左边,則公式(1)對於由几个簡單圍綫所界的有界域 S 也真确。

2° 平面域的面积 由逐段光滑的簡單圍綫 C 所界的面积 S 等于:

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

在这一节中,若沒有相反的約定,則假定积分的封閉圍綫是簡單的(无自交点),并選擇他們的正方向使所界不含无穷远点的域是保持在曲綫的左边。

4296. 利用格林公式变换曲綫积分

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy,$$

式中圍綫 C 包含有界的域 S 。

4297. 应用格林公式,計算曲綫积分

$$I = \oint_K (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

其中 K 依正方向經過以 $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 5)$ 为頂点的三角形 ABC 的圍綫。

直接計算积分,以驗証所求得的結果。

应用格林公式來計算下列曲綫积分:

4298. $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$, 式中 C 为圓周 $x^2 + y^2 = a^2$ 。

4299. $\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy$, 式中 C 为橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

4300. $\oint_C e^x [(1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy]$, 其中 C 为域 $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$ 的正方向的圍綫。

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2+y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$ 。

4302. 积分

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

和
$$I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

(其中 AmB 为連結点 $A(1, 1)$ 和点 $B(2, 6)$ 的直綫, AnB 是其軸为垂直的抛物綫, 并通过 A, B 及坐标原点) 相差多少?

4303. 計算曲綫积分

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

其中 AmO 为由点 $A(a, 0)$ 至点 $O(0, 0)$ 的上半圓周 $x^2 + y^2 = ax$ 。

提示 用 Ox 軸的直綫段 OA 接合路徑 AmO 使成封閉的。

4304. 計算曲綫积分

$$\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy,$$

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为連續函数, AmB 为連接点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 的任何路徑, 但与綫段 AB 圍成已知大小为 S 的面积 $AmBA$ 。

4305. 求可微分二次的二个連續函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$, 使得綫积分

$$I = \oint_C P(x+\alpha, y+\beta) dx + Q(x+\alpha, y+\beta) dy$$

对于任何封閉的圍綫 C 与常数 α 和 β 无关。

4306. 为了使綫积分

$$\int_{AmB} F(x, y) (y dx + x dy)$$

与积分路徑的形状无关, 則可微分函数 $F(x, y)$ 应滿足怎样的条件?

4307. 計算

$$I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

其中 C 为依正方向进行, 而不经过坐标原点的简单封闭曲线。

提示 研究两种情况: 1) 坐标原点在曲线之外; 2) 曲线 C 包围坐标原点。

利用曲线积分计算由下列曲线所界的面积:

4308. 椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t [0 \leq t \leq 2\pi]$ 。

4309. 星形线 $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t [0 \leq t \leq 2\pi]$ 。

4310. 抛物线 $(x+y)^2 = ax (a > 0)$ 和轴 Ox 。

4311. 笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy (a > 0)$ 。

提示 令 $y = tx$ 。

4312. 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 。

提示 令 $y = x \operatorname{tg} \varphi$ 。

4313. 曲线 $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ 及坐标轴。

4314. 计算由曲线

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m (a > 0, n > 0, m > 0)$$

所界的面积。

4315. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 (a > 0, b > 0, n > 0)$$

和坐标轴所界的面积。

提示 令 $\frac{x}{a} = \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, \frac{y}{b} = \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$ 。

4316. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a > 0, b > 0, n > 0)$ 和坐标轴所界的面积。

4317. 计算由纽形曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$$

$$(a > 0, b > 0, c > 0, n > 0)$$

所界的面积。

4318. 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆外面圆周滚动(而不滑动)时,由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为外摆线。

假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数 ($n \geq 1$), 求外摆线所界的面积。

研究特殊情况 $r = R$ (心臟形线)。

4319. 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆内面圆周滚动(而不滑动)时,由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为内摆线。

假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数 ($n \geq 2$), 求内摆线所界的面积。

研究特殊情况 $r = \frac{R}{4}$ (星形线)。

4320. 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 被曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截那部分的面积。

4321. 计算

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2}.$$

若 $X = ax + by$, $Y = cx + dy$, 且 C 为包围坐标原点的简单的封闭围线 ($ad - bc \neq 0$)。

4322. 若简单的围线 C 包围坐标原点, $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, 而曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 和 $\psi(x, y) = 0$ 在围线 C 内面有几个单交点, 计算积分 I (参阅前题)。

4323. 解释: 若 C 为封闭的围线且 l 为任意的方向, 有

$$\oint_C \cos(l, n) ds = 0,$$

式中 n 为围线 C 的外法线。

4324. 求积分

$$I = \oint_C [x \cos(\mathbf{n}, x) + y \cos(\mathbf{n}, y)] ds$$

之值，式中 C 为包围有界域 S 的简单封闭曲线， \mathbf{n} 为它的外法线。

4325. 求：

$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (\mathbf{F}, \mathbf{n}) dS,$$

其中 S 为包含点 (x_0, y_0) 的曲线 C 所界的面积， $d(S)$ 为域 S 的直径， \mathbf{n} 为曲线 C 的外法线上的单位向量， $\mathbf{F}\{X, Y\}$ 为在 $S+C$ 上连续地可微分的向量。

§ 13. 曲线积分的物理应用

4326. 均匀分布在圆 $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$ 的上半部的质量 M 以怎样的力吸引质量为 m 位于 $(0, 0)$ 的质点？

4327. 计算单层的对数位

$$u(x, y) = \oint_C \kappa \ln \frac{1}{r} ds,$$

式中 $\kappa = \text{常数}$ ——密度， $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ ，设曲线 C 是圆周 $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ 。

4328. 采用极坐标系 ρ 和 φ ，计算单层的对数位

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi \quad \text{和} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi,$$

式中 r 为点 (ρ, φ) 与动点 $(1, \psi)$ 间的距离， m 为自然数。

4329. 计算高斯积分

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds,$$

式中 $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 为向量 \mathbf{r} 的长度，此向量是连接点 $A(x, y)$ 和简单封闭光滑曲线 C 上的动点 $M(\xi, \eta)$ 而得的 (\mathbf{r}, \mathbf{n})

为向量 \mathbf{r} 与在曲綫 C 上 M 点的外法綫 \mathbf{n} 所夹的角。

4330. 采用极坐标系 ρ 和 φ , 計算双层的对數位

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\psi \text{ 和 } K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} d\psi,$$

式中 r 为点 $A(\rho, \varphi)$ 和动点 $M(1, \psi)$ 之間的距离, (\mathbf{r}, \mathbf{n}) 为方向 $AM = \mathbf{r}$ 与从点 $O(0, 0)$ 所引的半徑 $OM = \mathbf{n}$ 二者之間的夹角, m 为自然数。

4331. 若 $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 則称可微分两次的函数 $u = u(x, y)$ 为調和函数。

証明: 当且仅当

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

(式中 C 为任意封閉圍綫, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿此圍綫之外法綫的导函数)时, u 是調和函数。

4332. 証明:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_S u \Delta u dx dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

式中光滑圍綫 C 包圍着有界域 S 。

4333. 証明: 在有界域 S 內及其周界 C 为調和的函数, 則此函数单值地由它在圍綫 C 上的数值确定(参照习题 4332)。

4334. 証明平面上的格林第二公式

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

式中光滑的圍綫 C 包圍着有界域 S , $\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法綫方向的导函数。

4335. 利用格林第二公式証明, 若 $u=u(x, y)$ 是有界閉域 S 內的調和函数, 則

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

式中 C 为域 S 的边界, n 为圍繞 C 的外法綫方向, (x, y) 为域 S 內的点, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 为点 (x, y) 与圍繞 C 上的动点 (ξ, η) 間的距离。

提示 从域 S 中除去点 (x, y) 与該点的无限小圓形邻域, 并利用格林第二公式于域 S 的剩余部分。

4336. 証明对于調和函数 $u(M) = u(x, y)$ 的中值定理:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\xi, \eta) ds,$$

式中 C 是以 M 点为中心的圓周。

4337. 証明在有界閉域內是調和的且于此域內不为常数的函数 $u(x, y)$ 在此域內的点不能达到其最大或最小值 (极大值原則)。

4338. 証明黎曼公式

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

式中

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a, b, c 为常数), P 和 Q 为某些确定的函数, 圍繞 C 包圍着有界域 S 。

4339. 設 $u=u(x, y)$ 和 $v=v(x, y)$ 为液体的速度的分量。求在单位時間內流过以圍繞 C 为界的域 S 的液体的量 (即液体流出量与流入量的差)。若液体不能压缩且在域 S 內沒有源泉和漏孔

則函数 u 和 v 滿足怎样的方程式?

4340. 根据比奥沙伐耳 (Бю-Савар) 定律通过綫元 ds 的电流 i 在空間的点 $M(x, y, z)$ 处产生一磁場, 其应力为

$$d\mathbf{H} = ki \frac{(\mathbf{r} \times d\mathbf{s})}{r^3},$$

其中 \mathbf{r} 为連接元素 ds 与点 M 的向量, k 为比例系数。

对于封閉导綫 C 的情形求磁場 H 在点 M 之应力的射影 H_x, H_y, H_z 。

§ 14. 曲面积分

1° 第一型的曲面积分 若 S 为逐片光滑的双面曲面

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \quad ((u, v) \in Q), \quad (1)$$

而 $f(x, y, z)$ 为在曲面 S 上的各点上有定义并且是連續的函数, 則

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG-F^2} du dv, \quad (2)$$

式中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

特別情形, 若曲面的方程式的形状为

$$z=z(x, y) \quad ((x, y) \in \sigma),$$

其中 $z(x, y)$ 为单值連續地可微分函数, 則

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_\sigma f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

此积分与曲面 S 的方向的选择无关。

若把函数 $f(x, y, z)$ 当作曲面 S 在点 (x, y, z) 的密度, 則积分(2)是此曲面的质量。

2° 第二型的曲面积分 若 S 为平滑的双面曲面; S^+ 为它的正面, 由法綫的方向 $\mathbf{n} \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ 所确定的一面, $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ 为在曲面 S 上有定义而且連續的三个函数, 則

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \end{aligned} \quad (3)$$

若曲面 S 的方程为参数式(1), 则法线 n 的方向余弦由下列公式来确定:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}$$

其中 $A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$

且方根前的符号用适当的方法来选择。

当变换为曲面 S 的另一面 S^- 时, 积分(3)的符号变为相反的符号。

4341. 积分

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

和

$$I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP,$$

(式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的表面, P 为内接于此球的八面体 $|x| + |y| + |z| = a$ 的表面)相差若何?

4342. 计算

$$\iint_S z dS,$$

式中 S 为曲面 $x^2 + z^2 = 2az (a > 0)$ 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所割下的部分。

计算下列第一型曲面积分:

4343. $\iint_S (x + y + z) dS$, 式中 S 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ 。

4344. $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, 式中 S 为体积 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界。

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, 式中 S 为四面体 $x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界。

4346. $\iint_S |xyz| dS$, 式中 S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 所割下的部分。

4347. $\iint_S \frac{dS}{\rho}$, 式中 S 为椭球表面, ρ 为椭球中心到与椭球表面的元素 dS 相切的平面之间的距离。

4348. $\iint_S z dS$, 式中 S 为螺旋面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$ ($0 < u < a; 0 < v < 2\pi$) 的一部分。

4349. $\iint_S z^2 dS$, 式中 S 为圆锥表面的一部分 $x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha$ ($0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) 和 α 为常数 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)。

4350. $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, 式中 S 为圆锥曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所割下的部分。

4351. 証明普阿桑公式

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du,$$

式中 S 是球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的表面。

4352. 求抛物面壳

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad [0 \leq z \leq 1]$$

的质量,此壳的密度按规律 $\rho = z$ 而变更。

4353. 求密度为 ρ_0 的均匀球壳

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

对于 Oz 轴的转动惯量。

4354. 求密度为 ρ_0 的均匀锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

对于直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的转动惯量。

4355. 求均匀的曲面

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

被曲面 $x^2 + y^2 = ax$ 所割下部分的重心的坐标。

4356. 求均匀曲面

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a)$$

的重心的坐标。

4357. 密度为 ρ_0 的均匀截圆锥面

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 < b \leq r \leq a)$$

以怎样的力吸引质量为 m 位于该曲面顶点的质点?

4358. 求在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的密度为 ρ_0 的均匀球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的位,即:计算积分

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ 。

4359. 计算

$$F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x, y, z) dS,$$

式中 $f(x, y, z) = \begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & \text{若 } x^2+y^2+z^2 \leq 1; \\ 0 & \text{, 若 } x^2+y^2+z^2 > 1. \end{cases}$

作出函数 $u = F(t)$ 的图形。

4360. 计算积分

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS,$$

式中 $f(x, y, z) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{若 } z \geq \sqrt{x^2+y^2}; \\ 0 & \text{, 若 } z < \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

4361. 计算积分

$$F(x, y, z, t) = \iiint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS,$$

式中 S 是变球

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2,$$

且假定 $\sqrt{x^2+y^2+z^2} > a > 0$,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2; \\ 0, & \text{若 } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2. \end{cases}$$

计算下列第二型曲面积分:

$$\mathbf{4362.} \quad \iiint_S (x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy),$$

式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外表面。

$$\mathbf{4363.} \quad \iiint_S f(x) \, dy \, dz + g(y) \, dx \, dz + h(z) \, dx \, dy,$$

式中 $f(x), g(y), h(z)$ 为连续函数, S 为平行六面体 $0 < x < a$; $0 < y < b$; $0 < z < c$ 的外表面。

4364. $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dx dz + (x-y) dx dy$, 式中 S 为

圓錐曲面

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 \leq z \leq h)$$

的外表面。

4365. $\iint_S \left(\frac{dy dz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dx dy}{z} \right)$,

式中 S 为橢球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外表面。

4366. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, 式中 S 为球壳

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

的外表面。

§ 15. 斯托克斯公式

若 $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ 为連續可微分的函数, C 为包圍逐片光滑的有界双面曲面 S 的簡單封閉逐段光滑的圍綫, 則有斯托克斯公式:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的法綫的方向余弦, 此法綫的方向是这样的, 圍綫 C 环繞着它依反时針方向 (对于右旋坐标系) 而迴轉。

4367. 应用斯托克斯公式, 計算曲綫积分

$$\oint_C y dx + z dy + x dz,$$

式中 C 为圓周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, 若从 Ox 軸的正向看去, 这圓周是依反时針进行的方向进行的。

用直接計算法檢驗結果。

4368. 計算積分

$$\int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz,$$

此積分是從點 $A(a, 0, 0)$ 至點 $B(a, 0, h)$ 沿着螺旋綫

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi} \varphi$$

上所取的。

提示 以直綫段接于曲綫 AmB 并应用斯托克斯公式。

4369. 設 C 为位于平面 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ ($\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为平面之法綫的方向余弦) 上并包围面积为 S 的封閉圍綫, 求

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中圍綫 C 是依正方向进行的。

应用斯托克斯公式, 計算积分:

$$4370. \oint_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz,$$

式中 C 为依参数 t 增大的方向通过的橢圓 $x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos t, z = a \cos^2 t$ [$0 \leq t \leq \pi$]。

$$4371. \oint_C (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz,$$

式中 C 为橢圓 $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0, h > 0$), 若从 Ox 軸正向看去, 此橢圓是依反时針进行的方向进行的。

$$4372. \oint_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

式中 C 是曲綫 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R, z > 0$),

此曲线是如下进行的：由它所包围在球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 外表面上的最小区域保持在左方。

$$4373. \oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

式中 C 为用平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 切立方体 $0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a$ 的表面所得的切痕，若从 Ox 轴的正向看去，是依反时针前进的方向的。

$$4374. \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz,$$

式中 C 为依参数 t 增大的方向进行的封闭曲线 $x = a \cos t, y = a \cos 2t, z = a \cos 3t$ 。

4375. 有函数

$$W(x, y, z) = ki \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS \quad (k = \text{常数})$$

其中 S 为由曲线 C 所界的面积， \mathbf{n} 为曲面 S 的法线， \mathbf{r} 为连接空间的点 $M(x, y, z)$ 与曲线 C 上的动点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 所成之矢径。证明此函数为通过曲线 C 的电流 i 所产生磁场 \mathbf{H} 的位势（参阅 4340 题）。

§ 16. 奥斯特洛格拉德斯基公式

若 S 为包含体积 V 的逐片光滑曲面， $P = P(x, y, z)$ ， $Q = Q(x, y, z)$ ， $R = R(x, y, z)$ 和他们的一阶偏导函数均为域 $V + S$ 内的连续函数，则奥斯特洛格拉德斯基公式真确：

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦。

应用奥斯特洛格拉德斯基公式以变换下列曲面积分，设光滑的曲面 S 包围着有界的体积 V ， $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外

法綫的方向余弦。

$$4376. \iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy.$$

$$4377. \iint_S xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz.$$

$$4378. \iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

$$4379. \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$$

$$4380. \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS.$$

4381. 証明, 若 S 为封閉的簡單曲面而 l 为任何的固定方向, 則

$$\iint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}) dS = 0,$$

式中 \mathbf{n} 为曲面 S 的外法綫。

4382. 証明, 由曲面 S 所包圍的体积等于:

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法綫的方向余弦。

4383. 証明, 由平滑的圓錐曲面 $F(x, y, z) = 0$ 和平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 所包圍的錐体体积等于

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

式中 S 为位于已知平面上的錐底之面积, H 为錐的高。

4384. 求由曲面: $z = \pm c$ 及

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, \\ y &= a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z &= c \sin u \end{aligned} \right\}$$

所界物体的体积。

4385. 求由曲面

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = -u + a \cos v \quad (u \geq 0)$$

及平面 $x=0$, $x=a$ ($a>0$) 所界物体的体积。

4386. 証明公式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \\ = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS + \\ + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0). \end{aligned}$$

利用奥斯特洛格拉德斯基公式計算下列面积分：

4387. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$

式中 S 为立方体 $0 < x < a$, $0 < y < a$, $0 < z < a$ 的边界的外表面。

4388. $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy,$

式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外表面。

4389. $\iint_S (x-y+z) dy dz + (y-z+x) dz dx + (z-x+y) dx dy,$

式中 S 为曲面

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$$

的外表面。

4390. 計算

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

式中 S 为圆锥曲面 $x^2 + y^2 = z^2$ [$0 \leq z \leq h$] 的一部分, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦。

提示 并合平面 $z = h$, $x^2 + y^2 \leq h^2$ 的部分。

4391. 证明公式

$$\iiint_V \frac{d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \, dS,$$

其中 S 为包围体积 V 的封闭曲面, \mathbf{n} 为曲面 S 上的动点 (ξ, η, ζ) 处的外法线, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, \mathbf{r} 为从点 (x, y, z) 到点 (ξ, η, ζ) 的矢径。

4392. 计算高斯积分

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} \, dS,$$

式中 S 为包含体积 V 的简单封闭平滑曲面, \mathbf{n} 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 处的外法线, \mathbf{r} 为连接点 (x, y, z) 和点 (ξ, η, ζ) 的矢径,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

研究两种情形:

(a) 当曲面 S 不包围点 (x, y, z) ,

(b) 当曲面 S 包围点 (x, y, z) 。

4393. 证明, 若

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

及 S 为包围有界体积 V 的光滑曲面, 则下列公式正确:

$$(a) \quad \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \iiint_V \Delta u \, dx \, dy \, dz;$$

$$(b) \quad \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx \, dy \, dz + \iint_S u \Delta u \, dx \, dy \, dz,$$

式中 u 和它的直到二阶的偏导函数是在域 $V+S$ 内連續的函数， $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法綫的导函数。

4394. 証明空間的格林第二公式

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

式中体积 V 是由曲面 S 所包圍的， \mathbf{n} 是曲面 S 的外法綫方向，而函数 $u=u(x, y, z)$ ， $v=v(x, y, z)$ 为域 $V+S$ 内可微分两次的函数。

4395. 函数 $u=u(x, y, z)$ 在某一域内具有直到二阶的連續导函数，若

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

則 $u(x, y, z)$ 在这个域内称为調和函数。

証明，若 u 是被平滑曲面 S 所包圍的有界閉域 V 内的調和函数，則下列公式是正确的。

$$(a) \quad \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0;$$

$$(b) \quad \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

式中 \mathbf{n} 为曲面 S 的外法綫。

試用公式 (b)，証明在域 V 内的調和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定。

4396. 証明，若函数 $u=u(x, y, z)$ 是在由光滑曲面 S 所包圍着的有界閉域 V 内的調和函数，則

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS,$$

式中 \mathbf{r} 是从域 V 的内面的点 (x, y, z) 引至曲面 S 上的动点 $(\xi,$

η, ζ) 的矢徑, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, \mathbf{n} 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 的外法綫向量。

4397. 証明, 若 $u = u(x, y, z)$ 为在以 R 为半徑以点 (x_0, y_0, z_0) 为球心的球 S 內的調和函数, 則

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS$$

(中值定理)。

4398. 証明, 在有界閉域 V 內連續且在其內是調和的函数 $u = u(x, y, z)$, 若它不是常数, 則在域內的点函数不能达到最大和最小的值(极大值原則)。

4399. 物体 V 全部沉溺于液体中, 从巴斯葛耳定律出发, 証明液体的浮力等于与物体同体积液体之重而方向是垂直向上(阿基米德定律)。

4400. 設 S_t 是变动的球 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$, 而函数 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 是連續的, 証明函数

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t,$$

滿足波动方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初值条件 $u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(x, y, z)$ 。

提示 用三重积分以表示导函数 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 。

§ 17. 場論初步

1° 梯度 若 $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$ (其中 $\mathbf{r} = xi + yj + zk$) 是連續可微分的数量場, 則称向量

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

为 $u(r)$ 的梯度，或简记为 $\text{grad } u = \nabla u$ ，其中 $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$ 。于
已知点 (x, y, z) 处 u 的梯度的方向是与过此点的等位面 $u(x, y, z) = C$ 的法
线方向一致。对于场的每一点此向量给出函数 u 变化之最大速度的大小

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

与方向。

在某方向 $l\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 上场 u 的导数等于：

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot l = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma。$$

2° 场的散度与场的旋度 若

$$\mathbf{a}(r) = a_x(x, y, z)\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

是连续可微分的向量场，则称数量

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度。

向量

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

名为场的旋度。

3° 穿过曲面的流量 若向量 $\mathbf{a}(r)$ 在域 Ω 内产生向量场，则称积分

$$\iint_S \mathbf{a} \mathbf{n} dS = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$$

为穿过位于域 Ω 内的已知曲面 S 的流向法线上单位向量 $\mathbf{n}\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$
所指的那一面的流量。在向量的论述中奥斯特洛格拉德斯基公式具下面的
形状：

$$\iint_S \mathbf{a} \mathbf{n} dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{a} dx dy dz,$$

式中 S 为包围体积 V 的曲面， \mathbf{n} 为曲面 S 的外法线单位向量。

4° 向量的环流数

$$\int_C \mathbf{a} d\mathbf{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

称为向量 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 沿某曲綫 C 所取的綫积分(場作的功)。

若閉綫 C 是封閉的, 則称綫积分为向量 \mathbf{a} 沿閉綫 C 的环流。

在向量的形式上斯托克斯公式为

$$\oint_C \mathbf{a} d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a} ds,$$

式中 C 为包围曲面 S 的封閉閉綫, 并且对曲面 S 的法綫 \mathbf{n} 之方向应当这样来选择: 使得立于曲面 S 上的观察者, 以头向着法綫的方向, 閉綫 C 的迴繞是依反时針前进的方向作成的(对于右旋坐标系)。

5° 有势場 向量場 $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ 是某数量 u 的梯度即 $\operatorname{grad} u = \mathbf{a}$, \mathbf{a} 名为有势場, 而数量 u 名为場的势。

若势 u 为单值函数, 則

$$\int_{AB} \mathbf{a} d\mathbf{r} = u(B) - u(A).$$

特别是, 在这个情形向量 \mathbf{a} 的环流等于零。

給定在单连通域內的場 \mathbf{a} 为有势場的充要条件, 是条件 $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ 滿足, 即是說, 这样的場应当是无旋場。

4401. 求場

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

在: (a) $O(0, 0, 0)$; (б) $A(1, 1, 1)$; (в) $B(2, 1, 1)$ 諸点梯度的大小和方向。在場的怎样的点, 梯度等于零?

4402. 在空間 $Oxyz$ 的那些点, 場

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

的梯度 (a) 垂直于 Oz 軸; (б) 平行于 Oz 軸; (в) 等于零?

4403. 已給数量場

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ 。在空間 $Oxyz$ 的那些点下面等式成立

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

4404. 作数量场

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

的等位面。求通过点 $M(9, 12, 28)$ 的等位面。在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ 内 $\max u$ 等于甚么?

4405. 求场

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

在点 $A(1, 2, 2)$ 及 $B(-3, 1, 0)$ 的梯度之间的夹角 φ 。

4406. 设已知数量场

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

作出场的等位面和梯度的等模面。

在域 $1 < z < 2$ 内求 $\inf u$, $\sup u$, $\inf |\operatorname{grad} u|$, $\sup |\operatorname{grad} u|$ 。

4407. 求在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处之二无限接近的等位面

$$u(x, y, z) = c \quad \text{及} \quad u(x, y, z) = c + \Delta c$$

之间的距离准确到高阶无穷小, 其中 $u(x_0, y_0, z_0) = c$ 。

4408. 证明公式

$$(a) \operatorname{grad}(u+c) = \operatorname{grad} u \quad (c \text{ 为常数});$$

$$(b) \operatorname{grad} c u = c \operatorname{grad} u \quad (c \text{ 为常数});$$

$$(B) \operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v;$$

$$(r) \operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v;$$

$$(II) \operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u;$$

$$(e) \operatorname{grad} f'(u) = f'(u) \operatorname{grad} u.$$

4409. 计算 (a) $\operatorname{grad} r$, (b) $\operatorname{grad} r^2$, (B) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$,

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

4410. 求 $\operatorname{grad} f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

4411. 求 $\text{grad}(\mathbf{c}\mathbf{r})$, 其中 \mathbf{c} 为常向量, \mathbf{r} 为从坐标原点起的向徑。

4412. 求 $\text{grad}\{(\mathbf{c} \times \mathbf{r})^2\}$ (\mathbf{c} 为常向量)。

4413. 証明公式

$$\text{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad} v.$$

4414. 証明公式

$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2v + v\nabla^2u + 2\nabla u \nabla v,$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \nabla \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4415. 証明: 若函数 $u = u(x, y, z)$ 在凸形域 Ω 內可微分且 $|\text{grad} u| \leq M$, 其中 M 为常数, 則对于 Ω 中任意二点 A, B 有:

$$|u(A) - u(B)| \leq M\rho(A, B),$$

式中 $\rho(A, B)$ 为 A 与 B 二点間之距离。

4416. 求場 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x, y, z)$ 沿此点的向徑 \mathbf{r} 之方向的导数。

在怎样的情况下, 此导数将等于梯度的大小?

4417. 求場 $u = \frac{1}{r}$ (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在方向 $\mathbf{l} \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 上的导数。

在怎样的情况下, 此导数等于零?

4418. 求場 $u = u(x, y, z)$ 在場 $v = v(x, y, z)$ 的梯度方向的导数。

在怎样的情况下, 此导数等于零?

4419. 設:

$$u = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{及} \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

計算

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \text{grad } u.$$

4420. 确定向量場

$$\mathbf{a} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}$$

的力綫。

4421. 用直接計算的方法証明向量 \mathbf{a} 的散度与直角坐标系的選擇无关。

4422. 証明:

$$\text{div } \mathbf{a}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \mathbf{n} dS,$$

其中 S 表圍繞着点 M 和界有体积 V 的封閉曲面, \mathbf{n} 为曲面 S 之外法綫, $d(S)$ 为曲面 S 的直徑。

4423. 求:

$$\text{div} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

4424. 証明:

$$(a) \text{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{div } \mathbf{a} + \text{div } \mathbf{b};$$

$$(b) \text{div}(u\mathbf{c}) = \mathbf{c} \text{grad } u (\mathbf{c} \text{ 为常向量, } u \text{ 为数量});$$

$$(B) \text{div}(u\mathbf{a}) = u \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \text{grad } u.$$

4425. 求 $\text{div}(\text{grad } u)$ 。

4426. 求 $\text{div}[\text{grad } f(r)]$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在甚么情况下 $\text{div}[\text{grad } f(r)] = 0$?

4427. 計算: (a) $\text{div } \mathbf{r}$; (b) $\text{div } \frac{\mathbf{r}}{r}$ 。

4428. 計算: $\text{div}[f(r)\mathbf{c}]$, 式中 \mathbf{c} 为常向量。

4429. 求 $\text{div}[f(r)\mathbf{r}]$ 。在甚么情形此向量的散度等于零?

4430. 求: (a) $\text{div}(u \text{grad } u)$; (b) $\text{div}(u \text{grad } v)$ 。

4431. 物体以一定的角速度 ω 依逆时针方向繞 Oz 軸旋轉。求速度向量 v 和加速度向量 w 在空間的点 $M(x, y, z)$ 和在已知时刻的散度。

4432. 求由引力中心的有限系統所产生的动力場之散度。

4433. 求由极坐标 r 与 φ 所表的平面向量 $a = a(r, \varphi)$ 之散度的表示式。

4434. 設：

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w),$$

用直交曲线坐标 u, v, w 表示 $\operatorname{div} a(x, y, z)$ 。

作为特殊的情形, 求用柱坐标和球坐标表 $\operatorname{div} a$ 的表示式。

提示 研究向量 a 通过由曲面 $u = \text{常数}$, $v = \text{常数}$, $w = \text{常数}$ 所界无穷小平行六面体的流量。

4435. 証明：

$$(a) \operatorname{rot}(a + b) = \operatorname{rot} a + \operatorname{rot} b;$$

$$(b) \operatorname{rot}(ua) = u \operatorname{rot} a + \operatorname{grad} u \times a.$$

4436. 求：(a) $\operatorname{rot} r$; (b) $\operatorname{rot}[f(r)r]$ 。

4437. 求：(a) $\operatorname{rot} c f(r)$; (b) $\operatorname{rot}[c \times f(r)r]$ (c 为定向量)。

4438. 証明 $\operatorname{div}(a \times b) = b \operatorname{rot} a - a \operatorname{rot} b$ 。

4439. 求：(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$; (b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} a)$ 。

4440. 物体以一定的角速度 ω 圍繞軸 $l \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 旋轉。求速度向量 v 在空間的点 $M(x, y, z)$ 和在已知时刻的旋度。

4441. 求向量 r 的流量：(a) 穿过圓錐形 $x^2 + y^2 \leq z^2 (0 \leq z \leq h)$ 的側表面；(b) 穿过此圓錐形的底。

4442. 求向量 $a = i yz + j xz + k xy$ 的流量：(a) 穿过圓柱 $x^2 + y^2 \leq a^2, (0 \leq z \leq h)$ 的側表面；(b) 穿过此圓柱的全表面。

4443. 求向徑 r 穿过曲面

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad [0 \leq z \leq 1]$$

的流量。

4444. 求向量 $\mathbf{a} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ 穿过球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$ 的正八分之一的流量。

4445. 求向量 $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ 穿过由諸平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=a (a>0)$ 所包围角錐的全表面的流量。

利用奥斯特洛格拉德斯基公式, 验证結果。

4446. 証明, 向量 \mathbf{a} 穿过由方程式 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega)$ 所給出的曲面 S 的流量等于:

$$\iint_S \mathbf{a} \mathbf{n} dS = \iint_{\Omega} \left(\mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

式中 \mathbf{n} 为曲面 S 的法綫之单位向量。

4447. 求向量 $\mathbf{a} = m \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (m 为常数) 穿过圍繞坐标原点的封闭曲面 S 的流量。

4448. 已知向量

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right),$$

其中 e_i 为常数, r_i 为点 M_i (起点) 距动点 $M(\mathbf{r})$ 的距离。求此向量穿过圍繞点 $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的封闭曲面 S 的流量。

4449. 証明:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u dx dy dz,$$

其中曲面 S 包围体积 V 。

4450. 在单位時間內經過曲面元素 dS 而进入温度場 u 的热量等于:

$$dQ = -k \mathbf{n} \text{ grad } u dS,$$

其中 k 为內热的傳导系数, \mathbf{n} 为曲面 S 的法綫之单位向量。求在

单位時間內物体 V 所积累的热量。研究温度上升的速度以推出为物体温度所滿足的方程式(热傳导方程式)。

4451. 在运动中不可壓縮的液体占有体积 V 。假定在域 V 內源泉和漏孔都不存在,試推出連續性的方程:

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

式中 $\rho = \rho(x, y, z)$ 为液体密度, \mathbf{v} 为速度向量, t 为時間。

提示 研究液体穿过包含在 V 中的任何体积 ω 的流量。

4452. 求向量 $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ 沿着螺綫

$$\mathbf{r} = i a \cos t + j a \sin t + k b t \quad [0 \leq t \leq 2\pi]$$

的一段的功效。

4453. 求向量 $\mathbf{a} = f(r) \mathbf{r}$ (其中 f 是連續函数)沿着弧 AB 的功效。

4454. 求向量

$$\mathbf{a} = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + c \mathbf{k}$$

(c 为常数)的环流: (a) 沿着圓周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$; (b) 沿着圓周 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$ 。

4455. 求向量 $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \left(\arctg \frac{y}{x} \right)$ 沿着圍綫 C 的环流 Γ :

(a) C 不圍繞 Oz 軸; (b) C 圍繞 Oz 軸。

4456. 平面的穩流由速度向量

$$\mathbf{w} = u(x, y) \mathbf{i} + v(x, y) \mathbf{j}$$

描写出来,求出: (1) 經過包圍域 S 的封閉圍綫 C 所流出液体的量 Q (液体的消耗); (2) 速度向量沿着圍綫 C 的环流 Γ 。若液体是不可壓縮的且流場无旋度,則函数 u 和 v 滿足怎样的方程式?

4457. 証明: 場

$$\mathbf{a} = yz(2x+y+z) \mathbf{i} + xz(x+2y+z) \mathbf{j} + xy(x+y+2z) \mathbf{k}$$

是有势場,并求这个場的势。

4458. 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力場

$$\mathbf{a} = -\frac{m}{r^3} \mathbf{r}$$

的势。

4459. 求位置在 $M_i (i=1, 2, \dots, n)$ 各点的质量系 $m_i (i=1, 2, \dots, n)$ 所产生引力場的势。

4460. 証明：場 $\mathbf{a} = f(r) \mathbf{r}$ (其中 $f(r)$ 是单值連續函数) 是有势場。求这个場的势。

4461. 証明公式

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_P \left\{ \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right\} = & - \iint_S \rho(Q) \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \\ & + \iiint_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}, \end{aligned}$$

其中 S 为包含体积 V 的曲面, \mathbf{n} 为曲面 S 的外法綫, r 为点 $P(x, y, z)$ 与点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 二点間的距离。

4462. 証明：若 $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$, 其中

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

及

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

則

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho(x, y, z)$$

(假定对应的积分有意义)。

答 案

第 一 編

第 一 章

16. 0; 1. 17. $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$. 22. $-1.01 < x < -0.99$. 23. $x \leq -8$ 或 $x \geq 12$. 24. $x < -\frac{1}{2}$. 25. $0 < x < \frac{2}{3}$. 26. $|x| \leq 6$.
27. $x > -\frac{1}{2}$. 28. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. 29. $\frac{5-\sqrt{30}}{10} < x < \frac{5-\sqrt{20}}{10}$ 或 $\frac{5+\sqrt{20}}{10} < x < \frac{5+\sqrt{30}}{10}$. 31. 第二个. 32. 两位数字. 33. 不超过 0.42%. 34. 9.9102 平方厘米 $\leq S \leq 10.0902$ 平方厘米; $\Delta \leq 0.0902$ 平方厘米; $\delta \leq 0.91\%$. 35. 3.93 克/立方厘米 ± 0.27 克/立方厘米; $\delta \leq 7.3\%$. 36. $\delta \leq 3.05\%$. 37. 172.480 立方厘米 $\leq v \leq 213.642$ 立方厘米; $v = 192.660$ 立方厘米 ± 20.982 立方厘米; $\delta \approx 12.2\%$. 38. $\Delta \leq 0.17$ 毫米.
39. $\Delta < 0.0005$ 米. 42. (a) $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$; (b) $N \geq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$; (B) $N \geq 1 + \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$; (r) $N \geq \frac{\lg \varepsilon}{\lg 0.999} \approx 2330 \lg \frac{1}{\varepsilon}$. 43. (a) $N \geq E$; (b) $N \geq \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$; (B) $N \geq 10^{10^E}$. 46. 0. 47. 0. 48. 0. 49. $\frac{1}{3}$. 50. $\frac{1-b}{1-a}$. 51. $\frac{1}{2}$.
52. 不存在. 53. $\frac{1}{3}$. 54. $\frac{4}{3}$. 55. 3. 56. 1. 57. 2. 67. (a), 第二; (b), 第一; (B), 第二. 72. $e = 2.71828 \dots$. 92. 若 $a \neq 0$, 等于 1; 及若 $a = 0$, 属于 $[-1, 1]$, 不存在. 96. $x_3 = 1\frac{1}{8}$. 97. $x_{100} = \frac{1}{20}$. 98. $x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2.49 \cdot 10^{452}$. 99. $x_1 = x_3 = -120$. 100. $x_{10} = 20$. 101. 0; 1; 1; 1. 102. $-1; 1\frac{1}{2}; 0; 1$. 103. 0; 2; 0; 2. 104. $-4; 6; -4; 6$. 105.

- $-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}; 1$ 。 106. $-\infty; +\infty; -\infty; +\infty$ 。 107. $-\infty; -1; -\infty; -\infty$ 。 108. $0; +\infty; 0; +\infty$ 。 109. $-\infty; +\infty; -\infty; +\infty$ 。 110. $-5; 1.25; 0; 0$ 。 111. $-\frac{1}{2}; 1$ 。 112. $\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right); e+1$ 。 113. $0; 1$ 。 114. $1; 2$ 。 115. $0; 1$ 。 116. $0; 1$ 。 117. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; 0$ 。 118. 介于 0 与 1 之間的一切实数, 且包含 1 在內。 119. $1; 5$ 。 120. $a; b$ 。 127. (a) 发散; (b) 可为收敛, 可为发散。 128. (a) 不能; (b) 不能。 129. 不对。 130. 不对。 144. (a) 0; (b) 0。 147. $\ln 2$ 。 148. $\frac{1}{3}(a+2b)$ 。 151. $x \neq -1; -\infty < x < +\infty$ 。 152. $-\infty < x \leq -\sqrt{3}$ 和 $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ 。 153. $-1 \leq x < 1$ 和 $x=2$ 。 154. (a) $|x| > 2$; (b) $x > 2$ 。 155. $4k^2x^2 \leq x \leq (2k+1)^2x^2$ ($k=0; 1, 2, \dots$)。 156. $|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 和 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}(4k-1) \leq |x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}(4k+1)$ ($k=1, 2, \dots$)。 157. $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ 和 $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ ($k=0, 1, 2, \dots$)。 158. $x > 0, x \neq n$ ($n=1, 2, \dots$)。 159. $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ 。 160. $|x - kx| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。 161. $10^{(2k-\frac{1}{2})\pi} < x < 10^{(2k+\frac{1}{2})\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。 162. $x = -1, -2, -3, \dots$ 及 $x \geq 0$ 。 163. $x < 0, x \neq -n$ ($n=1, 2, \dots$)。 164. $1 < x \leq 2$ 。 165. $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ 。 166. $-1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\frac{1}{2}$ 。 167. $2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); $-\infty < y \leq \lg 3$ 。 168. $-\infty < x < +\infty; 0 \leq y \leq \pi$ 。 169. $1 \leq x \leq 100; -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ 。 170. $x = \frac{p}{2q+1}$, 其中 p 和 q 为整数; $y = \pm 1$ 。 171. $P = 2b - 2\left(1 - \frac{b}{h}\right)x$ ($0 < x < h$); $S = bx\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ ($0 < x < h$)。 172. $a = \sqrt{100 - 96 \cos x}$ ($0 < x < \pi$); $S = 24 \sin x$ ($0 < x < \pi$)。 173. 若 $0 \leq x \leq \frac{a-b}{2}$, $S = \frac{h}{a-b}x^2$; 若 $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a+b}{2}$, $S = h\left(x - \frac{a-b}{4}\right)$; 若 $\frac{a+b}{2} \leq x \leq a$, $S = h\left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b}\right]$ 。 174. 若 $-\infty < x \leq 0$, $m(x) = 0$; 若 $0 < x \leq 1$, $m(x) = 2x$; 若 $1 < x \leq 2$, $m(x) = 2$; 若 $2 < x \leq 3$, $m(x) = 3$; 若 $3 < x < +\infty$, $m(x) = 4$ 。 178. $E_y = (1 \leq y \leq 4)$ 。 179. $E_y =$

- $= (1 < y < 3)$, 180. $E_y = (1 > y > 0)$. 181. $E_y = \{1 < y | < +\infty\}$.
 182. $E_y = (1 \leq y \leq 2)$. 183. 当 $a < b$ 时 $a < y < b$, 当 $a > b$ 时 $b < y < a$.
 184. $1 < y < +\infty$. 185. $0 > y > -\infty$ 和 $+\infty > y > 1$. 186. $0 < y \leq \frac{1}{2}$.
 187. $+\infty > y > -\infty$. 188. $0 < y < \frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2} \leq y < 2$. 189. 0; 0; 0; 0;
 24. 190. 0; -6; 4. 191. 1; 1; 1; 2. 192. -1; 0; 1; 2; 4. 193. 1,
 $\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{-x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. 194. (a) 若 $x = -1$, $x = 0$ 和 $x =$
 $= 1$, $f(x) = 0$; 若 $-\infty < x < -1$ 和 $0 < x < 1$, $f(x) > 0$; 若 $-1 < x < 0$ 和
 $1 < x < +\infty$, $f(x) < 0$; (b) 若 $x = \pm \frac{1}{k}$, $f(x) = 0$; 若 $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ 和
 $-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $f(x) > 0$; 若 $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$
 和 $-\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $f(x) < 0$; (c) 若 $x \leq 0$ 和 $x = 1$,
 $f(x) = 0$; 若 $0 < x < 1$, $f(x) > 0$; 若 $1 < x < +\infty$, $f(x) < 0$. 195. (a) a ;
 (b) $2x + h$; (c) $a^x \frac{a^h - 1}{h}$. 197. $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$; $f(1) = \frac{1}{3}$; $f(2) = 2\frac{2}{3}$.
 198. $f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$; $f(-1) = -\frac{2}{3}$; $f(0.5) = 2\frac{17}{24}$. 199. $f(x) =$
 $= \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2$. 200. $f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x$. 203. (a) $2k\pi < x < \pi +$
 $+ 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); (b) $1 < x < e$; (c) $x > 0$, $x \neq k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).
 205. (a) $z = x + y$; (b) $z = \frac{xy}{x+y}$; (c) $z = \frac{x+y}{1-xy}$; (d) $z = \frac{x+y}{1+xy}$.
 206. $\varphi(\varphi(x)) = x^4$; $\psi(\psi(x)) = 2^{2^x}$; $\varphi(\psi(x)) = 2^{2^x}$; $\psi(\varphi(x)) = 2^{x^2}$.
 207. $\varphi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x$; $\psi(\psi(x)) = x$ ($x \neq 0$), $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} x$ ($x \neq 0$).
 208. $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$; $\psi(\varphi(x)) = \psi(x)$; $\psi(\psi(x)) = \varphi(\psi(x)) = 0$.
 209. $-\frac{1-x}{x}$; x . 210. $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 211. $x^2 - 5x + 6$. 212. $x^3 - 2$.
 213. $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. 221. (a) 当 $a > 0$ 增加, 当 $a < 0$ 减小; (b) 当 $a > 0$ 于区
 間 $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ 內減小于区間 $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 內增加; (c) 增加; (d) 当 $ad -$
 $-bc > 0$ 于区間 $(-\infty, -\frac{d}{c})$ 及 $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ 內增加; (e) 当 $a > 1$ 增加,

- 当 $0 < a < 1$ 减小。 222. 若对数之底大于数 1, 则可能。 224. $\frac{y-3}{2}$
 $(-\infty < y < +\infty)$ 。 225. (a) $-\sqrt{y}$ ($0 \leq y < +\infty$); (b) \sqrt{y} ($0 \leq y < +\infty$)。
 226. $\frac{1-y}{1+y}$ ($y \neq -1$)。 227. (a) $-\sqrt{1-y^2}$ ($0 \leq y \leq 1$); (b) $\sqrt{1-y^2}$
 $(0 \leq y \leq 1)$ 。 228. $\operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ ($-\infty < y < +\infty$)。
 229. $\operatorname{arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$ ($-1 < y < 1$)。 230. 若 $-\infty < y < 1$, $x=y$; 若
 $1 \leq y \leq 16$, $x=\sqrt{y}$; 若 $16 < y < +\infty$, $x=\lg_2 y$ 。 231. (a) 奇函数; (b) 偶
 函数; (c) 偶函数; (d) 奇函数; (e) 奇函数。 233. (a) 周期函数 $T = \frac{2\pi}{\lambda}$;
 (b) 周期函数, $T=2\pi$; (c) 周期函数, $T=6\pi$; (d) 周期函数, $T=\pi$; (e) 非周
 期函数; (f) 周期函数, $T=\pi$; (g) 非周期函数; (h) 非周期函数。 241. $t =$
 $= 1\frac{2}{3}$ 秒, $x = -3\frac{1}{3}$ 米。 243. $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ 。 244. $y = x -$
 $-\frac{x^2}{36000}$; 9 千米; 36 千米。 251. $x_0 = -\frac{d}{c}$, $y_0 = \frac{a}{c}$ 。 252. $p = \frac{12}{V}$
 $(V > 0)$ 。 263. $k = \frac{a}{a_1}$, $m = \frac{a_1 b - a b_1}{a_1^2}$, $n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^2}(a_1 b - a b_1)$, $x_0 = -\frac{b_1}{a_1}$ 。
 264. $y = \frac{10}{x^2}$ 。 287. $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\sin x_0 = -\frac{a}{A}$, $\cos x_0 = \frac{b}{A}$ 。 356. 若
 $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$, $y = 2 \sin x$; 若 $\frac{\pi}{6} < |x - \pi k| < \frac{5\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $y =$
 $= (-1)^k$ 。 357. (a) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$; (b) 与 (c) 若 $x \geq 0$, $y = x^2$; 若 $x < 0$,
 $y = 0$; (d) 若 $x < 0$, $y = x$; 若 $x \geq 0$, $y = x^4$ 。 358. (a) $y = 1$; (b) 若
 $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$, $y = 1$; 若 $|x| < 1$ 或 $|x| > \sqrt{3}$, $y = 0$; (c) 若 $|x| \leq 1$, $y =$
 $= 1$; 若 $|x| > 1$, $y = 2$; (d) 若 $|x| > 2$, $y = -2$; 若 $|x| \leq 2$, $y = 2 - (2 - x^2)^2$ 。
 359. 当 $x < 0$ 时有: (a) 1) $f(x) = 1 + x$, 2) $f(x) = -(1 + x)$; (b) 1)
 $f(x) = -2x - x^2$, 2) $f(x) = 2x + x^2$; (c) 1) $f(x) = \sqrt{-x}$, 2) $f(x) =$
 $= -\sqrt{-x}$; (d) 1) $f(x) = -\sin x$, 2) $f(x) = \sin x$; (e) 1) $f(x) = e^{-x}$,
 2) $f(x) = -e^{-x}$; (f) 1) $f(x) = \ln(-x)$, 2) $f(x) = -\ln(-x)$ 。 360. (a)
 $x = -\frac{b}{2a}$; (b) $x = \frac{1}{2}$; (c) $x = \frac{b-a}{2}$; (d) $x = \pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。
 361. (a) $(x_0, ax_0 + b)$, 其中 x_0 为任意的; (b) $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$; (c) (x_0, y_0) , 其
 中 $x_0 = -\frac{b}{3a}$ 和 $y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$; (d) $(2, 0)$; (e) $(2, 1)$ 。 372. 根:

- 1.88; 0.35; 1.53。 373. 2.11; -0.25; -1.86。 374. 0.25; 1.49。
 375. 0.64。 376. 1.37; 10。 377. -0.54。 378. 0; 4.49。
 379. $x_1 = -0.57$, $y_1 = -1.26$; $x_2 = -0.42$; $y_2 = 1.19$; $x_3 = 0.45$; $y_3 = 0.74$;
 $x_4 = 0.54$; $y_4 = -0.68$ 。 380. $x_1 = -1.30$, $y_1 = 9.91$; $x_2 = 2.30$, $y_2 = 9.73$;
 $x_3 = -0.62$; $y_3 = -9.98$; $x_4 = 1.62$, $y_4 = -9.87$ 。 382. (a)一般地说, 不;
 (b)是。 385. 上方有界, 下方无界。 387. $f(a)$ 及 $f(b)$ 。 388. 0; 25。
 389. 0; 1。 390. 0; 1。 391. 2; $+\infty$ 。 392. -1; 1。 393. $-\sqrt{2}$;
 $\sqrt{2}$ 。 394. $\frac{1}{2}$; 4。 395. (a)0; 1; (b)0; 2。 396. 0; 1。 397. (a)8;
 (b)0.8; (c)0.08; (d)0.008。 398. (a) π ; (b) π ; (c) π ; (d) π 。 411. (a)
 1; (b) $\frac{2}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$ 。 412. 6。 413. 10。 414. $\frac{1}{2}nm(n-m)$ 。 415. 5^{-5} 。
 416. $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$ 。 417. $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ 。 418. $-\frac{1}{2}$ 。 419. $\frac{1}{2}$ 。 420. 1。 421. $\frac{1}{4}$ 。
 422. $\frac{1}{3}$ 。 423. $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 。 424. $\frac{n(n-1)}{2}$ 。 425. $\frac{m}{n}$ 。 426. $\frac{n(n-1)}{2}$
 a^{n-2} 。 427. $\frac{n(n+1)}{2}$ 。 428. $\frac{m-n}{2}$ 。 429. $x + \frac{a}{2}$ 。 430. $x^3 + ax +$
 $+\frac{a^2}{3}$ 。 431. 1。 432. $\frac{1}{2}$ 。 433. 3。 434. $\frac{ab}{3}$ 。 435. 1。
 436. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。 437. $\frac{4}{3}$ 。 438. -2。 439. $\frac{1}{\sqrt{2}a}$ 。 440. $-\frac{1}{16}$ 。
 441. $\frac{1}{144}$ 。 442. $\frac{1}{4}$ 。 443. $\frac{12}{5}$ 。 444. $\frac{1}{n}$ 。 445. -2。 446. $\frac{1}{4}$ 。
 447. $\frac{2}{27}$ 。 448. $\frac{3}{2}$ 。 449. $4\frac{4}{27}$ 。 450. $\frac{7}{36}$ 。 451. $-\frac{1}{2}$ 。 452. $\frac{a}{m} -$
 $-\frac{\beta}{n}$ 。 453. $\frac{a}{m} + \frac{\beta}{n}$ 。 455. $\frac{n}{m}$ 。 456. $\frac{1}{n!}$ 。 457. $\frac{1}{2}(a+b)$ 。 458. $\frac{1}{2}$ 。
 459. $-\frac{1}{6}$ 。 460. 1。 461. $\frac{2}{3}$ 。 462. 2。 463. $\frac{4}{3}$ 。 464. $-\frac{1}{4}$ 。
 465. $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 。 466. 2^n 。 467. $2n$ 。 468. $\lim_{a \rightarrow 0} x_1 = \infty$,
 $\lim_{a \rightarrow 0} x_2 = -\frac{c}{b}$ 。 469. $a=1$, $b=-1$ 。 470. $a_i = \pm 1$; $b_i = \mp \frac{1}{2}$ ($i=1, 2$)。
 471. 5。 472. 0。 473. $(-1)^{m-n} \frac{m}{n}$ 。 474. $\frac{1}{2}$ 。 475. $\frac{1}{2}$ 。 476. 2。
 477. 4。 478. $\frac{1}{p}$ 。 479. $\frac{1}{2}$ 。 480. $\frac{2}{\pi}$ 。 482. $\cos \alpha$ 。 483. $-\sin \alpha$ 。
 484. $\sec^2 \alpha (\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1, \cdots)$ 。 485. $-\frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq k\pi, \text{ 其中}$

- k 为整数)。486. $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ ($a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 为整数)。487. $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$
 ($a \neq k\pi$, 其中 k 为整数)。488. $-\sin a$ 。489. $-\cos a$ 。490. $\frac{2 \sin a}{\cos^3 a}$
 ($a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 为整数)。491. $\frac{2 \cos a}{\sin^3 a}$ ($a \neq k\pi$, 其中 k 为整数)。
 492. $\frac{3}{2} \sin 2a$ 。493. -3 。494. 14 。495. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。496. -24 。
 497. $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$ ($a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, 其中 k 为整数)。498. $\frac{3}{4}$ 。499. $\frac{1}{4}$ 。
 500. $\frac{4}{3}$ 。501. $-\frac{1}{12}$ 。502. $\sqrt{2}$ 。503. 0 。504. 3 。505. 0 。
 506. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; (c) 1 。507. 0 。508. 0 。509. 0 。510. 0 。
 511. 1 。512. e^3 。513. 1 。514. e^{-2} 。515. e^{2a} 。516. 若 $a_1 < a_2$, 0 ;
 若 $a_1 > a_2$, $+\infty$; 若 $a_1 = a_2$, $e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$ 。517. e 。518. e^{-1} 。519. 1 。
 520. $e^{e^{1/2}a}$ ($a \neq k\pi$, k 为整数)。521. $e^{\frac{a}{2}}$ 。522. e^{-1} 。523. 1 。524. e^{-2} 。
 525. e 。526. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 。527. e^{x+1} 。528. $e^{-\frac{x^2}{2}}$ 。529. 1 。530. 1 。
 531. $\frac{1}{a}$ 。532. 0 。533. $\frac{1}{5}$ 。534. -2 。535. $\frac{3}{2}$ 。536. $\frac{3}{2}$ 。
 537. $-\frac{\log e}{x^2}$ 。538. $\frac{2a}{b}$ 。539. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ 。540. n 。541. $\ln a$ 。
 542. $a^a \ln \frac{a}{e}$ 。543. $a^a \ln ea$ 。544. e^2 。545. $\frac{2}{3}$ 。546. e^2 。
 547. 1 。548. $\frac{a}{\beta} a^{\alpha-\beta}$ 。549. $a^b \ln a$ 。550. $a^x \ln^2 a$ 。551. $e^{-(a+b)}$ 。
 552. $\ln x$ 。553. $\ln x$ 。554. $\sqrt[3]{b}$ 。555. \sqrt{ab} 。556. $\sqrt[3]{abc}$ 。
 557. $(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$ 。558. $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 。559. $\left(\ln \frac{a}{b}\right)^{-1}$ 。560. $a^{a^a} \ln a$ 。
 561. (a) 0 ; (b) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ 。562. $\ln 8$ 。563. $-\ln 2$ 。564. (a) $\frac{1}{2}$; (b)
 $\frac{1}{2}$ 。565. 1 。566. 0 。567. $\ln a^2$ 。568. $\frac{1}{8}$ 。569. $\frac{1}{2}$ 。570. -2 。
 571. e^2 。572. $e^{\frac{2}{\pi}}$ 。573. $\frac{a+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$ 。574. $\frac{1}{18}$ 。575. $2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}$ 。576. $\ln 2$ 。
 577. 1 。578. e^{x^4} 。579. $-\frac{\pi}{2}$ 。580. $\frac{\pi}{3}$ 。581. $-\frac{\pi}{2}$ 。582. $\frac{3\pi}{4}$ 。

585. $\frac{1}{1+x^2}$. 586. 2. 587. $\frac{e^x}{x^2+1}$. 588. $\frac{1}{2}$. 589. 1. 590. $e^{\frac{3}{x}}$.
 591. 0. 592. 0. 593. (a) $+\infty$; (b) $\frac{1}{2}$. 594. (a) -1; (b) 1.
 595. (a) $\frac{\pi}{2}$; (b) $-\frac{\pi}{2}$. 596. (a) 1, (b) 0. 597. (a) 0; (b) 1. 600. 2;
 1; 2. 601. 0; $(-1)^{n-1}$; $(-1)^n$. 602. 0. 603. 1. 604. 0.
 605. 1. 606. 0. 613. (b) 若 $|x| < 1$, $y = 1$; 若 $|x| = 1$, $y = 0$.
 614. (b) 若 $0 \leq x < 1$, $y = 0$; 若 $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$; 若 $1 < x < +\infty$, $y = 1$.
 615. 若 $0 < |x| < 1$, $y = -1$; 若 $|x| = 1$, $y = 0$; 若 $|x| > 1$, $y = 1$. 616. $y = |x|$.
 617. 若 $0 \leq x \leq 1$, $y = 1$; 若 $x > 1$, $y = x$. 618. 若 $0 \leq x \leq 1$, $y = 1$;
 若 $1 < x < 2$, $y = x$; 若 $x \geq 2$, $y = \frac{x^2}{2}$. 619. 若 $0 \leq x < 2$, $y = 0$; 若 $x = 2$,
 $y = 2\sqrt{2}$; 若 $x > 2$, $y = x^2$. 620. 若 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $y = 0$, 若 $x =$
 $= (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $y = 1$. 621. 若 $0 \leq x \leq 2$, $y = \ln 2$;
 若 $x > 2$, $y = \ln x$. 622. 若 $-1 < x \leq 1$, $y = 0$; 若 $x > 1$, $y = \frac{x}{2}(x-1)$.
 623. 若 $x \leq -1$, $y = 1$; 若 $x > -1$, $y = e^{x+1}$. 624. 当 $x < 0$, $y = x$; 当
 $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$; 当 $x > 0$, $y = 1$. 625. $\frac{1}{x}$. 627. (a) $x = 1$, $x = -2$, $y = x -$
 -1 ; (b) 当 $x \rightarrow +\infty$, $y = x + \frac{1}{2}$; 当 $x \rightarrow -\infty$, $y = -x - \frac{1}{2}$; (c) $y = \frac{1}{3} - x$; (d)
 当 $x \rightarrow +\infty$, $y = x$; 当 $x \rightarrow -\infty$, $y = 0$; (e) 当 $x \rightarrow -\infty$, $y = 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$,
 $y = x$; (f) $y = x + \frac{x}{2}$; (g) $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$. 628. 0. 629. $\frac{1}{1-x}$.
 630. $\frac{\sin x}{x}$. 632. $\frac{1}{6}$. 633. $\frac{a}{2}$. 634. $\frac{1}{2} \ln a$. 635. \sqrt{e} .
 636. $e^{-\frac{a^2}{b}}$. 637. $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4a})$. 638. $\sqrt{1+x} - 1$. 639. $1 - \sqrt{1-x}$.
 641. (a) 2; (b) $+\infty$; (c) 0; (d) 1; (e) 2; (f) 1; (g) $2 \operatorname{sh} 1$. 643. (a) $l =$
 $= -1$; $L = 2$; (b) $l = -2$, $L = 2$; (c) $l = 2$, $L = e$. 644. (a) $l = -1$, $L = 1$;
 (b) $l = 0$, $L = +\infty$; (c) $l = \frac{1}{2}$, $L = 2$; (d) $l = 0$, $L = +\infty$. 645. (a) 一阶;
 (b) 二阶; (c) 一阶; (d) 三阶; (e) 三阶. 653. (a) $2x$; (b) x ;
 (c) $\frac{x^2}{2}$; (d) $\frac{x^3}{2}$. 655. (a) $3(x-1)^2$; (b) $\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$; (c) $x-1$; (d)

- $c(x-1)$; (d) $x-1$. 656. (a) x^2 ; (b) $2x^2$; (c) $x^{\frac{2}{3}}$; (d) $x^{\frac{1}{3}}$. 657. (a) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; (b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$; (c) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$; (d) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$. 658. (a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$; (b) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$; (c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$; (d) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}$; (e) $\frac{1}{x-1}$. 663. (a) $9.95 < x < 10.05$; (b) $9.995 < x < 10.005$; (c) $9.9995 < x < 10.0005$; (d) $\sqrt{100-\varepsilon} < x < \sqrt{100+\varepsilon}$. 664. $\Delta < \frac{6}{27}$; (a) $\Delta < 3.7$ 毫米; (b) $\Delta < 0.37$ 毫米; (c) $\Delta < 0.037$ 毫米. 665. $100[1-10^{-(n+1)}]^2 < x < 100[1+10^{-(n+1)}]^2$; (a) $81 < x < 121$; (b) $98.01 < x < 102.01$; (c) $99.8001 < x < 100.2001$; (d) $99.980001 < x < 100.020001$. 666. $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right)$. 667. $\delta = \frac{\varepsilon x_0^3}{1+\varepsilon x_0} \approx 0.001x_0^3$; (a) $\delta \approx 10^{-3}$; (b) $\delta \approx 10^{-7}$; (c) $\delta \approx 10^{-9}$. 不行. 669. (a) 不能; (b) 可以. 671. 不对, 在点 x_0 有界. 672. 不对; 若函数 $f(x)$ 在有穷的区间 (a, b) 内有定义, 则这些不等式经常成立; 若至少有 a 或 b 等于符号 ∞ , 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty$. 673. 不能; 反函数的单值性和连续性. 675. 连续. 676. 若 $A=4$, 连续; 若 $A \neq 4$, 当 $x=2$ 时不连续. 677. 当 $x=-1$ 时不连续. 678. (a) 连续; (b) 当 $x=0$ 时不连续. 679. 当 $x=0$ 时不连续. 680. 连续. 681. 连续. 682. 当 $x=1$ 时不连续. 683. 当 $a=0$ 时连续; 当 $a \neq 0$ 时不连续. 684. $x=0$ 时不连续. 685. $x=k$ (k 为整数) 时不连续. 686. $x=k^2$ ($k=1, 2, \dots$) 时不连续. 687. $x=-1$ 为无穷型不连续点. 688. $x=-1$ 为可移去的不连续点. 689. $x=-2$ 和 $x=-1$ 为无穷型不连续点. 690. $x=0$ 和 $x=1$ 为可移去的不连续点 $x=-1$ 无穷型不连续点. 691. $x=0$ 为可移去的不连续点. $x=kx$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不连续点. 692. $x=\pm 2$ 为可移去的不连续点. 693. $x=0$ 为第 2 类不连续点. 694. $x=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) 为第 1 类不连续点; $x=0$ 为第 2 类不连续点. 695. $x=\frac{2}{2k+1}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为可移去的不连续点. 696. $x=0$ 为第 1 类不连续点. 697. $x=0$ 为可移去的不连续点. 698. $x=0$ 为第 2 类不连续点. 699. $x=0$ 为可移去的不连续点; $x=1$ 为无穷型不连续点. 700. $x=0$ 为无穷型不连续点; $x=1$ 为第 2 类不连续点. 701. $x=kx$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第 1 类不连续点. 702. $x=k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第 1 类不连续点. 703. $x=k$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$)

- 为第 1 类不連續点。 704. 函数是連續。 705. $x = \pm\sqrt{n}$ ($n=1, 2, \dots$) 为第 1 类不連續点。 706. $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第 1 类不連續点; $x = 0$ 为无穷型不連續点。 707. $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第 1 类不連續点; $x = 0$ 为可移去的不連續点。 708. $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0; \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第 1 类不連續点; $x = 0$ 为第 2 类不連續点。 709. $x = \pm \frac{1}{k}$ 和 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k=1, 2, \dots$) 为第 1 类不連續点; $x = 0$ 为第 2 类不連續点。 710. $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不連續点; $x = 0$ 为第 2 类不連續点。 711. $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不連續点; $x = 0$ 为第 2 类不連續点。 712. $x = \pm\sqrt{n}$ ($n=1, 2, \dots$) 为第 1 类不連續点。 713. $x = 0, x = 1$ 和 $x = 2$ 为第 1 类不連續点。 714. $x = xk$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不連續点。 715. $x = \pm\sqrt{xk}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 为无穷型不連續点。 716. $x = -1$ 和 $x = 3$ 为无穷型不連續点。 717. $x = 0$ 为第 2 类不連續点。 718. $x = 0$ 为可移去的不連續点。 719. $x = \pm 1$ 为第 1 类不連續点。 720. 若 $0 \leq x < 1, y = 1$; 若 $x = 1, y = \frac{1}{2}$; 若 $x > 1, y = 0$; $x = 1$ 为第 1 类不連續点。 721. $y = \operatorname{sgn} x$; $x = 0$ 为第 1 类不連續点。 722. 若 $|x| \leq 1, y = 1$; 若 $|x| > 1, y = x^2$ 。函数連續。 723. 若 $x \neq k\pi, y = 0$; 若 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $y = 1$ 。 $x = k\pi$ 为第 1 类不連續点。 724. 若 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{6}, y = x$; 若 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, y = \frac{x}{2}$; 若 $\frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \dots$), $y = 0$; $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 为第 1 类不連續点。 725. 若 $k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}x$; 若 $k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi, y = -\frac{\pi}{2}x$; 若 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \dots$), $y = 0$; $x = \frac{k\pi}{2} \neq 0$ 为第 1 类不連續点。 726. 当 $x \leq 0, y = x$; 当 $x > 0, y = x^2$ 。函数連續。 727. 当 $x \leq 0$ 时 $y = 0$, 当 $x > 0$ 时 $y = x$ 。函数連續。 728. 当 $x < 0$ 时 $y = -(1+x)$; 当 $x = 0$ 时 $y = 0$; 当 $x > 0$ 时 $y = 1+x$; $x = 0$ 为第 1 类不連續点。 729. 不是。 730. $a = 1$ 。 731. (a) 函数連續; (b) $x = -1$ 为第 1 类不連續点; (b) $x = -1$ 为第 1 类不連續点; (r) $x = k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不連續点; (n) $x \neq k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第 2 类不

連續点。732. 当 $-\infty < x < 0$ 时 $d = -x$; 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $d = 0$; 当 $1 < x \leq \frac{3}{2}$ 时 $d = x - 1$; 当 $\frac{3}{2} < x < 2$ 时 $d = 2 - x$; 当 $2 \leq x \leq 3$ 时 $d = 0$; 当 $3 < x < +\infty$ 时 $d = x - 3$ 函数連續。733. 当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $S = 3y - \frac{y^2}{2}$; 当 $1 < y \leq 2$ 时 $S = \frac{1}{2} + 2y$; 当 $2 < y \leq 3$ 时 $S = \frac{5}{2} + y$; 当 $3 < y < +\infty$ 时 $S = \frac{11}{2}$; 函数連續。当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $b = 3 - y$; 当 $1 < y \leq 2$ 时 $b = 2$; 当 $2 < y \leq 3$ 时 $b = 1$; 当 $3 < y < +\infty$ 时 $b = 0$; $x = 2$ 及 $x = 3$ 为第 1 类不連續点。735. 当 $x \neq 0$ 时不連續, 当 $x = 0$ 时連續。737. 对于自变数的一切負值和正有理值不連續。738. $f(0) = 0.5$ 。740. (a) 1.5; (b) 2; (B) 0; (r) e ; (x) 0; (e) 1; (K) 0。741. (a) 是; (b) 不对。742. (a) 不; (b) 不。743. 不能。例如: 若 x 为有理数, $f(x) = 1$; 若为无理数, $f(x) = -1$ 。744. (a) 当 $x = 0$; $f(g(x))$ 連續, $g(f(x))$ 不連續; (b) 当 $x = -1, x = 0$ 和 $x = 1$, $f(g(x))$ 不連續, $g(f(x)) = 0$ 連續; (B) $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 連續。745. $f(\varphi(x)) = x$ 。

759. $x = \frac{-dy + b}{cy - a}$; $a + d = 0$ 。

760. 若 $2k \leq y < 2k + 1 (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $x = y - k$ 。

764. $f(f(x)) = x$ 。767. $x = -\sqrt{y} (0 \leq y < +\infty)$; $x = \sqrt{y} (0 \leq y < +\infty)$ 。768. $x = 1 - \sqrt{1 - y} (-\infty < y \leq 1]$; $x = 1 + \sqrt{1 - y} (-\infty < y \leq 1)$ 。

769. $x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} [-1 \leq y \leq 1]$; $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$

和 $(0 < |y| \leq 1)$ 。770. $x = (-1)^k \arcsin y + \pi k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) [-1 \leq y \leq 1]$ 。771. $x = 2\pi k \pm \arccos y (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) [-1 \leq y \leq 1]$ 。

772. $x = \operatorname{arctg} y + \pi k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) (-\infty < y < +\infty)$ 。776. 若 $xy < 1$,

$s = 0$; 若 $xy > 1$, $s = \operatorname{sgn} x$ 。779. (a) 若 $0 \leq x \leq 1$, $y = 2 \arcsin x - \frac{\pi}{2}$;

若 $-1 \leq x \leq 0$, $y = -\frac{\pi}{2}$; (b) 若 $-1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -(\pi + 4 \arcsin x)$;

若 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$; 若 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$, $y = \pi - 4 \arcsin x$ 。

780. $y = \frac{\pi}{2} - x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ 。781. $y = \sqrt{x^2 - 1} (1 \leq x < +\infty)$; $y = -\sqrt{x^2 - 1} (1 \leq x < +\infty)$ 。782. 对于使 $\varphi(t) = x$ 的一切 t [其中 x 为函数 $\varphi(t)$ 的任一值], 函数 $\psi(t)$ 应有同一的值。783. 当 $\alpha < \tau < \beta$ 时 $\chi(\tau)$ 值的集合应为区間 (a, b) 。

784. 对于使 $\varphi(x) = u$ 的一切 x 值 [其中 u 为区間 (A, B) 中的任一数], 函数 $\psi(x)$ 应取同一的值。785. $\delta \leq \frac{\epsilon}{20}$ 厘米 (a) 0.5

毫米; (б) 0.005 毫米; (в) 0.00005 毫米. 786. (a) $\delta < \frac{1}{2}$; (б) $\delta < 2.5 \times 10^{-4}$; (в) $\delta < \frac{5}{2} \times 10^{-7}$; (г) $\delta < \frac{\varepsilon^3}{4} (\varepsilon \leq 1)$. 793. (a) 是; (б) 不是. 794. 一致連續. 795. 非一致連續. 796. 一致連續. 797. 非一致連續. 798. 一致連續. 799. 一致連續. 800. 非一致連續. 802. (a) $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$; (б) $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$; (в) $\delta = 0.01 \varepsilon$; (г) $\delta = \varepsilon^2 (\varepsilon \leq 1)$; (д) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; (e) $\delta = \text{极小} \left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon} \right)$. 803. $n \geq 1500000$. 808. (a) $\omega_f(\delta) \leq 3\delta$; (б) $\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta}$, $\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{\sqrt{2a}}$; (в) $\omega_f(\delta) \leq \delta \sqrt{2}$. 818. $f(x) = \cos ax$ 或 $f(x) = \cosh ax$. 819. $f(x) = \cos ax$; $g(x) = \pm \sin ax$. ($a = \text{常数}$).

第 二 章

821. $\Delta x = 999$; $\Delta y = 3$. 822. $\Delta x = -0.009$; $\Delta y = 990000$. 823. (a) $\Delta y = a \Delta x$; (б) $\Delta y = (2ax + b) \Delta x + a(\Delta x)^2$; (в) $\Delta y = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. 825. (a) 5; (б) 4.1; (в) 4.01; (г) $4 + \Delta x$; 4. 826. $3 + 3h + h^2$. (a) 3.31; (б) 3.0301; (в) 3.003001; 3. 827. (a) $v_{\text{平均}} = 215 \frac{\text{米}}{\text{每秒}}$; (б) $v_{\text{平均}} = 210.5 \frac{\text{米}}{\text{每秒}}$; (в) $v_{\text{平均}} = 210.05 \frac{\text{米}}{\text{每秒}}$; 210 $\frac{\text{米}}{\text{每秒}}$. 828. (a) $2x$; (б) $3x^2$; (в) $-\frac{1}{x^2} (x \neq 0)$; (г) $\frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0)$; (д) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0)$; (e) $\frac{1}{\cos^2 x} [x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1, \dots]$; (ж) $-\frac{1}{\sin^2 x} (x \neq k\pi, k=0, \pm 1, \dots)$; (з) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1)$; (и) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1)$; (к) $\frac{1}{1+x^2}$. 829. -8; 0; 0. 830. 4. 831. $1 + \frac{\pi}{4}$. 832. $f'(a)$. 834. $y' = 1 - 2x$; 1, 0, -1, 21. 835. $y' = x^2 + x - 2$; (a) -2; 1; (б) -1; 0; (в) -4; 3. 836. $10a^3x - 5x^4$. 837. $\frac{a}{a+b}$. 838. $2x - (a+b)$. 839. $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$. 840. $x \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$. 841. $mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}]$. 842. $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$. 843. $-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right)(x \neq 0)$. 845. $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} (|x| \neq 1)$. 846. $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. 847. $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$

$$(|x| \neq 1)。$$

$$848. \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} (x \neq 1)。$$

$$849.$$

$$-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}} (x \neq -1)。$$

$$850. \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^2} [p-(q+$$

$$+1)x-(p+q-1)x^2] (x \neq -1)。$$

$$851. 1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x>0)。$$

$$852. -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x^2\sqrt{x}} (x>0)。$$

$$853. \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}} (x>0)。$$

$$854. \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}。$$

$$855. \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}} (x \neq \sqrt[3]{-3})。$$

$$856.$$

$$\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)^{n+m}\sqrt{(1-x)^n(1+x)^m}}。$$

$$857. \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} (|x| < |a|)。$$

$$858. \frac{2x^2}{1-x^3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} (|x| \neq 1)。$$

$$859. -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

$$860. \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$(x>0)。$$

$$861. \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}} (x \neq 0, x \neq -1,$$

$$x \neq -8)。$$

$$862. -2 \cos x(1+2 \sin x)。$$

$$863. x^2 \sin x。$$

$$864. -\sin 2x \times$$

$$\times \cos(\cos 2x)。$$

$$865. n \sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x。$$

$$866. \cos x \cdot \cos(\sin x) \times$$

$$\times \cos[\sin(\sin x)]。$$

$$867. \frac{2 \sin x(\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2} (x^2 \neq k\pi; k=$$

$$=1, 2, \dots)。$$

$$868. -\frac{1+\cos^2 x}{2 \sin^2 x} (x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)。$$

$$869. \frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k \text{ 为整数}\right)。$$

$$870. \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}。$$

$$871. \frac{2}{\sin^2 x}; (x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)。$$

$$872. 1+\operatorname{tg}^2 x [x \neq (2k+1)\pi$$

$$\times \frac{x}{2}; k=0, \pm 1, \dots]。$$

$$873. -\frac{8}{3 \sin^4 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} (x \neq k\pi, k \text{ 为整数})。$$

$$874. -\frac{16 \cos \frac{2x}{a}}{a \sin^3 \frac{2x}{a}} \left(x \neq \frac{k\pi a}{2}, k \text{ 为整数}\right)。$$

$$875. -3 \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^2 x \cdot \sin x$$

$$\times (2 \operatorname{tg}^3 x) \cdot \cos [\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)] \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ 为整数}\right)。$$

$$876. -2xe^{-x^2}。$$

$$877. -\frac{1}{x^2} 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \ln 2。$$

$$878. x^2 e^x。$$

$$879. x^2 e^{-x} \sin x。$$

$$880.$$

$$\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} (x \neq 2k\pi, k \text{ 为整数})。$$

$$881. -\frac{1+\ln^2 3}{3^x} \sin x。$$

$$882. \sqrt{a^2+b^2}e^{ax} \sin bx. \quad 883. e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]. \quad 884. y\left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right) (x>0). \quad 885. a^2 \cdot x^{2^2-1} + ax^{2^2-1}a^{2^2} \ln a + a^x \cdot a^{2^2} \ln^2 a.$$

$$886. \frac{6}{x} \lg e \cdot \lg^2 x^2 (x \neq 0). \quad 887. \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} (x > e).$$

$$888. \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)} (x > e). \quad 889. \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} (x > -1).$$

$$890. \frac{x}{x^4-1} (|x| > 1). \quad 891. \frac{1}{x(1+x^4)^2} (x \neq 0). \quad 892. \frac{1}{3x^2-2} \times$$

$$\times \left(|x| > \sqrt{\frac{3}{2}}\right). \quad 893. -\frac{2x^2}{(1-x^2)(1-kx^2)} (|x| < 1).$$

$$894. \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} (x > -1). \quad 895. \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \quad 896. \ln(x +$$

$$+\sqrt{x^2+1}). \quad 897. \ln^2(x+\sqrt{x^2+1}). \quad 898. \sqrt{x^2+a^2}. \quad 899. \frac{1}{a-bx^2} (|x| < \sqrt{\frac{a}{b}}). \quad 900. -\frac{8}{x^3\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1). \quad 901. \frac{1}{\sin x} (0 < x -$$

$$-2\pi k < \pi; k \text{ 为整数}). \quad 902. \frac{1}{\cos x} \left(|x-2k\pi| < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}\right).$$

$$903. \operatorname{ctg}^2 x (0 < x-2k\pi < \pi, k \text{ 为整数}). \quad 904. -\frac{1}{\cos x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k \text{ 为}$$

$$\text{整数}\right). \quad 905. \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} (0 < x-2k\pi < \pi, k \text{ 为整数}). \quad 906. \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x}.$$

$$907. -\frac{\ln^3 x}{x^2} (x > 0). \quad 908. \frac{1}{x^5} \ln x (x > 0). \quad 909. \frac{6x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

$$910. -\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln \frac{1}{x}}{\left(1+x \ln \frac{1}{x}\right)\left[1+x \ln \left(\frac{1}{x}+\ln \frac{1}{x}\right)\right]}. \quad 911. 2 \sin(\ln x) (x > 0).$$

$$912. -\sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \left(0 < x-2k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}\right). \quad 913. \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(|x| < 2). \quad 914. \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^3}} (|x-1| < \sqrt{2}). \quad 915. \frac{2ax}{x^4+a^2} (a \neq 0).$$

$$916. \frac{1}{x^2+2} (x \neq 0). \quad 917. \frac{\sqrt{x}}{2(1-x)} (x \geq 0). \quad 918. -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times$$

$$\times \arccos x (|x| < 1). \quad 919. \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} (x \geq 0). \quad 920. \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$(|x| > 1). \quad 921. \operatorname{sgn}(\cos x) \left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k \text{ 为整数}\right).$$

$$922. \frac{2 \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad (x \neq k\pi, k \text{ 为整数}),$$

$$923. \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$\left(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}\right). \quad 924. \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1). \quad 925. \frac{1}{1+x^2}$$

$$(x \neq 1). \quad 926. 1 \left(x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数}\right). \quad 927. \frac{1}{a+b \cos x}. \quad 928.$$

$$-\frac{2 \operatorname{sgn} x}{1+x^2} \quad (x \neq 0). \quad 929. \frac{4x}{\sqrt{1+x^4} \operatorname{arccos}^3(x^2)} \quad (|x| < 1). \quad 930. \frac{1+x^4}{1+x^6}.$$

$$931. -2 \cos x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x). \quad 932. \frac{1}{2x\sqrt{x-1} \operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1).$$

$$933. \frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)} \quad (x > -a). \quad 934. \sqrt{a^2-x^2}. \quad 935. \frac{1}{x^3+1}$$

$$(x \neq -1). \quad 936. \frac{1}{x^4-1} \quad (|x| \neq 1). \quad 937. (\operatorname{arcsin} x)^2 \quad (|x| < 1).$$

$$938. -\frac{\operatorname{arccos} x}{x^2} \quad (0 < |x| < 1). \quad 939. \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \quad (x > 1).$$

$$940. \frac{x \operatorname{arcsin} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1). \quad 941. \frac{x^3}{x^3+1} \quad \left(|x| \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$942. \frac{12x^3}{(1+x^{12})^2}. \quad 943. -\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x^2}} \quad (|x| < 1). \quad 944. \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$(|x| < 1). \quad 945. \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (0 < x < a). \quad 946. \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

$$(|x+1| < \sqrt{2}). \quad 947. \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}. \quad 948. \frac{\sin(2x)}{\sin^4 x + \cos^4 x} \quad \left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi,\right.$$

$$k \text{ 为整数}\left.). \quad 949. \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (|x| < 1).$$

$$950. \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x. \quad 951. \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}. \quad 952. \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

$$953. \frac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x - \cos a)}{1 - \cos a \cos x} \quad (\cos x \neq \cos a). \quad 954. \frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$(0 < |x| < 1). \quad 955. \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \quad (|x| \neq 1). \quad 956. \frac{4}{(1+x^2)^2 \sqrt{1-x^2}}$$

$$(|x| < 1). \quad 957. \frac{2x(\cos x^2 + \sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}} \left(0 < |x| < \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}, k=0,1,\dots\right).$$

$$958. 2x [\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)] \quad \left(|x| \neq \frac{k\pi}{2}, k=0,1,2,\dots\right).$$

$$959. \frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{m(\operatorname{arcsin} x)} \cos m(\operatorname{arcsin} x) \quad (|x| < 1). \quad 960. \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}.$$

$$961. 1+x^x(1+\ln x)+x^x x^{1/x} \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right) (x>0). \quad 962. x^{a-1} x^{a^x} (1+a$$

$$\ln x) + a^x x^{a^x} \left(\frac{1}{x} + \ln a \ln x \right) + x^x a^{a^x} \ln a (1+\ln x) \quad (x>0). \quad 963. x^{\frac{1}{x}-2} \times \\ \times (1-\ln x) \quad (x>0). \quad 964. (\sin x)^{1+\cos x} (\operatorname{ctg}^2 x -$$

$$-\ln \sin x) - (\cos x)^{1+\sin x} (\operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x) \quad \left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right).$$

$$965. \frac{(\ln x)^{x-1}}{x \ln x + 1} [x^2 - 2 \ln^2 x + x \ln x \cdot \ln(\ln x)] \quad (x>1). \quad 966. -\frac{1}{x} \times \\ \times (\lg x)^2 \quad (x>0, x \neq 1). \quad 967. \operatorname{th}^3 x. \quad 968. -\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x} \quad (x>0).$$

$$969. \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}. \quad 970. \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x} \quad (x \neq 0). \quad 971. \frac{a+b \operatorname{ch} x}{b+a \operatorname{ch} x}.$$

$$972. -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}. \quad 973. -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \cdot \ln(\arccos x) \quad (|x| < 1).$$

$$974. -\frac{x^3}{\sqrt[3]{(1+x^4)^3}}. \quad 975. -\frac{2x e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}} \quad (x \neq 0).$$

$$976. \frac{4a^{2x} \ln a}{(1+a^{2x})^2} \arccot a^{-x} (a>0). \quad 977. (a) \operatorname{sgn} x (x \neq 0); (b) 2|x|;$$

$$(b) \frac{1}{x} \quad (x \neq 0). \quad 978. (a) (x-1)(x+1)^2(5x-1) \operatorname{sgn}(x+1); (b) \frac{3}{2} \sin 2x \times \\ \times |\sin x|; (b) \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1); (r) x[x] \sin 2xx. \quad 979. \text{ 当}$$

$$-\infty < x < 1 \text{ 时 } y' = -1; \text{ 当 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 时 } y' = 2x-3; \text{ 当 } 2 < x < +\infty \text{ 时 } y' = 1.$$

$$980. \text{ 当 } x \in [a, b]; y' = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b); \text{ 当 } x \in [a, b]; y' = 0.$$

$$981. \text{ 当 } x < 0 \text{ 时 } y' = 1; \text{ 当 } 0 \leq x < +\infty \text{ 时 } y' = \frac{1}{1+x}. \quad 982. \text{ 当 } |x| \leq 1 \text{ 时}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}; \text{ 当 } |x| > 1 \text{ 时 } y' = \frac{1}{2}. \quad 983. \text{ 当 } |x| \leq 1 \text{ 时 } y' = 2xe^{-x^2}(1-x^2);$$

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时 } y' = 0. \quad 984. (a) \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}; (b) \frac{54-36x-4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$$

$$(x \neq 0, x \neq 1, x \neq \pm 3); (b) \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x-a_i}; (r) \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}. \quad 985. (a)$$

$$\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}} [\varphi^2(x)+\psi^2(x) \neq 0]; \quad (b) \frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$$

$$[\varphi^2(x)+\psi^2(x) \neq 0]; \quad (b) \varphi(x) \sqrt{\psi(x)} \left\{ \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}; \quad (r)$$

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \frac{1}{\ln \varphi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)}. \quad 986. (a) 2x f'(x^2); (b)$$

$$\sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]; (b) e^{f(x)} [e^x f'(e^x) + f'(x) f(e^x)]; (r) f'(x) \times$$

$\times f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}$ 。 988. $3x^2 + 15$ 。 989. $6x^2$ 。 992. (a) $n > 0$;
(b) $n > 1$; (B) $n > 2$ 。 993. (a) $n \geq m + 1$; (b) $1 < n < m + 1$ 。 994. $\varphi(a)$ 。

995. $f'_-(a) = -\varphi(a)$, $f'_+(a) = \varphi(a)$ 。 999. (a) 当 $x = 1$ 不可微分; (b) 当
 $x = \frac{2k-1}{2}\pi$, (k 为整数) 不可微分; (B) 处处可微分; (r) 当 $x = k\pi$ (k 为整数) 不

可微分; (H) 当 $x = -1$ 不可微分。 1000. 当 $x \neq 0$, $f'_-(x) = f'_+(x) = \operatorname{sgn} x$, $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$ 。 1001. 当 $x \neq$ 整数 $f'_-(x) = f'_+(x) = x[x] \cos \pi x$, 当 k 为

整数, $f'_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k$, $f'_+(k) = \pi k(-1)^k$ 。 1002. 当 $x \neq \frac{2}{2k+1}$

(k 为整数) 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \left(\cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} \right) \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi}{x} \right)$;

$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 。 1003. 当

$\sqrt{2kx} < |x| < \sqrt{(2k+1)x}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$;

$f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$ 。 $f'_\mp(\sqrt{(2k-1)x}) = \mp \infty$; $f'_\pm(\sqrt{2kx}) = \pm \infty$ ($k=$

$1, 2, \dots$)。 1004. 当 $x \neq 0$ 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}$; $f'_-(0) = 1$,
 $f'_+(0) = 0$ 。 1005. 当 $x \neq 0$, $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$; $f'_-(0) = -1$,

$f'_+(0) = 1$ 。 1006. $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{\varepsilon}{x}$, 这里当 $-\infty < |x| < 1$ 时 $\varepsilon = -1$,

当 $1 < |x| < +\infty$ 时 $\varepsilon = 1$; $f'_-(\mp 1) = -1$, $f'_+(\mp 1) = 1$ 。 1007. 当 $x \neq \mp 1$

时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{2 \operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$; $f'_-(\mp 1) = \mp 1$, $f'_+(\mp 1) = \pm 1$ 。

1008. 当 $x \neq 2$ 时 $f'_-(x) = f'_+(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1}$; $f'_\mp(2) = \mp \frac{\pi}{2}$ 。

1010. $a = 2x_0$; $b = -x_0^2$ 。 1011. $a = f'_-(x_0)$; $b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0)$ 。

1012. $A = \frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}$, $C = \frac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}$ 。 1013. $a = \frac{3m^2}{2c}$, $b = -\frac{m^2}{2c^3}$ 。

1014. (a) 能; (b) 不能。 1015. (a) 不能; (b) 不能。 1016. (a) (b) (B) 函
数 $F(x)$ 可有导函数 $F'(x)$, 也可无导函数。 1017. $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1,$

$\pm 2, \dots$)。 1018. (a) 不能; (b) 能。 1019. (1) 非必须; (2) 必须,

1020. 非必须。 1021. 不能得出。 1022. 不能得出。 1023. 一般地

說; 不行。

1024. $P_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$;

$$Q_n = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}. \quad 1025. S_n =$$

$$= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}; T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad 1026. S_n =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x. \quad 1029. 40x \text{ 平方厘米/每秒}. \quad 1030. 25 \text{ 平方}$$

$$\text{米/每秒}; 0.4 \text{ 米/每秒}. \quad 1031. 50 \text{ 千米/每小时}. \quad 1032. \text{若 } 0 \leq x \leq 2;$$

$$S(x) = \frac{x^2}{2}; \text{若 } x > 2, S(x) = x^2 - 2x + 2; \text{若 } 0 \leq x \leq 2, S'(x) = x; \text{若 } x > 2,$$

$$S'(x) = 2x - 2. \quad 1033. S(x) = \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{a}; S'(x) =$$

$$= \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{sgn} x (0 < |x| \leq a). \quad 1034. y'_x = \frac{1}{3(y^2 + 1)}. \quad 1035. y'_x =$$

$$= \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}. \quad 1036. (a) -\infty < y < +\infty; x'_y = \frac{x}{x+1}; (b) -\infty < y < +\infty,$$

$$x'_y = \frac{1}{1-x+y}; (B) -\infty < y < +\infty, x'_y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}; (r) -1 < y < 1; x'_y =$$

$$= \frac{1}{1-y^2}. \quad 1037. (a) x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1); x_2 =$$

$$= -\sqrt{1-\sqrt{1-y}} \quad [0 \leq y \leq 1]; x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1); x_4 =$$

$$= \sqrt{1+\sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1); x'_i = \frac{1}{4x(1-x^2)} \quad (i=1, 2, 3, 4). (b) x_1 =$$

$$= -\sqrt{\frac{y}{1-y}} \quad (0 \leq y < 1); x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}} \quad (0 \leq y < 1); x'_i = \frac{x^3}{2y^2} \quad (i=1, 2);$$

$$(B) x_1 = -\ln(1+\sqrt{1-y}) \quad (-\infty < y \leq 1); x_2 = \ln \frac{1+\sqrt{1-y}}{y} \quad (0 < y \leq 1);$$

$$x'_i = -\frac{1}{2(e^{-x} - e^{-2x})} \quad (i=1, 2). \quad 1038. y'_x = -\frac{3}{2}(1+t); -3; -\frac{3}{2} \text{ 及}$$

$$-\frac{9}{2}; (-4, 4). \quad 1039. \sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^2}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}} \quad (t > 0, t \neq 1). \quad 1040. y'_x =$$

$$= -1 \quad (0 < x < 1). \quad 1041. y'_x = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t \quad (0 < |t| < \pi). \quad 1042. y'_x =$$

$$= \frac{b}{a} \operatorname{cth} t \quad (|t| > 0). \quad 1043. y'_x = -\operatorname{tg} t \left(t \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为整数} \right).$$

$$1044. y'_x = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数}). \quad 1045. y'_x = \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \left(t \neq \frac{\pi}{4} +$$

$$+ k\pi, k \text{ 为整数} \right). \quad 1046. y'_x = \operatorname{sgn} t \quad (0 < |t| < +\infty). \quad 1048. y' = \frac{1-x-y}{x-y};$$

$$\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}。 1049. \frac{p}{y}。 1050. -\frac{b^2x}{a^2y}。 1051. -\sqrt{\frac{y}{x}}。 1052. -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}。$$

$$1053. \frac{x+y}{x-y}。 1054. (a) \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varphi); (b) -\operatorname{ctg} \frac{3\varphi}{2} \left(\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$(B) \operatorname{tg} \left(\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{m} \right)。 1055. (a) y = \sqrt[3]{4} (x+1); y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} (x+1);$$

$$(b) y=3, x=2; (B) x=3, y=0。 1056. (a) \left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4} \right); (b) (0, 2)。$$

$$1058. |x| < \frac{\pi}{3} \text{ 及 } \frac{2\pi}{3} < |x| \leq \pi。 1059. \max |y'_1 - y'_2| = 10\pi \approx 31.4。$$

$$1060. \frac{\pi}{4}。 1061. \frac{\pi}{2}; \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{4} \approx \operatorname{arc} 37^\circ, 1062. \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2\sqrt{2} \approx \operatorname{arc} 70^\circ$$

$$30'。 1063. n > 57.3。 1064. (a) 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{|a|}; (b) \frac{\pi}{2}。 1066. \left| \frac{x}{n} \right|。$$

$$1069. \frac{y_0^2}{|a|}。 1071. b^2 - 4ac = 0。 1072. \left(\frac{p}{3} \right)^3 + \left(\frac{q}{2} \right)^2 = 0。 1073. a = -\frac{1}{2c}。 1077. (a) 3x - 2y = 0, 2x + 3y = 0; (b) 3x - y - 1 = 0, x + 3y - 7 = 0。$$

$$1078. (a) y = x, y = -x; (b) 3x - y - 4 = 0, x + 3y - 3 = 0; (B) y = -x, y = x。 1079. y - 2a = (x - at_0) \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}。 摆线的切线是垂直于连接切点与$$

$$\text{滚动的圆的接触点所成的线段。 } 1081. 3x + 5y - 50 = 0, 5x - 3y - 10.8 = 0。$$

$$1082. x + 2y - 3 = 0, 2x - y - 1 = 0。 1083. \Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3;$$

$$df(1) = \Delta x。 (a) 5.1; (b) 0.131, 0.1; (B) 0.010301, 0.01。 1084. \Delta x = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2, dx = 20dt; (a) 25 \text{ 米, } 20 \text{ 米; } (b) 2.05 \text{ 米, } 2 \text{ 米; } (B) 0.020005$$

$$\text{米, } 0.02 \text{ 米。 } 1085. -\frac{dx}{x^2} (x \neq 0)。 1086. \frac{dx}{a^2 + x^2}。 1087. \frac{dx}{x^2 - a^2}$$

$$(|x| \neq |a|)。 1088. \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}。 1089. \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx (|x| < |a|)。$$

$$1090. (a) (1+x)e^x dx; (b) x \sin x dx; (B) -\frac{3dx}{x^4} (x \neq 0); (r) \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} dx$$

$$(x > 0); (d) \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}; (e) \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} (|x| < 1); (B) -\frac{2xdx}{1-x^2} (|x| < 1);$$

$$(3) \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} (|x| > 1); (H) \frac{dx}{\cos^3 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ 为整数} \right)。$$

$$1091. vw du + uv dv + uv dw。 1092. \frac{v du - 2u dv}{v^3} (v \neq 0)。$$

$$1093. -\frac{u du + v dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} (u^2 + v^2 > 0)。 1094. \frac{v du - u dv}{u^2 + v^2} (u^2 + v^2 > 0)。$$

1095. $\frac{u du + v dv}{u^2 + v^2}$ ($u^2 - v^2 > 0$)。 1096. (a) $1 - 4x^3 - 3x^6$; (b) $\frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right)$, (B) $-\operatorname{ctg} x (x \neq k\pi, k \text{ 为整数})$; (r) $-\operatorname{tg}^2 x \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ 为整数} \right)$; (d) $-1 (|x| < 1)$ 。 1097. (a) 增加 104.7 平方厘米; (b) 减少 43.6 平方厘米。 1098. 增加 2.23 厘米。 1099. 1.007 (查表: 1.0066)。
1100. 0.4849 (查表: 0.4848)。 1101. -0.8747 (查表: -0.8764)。 1102. $0.8104 = \operatorname{arc} 46^\circ 26'$ (查表: $\operatorname{arc} 46^\circ 24'$)。 1103. 1.043 (查表: 1.041)。
1104. (a) 2.25 (查表: 2.24); (b) 5.833 (查表: 5.831); (n) 10.9546 (查表: 10.9545)。 1105. (a) 2.083 (查表: 2.080); (b) 2.9907 (查表: 2.9905); (B) 1.938 (查表: 1.931); (r) 1.9954 (查表: 1.9953)。
1106. 0.24 平方米; 4.2%。 1107. $\delta_R \leq 0.33\%$ 。 1108. (a) $\delta_y = \delta_1$; (b) $\delta_y = 2\delta_r$ 。 1109. 0.438。 1111. $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。 1112. $\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ($|x| < 1$)。 1113. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$ 。 1114. $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k=0, \pm 1, \dots \right)$ 。
1115. $\frac{2x}{1+x^2} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ 。 1116. $\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2) \operatorname{arc} \sin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ($|x| < 1$)。 1117. $\frac{1}{x}$ ($x > 0$)。
1118. $\frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}$ ($f(x) > 0$)。 1119. $-\frac{2}{x} \sin(\ln x)$ ($x > 0$)。 1120. $y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=0$ 。 1121. $2(uu'' + u'^2)$ 。
1122. $\frac{uu'' - u'^2}{u^2} - \frac{vv'' - v'^2}{v^2}$ ($uv > 0$)。 1123. $\frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - uv')^2}{(u^2 + v^2)^{\frac{5}{2}}}$ ($u^2 + v^2 > 0$)。 1124. $y'' = u^v \left[\left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)^2 + v \frac{uu'' - u'^2}{u^2} + \frac{2u'v'}{u} + v'' \ln u \right]$ 。
1125. $y'' = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2)$; $y''' = 8x^3 f'''(x^2) + 12x f''(x^2)$ 。 1126. $y'' = \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right)$; $y''' = -\frac{1}{x^5} f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^6} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right)$ 。
1127. $y' = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x)$; $y''' = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x)$ 。
1128. $y'' = \frac{1}{x^2} [f''(\ln x) - f'(\ln x)]$; $y''' = \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)]$ 。
1129. $y'' = \varphi'^2(x) f''(\varphi(x)) + \varphi''(x) f'(\varphi(x))$;

$$y''' = \varphi'^3(x)f'''(\varphi(x)) + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x)) + \varphi'''(x)f'(\varphi(x)). \quad 1130. \quad (E)$$

$$e^x dx^2 \quad (6) e^x(dx^2 + d^2x). \quad 1131. \quad \frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad 1132. \quad \frac{2\ln x - 3}{x^3} dx^2 (x > 0).$$

$$1133. \quad x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2. \quad 1134. \quad u d^2 v + 2 du dv + v d^2 u.$$

$$1135. \quad \frac{(v d^2 u - u d^2 v) - 2 dv(v du - u dv)}{v^3} (v > 0). \quad 1136. \quad u^{m-2} v^{n-2} \{ [m \times \\ \times (m-1) v^2 du^2 + 2mn uv du dv + n(n-1) u^2 dv^2] + uv(mv d^2 u + nu d^2 v) \}.$$

$$1137. \quad a^u \ln a (du^2 \ln a + d^2 u) (a > 0). \quad 1138. \quad [(v^2 - u^2) du^2 - 4uv du dv + \\ + (u^2 - v^2) dv^2 + (u^2 + v^2)(u d^2 u + v d^2 v)] (u^2 + v^2)^{-2} (u^2 + v^2 > 0).$$

$$1139. \quad [-2uv du^2 + 2(u^2 - v^2) du dv + 2uv dv^2 + (u^2 + v^2)(v d^2 u - u d^2 v)] \times \\ \times (u^2 + v^2)^{-2} (u^2 + v^2 > 0). \quad 1140. \quad y' = \frac{3}{4(1-t)}; y'' = \frac{3}{8(1-t)^2} (t \neq 1).$$

$$1141. \quad y' = -\frac{1}{a \sin^3 t}; y'' = -\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^5 t} (t \neq k\pi, k \text{ 为整数}). \quad 1142. \quad y' =$$

$$= -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}; y'' = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4a^2 \sin^7 \frac{t}{2}} (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数}). \quad 1143. \quad y' =$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3 \left(t + \frac{\pi}{4} \right)}; y'' = \frac{e^{-2t} (2 \sin t + \cos t)}{\sqrt{2} \cos^5 \left(t + \frac{\pi}{4} \right)} \left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots \right).$$

$$1144. \quad y' = \frac{1}{f''(t)}; y'' = -\frac{f'''(t)}{f''^3(t)} [f''(t) \neq 0]. \quad 1145. \quad x' = \frac{1}{y'};$$

$$x'' = -\frac{y''}{y'^3}; \quad x''' = -\frac{y' y'' - 3y''^2}{y'^5}; \quad x^{IV} = -\frac{y'^2 y''' - 10y' y'' y''' + 15y''^3}{y'^7}$$

$$(y' \neq 0). \quad 1146. \quad -\frac{x}{y}, \quad -\frac{25}{y^3}, \quad -\frac{75x}{y^5}; \quad -\frac{3}{4}, \quad -\frac{25}{64}, \quad -\frac{225}{1024}.$$

$$1147. \quad \frac{p}{y}, \quad -\frac{p^2}{y^3}, \quad \frac{3p^3}{y^5}. \quad 1148. \quad y' = \frac{2x-y}{x-2y}, \quad y'' = \frac{b}{(x-2y)^3}; \quad y''' =$$

$$= \frac{54x}{(x-2y)^5}. \quad 1149. \quad y' = \frac{2x^3 y}{1+y^2}; \quad y'' = \frac{2x^2 y}{(1+y^2)^2} [3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)].$$

$$1150. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}; \quad y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \quad 1151. \quad a = \frac{1}{2} f''(x_0); \quad b = f'(x_0);$$

$$c = f(x_0). \quad 1152. \quad 20 - 10t, \quad -10; \quad 0, \quad -10. \quad 1153. \quad v = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t;$$

$$j = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad 1154. \quad x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}; \quad v =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2}, \quad j = g; \quad y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}; \quad \frac{\sin^2 \alpha}{2g};$$

$$\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad 1155. \quad x^2 + y^2 = 25; \quad 5|\omega|, \quad 5\omega^2. \quad 1156. \quad y^{(6)} = 4.6!; \quad y^{(7)} = 0.$$

$$1157. \quad y''' = -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} \quad (x \neq 0). \quad 1158. \quad y^{(10)} = -\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$$

($x > 0$), 其中 $n!!$ 表示不超过数 n 的所有奇数或所有偶数的乘积, 即是說

$$17!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 17. \quad 1159. \quad y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9} \quad (x \neq 1). \quad 1160. \quad y^{(100)} =$$

$$= \frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}} \quad (x < 1). \quad 1161. \quad y^{(20)} = 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$$

$$1162. \quad y^{(10)} = e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}, \quad \text{其中 } A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdots (11-i) \quad \text{和 } A_{10}^0 = 1.$$

$$1163. \quad y^{(5)} = -\frac{6}{x^2} \quad (x > 0). \quad 1164. \quad y^{(5)} = \frac{274}{x^5} - \frac{120}{x^6} \ln x \quad (x > 0).$$

$$1165. \quad y^{(50)} = 2^{50}(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x). \quad 1166. \quad y''' =$$

$$= \frac{27(1-3x)^2 - 36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} \sin 3x - \frac{27(1-3x)^2 - 28}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \cos 3x \left(x \neq \frac{1}{3}\right). \quad 1167. \quad y^{(10)} =$$

$$= -2^3 \sin 2x - 2^{13} \sin 4x + 2^9 \cdot 3^{10} \sin 6x. \quad 1168. \quad y^{(100)} = x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x.$$

$$1169. \quad y^{IV} = -4e^x \cos x. \quad 1170. \quad y^{(6)} = -\frac{60}{x^3} + \left(-\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x}\right) \times$$

$$\times \sin 2x + \left(\frac{60}{x^3} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x\right) \cos 2x. \quad 1171. \quad 120 dx^5. \quad 1172.$$

$$-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}} dx^3 \quad (x > 0). \quad 1173. \quad -1024(x \cos 2x + 5 \sin 2x) dx^{10}.$$

$$1174. \quad e^x \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4. \quad 1175. \quad 8 \sin x \operatorname{sh} x dx^3.$$

$$1176. \quad 2u d^{10}u + 20 du d^9u + 90 d^2u d^8u + 240 d^3u d^7u + 420 d^4u d^6u + 252(d^5u)^2. \quad 1177. \quad e^u(du^4 + 6du^2 d^2u + 4du d^3u + 3d^2u^2 + d^4u).$$

$$1178. \quad \frac{2du^3}{u^3} - \frac{3du d^2u}{u^2} + \frac{d^3u}{u}. \quad 1179. \quad d^2y = y'' dx^2 + y' d^2x; \quad d^3y = y'''$$

$$dx^3 + 3y'' dx d^2x + y' d^3x; \quad d^4y = y^{IV} dx^4 + 6y''' dx^2 d^2x + 4y'' dx d^3x + 3y'' d^2x^2 + y' d^4x.$$

$$1180. \quad y'' = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3}; \quad y''' = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

$$1187. \quad P^{(n)}(x) = a_0 n!$$

$$1188. \quad \frac{(-1)^{n-1} n! c^{n-1} (ad - bc)}{(cx + d)^{n+1}}.$$

$$1189. n! \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right].$$

$$1190. (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right].$$

$$1191. \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}} \left(x < \frac{1}{2} \right).$$

$$1192. \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdots (3n-5)(3n+2r)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}} \quad (n \geq 2; x \neq -1).$$

$$1193. -2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$1194. 2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$1195. \frac{3}{4} \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{3^n}{4} \sin \left(3x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$1196. \frac{3}{4} \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) +$$

$$+ \frac{3^n}{4} \cos \left(3x + \frac{n\pi}{2} \right). \quad 1197. \frac{(a-b)^n}{2} \cos \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] - \frac{(a+b)^n}{2} \cos x$$

$$\times \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right]. \quad 1198. \frac{(a-b)^n}{2} \cos \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] + \frac{(a+b)^n}{2} \times$$

$$\times \cos \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right]. \quad 1199. \frac{(a-b)^n}{2} \sin \left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] + \frac{(a+b)^n}{2} \times$$

$$\times \sin \left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right]. \quad 1200. \frac{b^n}{2} \cos \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{(2a-b)^n}{4} \cos x$$

$$\times \left[(2a-b)x + \frac{n\pi}{2} \right] - \frac{(2a+b)^n}{4} \cos \left[(2a+b)x + \frac{n\pi}{2} \right]. \quad 1201. 4^{n-1} \cos x$$

$$\times \left(4x + \frac{n\pi}{2} \right). \quad 1202. a^n x \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) + na^{n-1} \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$1203. a^n \left[x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2} \right] \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) - 2na^{n-1} x \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right).$$

$$1204. (-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x + (n-1)(n-2)]. \quad 1205. e^x \left\{ \frac{1}{x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{x^{k+1}} \right\}.$$

$$1206. e^x 2^{\frac{n}{2}} \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right).$$

$$1207. e^x 2^{\frac{n}{2}} \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right). \quad 1208. \frac{(n-1)! b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^n} [(a+bx)^n + (-1)^{n-1} \times$$

$$\times (a-bx)^n] \left(\left| x \right| < \left| \frac{a}{b} \right| \right). \quad 1209. e^{ax} [a^n P(x) + C_n^1 a^{n-1} P'(x) + \cdots +$$

$$+ P^{(n)}(x)]. \quad 1210. \frac{1}{2} \{ [(x+n) - (-1)^n(x-n)] \operatorname{ch} x + [(x+n) +$$

$$+ (-1)^n(x-n)] \operatorname{sh} x \}. \quad 1211. d^n y = e^x [x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} +$$

$$+ \cdots + n!] dx^n. \quad 1212. \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left\{ \ln x - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right\} dx^n (x > 0). \quad 1214. (a)$$

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \times \left[\cos \left(np - \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{ch} ax \cos \left(bx + \frac{n\pi}{2} \right) - \sin \left(np - \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sh} ax \sin \left(bx + \right.$$

$$+\frac{n\pi}{2}\Bigg]; \quad (6) (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos\left(np-\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{ch} ax \sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\times\right. \\ \times\left.\left(np-\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sh} ax \cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]; \quad (B) (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\sin np \operatorname{ch} ax \sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)+\right. \\ \left.+\cos np \operatorname{sh} ax \cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]; \quad (r) (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[-\sin np \operatorname{ch} ax \cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)+\right. \\ \left.+\cos np \operatorname{sh} ax \sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right], \text{ 其中 } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$1215. f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{p+k} 2^{n-2k+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right],$$

$$1216. (a) \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \sin\left[(2p-2k+1)x + \frac{n\pi}{2}\right];$$

$$(6) \sum_{k=0}^{2p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n\pi}{2}\right]; \quad (B) \sum_{k=0}^p \left\{ \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}} \times \right. \\ \left. \times C_{2p-1}^k \cos\left[(2p-2k+1)x + \frac{n\pi}{2}\right] \right\}.$$

$$1218. \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin \times$$

$$\times \left(n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}\right) (x \neq 0). \quad 1219. (a) \frac{n!}{3} \left[2^{n+1} + (-1)^n\right]; \quad (6) \frac{n(2n-3)!}{2^{n-1}}$$

$$(n > 1). \quad 1220. (a) n(n-1)a^{n-2}; \quad (6) f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = \\ = (-1)^k (2k)! \quad (k=0, 1, 2, \dots); \quad (B) f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = [1 \cdot 3 \cdots \\ \cdots (2k-1)]^2 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

$$1221. (a) f^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2 (m^2 - 2^2) \cdots [m^2 - (2k-2)^2], f^{(2k-1)}(0) = 0 \\ (k=1, 2, \dots); \quad (6) f^{(2k)}(0) = 0, f'(0) = m, f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k m (m^2 - 1^2) \cdots \\ \cdots [m^2 - (2k-1)^2] \quad (k=1, 2, \dots). \quad 1222. (a) f^{(2k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot 2(2k-1)!$$

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\right), f^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots); \quad (6) f^{(2k)}(0) = \\ = 2^{2k-1} [(k-1)!]^2, f^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots). \quad 1223. n! \varphi(a).$$

$$1228. L_m(x) = (-1)^m \left[x^m - m^2 x^{m-1} + \frac{m^2(m-1)^2}{1 \cdot 2} x^{m-2} + \cdots + (-1)^m m!\right].$$

$$1231. H_m(x) = (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \times \\ \times (2x)^{m-4} - \cdots.$$

$$1236. \text{ 当 } x=0 \text{ 时有穷的导函数 } f'(x) \text{ 不存在.}$$

$$1244. A(-1, -1), C(1, 1). \quad 1245. \text{ 不正确.} \quad 1246. (a) \theta = \frac{1}{2};$$

$$(6) \theta = \frac{\sqrt{a^2 + x \Delta x + \frac{1}{3}(4x)^2 - x}}{\Delta x} \quad (x \geq 0); \quad (B) \theta = \frac{x}{\Delta x} \left(\sqrt{1 + \frac{4x}{x}} - 1 \right)$$

$$[x(x+4x) > 0]; \quad (r) \theta = \frac{1}{4x} \ln \frac{e^{4x} - 1}{4x}.$$

$$1248. c = \frac{1}{2} \text{ 或 } \sqrt{2}.$$

1250. 一般地说, 不。 1261. $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$, 其中 $c_i (i=0, 1, \cdots, n-1)$ 为常数。 1268. 当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时函数增大; 当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时减小。 1269. 当 $-\infty < x < -1$ 时函数减小; 当 $-1 < x < 1$ 时增大; 当 $1 < x < +\infty$ 时, 减小。 1270. 当 $-\infty < x < -1$ 时函数减小; 当 $-1 < x < 1$ 时函数增大; 当 $1 < x < +\infty$ 时减小。 1271. 当 $0 < x < 100$ 时函数增大; 当 $100 < x < +\infty$ 时减小。 1272. 函数增大。 1273. 在区间 $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 内函数增大; 在区间 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ 减小 ($k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)。 1274. 在区间 $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ 内函数增大; 在区间 $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ 内减小 ($k=0, 1, 2, \cdots$)。 1275. 当 $-\infty < x < 0$ 时函数减小; 当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时增大; 当 $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时减小。 1276. 当 $0 < x < n$ 时函数增大; 当 $n < x < +\infty$ 时减小。 1277. 当 $-\infty < x < -1$ 及 $0 < x < 1$ 时减小; 当 $-1 < x < 0$ 及 $1 < x < +\infty$ 时增加。 1278. 在区间 $(e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi}, e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi})$ 内函数增大; 在区间 $(e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}, e^{\frac{17\pi}{12}+2k\pi})$ 减小 ($k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)。 1283. 未必。 1298. 在 A 点曲线是凹的; 在 B 点是凸的; C 为拐点。 1299. 当 $-\infty < x < 1$ 时图形是凹的, 当 $1 < x < +\infty$ 时是凸的; $x=1$ 为拐点。 1300. 当 $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时是凸的; 当 $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时是凹的; $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ 为拐点。 1301. 当 $x < 0$ 时是凸的; 当 $x > 0$ 时是凹的; $x=0$ 为拐点。 1302. 凹的。 1303. 当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时是凸的; 当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时是凹的; $x=k\pi$ 为拐点 ($k=0, \pm 1, 2, \cdots$)。 1304. 当 $|x| < \sqrt{\frac{1}{2}}$ 时是凸的; 当 $|x| > \sqrt{\frac{1}{2}}$ 时是凹的; $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ 为拐点。 1305. 当 $|x| < 1$ 时是凹的; 当 $|x| > 1$ 时是凸的; $x = \pm 1$ 为拐点。 1306. 当 $e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 时是凹的; 当 $e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}$ 时是凸的; $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 为拐点 ($k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)。 1307. 当 $0 < x < +\infty$ 时是凹的。 1309. $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ 。 1310. 是凸的(当

- $a > 0$)。 1318. $\frac{a}{b}$ 。 1319. 1。 1320. 2。 1321. -2。 1322. $\frac{1}{3}$ 。
 1323. $-\frac{1}{3}$ 。 1324. $\frac{1}{3}$ 。 1325. $\frac{1}{6}$ 。 1326. $\frac{1}{2}$ 。 1327. 1。
 1328. $\frac{a-b}{3ab}$ 。 1329. $\frac{1}{6} \ln a$ 。 1330. -2。 1331. 1。 1332. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ 。
 1333. $\frac{1}{6}$ 。 1334. $\frac{2}{3}$ 。 1335. 1。 1336. 0。 1337. 0。 1338. 0。
 1339. 0。 1340. 0。 1341. 0。 1342. 1。 1343. 1。 1344. -1。
 1345. e^k 。 1346. e^{-1} 。 1347. $e^{\frac{2}{x}}$ 。 1348. e^{-1} 。 1349. 1。 1350. 1。
 1351. 1。 1352. $e^{\frac{2}{\sin 2a}} \left(a \div \frac{k\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right)$ 。 1353. $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$ 。
 1354. $\frac{1}{2}$ 。 1355. $\frac{1}{2}$ 。 1356. 0。 1357. $-\frac{1}{2}$ 。 1358. $a^x(\ln a - 1)$ 。
 1359. $-\frac{e}{2}$ 。 1360. $\frac{1}{a}$ 。 1361. $e^{-\frac{2}{x}}$ 。 1362. 1。 1363. $e^{\frac{1}{x}}$ 。
 1364. $e^{-\frac{1}{2}}$ 。 1365. $e^{-\frac{2}{x}}$ 。 1366. e^{-1} 。 1367. $\frac{mn}{n-m}$ 。 1368. \sqrt{e} 。
 1369. $-\frac{1}{6}$ 。 1370. a 。 1371. $\lg a$ 。 1374. (a) 洛比塔法则不能适用, 极限等于零; (b) 洛比塔法则不能适用, 极限等于 1; (c) 表面上地运用洛比塔法则得出不正确的结果为 0, 极限不存在; (d) 运用洛比塔法则不合理且引出不正确的结果为 0, 极限不存在。
 1375. $\frac{4}{3}$ 。 1376. $5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$ 。
 1377. $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$; -48。
 1378. $1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2)$ 。 1379. $a + \frac{x}{m a^{m-1}} - \frac{(m-1)x^2}{2m^2 a^{2m-1}} + o(x^2)$ 。
 1380. $\frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3)$ 。 1381. $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$ 。
 1382. $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$ 。 1383. $x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13})$ 。
 1384. $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$ 。 1385. $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ 。 1386. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ 。
 1387. $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6)$ 。 1388. $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ 。
 1389. $(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$ 。 1390. $y = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2)$ 。 1391. $\frac{1}{2x} -$

$$-\frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \quad 1392. \ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{h^{n-1}}{nx^{n-1}} + o(h^n).$$

$$1394. (a) \text{ 小于 } \frac{3}{(n+1)!}; (b) \text{ 不超过 } \frac{1}{3840}; (c) \text{ 小于 } 2 \cdot 10^{-8}; (d) \text{ 小于 } \frac{1}{16}.$$

$$1395. x \approx 0.222 = \arccos 12^\circ 30'. \quad 1396. (a) 3.1072; (b) 3.0171;$$

$$(c) 1.9960; (d) 1.64872; (e) 0.309017; (f) 0.182321; (g) 0.67474 = \arccos 38^\circ 39' 35''; (h) 0.46676 = \arccos 26^\circ 44' 37''; (i) 1.12117. \quad 1397. (a)$$

$$2.718281828; (b) 0.01745241; (c) 0.98769; (d) 2.2361; (e) 1.04139.$$

$$1398. -\frac{1}{12}. \quad 1399. \frac{1}{3}. \quad 1400. -\frac{1}{4}. \quad 1401. \frac{1}{3}. \quad 1402. \frac{1}{6}.$$

$$1403. \ln^2 x. \quad 1404. \frac{1}{2}. \quad 1405. 0. \quad 1406. \frac{1}{3}. \quad 1407. \frac{x^7}{30}.$$

$$1408. x^2. \quad 1409. \frac{x}{2}. \quad 1410. a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}. \quad 1411. (a) \frac{2x}{R^3};$$

$$(b) \frac{4}{3}x; (c) \frac{4x}{100}; (d) \frac{70}{x}. \quad 1412. \alpha = \frac{2}{3}; \beta = \frac{1}{3}. \quad 1413. \frac{\alpha^4}{180}, \text{ 其中 } \alpha$$

$$\text{为弧所对圆心角之半.} \quad 1414. \text{ 当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时极大值 } y = 2\frac{1}{4}. \quad 1415. \text{ 无极}$$

$$\text{值.} \quad 1416. \text{ 当 } x=1 \text{ 时极小值 } y=0. \quad 1417. \text{ 若 } m \text{ 为偶数, 当 } x=0$$

$$\text{时极小值 } y=0, \text{ 若 } m \text{ 为奇数, 当 } x=0 \text{ 时无极值; 当 } x = \frac{m}{m+n} \text{ 时极大值}$$

$$y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}; \text{ 若 } n \text{ 为偶数, 当 } x=1 \text{ 时极小值 } y=0, \text{ 若 } n \text{ 为奇数, 当}$$

$$x=1 \text{ 时无极值.} \quad 1418. \text{ 当 } x=0 \text{ 时极小值 } y=2. \quad 1419. \text{ 当 } x=-1 \text{ 时极小}$$

$$\text{值 } y=0; \text{ 当 } x=9 \text{ 时极大值 } y=10^{10}e^{-9} \approx 1234000. \quad 1420. \text{ 若 } n \text{ 为奇数, 当}$$

$$x=0 \text{ 时极大值 } y=1; \text{ 若 } n \text{ 为偶数, 当 } x=0 \text{ 时无极值.} \quad 1421. \text{ 当 } x=0 \text{ 时极}$$

$$\text{小值 } y=0. \quad 1422. \text{ 当 } x = \frac{1}{3} \text{ 时极大值 } y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0.529; \text{ 当 } x=1 \text{ 时极小}$$

$$\text{值 } y=0; \text{ 当 } x=0 \text{ 时无极值.} \quad 1423. \text{ 若 } \varphi(x_0) > 0 \text{ 及 } n \text{ 为偶数, 极小值}$$

$$f(x_0)=0; \text{ 若 } \varphi(x_0) < 0 \text{ 及 } n \text{ 为偶数, 极大值 } f(x_0)=0; \text{ 若 } n \text{ 为奇数, } f(x_0) \text{ 非}$$

$$\text{极值.} \quad 1425. \text{ 不.} \quad 1427. (a) \text{ 极小值 } f(0)=0; (b) \text{ 极小值 } f(0)=0.$$

$$1428. \text{ 极小值 } f(0)=0. \quad 1429. \text{ 当 } x=1 \text{ 时极大值 } y=0; \text{ 当 } x=3 \text{ 时极小值}$$

$$y \approx -4. \quad 1430. \text{ 当 } x=0 \text{ 时极小值 } y=0; \text{ 当 } x=\pm 1 \text{ 时极大值 } y=1.$$

$$1431. \text{ 当 } x = \frac{5-\sqrt{13}}{6} \approx 0.23 \text{ 时极小值 } y \approx -0.76; \text{ 当 } x=1 \text{ 时极大值 } y=0;$$

$$\text{当 } x = \frac{5+\sqrt{13}}{6} \approx 1.43 \text{ 时极小值 } y \approx -0.05; \text{ 当 } x=2 \text{ 时无极值.} \quad 1432. \text{ 当}$$

- $x = -1$ 时极大值 $y = -2$; 当 $x = 1$ 时极小值 $y = 2$ 。 **1433.** 当 $x = -1$ 时极小值 $y = -1$; 当 $x = 1$ 时极大值 $y = 1$ 。 **1434.** 当 $x = \frac{7}{5}$ 时极小值 $y = -\frac{1}{24}$ 。
1435. 当 $x = 0$ 和 $x = 2$ 时边界的极小值 $y = 0$; 当 $x = 1$ 时极大值 $y = 1$ 。
1436. 当 $x = \frac{3}{4}$ 时极小值 $y = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2} \approx -0.46$; 当 $x = 1$ 时无极值。
1437. 当 $x = 1$ 时极大值 $y = e^{-1} \approx 0.368$ 。 **1438.** 当 $x = +0$ 时边界的极大值 $y = 0$; 当 $x = e^{-2} \approx 0.135$ 时极小值 $y = -\frac{2}{e} \approx -0.736$ 。 **1439.** 当 $x = 1$ 时极小值 $y = 0$; 当 $x = e^2 \approx 7.389$ 时极大值 $y = \frac{4}{e^2} \approx 0.541$ 。 **1440.** 当 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时极大值 $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$; 当 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时极小值 $y = -\frac{3}{4}$ 。 **1441.** 当 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时极大值 $y = 10$; 当 $x = \pi(k + \frac{1}{2})$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时极小值 $y = 5$ 。 **1442.** 当 $x = 1$ 时极大值 $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.439$ 。 **1443.** 当 $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时极小值 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}$; 当 $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时极大值 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}$ 。 **1444.** 当 $x = -1$ 时极大值 $y = e^{-2} \approx 0.135$; 当 $x = 0$ 时极小值 $y = 0$ (角点); 当 $x = 1$ 时极大值 $y = 1$ 。 **1445.** $\frac{1}{2}$; 32。 **1446.** 2; 66。 **1447.** 0; 132。 **1448.** 2; 100.01。 **1449.** 1; 3。 **1450.** 0; $\frac{100}{e} \approx 36.8$ 。 **1451.** 0; 1。 **1452.** 0; $\frac{1}{2} \times (1 + \sqrt{2}) \approx 1.2$ 。 **1453.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067$; 1。 **1454.** 若 $-\infty < x \leq -3$; $m(x) = -\frac{1}{6}$; 若 $-3 < x \leq -1$; $m(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$; 若 $-1 < x < +\infty$, $m(x) = 0$; 若 $-\infty < x \leq 1$, $M(x) = \frac{1}{2}$; 若 $1 < x < +\infty$, $M(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$ 。 **1455.** a) $\frac{14^{10}}{2^{14}} \approx 1.77 \cdot 10^7$; b) $\frac{1}{200}$; B) $\sqrt[3]{3} \approx 1.44$ 。
1457. $\frac{9+6\sqrt{3}}{4} \approx 4.85$ 。 **1458.** $q = -\frac{1}{2}$ 。 **1459.** $\frac{4}{27}$ 。 **1460.** $g(x) = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2)$; $\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2$ 。 **1461.** $\frac{2}{3}$ 。

1462. 一个根: $(3, +\infty)$ 。 **1463.** 若 $h > 27$, 一个根: $-\infty < x_1 < -1$; 若 $-5 < h < 27$, 三个根: $-\infty < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 3$ 和 $3 < x_3 < +\infty$; 若 $h < -5$, 一个根: $3 < x_3 < +\infty$ 。

1464. 两个根: $-\infty < x_1 < -1$ 和 $1 < x_2 < +\infty$ 。 **1465.** 若 $-\infty < a < -4$, 一个根: $-\infty < x_1 < -1$;

若 $-4 < a < 4$, 三个根: $-\infty < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < +\infty$; 若 $4 < a < +\infty$, 一个根: $1 < x_1 < +\infty$ 。

1466. 若 $-\infty < k < 0$, 一个根: $0 < x_1 < 1$; 若 $0 < k < \frac{1}{e}$, 两个根: $0 < x_1 < \frac{1}{k}$ 和 $\frac{1}{k} < x_2 < +\infty$; 若 $k > \frac{1}{e}$, 无

根。 **1467.** 若 $a < 0$, 无根; 若 $0 < a < \frac{e^2}{4}$, 一个根: $-\infty < x_1 < 2$; 若 $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$, 三个根: $-\infty < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 2$ 和 $2 < x_3 < +\infty$ 。

1468. 当 $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 有二根; 当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 无根。 **1469.** 若 $|k| > \operatorname{sh} \xi \approx 1.50$,

两个根: $0 < |x_1| < \xi$ 和 $\xi < |x_2| < +\infty$, 其中 $\xi \approx 1.2$ 为方程式 $\operatorname{cth} x = x$ 之正根; 若 $|k| < \operatorname{sh} \xi$, 无根。 **1470.** a) $\frac{p^3}{27} + \frac{q^3}{4} > 0$; 6) $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$ 。

1471. 对坐标原点成对称。函数的零点: $x=0$ 和 $x=\pm\sqrt{3} \approx \pm 1.73$ 。当 $x=-1$, 极小值 $y=-2$; 当 $x=1$ 时极大值 $y=2$ 。拐点 $x=0$, $y=0$ 。

1472. 关于 Oy 轴成对称。函数为零的点: $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{3}} \approx \pm 1.65$ 。当 $x=0$ 时极小值 $y=1$ 。当 $x=\pm 1$ 时, 极大值 $y=1\frac{1}{2}$ 。拐点: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$;

$y=1\frac{5}{18}$ 。 **1473.** 关于点 $A(1, 2)$ 成对称。零点: $x=-1$ 和 $x=2$ 。

当 $x=2$ 时极小值 $y=0$; 当 $x=0$ 时极大值 $y=4$ 。拐点: $x=1$, $y=2$ 。

1474. 关于 Oy 轴成对称。函数的零点: $x=\pm\sqrt{2} \approx \pm 1.41$ 。当 $x=0$ 时极大值 $y=1$; 当 $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}} \approx \pm 2.06$ 时极小值 $y=1-\frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.12$ 。

拐点: $x_{1,2}=\pm 1$, $y_{1,2}=\frac{1}{2}$; $x_{3,4} \approx \pm 1.51$, $y_{3,4} \approx -0.046$ 。渐近线 $y=0$ 。

1475. 零点: $x=\pm 1$ 。不连续点: $x=2$ 和 $x=3$ 。当 $x=\frac{7-\sqrt{24}}{5} \approx 0.42$ 时极

小值 $y=-(10-\sqrt{96}) \approx -0.20 \approx -0.20$ 当 $x=\frac{7+\sqrt{24}}{5} \approx 2.33$ 时极大值

$y=-(10+\sqrt{96}) \approx -19.80$ 。拐点 $x \approx -0.586$, $y \approx -0.07$ 。渐近线:

$x=2$, $x=3$ 和 $y=1$ 。 **1476.** $x=0$ 函数为零。不连续点: $x_1=-1$ 和 $x_2=1$ 。

- 无极值点。拐点 $x \approx -0.22$, $y \approx -0.20$ 。渐近线: $x = -1$, $x = 1$ 和 $y = 0$ 。
- 1477.** $x = 0$ 函数为零。不连续点 $x = -1$ 。当 $x = 0$ 时极小值 $y = 0$; 当 $x = -4$ 时极大值 $y = -9 \frac{13}{27}$ 。无拐点。渐近线: $x = -1$ 和 $y = x - 3$ 。
- 1478.** 当 $x = -1$ 时极小值 $y = 0$, 拐点 $x = -4$, $y = \frac{81}{625}$ 。渐近线: $x = 1$ 及 $y = 1$ 。
- 1479.** 当 $x = -\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \approx -3.56$ 时极大值 $y = -\frac{34\sqrt{17} + 142}{32} \approx -8.82$; 当 $x = 0$ 时极大值 $y = 0$; 当 $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \approx 0.56$ 时极小值 $y = -\frac{34\sqrt{17} - 142}{32} \approx -0.06$ 。拐点 $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{1}{45}$ 。渐近线: $x = -1$ 及 $y = x - 3$ 。
- 1480.** 关于原点对称。无极值点; 拐点 $x = 0$, $y = 0$ 。渐近线: $x = -1$, $x = 1$ 及 $y = 0$ 。
- 1481.** 当 $x = 5$ 极小值 $y = 13 \frac{1}{2}$; 拐点 $x = -1$, $y = 0$ 。渐近线: $x = 1$ 及 $y = x + 5$ 。
- 1482.** 当 $x = 2$ 时极小值 $y = 2 \frac{2}{3}$; 当 $x \approx -2.4$ 时极大值 $y \approx -3.2$; 拐点 $x = 0$, $y = 8$ 。渐近线: $x = -1$ 及 $y = x$ 。
- 1483.** 关于 Oy 轴对称。函数为零: $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79$ 。无极值点。拐点: $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$, $y = -2 \frac{2}{3}$ 。渐近线: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ 和 $y = 0$ 。
- 1484.** 存在域: $0 \leq x < +\infty$ 。函数为零的点: $x = 0$ 和 $x = 3$ 。当 $x = 1$ 时极小值 $y = -2$; 当 $x = 0$ 时边界的极大值 $y = 0$ 。凹的。
- 1485.** 存在域: $|x| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.83$ 。关于坐标原点和坐标轴对称。函数为零的点: $x = 0$ 和 $x = \pm 2\sqrt{2}$ 。当 $x = \pm 2$, 极大值 $|y| = 4$; 当 $x = 0$ 时极小值 $|y| = 0$; 当 $x = \pm 2\sqrt{2}$ 时边界的极小值 $|y| = 0$ 。无拐点。
- 1486.** 存在域: $1 \leq x \leq 2$ 和 $3 \leq x < +\infty$ 。函数为零的点: $x = 1$, $x = 2$ 和 $x = 3$ 。当 $x = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \approx 1.42$ 时极大值 $|y| = \frac{1}{3} \sqrt[4]{12} \approx 0.62$; 当 $x = 1, 2$ 和 3 , 边界的极小值 $|y| = 0$ 。无拐点。
- 1487.** 当 $x = 1$ 时极小值 $y = 0$; 当 $x = -\frac{1}{3}$ 时极大值 $y = \frac{4}{3} \sqrt[3]{4} \approx 1.06$; 拐点 $x = -1$, $y = 0$ 。渐近线 $y = x - \frac{1}{3}$ 。
- 1488.** 关于 Oy 轴对称。当 $x = 0$ 时, 极小值 $y = -1$ 。向下凹。渐近线 $y = 0$ 。
- 1489.** 关于坐标原点对称。函数为零的点: $x = 0$ 。当 $x = -2$ 时极小值 $y = -\sqrt[5]{16}$; 当 $x = 2$ 时极大值 $y = \sqrt[5]{16}$ 。拐点: $x = 0$, $y = 0$ 。渐近线: $y = 0$ 。
- 1490.** 关于 Oy 轴成对称。当

$x = \pm 1$ 时极小值 $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$; 当 $x = 0$ 时极大值 $y = 2$ 向下凹。1491. 关于坐标原点对称。不连续点: $x = \pm 1$ 。 $x = 0$ 函数为零。当 $x = \sqrt{3}$ 时极小值 $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1.38$; 当 $x = -\sqrt{3}$ 时极大值 $y = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ 。拐点: $x_1 = 0, y_1 = 0$ 和 $x_{2,3} = \pm 3, y_{2,3} = \pm 1\frac{1}{2}$ 。1492. 函数的存在域: $x = 0$ (孤立点) 和 $x \geq 1$ 。关于 Oy 轴对称。当 $x = \pm 1$ 时边界的极小值 $y = 0$ 。凸的。渐近线: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = \frac{x}{2}$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $y = -\frac{x}{2}$ 。1493. 函数的存在域: $x > 0$ 。当 $x = \frac{1}{2}$ 时极小值 $y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.60$ 。凹的。渐近线 $y = x + \frac{3}{2}$ 及 $x = 0$ 。1494. 存在域: $x \geq 0$ 及 $x < -3$ 。函数的零点 $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx 4.30$, 当 $x = -4$ 时极小值 $y = 13$; 当 $x = 0$ 边界的极大值 $y = 1$ 。凹。渐近线: 当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $y = \frac{5}{2} - 2x$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = -\frac{1}{2}$; 当 $x \rightarrow -3 - 0$ 时 $y = -3$ 。1495. 当 $x = 0$ 时极小值 $y = 0$ 。当 $x = -2$ 时, 极大值 $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1.59$ 。拐点: $x_1 = -(2 - \sqrt{3}) \approx -0.27, y_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}-5}{2}} \approx 0.46$; $x_2 = -(2 + \sqrt{3}) \approx -3.73, y_2 = -\sqrt[3]{\frac{5+\sqrt{27}}{2}} \approx -1.72$ 。渐近线 $x = -1$ 。1496. 关于 Oy 轴对称。函数是正的。当 $x = 0$ 时极大值 $y = \sqrt{3} \approx 1.73$; 当 $x = \pm 1$ 时极小值 $y = \sqrt{2} \approx 1.41$ 。拐点 $x_{1,3} \approx \pm 0.47, y_{1,2} \approx 1.14$ 及 $x_{3,4} \approx \pm 4.58, y_{3,4} \approx 4.55$ 。渐近线 $y = \pm x$ 。1497. 函数的周期: $T = 2\pi$; 基本域 $0 \leq x \leq 2\pi$ 。函数为零: $x_1 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.21\pi$ 和 $x_2 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.79\pi$ 。当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 极小值 $y = 1$; 当 $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = -1$; 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{5\pi}{6}$, 极大值 $y = 1\frac{1}{4}$ 。拐点: $x_1 = \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0.32\pi, y_1 = \frac{19+3\sqrt{33}}{32} \approx 1.13$; $x_2 = \pi - \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0.68\pi, y_2 = \frac{19+3\sqrt{33}}{32}$; $x_3 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1.20\pi, y_3 = \frac{19-3\sqrt{33}}{32} \approx 0.055$; $x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1.80\pi, y_4 = \frac{19-3\sqrt{33}}{32}$ 。1498. 函数的周期为 2π ; 基本域 $-\pi \leq x \leq \pi$ 。关于坐标原点对称。函数值为零的点: $x_1 = 0$ 和 $x_{2,3} =$

$\pm\pi$ 。当 $x = -\arccos \frac{1}{4} \approx -0.42\pi$ 时, 极小值 $y = -\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7.3$; 当 $x = \arccos \frac{1}{4} \approx 0.42\pi$, 极大值 $y = \frac{15}{8}\sqrt{15} \approx 7.3$ 。拐点: $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm \arccos\left(-\frac{7}{8}\right) \approx \pm 0.84\pi$; $y_{2,3} = \pm \frac{21}{32}\sqrt{15} \approx \pm 2.54$; $x_{4,5} = \pm\pi, y_{4,5} = 0$ 。1499. 函数的周期: $T = 2\pi$; 基本域: $-\pi \leq x \leq \pi$ 。关于坐标原点对称。函数为零: $x_1 = 0$ 和 $x_{2,3} = \pm\pi$ 。极小值: 当 $x = -\frac{3\pi}{4}$ 和 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时 $y = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0.94$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时 $y = \frac{2}{3}$ 。极大值: 当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时 $y = -\frac{2}{3}$, 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{3\pi}{4}$ 时 $y = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ 。拐点: $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0.37\pi$, $y_{2,3} = \frac{4}{27}\sqrt{30} \approx 0.81$; $x_{4,5} = \pm \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx \pm 0.63\pi$, $y_{4,5} = \frac{4}{27}\sqrt{30}$; $x_{6,7} = \pm\pi, y_{6,7} = 0$ 。1500. 函数的周期: $T = 2\pi$; 基本域: $[-\pi, \pi]$ 。关于 Oy 轴对称。函数为零的点: $x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62\pi$ 。极小值: 当 $x = 0$ 时 $y = \frac{1}{2}$, 当 $x = \pm\pi$ 时 $y = -1\frac{1}{2}$; 极大值: 当 $x = \pm\frac{\pi}{3}$ 时 $y = \frac{3}{4}$ 。拐点: $x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.18\pi$, $y_{1,2} \approx 0.63$; $x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.70\pi$, $y_{3,4} \approx -0.44$ 。1501. 函数的周期:

$T = \frac{\pi}{2}$; 基本域 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 。关于 Oy 轴对称。函数为正的。当 $x = 0$ 时极大值 $y = 1$; 当 $x = \pm\frac{\pi}{4}$ 时极小值 $y = \frac{1}{2}$ 。拐点 $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{8}$, $y_{1,2} = \frac{3}{4}$ 。

1502. 函数的周期 $T = \pi$; 基本域 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 。关于 Oy 轴对称。函数的零点: $x_1 = 0$ 及 $x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{3}$ 。极小值: 当 $x = 0$ 时 $y = 0$, 当 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ 时 $y = -1$; 当 $x = \pm \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0.21\pi$ 时极大值 $y = \frac{9}{16}$ 。拐点: $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1+\sqrt{129}}{16} \approx 0.11\pi$, $y_{1,2} \approx 0.29$; $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{129}}{16} \approx 0.36\pi$, $y_{3,4} \approx -0.24$ 。1503. 函数的周期: $T = 2\pi$; 基本域: $0 \leq x \leq 2\pi$ 。不連續点: $x = \frac{3\pi}{4}$ 。函数为零的点: $x_1 = 0, x_2 = \pi$ 。无极值, 函数上升。拐点:

$x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 渐近线: $x = \frac{3\pi}{4}$ 。1504. 函数的周期 $T = 2\pi$; 基本

域 $[-\pi, \pi]$ 。关于 Oy 轴对称。函数的零点: $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$ 。当 $x=0$ 时极小值 $y=1$; 当 $x=\pm\pi$ 时极大值 $y=-1$ 。拐点: $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$; $y_{1,2}=0$ 渐近线 $x = \pm \frac{\pi}{4}$ 及 $x = \pm \frac{3\pi}{4}$ 。 1505. 对称中心 $(k\pi, 2k\pi)$ 。函数的零

点: $x_1=0$, $x_{2,3} \approx \pm 0.37\pi, \dots$ 。当 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 时极大值 $y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$,

当 $x = -(\frac{\pi}{4} + k\pi)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时极小值 $y = -(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi)$ 。拐点:

$x=k\pi$, $x=2k\pi$, k 为整数。渐近线: $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, k 为整数。 1506. 关于直线

$x=1$ 成对称。函数为正的。当 $x=1$ 时极大值 $y=e$, 拐点 $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$y_{1,2} = \sqrt{e} \approx 1.65$ 。渐近线 $y=0$ 。 1507. 关于 Oy 轴对称。函数为正的。

当 $x=0$ 时极大值 $y=1$ 。拐点: $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22$, $y_{1,2} = \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.56$ 。

渐近线 $y=0$ 。 1508. 函数为正的。当 $x=0$ 时极小值 $y=1$ 。向上凹。

当 $x \rightarrow +\infty$ 时渐近线 $y=x$ 。 1509. 函数不为负; $x=0$ 时函数

为零。当 $x=0$ 时极小值 $y=0$; 当 $x = \frac{2}{3}$ 时极大值 $y = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.39$ 。

拐点: $x_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{3} \approx -0.15$, $y_1 \approx 0.34$ 和 $x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{3} \approx 1.48$, $y_2 \approx 0.30$ 。

当 $x \rightarrow +\infty$ 渐近线 $y=0$ 。 1510. 当 $x > -1$ 时函数为正, 当 $x < -1$ 时函数

为负。当 $x=0$ 时极小值 $y=1$ 。当 $x > -1$ 时向上凹, 当 $x < -1$ 时向下凹。

1511. 关于 Oy 轴对称。函数不为负; $x=0$ 时函数为零。当 $x=0$ 时极小值 $y=0$, (角点)是凸的。 1512. 函数存在的域: $x > 0$ 。 $x=1$ 函数为零。当

$x=e^3 \approx 7.39$ 时极大值 $y = \frac{2}{e} \approx 0.74$ 。拐点: $x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.33$, $y = \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}} \approx$

≈ 0.70 。渐近线: 当 $x \rightarrow +0$ 时 $x=0$ 和当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y=0$ 。 1513. 关于坐

标原点对称。函数为零的点: $x=0$ 。无极值点, 函数是上升的。拐点 $x=0$,

$y=0$ 。 1514. 关于坐标原点对称。函数的零点 $x=0$ 。函数上升。当 $x > 0$

时是凹的, 当 $x < 0$ 时是凸的; $O(0, 0)$ 为拐点。 1515. 函数的存在域

$|x| < 1$ 。关于坐标原点对称。函数单调增加。当 $x > 0$ 时是凹的当 $x < 0$ 时是

凸的; 拐点 $x=0$, $y=0$, 渐近线: $x = \pm 1$ 。 1516. 关于坐标原点对称。函

数的零点: $x=0$ 。无极值点, 函数是上升的。拐点 $x=0$, $y=0$ 。渐近线: 当

$x \rightarrow -\infty$ 时 $y = x - \frac{\pi}{2}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = x + \frac{\pi}{2}$ 。 1517. 函数的零点

$x \approx -5.95$ 。当 $x=1$ 时极小值 $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1.285$; 当 $x=-1$ 时极大值

$y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1.856$ 。当 $x>0$ 时是凹的, 当 $x<0$ 时是凸的; 拐点 $x=0$,

$y=0$ 。渐近线: 当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $y = \frac{\pi}{2} + x$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = \frac{\pi}{2}$ 。 1518. 关

于 Oy 轴成对称。函数不为负; $x=0$ 时为零。当 $x=0$ 时极小值 $y=0$ 。是

凹的。渐近线: 当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ 和当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ 。

1519. 关于坐标原点对称。 $x=0$ 函数为零。当 $x=1$ 时极小值 $y = -\frac{\pi}{2}$ (角

点); 当 $x=-1$ 时极大值 $y = \frac{\pi}{2}$ (角点)。拐点 $x=0, y=0$ 。渐近线 $y=0$ 。

1520. 关于 Oy 轴对称。函数不为负; $x=0$ 时函数为零。当 $x=0$ 时极小值 $y=0$ 。(角点)是凸的。渐近线 $y=x$ 。 1521. 函数的不连续点 $x=0$ 。

函数的零点 $x=-2$ 。当 $x=2$ 时极小值 $y = 4\sqrt{e} \approx 6.05$; 当 $x=-1$ 时极

大值 $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$ 。拐点 $x = -\frac{2}{5}, y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13$ 。渐近线 $y = x + 3$ 。

1522. 函数的存在域 $|x| \geq 1$ 。关于 Oy 轴成对称。当 $x = \pm 1$ 时边界的极大值 $y = 2^{\sqrt{2}} \approx 2.67$ 。是凹的。渐近线 $y=1$ 。 1523. 函数的存在域: $x < 1$ 及

$x > 2$ 。与坐标轴的交点 $(0, \ln 2)$ 及 $(\frac{1}{3}, 0)$ 。当 $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \approx -0.72$ 极大

值 $y \approx 1.12$ 。渐近线 $y=0$ 。 1524. 函数的存在域 $|x| \leq a$ 。与坐标轴的交

点: $(0, -a)$ 及 $(0.67a, 0)$ (近似地!)。函数单调上升。当 $x=-a$ 时边界的极

小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$, 当 $x=a$ 时边界的极大值 $y = \frac{\pi}{2}a$ 。向上凹。 1525. 函数的

存在域: $x \leq 0$ 及 $x \geq \frac{2}{3}$ 。当 $x=0$ 时边界的极小值 $y=0$, 当 $x=\frac{2}{3}$ 时边界的极

大值 $y=x$ 。当 $x \leq 0$ 时是凸凹, 当 $x \geq \frac{2}{3}$ 时, 是凹的。渐近线 $y = \frac{\pi}{3}$ 。 1526. 存

在的域: $x > 0$ 。函数为正的。当 $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$, 极小值 $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692$;

当 $x \rightarrow +0$ 时边界的极大值 $y=1$ 。向上凹。 1527. 函数的存在域: $x > 0$ 。

当 $x \rightarrow +0$ 时边界的极小值 $y=0$; 当 $x=e$ 时极大值 $y = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 。渐近线

$y=1$ 。 1528. 存在的域: $x > -1, x \neq 0$ 。函数为正的。可移去不连续点:

$x=0$ 。无极点, 函数是减小的。凹的。渐近线: $x=-1$ 和 $y=1$ 。 1529. 当 $x > 0$

时函数是单调的。当 $x = +0$ 时边界的极小值 $y = 0$ 。渐近线 $y = e\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 。

1530. 函数为正的。关于 Oy 轴对称。不连续点: $x = \pm 1$ 。当 $x = 0$ 时极小值 $y = e$; 当 $x = \pm\sqrt{3}$ 时极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$ 。四个拐点。渐近线: 当

$x \rightarrow -1+0$ 时, $x = -1$; 当 $x \rightarrow 1-0$ 时, $x = 1$; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = 0$ 。 **1531.** 函数 x 及 y 是非负的; 当 $t = -1$ 时 $x_{\text{极小}} = 0$; 当 $t = 1$ 时 $y_{\text{极小}} = 0$ 时; 当 $t > -1$ 是凹的; 当 $t < -1$ 时是凸的。 **1532.** 与坐标轴的交点: 当 $t = 0$ 时为 $(0, 0)$ 当

$t = \pm\sqrt{3}$ 为 $(+2\sqrt{3}-3, 0)$ 和当 $t = 2$ 时为 $(0, -2)$ 。当 $t = 1$ (上升的点) 时 $x_{\text{极大}} = 1$ 和 $y_{\text{极大}} = 1$; 当 $t = -1$ 时 $y_{\text{极小}} = -2$ 。当 $t < 1$ 时是凹的和当 $t > 1$ 时是凸的。 **1533.** 与坐标轴的交点: 当 $t = 0$ 时为 $(0, 0)$ 。当 $t = 0$ 时

$x_{\text{极大}} = 0$, 当 $t = 2$ 时 $x_{\text{极小}} = 4$; 当 t 增加时 y 减小。当 $t \approx -0.32$ (近似地) 时拐点 $(-0.08; 0.3)$ 。渐近线: $y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ 和 $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$ 。 **1534.** 与 Oy

轴的交点: 当 $t = 0$ 时为 $(0, 1)$; 与 Ox 轴的交点: 当 $t = \infty$ 时为 $(-1, 0)$ 。边界的极值: 当 $t = 0$ 时 $x_{\text{极小}} = 0$ 和 $y_{\text{极大}} = 1$; 当 $t = \infty$ 时 $x_{\text{极大}} = -1$ 和 $y_{\text{极小}} = 0$ 。

无拐点。渐近线 $y = \frac{1}{2}$ 。当 $|t| > 1$ 时是凹的和当 $|t| < 1$ 时是凸的。

1535. x 和 y 为正的。当 $t = 0$ (上升的点) 时 $x_{\text{极小}} = 1$ 和 $y_{\text{极小}} = 1$ 。当 $t < 0$ 时是凹的; 当 $t > 0$ 时是凸的。当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 渐近线 $y = 2x$ 。 **1536.** 基

本域: $0 \leq t \leq \pi$ 。与坐标轴的交点: 当 $t = \frac{\pi}{6}$ 时为 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; 当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时为 $\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时为 $(-a, 0)$; 当 $t = \frac{3\pi}{4}$ 时为 $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; 当 $t = \frac{5\pi}{6}$

时为 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ 。当 $t = 0$ 时, $x_{\text{极大}} = a$ 和 $y_{\text{极大}} = a$; 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $y_{\text{极小}} = -a$; 当

$t = \frac{\pi}{2}$ 时 $x_{\text{极小}} = -a$; 当 $t = \frac{2\pi}{3}$ 时 $y_{\text{极大}} = a$; 当 $t = \pi$ 时 $x_{\text{极大}} = a$ 和 $y_{\text{极小}} = -a$ 。

当 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时是凹的; 当 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 时是凸的。 **1537.** 函数 x 与 y 是非负

且有周期的; 基本域 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 。极值: 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时 $x_{\text{极小}} = 0$ 及 $y_{\text{极大}} = 1$, 当 $t = 0$ 时 $x_{\text{极大}} = 1$ 及 $y_{\text{极小}} = 0$ 。凹的。 **1538.** 存在域: $t > 0$ 。关于直线

$x + y = 0$ 对称。极值: 当 $t = \frac{1}{e}$ 时 $x_{\text{极小}} = -\frac{1}{e} \approx -0.37$, $y = -e \approx -2.72$;

当 $t = e$ 时 $y_{\text{极大}} = \frac{1}{e}$, $x = e$ 。拐点: 当 $t = e^{-\sqrt{2}} \approx 0.24$ 时 $x_1 = -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} \approx$

≈ -0.34 , $y_1 = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}} \approx -5.82$; 当 $t = e^{\sqrt{2}} \approx 4.10$ 时 $x_2 = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$, $y_2 =$

$=\sqrt{2}e^{-v^2}$ 。当 $t = \frac{1}{e}$ 时凹凸性改变。渐近线: $x=0, y=0$ 。 1539. x 与 y 为以 $T=2\pi$ 为周期的函数; 基本域 $-\pi \leq t \leq \pi$ 。曲线关于坐标轴对称。曲线有两枝。极值: 当 $t=0$ 时 $x_{\text{最小}}=a, y=0$; 当 $t=\pm\pi$ 时 $x_{\text{最大}}=-a, y=0$ 。当 $-\pi < t < -\frac{\pi}{2}$ 及 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时是凹的; 当 $-\frac{\pi}{2} < t < 0$ 及 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 时是凸的。 1540. 关于 Oy 轴对称; 当 $t=0$ 时 $y_{\text{最小}}=0, x=0$ 。是凹的。 1541. 参数方程式: $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3} (-\infty < t < +\infty)$ 。关于

直线 $y=x$ 对称。与坐标轴的交点 $O(0, 0)$ (二重点)。当 $y=a\sqrt[3]{2} \approx 1.2a$ 时 $x_{\text{最大}}=a\sqrt[3]{4} \approx 1.59a$; 当 $x=a\sqrt[3]{2}$ 时 $y_{\text{最大}}=a\sqrt[3]{4}$ 。渐近线 $x+y+a=0$ 。 1542. 关于坐标原点, 坐标轴和坐标角的平分线对称。 $O(0, 0)$ 为孤立点。与坐标轴的交点: $(\pm 1, 0)$ 和 $(0, \pm 1)$ 。当 $y=0$ 时 $|x|_{\text{最小}}=1$; 当 $|y| = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx$

≈ 0.71 时 $|x|_{\text{最大}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \approx 1.10$; 当 $x=0$ 时 $|y|_{\text{最小}}=1$, 当 $|x| = \sqrt{\frac{1}{2}}$

时 $|y|_{\text{最大}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ 。

1543. 参数方程式: $x = \frac{1-t^3}{t^2}, y = \frac{1-t^3}{t}$,

其中 $t = \frac{y}{x} (-\infty < t < +\infty)$ 。曲线有两枝。关于曲线 $x+y=0$ 对称。极

值: 当 $t = -\sqrt[3]{2} \approx -1.26$ 时 $x_{\text{最小}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1.89, y = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -2.38$;

当 $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0.80$ 时 $y_{\text{最大}} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}, x = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ 。 拐点: 当 $t =$

$= -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})} \approx -1.91$ 时 $x_1 \approx 2.18, y_1 \approx -4.17$; 当 $t =$

$= -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})} \approx -0.523$ 时 $x_2 \approx 4.17, y_2 \approx -2.18$; 当 $t = -\sqrt[3]{2}$ 时

凹凸性的符号改变。 1544. 曲线是由直线 $y=x$ 和双曲线 $x=(1+t)^{\frac{1}{2}},$

$y=(1+t)^{1+\frac{1}{2}} (-1 < t < +\infty)$ 的一枝所组成。 (e, e) 为二重点。当 $x=y$ 时为

$x=1$ 和 $y=1$ 。 1545. 存在域: $|x| \geq \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.88$ 。关于坐标轴对

称。当 $x=\pm \ln(1+\sqrt{2})$ 时边界的极小值 $|y|=0$ 。当 $y>0$ 时为凸的, 当 $y<0$ 时为凹的。渐近线: $y=x$ 及 $y=-x$ 。 1546. 函数存在的域:

$r \geq 0, |\varphi| \leq \alpha$, 其中 $\alpha = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$ 。曲线是封闭的。关于极轴成对称。当

$\varphi=0$ 时极大值 $r=a+b$; 当 $\varphi=\pm\alpha$ 时边界的极小值 $r=0$ 。 1547. 存在的

域: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$; $\frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$ 。函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数。

曲线是封闭的且有三个相同的瓣。对称轴: $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ 和 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 。

坐标原点 $O(0, 0)$ 为三重点。对于 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ 有: 当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时极大值 $r = a$ 和当 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 时极小值 $r = 0$ 。

1548. 函数的存在域: $|\varphi| < \frac{\pi}{6}$ 及

$\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}$; 周期 $\frac{2\pi}{3}$ 。当 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \pm \frac{2\pi}{3}$ 时极小值 $r = a$, 渐近线:

$\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi = \pm \frac{5\pi}{6}$ 。

1549. 以坐标原点为渐近点的螺状线; 当 φ 增大时 r 单调减小。渐近线 $\varphi = 1$ 。

1550. 存在域 $r \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.62$, 当 $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时边界的极大值 $\varphi = \pi$; 当 $r = 2$ 时极小值 $\varphi = \arccos \frac{1}{4} \approx \arccos$

$75^\circ 30'$ 。当 $r \rightarrow +\infty$ 渐近线 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。

1551. 以 $(1, a-1)$ 为顶点(极小)的

抛物线族。与坐标轴的交点 $(0, a)$ 及 $(1 \pm \sqrt{1-a}, 0)$ (当 $a \leq 1$)。向上凹。

1552. 当 $a \neq 0$ 时为双曲线族, 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$ 。当 $x = |a|$ 时极小值

$y = 2|a|$, 当 $x = -|a|$ ($a \neq 0$) 时极大值 $y = -2|a|$ 。渐近线 $y = x$ 及 $y = 0$ 。

1553. 当 $0 < a < +\infty$ 时为椭圆族; 当 $-\infty < a < 0$ 时为双曲线族; 当 $a = 0$ 时

为直线 $y = x$ 。全族曲线通过点 $(-1, -1)$ 及 $(1, 1)$ 。当 $y \geq x$ 时有: 1) 若

$a > 0$, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 极大值 $y = \sqrt{1+a}$; 若 $-1 < a < 0$, 当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时极

大值 $y = -\sqrt{1+a}$; 当 $x = \pm 1$ 时有边界极小值 $y = \pm 1$ ($a \neq 0$); 2) 凸的。

当 $y \leq x$ 时有: 1) 若 $a > 0$, 当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时极小值 $y = -\sqrt{1+a}$; 若

$-1 < a < 0$, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时极小值 $y = \sqrt{1+a}$; 当 $x = \pm 1$ 时有边界极大值

$y = \pm 1$ 。2) 凹的。渐近线: 当 $a < 0$ 时 $y = (1 + \sqrt{-a})x$ 及 $y = (1 - \sqrt{-a})x$ 。

1554. 若 $a \neq 0$, 指数曲线族; 若 $a = 0$, 直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$ 。此族的公共点 $(0, 1)$ 。

若 $a > 0$, 当 $x = \frac{1}{a} \ln 2a$ 时极小值 $y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a)$; 若 $a \leq 0$, y 单调增加。

渐近线 $y = \frac{x}{2}$ 。

1555. 曲线族通过点 $(0, 0)$ 并与直线 $y = x$ 以此点为公共切点。若 $a > 0$, 当 $x = a$ 时极大值 $y = ae^{-1} \approx 0.37a$; 若 $a < 0$, 当 $x = a$ 时极小值

$y = ae^{-1}$ 。拐点 $x = 2a$, $y = 2ae^{-2} \approx 0.27a$ 。渐近线 $y = 0$ 。

1558. $\frac{a^{m+n}m^mn^3}{(m+n)^{m+n}}$ 。

$$1559. (m+n) \left(\frac{a^{m+n}}{m^m n^n} \right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

1560. 对数的底不能超过 $e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$.

1561. 以 $\sqrt{8}$ 为边的正方形.

1562. 三角形的锐角 30° 及 60° .

1563. 罐子的高 $H = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 等于其底的直径. 全表面积 $P = \sqrt[3]{54\pi V^2}$.

1564. $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 8}}{4}$, 其中 2α 为线段所对的弧, 2φ 为矩形的边

所对的弧. 1565. 矩形的边为 $a\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$. 1566. 若 $h > b$, 则以 x 为底和 y 为高的内接矩形之周长 P 当 $y = h$ 时有边界的极大值; 若 $h < b$, 则 P 当 $y = 0$ 时有边界的极小值; 若 $h = b$, 则周长 P 为一定. 1567. $b =$

$= \frac{d}{\sqrt{3}}, h = d \sqrt{\frac{2}{3}}$. 1568. 平行六面体的测定为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}$ 和 $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

1569. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} R^3$. 1570. $\pi R^2 \left(1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \approx 81\%$ 球的表面. 1571. 圆锥

体积等于球体积之二倍. 1572. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} l^3$. 1573. 若 $\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2}$, 则圆柱

的全表面积当 $r = \frac{R}{2(1-\operatorname{tg} \alpha)}$ 时达到极大值, 其中 r 为圆柱的底半径. 若

$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{2}$, 则当 $r = R$ 时有边界的极大值. 1574. $p(\sqrt[3]{2} - 1)\sqrt{\frac{2 + \sqrt[3]{2}}{2}}$.

1575. 1; 3. 1576. 若 $b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$, 则弦长的极大值, 当 $x = \pm \frac{a^2}{c^2} \times$

$\times \sqrt{a^2 - 2b^2}, y = \frac{b^3}{c^2}$ 时为 $MB = \frac{a^2}{c}$, 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ 而 M 的坐标为 x

和 y ; 若 $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$ 则弦长的边界极大值, 当 $x = 0, y = b$ 时为 $MB = 2b$.

1577. $x = \frac{a}{\sqrt{2}}, y = \frac{b}{\sqrt{2}}; ab$. 1578. 当 $r = h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时表面积有极小

值, 其中 r 为圆柱的底半径, h 为圆柱的高. 1579. $\varphi = 60^\circ$. 1580. 外切

于圆周的梯形. 侧边 $AB = CD = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$. 1581. $\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \approx \operatorname{arc} 294^\circ$,

其中 α 为扇形的中心角. 1582. $\varphi = \operatorname{arc} \cos \frac{q}{p}$ 若 $\operatorname{arc} \cos \frac{q}{p} \geq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b}$;

$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b}$; 若 $\operatorname{arc} \cos \frac{q}{p} < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b}$. 1583. $\frac{|av \mp bu| \sin \theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta}}$.

1584. $AM = a \left(1 + \sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}} \right)^{-1}$. 1585. 若 $a \geq r + R \sqrt{\frac{R}{r}}$, 发光点到大球中

心的距离等于 $x = \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}$, 若 $r - R < a < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$ 则此距离等于 $x =$

$= a - r$, 其中 a 为二球中心的距离。 1586. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 。 1587. $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ 。

1588. $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$, 其中 k 为比例系数。 1589. $\arctg k$ 。 1590. 当 $l \leq 4a$

时棒的倾角由下之公式确定 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$; 当 $l > 4a$ 时无平衡位置。

1591. $k = -3$, $b = 3$; $y = 3(1 - x)$ 。 1592. $a = \frac{1}{2} e^{x_0}$; $b = e^{x_0}(1 - x_0)$;

$c = e^{x_0}\left(1 - x_0 + \frac{x_0^2}{2}\right)$ 。 1593. (a) 一阶; (b) 二阶;

(B) 二阶。 1595. (a) $\sqrt{2}$, $(2, 2)$; (b) 500000, $(150, 500000)$ (近似地!)

1596. $p\left(1 + \frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$ 。 1597. $\frac{(a^2 - \varepsilon^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, 其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离

心率。 1598. $\frac{(\varepsilon^2 x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, 其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ 为双曲线的离心率。

1599. $3|axy|^{\frac{1}{3}}$ 。 1600. $\frac{a^2}{b}(1 - \varepsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$, 其中 ε 为椭圆的离心率。

1601. $2\sqrt{2ay}$ 。 1602. at 。 1604. $\frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{5}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}$ 。

1605. $\frac{(a^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}{2a^2 + r^2}$ 。 1606. $r\sqrt{1 + m^2}$ 。 1607. $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$ 。 1608. $\frac{a^2}{3r}$ 。

1609. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$ 。 1610. $x_0 \approx 680$ 米。 1611. 半立方抛物线

$27pn_1^2 = 8(\xi - p)^3$ 。 1612. 内摆线 $(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$, 其中 $c^2 = a^2 - b^2$ 。

1613. 内摆线 $(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$ 。 1614. 悬链线 $\eta = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a}$ 。

1615. 对数螺线 $\rho = mae^{m(\psi - \frac{\pi}{2})}$ 。 1616. $\xi = \pi a + a(\tau - \sin \tau)$; $\eta = -2a +$
 $+ a(1 - \cos \tau)$, 其中 $\tau = t - \pi$ 。 1617. $x_1 = -2.602$; $x_2 = 0.340$; $x_3 = 2.262$ 。

1618. $x_1 = -0.724$; $x_2 = 1.221$ 。 1619. $x = 2.087 = \arccos 119^\circ 35'$ 。

1620. ± 0.824 。 1621. $x_1 = 0.472$; $x_2 = 9.999$ 。 1622. $x_1 = 2.5062$ 。

1623. $x_1 = 4.730$; $x_2 = 10.996$ 。 1624. $x = -0.56715$ 。

1625. $x = \pm 1.199678$ 。 1626. $x_1 = 4.493$; $x_2 = 7.725$; $x_3 = 10.904$ 。

1627. $x_1 = 2.081$; $x_2 = 5.940$ 。

第 三 章

为了简便计,这一章答案中要加上的任意常数 C 被省略了。

1628. $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$. 1629. $\frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7$. 1630. $x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4$. 1631. $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x|$.
 1632. $a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2}$. 1633. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$. 1634. $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x^{12}\sqrt{x^3} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$. 1635. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right)$.
 1636. $\frac{4(x^3+7)}{7\sqrt[3]{x}}$. 1637. $2x - \frac{12}{5}\sqrt[5]{72x^6} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}$. 1638. $\ln|x| - \frac{1}{4x^4}$. 1639. $x - \operatorname{arctg} x$. 1640. $-x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. 1641. $x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. 1642. $\operatorname{arcsin} x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 1643. $\ln x \times \left|\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right|$. 1644. $\frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} - \frac{9^x}{\ln 9}$. 1645. $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$. 1646. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$. 1647. $x - \cos x + \sin x$.
 1648. $(\cos x + \sin x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)$. 1649. $-x - \operatorname{ctg} x$. 1650. $-x + \operatorname{tg} x$. 1651. $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$. 1652. $x - \operatorname{th} x$. 1653. $x - \operatorname{cth} x$.
 1655. $\ln|x+a|$. 1656. $\frac{1}{22}(2x-3)^{11}$. 1657. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$.
 1658. $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$. 1659. $-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}$. 1660. $-\frac{5}{2}\sqrt{(1-x)^2}$.
 1661. $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. 1662. $\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|$.
 1663. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsin}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. 1664. $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln|x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}|$.
 1665. $-\left(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$. 1666. $-x \sin 5x - \frac{1}{5} \cos 5x$. 1667. $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x \times \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. 1668. $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 1669. $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. 1670. $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.
 1671. $\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1) + \operatorname{sh}(2x-1)]$. 1672. $2 \operatorname{th} \frac{x}{2}$. 1673. $-2 \operatorname{cth} \frac{x}{2}$.
 1674. $-\sqrt{1-x^2}$. 1675. $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}$. 1676. $-\frac{1}{4} \ln|3-2x^2|$.

1677. $-\frac{1}{2(1+x^2)}.$ 1678. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}.$ 1679. $\frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right|.$
 1680. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$ 1681. $\cos \frac{1}{x}.$ 1682. $-\ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right|.$
 1683. $-\operatorname{arcsin} \frac{1}{|x|}.$ 1684. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$ 1685. $-\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$
 1686. $\frac{1}{8} \sqrt[3]{8x^3 + 27}.$ 1687. $2 \operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) [x(1+x) > 0].$
 1688. $2 \operatorname{arcsin} \sqrt{x}.$ 1689. $-\frac{1}{2} e^{-x^2}.$ 1690. $\ln(2 + e^x).$
 1691. $\operatorname{arctg} e^x.$ 1692. $-\ln(e^{-x} + \sqrt{1 + e^{-2x}}).$ 1693. $\frac{1}{3} \ln^3 x.$
 1694. $\ln |\ln(\ln x)|.$ 1695. $\frac{1}{6} \sin^6 x.$ 1696. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}.$
 1697. $-\ln |\cos x|.$ 1698. $\ln |\sin x|.$ 1699. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x}.$
 1700. $\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} (a^2 \neq b^2).$ 1701. $-\frac{4}{3} \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x}.$
 1702. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right).$ 1703. $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$ 1704. $\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$
 1705. $\ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|.$ 1706. $2 \operatorname{arctg} e^x.$ 1707. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x} \right).$
 1708. $3 \sqrt[3]{\operatorname{th} x}.$ 1709. $\frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2.$ 1710. $-\frac{1}{\operatorname{arcsin} x}.$
 1711. $\frac{2}{3} \ln^3 (x + \sqrt{1+x^2}).$ 1712. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}}.$
 1713. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}.$ 1714. $-\frac{1}{15(x^5 + 1)^3}.$ 1715. 当
 $n \neq -2, \frac{2}{n+2} \ln(x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}});$ 当 $n = -2, -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln |x|.$ 1716.
 $-\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}.$ 1717. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsin} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x \right).$ 1718. $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\cos 2x).$
 1719. $\frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3x - 2^x}{3^x + 2^x} \right|.$ 1720. $2\sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}}.$
 1721. $\frac{4}{3} x^3 - \frac{12}{5} x^5 + \frac{9}{7} x^7.$ 1722. $-x - 2 \ln |1-x|.$
 1723. $\frac{1}{2} (1-x)^2 + \ln |1+x|.$ 1724. $9x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - 27 \ln |3+x|.$
 1725. $x + \ln(1+x^2).$ 1726. $\frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x}{\sqrt{2} - x} \right| + 2 \ln |2-x^2| - x.$

1727. $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{49}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|$.
 1728. $\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|$.
 1729. $\frac{1}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]$.
 1730. $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{5}{3}}$. 1731. $-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}$. 1732. $\frac{3}{14} \times$
 $\times (1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}$. 1733. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right|$. 1734. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$.
 1735. $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}$. 1736. $\frac{1}{10\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| -$
 $-\frac{1}{5\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}$. 1737. $\ln \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$. 1738. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2+2}$.
 1739. $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^2} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right|$. 1740. $\frac{1}{a^2-b^2} \times$
 $\times \left(\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) (a \neq b)$. 1741. $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$.
 1742. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$. 1743. $\frac{x}{2} \cos x - \frac{1}{4} \sin(2x+x)$. 1744. $\frac{1}{4} \sin 2x -$
 $-\frac{1}{16} \sin 8x$. 1745. $3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6}$. 1746. $-\frac{1}{10} \cos \left(5x + \frac{\pi}{12} \right) +$
 $+\frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{5\pi}{12} \right)$. 1747. $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$. 1748. $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.
 1749. $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$. 1750. $\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$.
 1751. $-x - \operatorname{ctg} x$. 1752. $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^3 x + \ln |\cos x|$. 1753. $-\frac{3}{16} \cos 2x -$
 $-\frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x + \frac{3}{128} \cos 8x - \frac{1}{192} \cos 12x$. 1754. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.
 1755. $-\frac{1}{\sin x} + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$. 1756. $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x|$.
 1757. $\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x$. 1758. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$. 1759. $x - \ln(1+e^x)$.
 1760. $x + 2 \operatorname{arctg} e^x$. 1761. $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x$. 1762. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x$.
 1763. $\frac{2}{3} \operatorname{sh}^3 x$. 1764. $\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x$. 1765. $-(\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x)$.
 1766. $-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}$. 1767. $-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}$.
 1768. $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}$. 1769. $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}$.

$$1770. -\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}. \quad 1771. \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}.$$

$$1772. -\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x). \quad 1773. \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x.$$

$$1774. \frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}. \quad 1775. -x-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}}).$$

$$1776. x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x}). \quad 1777. (\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x})^2. \quad 1778. \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1779. \frac{x}{2}\sqrt{-2+x^2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|. \quad 1780. \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc} \sin \frac{x}{a}.$$

$$1781. \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}. \quad 1782. -\sqrt{a^3-x^3}+a\operatorname{arc} \sin \frac{x}{a}.$$

$$1783. -\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x}{2a}}. \quad 1784. 2\operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}.$$

$$1785. \frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}. \quad 1786. \frac{x}{2}\times$$

$$\times \sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}). \quad 1787. \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+$$

$$+\sqrt{a^2-x^2}). \quad 1788. \sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}), \text{ 若 } x>a, \text{ 及}$$

$$-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}), \text{ 若 } x<-a. \quad 1789. 2\ln(\sqrt{x+a}+$$

$$+\sqrt{x+b}), \text{ 若 } x+a>0 \text{ 及 } x+b>0; -2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}), \text{ 若}$$

$$x+a<0 \text{ 及 } x+b<0. \quad 1790. \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln x$$

$$\times (\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}), \text{ 若 } x+a>0 \text{ 及 } x+b>0. \quad 1791. x(\ln x-1).$$

$$1792. \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right) (n\neq -1). \quad 1793. -\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2).$$

$$1794. \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right). \quad 1795. -(x+1)e^{-x}.$$

$$1796. -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right). \quad 1797. -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}. \quad 1798. x\sin x+\cos x.$$

$$1799. -\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x. \quad 1800. x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x.$$

$$1801. \left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh} 3x-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch} 3x. \quad 1802. x\operatorname{arc} \operatorname{tg} x-\frac{1}{2}\ln x$$

$$\times (1+x^2). \quad 1803. x\operatorname{arc} \sin x+\sqrt{1-x^2}. \quad 1804. -\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$$1805. -\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{3}\operatorname{arc} \cos x. \quad 1806. -\frac{\operatorname{arc} \sin x}{x}-$$

- $-\ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right|$ 。 1807. $x \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ 。 1808. $x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ 。 1809. $-\sqrt{x} + (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ 。 1810. $\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$ 。 1811. $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$ 。 1812. $x(\operatorname{arcsin} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \times \operatorname{arcsin} x - 2x$ 。 1813. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ 。 1814. $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \ln|1-x^2| + \frac{x^3}{3} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ 。 1815. $\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x$ 。 1816. $-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ 。 1817. $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} (a \neq 0)$ 。 1818. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} (a \neq 0)$ 。 1819. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}|$ 。 1820. $\frac{x(2x^2+a^2)}{8} \sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$ 。 1821. $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{\cos 2x}{8}$ 。 1822. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$ 。 1823. $2(6-x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2-x) \sin \sqrt{x}$ 。 1824. $-\frac{(1-x)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$ 。 1825. $\frac{(1+x)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$ 。 1826. $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$ 。 1827. $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$ 。 1828. $\frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2+b^2} \times e^{ax}$ 。 1829. $\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2} e^{ax}$ 。 1830. $\frac{e^{2x}}{8}(2 - \sin 2x - \cos 2x)$ 。 1831. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x - e^x(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} e^{2x}$ 。 1832. $-x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) - e^{-x} \operatorname{arctg}(e^x)$ 。 1833. $-[x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln(e \sin x)]$ 。 1834. $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x|$ 。 1835. $\frac{e^x}{x+1}$ 。 1836. $\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$, 若 $ab > 0$; $\frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}} \right|$, 若 $ab < 0$ 。 1837. $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}}$ 。 1838. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{3x+1} \right|$ 。 1839. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - (\sqrt{2}+1)}{x^2 + (\sqrt{2}-1)} \right|$ 。 1840. $\frac{1}{2} \times \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ 。 1841. $\frac{1}{2} \ln(x^2-2x \cos \alpha + 1) + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} (a \neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。 1842. $\frac{1}{4} \ln(a^4 -$

$$-x^2+2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2-1}{\sqrt{7}},$$

$$1843. \frac{1}{9} \ln \{ |x^3+1| (x^3-2)^2 \}.$$

$$1844. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3 \sin x - 5 \cos x}{\sin x - \cos x} \right|. \quad 1845. \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{2} \right). \quad 1846. \frac{1}{\sqrt{b}} \times$$

$$\times \ln(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}), \text{ 若 } b > 0; \frac{1}{\sqrt{-b}} \operatorname{arcsin} \left(x\sqrt{-\frac{b}{a}} \right), \text{ 若 } a > 0 \text{ 及 } b < 0.$$

$$1847. \operatorname{arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2}}. \quad 1848. \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x} \right|. \quad 1849. \frac{1}{\sqrt{2}} \ln x$$

$$\times \left(x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + 1} \right). \quad 1851. -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{2x-1}{\sqrt{21}}.$$

$$1852. \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right). \quad 1853. \frac{1}{2\sqrt{2}} \times$$

$$\times \operatorname{arcsin} \frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}. \quad 1854. \frac{1}{2} \sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2} \ln |x^2-1 + \sqrt{x^4-2x^2-1}|.$$

$$1855. -\frac{1}{2} \sqrt{1+x^2-x^4} + \frac{3}{4} \operatorname{arcsin} \frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}. \quad 1856.$$

$$-\ln \left| \frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x} \right|. \quad 1857. \frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}$$

$$\left(\left| x + \frac{1}{2} \right| > \frac{\sqrt{5}}{2} \right). \quad 1858. -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x} \right|.$$

$$1859. \operatorname{arcsin} \frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}} (|x| > \sqrt{2}). \quad 1860. \frac{1}{5} \sqrt{x^2+2x-5} +$$

$$+ \frac{1}{5\sqrt{5}} \operatorname{arcsin} \frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}} (|x+1| > \sqrt{6}). \quad 1861. \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} +$$

$$+ \frac{9}{8} \operatorname{arcsin} \frac{2x-1}{3}. \quad 1862. \frac{2x+1}{4} \sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8} \ln \left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{2+x+x^2} \right).$$

$$1863. \frac{x^2+1}{4} \sqrt{x^4+2x^2-1} - \frac{1}{2} \ln |x^2+1 + \sqrt{x^4+2x^2-1}|.$$

$$1864. -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{1-2x}{\sqrt{5}} - \ln \left| \frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x} \right| \left(\left| x - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \right| < \frac{\sqrt{5}}{2} \Big). \quad 1865. \ln \left| \frac{x^3-1+\sqrt{x^4+1}}{x} \right|. \quad 1866. \ln |x-2| +$$

$$+ \ln |x+5|. \quad 1867. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right|. \quad 1868. \frac{x^3}{9} - \frac{x^8}{8} +$$

$$+ \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right|.$$

$$1869. x + \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{9}{2} \ln |x-2| + \frac{28}{3} \ln |x-3|. \quad 1870. x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x -$$

- $-\frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ 。 1871. $-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$ 。 1872. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln |x^2-1|$ 。
 1873. $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|$ 。 1874. $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right|$ 。
 1875. $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ 。 1876. $\operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4}$ 。
 1877. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ 。 1878. $-\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2)$ 。
 1879. $-\frac{1}{6(x-1)} + \frac{1}{60} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{7}{25} \operatorname{arctg}(x+1)$ 。 1880. $\ln x \times \left| \frac{x}{1+x} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2x}{\sqrt{3}}$ 。
 1881. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ 。
 1882. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ 。 1883. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ 。
 1884. $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ 。
 1885. $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$ 。 1886. $\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln x \times \frac{1-x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^3$ 。
 1887. $-\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ 。
 1888. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ 。
 1889. $\frac{2}{5} \ln \frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}} + \frac{8}{5} \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{2}{5} \operatorname{arctg}(2x+1)$ 。
 1890. $a+2b+3c=0$ 。 1891. $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ 。
 1892. $\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ 。
 1893. $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x$ 。 1894. $\frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arctg}(x+1)$ 。
 1895. $\frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$ 。
 1896. $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ 。
 1897. $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{21}{64} \operatorname{arctg} x$ 。 1898. $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$ 。

$$1899. -\frac{8x^4+3x^3+4x-1}{28(x^3+x+1)^2} \quad 1900. -\frac{x}{x^5+x+1} \text{ (全部积分!)}.$$

$$1901. \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad 1902. a\gamma + ca = 2b\beta.$$

$$1903. -\frac{1}{96(x-1)^{95}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}}.$$

$$1904. \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^2. \quad 1905. \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{\sqrt{3}}.$$

$$1906. \frac{1}{12} \ln \frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}. \quad 1907. \frac{5}{8} \ln x$$

$$\times \frac{x^4}{x^4+2} - \ln \frac{x^4}{x^4+1}. \quad 1908. -\frac{1}{100} \left(\frac{x^5}{x^{10}-10} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}} \right| \right).$$

$$1909. \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}. \quad 1910. -\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10} \operatorname{arctg}(x^5+1).$$

$$1911. \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n+1|) \quad (n \neq 0). \quad 1912. \frac{1}{2n} \left(\operatorname{arctg} x^n - \frac{x^n}{x^{2n}+1} \right) \quad (n \neq 0).$$

$$1913. \frac{1}{20} \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+2}. \quad 1914. \frac{1}{10(x^{10}+1)} + \frac{1}{10} \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+1}. \quad 1915. \frac{1}{7} \ln x$$

$$\times \frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}. \quad 1916. \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1} \right|. \quad 1917. \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}.$$

$$1918. \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}. \quad 1919. \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}.$$

$$1920. \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3. \quad 1921. I_n = \frac{2ax+b}{(n-1)A(ax^2+bx+c)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{A} I_{n-1}, \text{ 其中 } A=4ac-b^2. \quad I_3 = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} +$$

$$+ \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad 1922. I = \frac{1}{(b-a)^{m+1-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m} dt;$$

$$\frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} - 3t - \frac{t^2}{2} - 3 \ln|t| \right), \text{ 其中 } t = \frac{x-2}{x+3}.$$

$$1923. -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} \ln|x-a|. \quad 1924. R(x) =$$

$$=P(x^2) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left[\frac{A_{ij}}{(a_i-x)^{\alpha_j}} + \frac{A_{ij}}{(a_i+x)^{\alpha_j}} \right], \text{ 其中 } P \text{—多项式, } \pm a_i \quad (i=1,$$

$$\dots, k) \text{—分母的根, } A_{ij} \text{—常数.} \quad 1925. -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n} \ln x$$

$$\left(1 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + x^2 \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sin \frac{\pi(2k-1)}{2n} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi} \right].$$

1926. $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})$. 1927. $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2(1-\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x})^2}$
 $-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$. 1928. $\frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| +$
 $+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2) - \frac{27}{8\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}, t=\sqrt[3]{2+x}$. 1929. $6t-3t^2 -$
 $-2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3\ln(1+t^2) - 6\operatorname{arctg}t$, 其中 $t=\sqrt{x+1}$.
1930. $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$. 1931. $\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} +$
 $+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. 1932. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. 1933. $-\frac{at^3}{1+t^4} +$
 $+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2} + \frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}$, 其中 $t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$.
1934. $-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$. 1935. $\frac{x}{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x} +$
 $+\sqrt{1+x})$. 1937. $-\frac{3-2x}{4}\sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)$.
1938. $-\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$. 1939. $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$.
1940. $\sqrt{x^2+2x+2} + \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) -$
 $-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|$. 1941. $\operatorname{arcsin}\frac{1+2x}{\sqrt{5}} + \ln x$
 $\times\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|$. 1942. $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8}\operatorname{arcsin}\frac{1-2x}{\sqrt{5}}$.
1943. $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2} - 4\operatorname{arcsin}\frac{1-x}{\sqrt{2}}$. 1944. $\left(\frac{63}{256}x -$
 $-\frac{21}{128}x^3 + \frac{21}{160}x^5 - \frac{9}{80}x^7 + \frac{x^9}{10}\right)\sqrt{1+x^2} - \frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
1945. $\left(-\frac{a^4x}{16} - \frac{a^2x^3}{24} + \frac{x^5}{6}\right)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^6}{16}\operatorname{arcsin}\frac{x}{|a|}$. 1946. $\left(\frac{x^2}{3} -$
 $-\frac{14x}{3} + 37\right)\sqrt{x^2+4x+3} - 66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|$. 1947. $-\frac{1}{2x^2} \times$
 $\times\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$. 1948. $\frac{x^2+2}{3x^3}\sqrt{x^2-1}$.
1949. $\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+1+2\sqrt{5(x^2+3x+1)}}{x-1}\right|$.

$$1950. \frac{3x+5}{8(x+1)^2} \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{|x+1|}, \text{ 其中 } x < -2 \text{ 或 } x > 0.$$

$$1951. 4a(ca_1+bb_1)=8a^2c_1+3b^2a_1 \quad (a \neq 0). \quad 1952. \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+2x-x^2}}{1-x} \right|. \quad 1953. \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} -$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right|. \quad 1954. -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \ln \left(x + \frac{1}{2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{x^2+x-1} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right|. \quad 1955. -\frac{1+x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} -$$

$$-2 \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+x}. \quad 1956. -\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} -$$

$$-2 \arcsin \frac{1}{|x-2|} \quad (x < 1 \text{ 或 } x > 3). \quad 1957. \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$1958. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2} - \sqrt{x^2-1}} \right|. \quad 1959. \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln x$$

$$\times \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}} \right|. \quad 1960. \ln(x + \sqrt{x^2+2}) - \arctg \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$1961. \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right|. \quad 1962. \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} \arctg \frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2+2x-x^2}}.$$

$$1963. \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}. \quad 1964. -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}} \right|, \text{ 若 } x+1 > 0. \quad 1965. \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln x$$

$$\times \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} + (x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)} - (x-2)} - \frac{1}{3} \arctg \frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{|x+1|}. \quad 1966. \frac{3}{2(2z+1)} +$$

$$+\frac{1}{2} \ln \frac{z^4}{2z+1}, \text{ 其中 } z = x + \sqrt{x^2+x+1}. \quad 1967. \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| - 2 \arctg z,$$

$$\text{其中 } z = \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}{x}. \quad 1968. \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} [(z-1)^3 + (z-1)^{-3}] + \right.$$

$$\left. + [(z-1)^2 - (z-1)^{-2}] + [(z-1) + (z-1)^{-1}] \right\} + \frac{1}{2} \ln |z-1|, \text{ 其中 } z = x +$$

$$+\sqrt{x^2-2x+2}. \quad 1969. -\frac{5}{18(z+1)} - \frac{1}{6(z+1)^2} +$$

$$+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|-\frac{17}{108}\ln|z+1|, \text{ 其中 } z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}.$$

$$1970. \frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|, \text{ 其中 } z=-x+\sqrt{x(1+x)}.$$

$$1971. \frac{x}{4}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|. \quad 1972. \frac{1}{3}\sqrt{z}-$$

$$-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\left(\ln\frac{z\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt[4]{3}-1}\right), \text{ 其中 } z=\frac{1+x}{1-x}.$$

$$1973. \sqrt{1-x}-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsin} x. \quad 1974. \sqrt{1+x+x^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}. \quad 1975. \frac{2}{3}[(x+1)^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{5}{2}}]-$$

$$-\frac{2}{5}[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}]. \quad 1976. -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsin}\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}. \quad 1977. -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln x$$

$$\times\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}\right|. \quad 1978. \frac{1}{2}\operatorname{arcsin}\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}).$$

$$1979. \frac{1}{2}\ln\frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}. \quad 1981. \frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-$$

$$-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}) \text{ 当 } x>0. \quad 1982. \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+$$

$$+18x^{\frac{1}{2}}+\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}-21\operatorname{arctg} x^{\frac{1}{2}}. \quad 1983. \frac{3}{5}z^5-2z^3+3z, \text{ 其中 } z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$1984. -z+\frac{2}{3}z^3-\frac{z^5}{5}, \text{ 其中 } z=\sqrt{1-x^2}. \quad 1985. \frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}, \text{ 其中 } z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}. \quad 1986. \frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z,$$

$$\text{其中 } z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}. \quad 1987. \frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}},$$

$$\text{其中 } z=\sqrt[5]{1+x^5}. \quad 1988. \frac{5}{4}z^4-\frac{5}{9}z^9, \text{ 其中 } z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}.$$

$$1989. \frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^3}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}, \text{ 其中 } z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}.$$

$$1990. m=\frac{2}{k}, \text{ 其中 } k=\pm 1, \pm 2, \dots. \quad 1991. \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x.$$

$$1992. \frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x. \quad 1993. \frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+$$

- $+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x$ 。 1994. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$ 。 1995. $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}$ 。 1996. $-\frac{\cos 2x}{64}+\frac{\cos^3 2x}{96}-\frac{\cos^5 2x}{320}$ 。
1997. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$ 。 1998. $-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$ 。
1999. $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$ 。 2000. $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ 。
2001. $-8\operatorname{ctg} 2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$ 。 2002. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}+3\ln\left|\operatorname{tg} x\right|$ 。
2003. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$ 。 2004. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$ 。 2005. $-x-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x$ 。 2006. $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$ 。
2007. $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$ 。 2008. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(1+t)^3(1+t^3)}{(1-t)^3(1-t^3)}\right|$ 。
- $-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1-t^2}{t\sqrt{3}}$, 其中 $t=\sqrt[3]{\sin x}$ 。 2009. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}$ 。
- $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, 其中 $z=\sqrt{\operatorname{tg} x}$ 。 2010. $\frac{1}{4}\ln\frac{(z^2-1)^2}{z^4-z^2+1}+$
- $+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}$, 其中 $z=\sqrt[5]{\operatorname{tg} x}$ 。 2011. $I_n=-\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}+$
- $+\frac{n-1}{n}I_{n-2}; K_n=\frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2}$ 。 $I_6=-\frac{1}{6}\cos x \sin^5 x-$
- $-\frac{5}{24}\cos x \sin^3 x-\frac{5}{16}\cos x \sin x+\frac{5}{16}x; K_8=\frac{1}{8}\sin x \cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x \cos^5 x+$
- $+\frac{35}{192}\sin x \cos^3 x+\frac{35}{128}\sin x \cos x+\frac{35}{128}x$ 。 2012. $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x}+$
- $+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}; K_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}$ 。 $I_5=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+$
- $+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|; K_7=-\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}+\frac{5}{16}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 。
2013. $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x$ 。 2014. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}$ 。
2015. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}$ 。 2016. $-\frac{1}{2}\cos(a-b)\times$
- $\times\cos x-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$ 。 2017. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2ax}{8a}+$
- $+\frac{\sin 2bx}{8b}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}$ 。 2018. $-\frac{3}{16}\cos 2x+$

$$+ \frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x - \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{192} \cos 12x. \quad 2019. \frac{1}{\sin(a-b)} \times$$

$$\times \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right|, \text{ 若 } \sin(a-b) \neq 0. \quad 2020. \frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right|,$$

$$\text{若 } \cos(a-b) \neq 0. \quad 2021. \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)} \right|, \text{ 若 } \sin(a-b) \neq 0.$$

$$2022. \frac{1}{\cos a} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| (\cos a \neq 0). \quad 2023. \frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right| (\sin a \neq 0).$$

$$2024. -x + \operatorname{ctg} a \cdot \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right| (\sin a \neq 0). \quad 2025. \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{are} \operatorname{tg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}.$$

$$2026. \frac{1}{6} \ln \frac{(1 - \cos x)(2 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)^3}. \quad 2027. -\frac{1}{5} (2 \sin x + \cos x) +$$

$$+ \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{are} \operatorname{tg} 2}{2} \right) \right|. \quad 2028. (a) \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{are} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right),$$

$$\text{若 } 0 < \varepsilon < 1; (b) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \ln \frac{\varepsilon + \cos x + \sqrt{\varepsilon^2-1} \sin x}{1 + \varepsilon \cos x}, \text{ 若 } \varepsilon > 1. \quad 2029. x -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{are} \operatorname{tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x). \quad 2030. \frac{1}{ab} \operatorname{are} \operatorname{tg} \left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b} \right).$$

$$2031. \frac{(2b^2)^{-1} z}{(a^2 z^2 + b^2)} + \frac{1}{2ab^3} \operatorname{are} \operatorname{tg} \frac{az}{b} (ab \neq 0) \text{ 其中 } z = \operatorname{tg} x. \quad 2032. \frac{1}{2} \times$$

$$\times (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|. \quad 2033. -\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)}.$$

$$2034. -\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{are} \operatorname{tg} \left(\frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} \right).$$

$$2035. \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{are} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right). \quad 2036. \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{2 + \sqrt{2}} \operatorname{are} \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \operatorname{are} \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \right\} \text{ 其中 } u = \operatorname{tg} 2x. \quad 2037. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln x$$

$$\times \frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x}. \quad 2038. \frac{1}{2} \operatorname{are} \operatorname{tg} (2 \operatorname{tg}^2 x + 1). \quad 2039. \operatorname{are} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x \right).$$

$$2040. -\frac{z}{4(z^2+2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{are} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{2}}, \text{ 其中 } z = \operatorname{tg} x. \quad 2041. \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \times$$

$$\times \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|, \text{ 其中 } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ 及 } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$2043. -\frac{x}{5} - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x|. \quad 2044. \frac{3x}{34} + \frac{5}{34} \ln |5 \sin x + 3 \cos x|.$$

$$2045. -\frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{a \sin x + b \cos x} + \frac{aa_1 + bb_1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|, \text{ 其中}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ 及 } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$2047. -\frac{3x}{5} + \frac{4}{5} \ln |\sin x -$$

$$-2 \cos x + 3| - \frac{6}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2}.$$

$$2048. \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \ln (\sqrt{2} + \sin x + \cos x). \quad 2049. \frac{2}{5} x - \frac{1}{5} \ln |3 \sin x + 4 \cos x - 2| +$$

$$+ \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right)}{\sqrt{7} - \sqrt{3} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right)} \right|.$$

$$2051. -\sin x + 3 \cos x +$$

$$+ 2\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right|.$$

$$2052. \frac{1}{5} (\sin x + 3 \cos x) +$$

$$+ \frac{8}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} - 1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{5} + 1 - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right|.$$

$$2054. -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}} \right) -$$

$$-\frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}.$$

$$2055. \frac{3}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sin x - 2 \cos x) + \frac{1}{10\sqrt{6}} \ln x$$

$$\times \frac{\sqrt{6} + 2 \sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2 \sin x - \cos x}.$$

$$2056. \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} (\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2} (\sin x + \cos x) - 1} \right| -$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} (\sin x - \cos x)}{\sqrt{3} - \sqrt{2} (\sin x - \cos x)} \right|.$$

$$2058. \frac{2 \sin x - \cos x}{10 (\sin x + 2 \cos x)^2} +$$

$$+ \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2}{2} \right) \right|.$$

$$2059. A = -\frac{b}{(n-1)(a^2 - b^2)},$$

$$B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)}, \quad C = -\frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)}.$$

$$2060. \frac{1}{\sqrt{2}} \ln x$$

$$\times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{|\cos x|}.$$

$$2061. 2\sqrt{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1} \quad (\operatorname{tg} x > 0).$$

$$2062. \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} \right) -$$

$$-\frac{1}{2} \ln (\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}).$$

$$2063. -\frac{\varepsilon \sin x}{(1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos x)} +$$

$$+ \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right). \quad 2064. \quad - \frac{2}{n \cos a} \left(\frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\cos \frac{x-a}{2}} \right)^n (\cos a \neq 0).$$

$$2065. \quad I_n = 2I_{n-1} \cos a - I_{n-2} + \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1}, \text{ 其中 } n > 2, \text{ 且 } t = \sin \frac{x-a}{2} \times$$

$$\left(\sin \frac{x+a}{2} \right). \quad 2068. \quad e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} \right). \quad 2069. \quad -e^{-x}(x^2+2).$$

$$2070. \quad - \left(\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{25} + \frac{24x}{625} \right) \cos 5x + \left(\frac{x^4}{5} - \frac{12x^2}{125} + \frac{24}{3125} \right) \sin 5x.$$

$$2071. \quad (21-10x^2+x^4) \sin x - (20x-4x^3) \cos x. \quad 2072. \quad -\frac{e^{-x^2}}{2} (x^6+3x^4+$$

$$+6x^2+6). \quad 2073. \quad 2e^t(t^5-5t^4+20t^3-60t^2+120t-120), \text{ 其中 } t=\sqrt{x}.$$

$$2074. \quad e^{ax} \left[\frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2+4b^2)} \right]. \quad 2075. \quad \frac{e^{ax}}{4} \left[\frac{3(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2+b^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a \sin 3bx - 3b \cos 3bx}{a^2+9b^2} \right]. \quad 2076. \quad \frac{e^x}{2} [x(\sin x - \cos x) + \cos x].$$

$$2077. \quad \frac{e^x}{2} [x^2(\sin x + \cos x) - 2x \sin x + (\sin x - \cos x)]. \quad 2078. \quad e^x \left[\frac{x-1}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{x}{10} (2 \sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{50} (4 \sin 2x - 3 \cos 2x) \right]. \quad 2079. \quad \frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{4} x^2 +$$

$$+ 3x^2 \cos x - x \left(6 \sin x + \frac{3}{4} \sin 2x \right) - \left(5 \cos x + \frac{3}{8} \cos 2x \right) - \frac{1}{3} \cos^3 x.$$

$$2080. \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4} \cos(2\sqrt{x}). \quad 2082. \quad x + \frac{1}{1+e^x} -$$

$$- \ln(1+e^x). \quad 2083. \quad e^x - \ln(1+e^x). \quad 2084. \quad -\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \ln|e^x-1| +$$

$$+ \frac{1}{6} \ln(e^x+2). \quad 2085. \quad x - 3 \ln \left\{ (1+e^{\frac{x}{3}}) \sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}} \right\} - 3 \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{3}}.$$

$$2086. \quad x + \frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}. \quad 2087. \quad -2 \operatorname{arcsin}(e^{-\frac{x}{2}}). \quad 2088. \quad \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) +$$

$$+ \operatorname{arcsin}(e^{-x}). \quad 2089. \quad \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} + 2 \ln(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}) -$$

$$- \operatorname{arcsin} \frac{2e^x-1}{e^x \sqrt{5}}. \quad 2090. \quad -\frac{1}{2} e^{-x} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) +$$

$$+ \frac{1}{4} \ln \frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}. \quad 2092. \quad a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \dots +$$

$$+ \frac{a_n}{(n-1)!} = 0. \quad 2093. \quad e^x \left(1 - \frac{4}{x} \right). \quad 2094. \quad -e^{-x} - li(e^{-x}).$$

$$2095. \quad e^4 li(e^{2x-4}) - e^2 li(e^{2x-2}). \quad 2096. \quad \frac{e^x}{x+1}. \quad 2097. \quad \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} - \right.$$

$$-\frac{32}{x-2})+64e^{4i}(e^{2x-4})。 \quad 2098. \quad x[\ln^n x - n\ln^{n-1} x + n(n-1)\ln^{n-2} x + \cdots + (-1)^{n-1}n(n-1)\cdots 2\ln x + (-1)^n n]。 \quad 2099. \quad \frac{x^4}{4}\left(\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{8}\ln x - \frac{3}{32}\right)。$$

$$2100. \quad -\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right)。$$

$$2101. \quad \ln(x+a)\ln(x+b)。 \quad 2102. \quad x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x。 \quad 2103. \quad -\frac{x}{2} + x\ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}\operatorname{arcsin} x。$$

$$2104. \quad \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2})。 \quad 2105. \quad -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(x+1)。 \quad 2106. \quad -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\ln(1+x) + \frac{2x\sqrt{x}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}。$$

$$2107. \quad -\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2} + \frac{2x^2-3}{4}\operatorname{arcsin}(1-x)。 \quad 2108. \quad \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{arcsin}\sqrt{x}。 \quad 2109. \quad -\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{2}\operatorname{arccos}\frac{1}{x}。$$

$$2110. \quad -2\operatorname{sgn}(1-x)\sqrt{x} + (1+x)\operatorname{arcsin}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}。 \quad 2111. \quad \frac{x\operatorname{arccos} x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln\sqrt{1-x^2}。 \quad 2112. \quad \frac{\operatorname{arccos} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}。 \quad 2113. \quad x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\right)[\ln(1+x^2)-1]。$$

$$2114. \quad x - \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}。$$

$$2115. \quad -\ln\sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})。 \quad 2116. \quad -\frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32}。$$

$$2117. \quad \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32}。 \quad 2118. \quad \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x。 \quad 2119. \quad \frac{\operatorname{ch} 6x}{24} - \frac{\operatorname{ch} 4x}{16} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{8}。 \quad 2120. \quad \ln \operatorname{ch} x。 \quad 2121. \quad x - \operatorname{eth} x。 \quad 2122. \quad \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}-1}) + \frac{1}{2}\operatorname{arcsin}(e^{-2x})。$$

$$2123. \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)。$$

$$2124. \quad \frac{a\operatorname{ch} ax \sin bx - b\operatorname{sh} ax \cos bx}{a^2+b^2}。 \quad 2125. \quad \frac{a\operatorname{ch} ax \cos bx + b\operatorname{sh} ax \sin bx}{a^2+b^2}。$$

$$2126. \quad -\frac{1}{6x^6} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x。 \quad 2127. \quad \frac{1}{8} \cdot \frac{x+x^3}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|。$$

$$2128. \quad \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}。$$

$$2129. \quad 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[4]{x} - 6\ln(\sqrt[4]{x}+1)(x\geq 0)。 \quad 2130. \quad -\frac{1}{24}x$$

- $\times (15+10x+8x^2)\sqrt{x(1-x)} + \frac{5}{8}\arcsin \sqrt{x} \ (0 < x < 1)$ 。 **2131.** $-\frac{2}{x} \times$
 $\times \sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|} \ (|x| < 1)$ 。 **2132.** $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x}\sqrt{x}$
 $(x > 0)$ 。 **2133.** $\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}$ 。 **2134.** $\frac{1}{2}\ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} -$
 $-\sqrt{3}\arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, 其中 $x = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$ 。 **2135.** $-\frac{1}{3}\ln x$
 $\times \left| \frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3} \right|$ 。 **2136.** $\frac{1}{2}\arccos \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}$ 。 **2137.** $-\frac{2+x^2}{x} -$
 $-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2} - 2\arcsin x \ (|x| < 1)$ 。 **2138.** $-\frac{1}{2}(1+x)^2 + \frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2} +$
 $+\frac{3}{8}\ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2} \right| \ (x > 0; x < -1)$ 。 **2139.** $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} -$
 $-\frac{1}{2}\ln \frac{(1+x)^2}{1+x+x^2} + \sqrt{3}\arctg \frac{1+2x}{\sqrt{3}}$ 。 **2140.** $-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2} +$
 $+ \left(x^2+3x-\frac{55}{8} \right) \arccos(2x-3) \ (1 < x < 2)$ 。 **2141.** $-x^2 + \frac{x^2}{2}\ln(4+x^4) +$
 $+ 2\arctg \frac{x^3}{2}$ 。 **2142.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + \ln|x|$
 $(0 < |x| < 1)$ 。 **2143.** $(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ 。 **2144.** $-\frac{x^3+7}{9}\sqrt{x^2+1} + \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\ln \sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}$
 $(|x| > 1)$ 。 **2145.** $\left(\frac{3-x}{1-x} - \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} \right) \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$
 $(0 < x < 1)$ 。 **2146.** $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctg \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$ 。 **2147.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln x$
 $\times \frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}-\cos 4x}$ 。 **2148.** $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$ 。 **2149.** $a \left[x \arctg x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \right] - \frac{a-b}{2}(\arctg x)^2$ 。 **2150.** $a \left(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln |x^2-1| \right) + \frac{a+b}{4}\ln^2 \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ 。 **2151.** $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} +$
 $+\frac{1}{4}\ln \frac{x^2}{1+x^2} \ (x > 0)$ 。 **2152.** $\sqrt{1+x^2}\arctg x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 。 **2153.** $-\ln(\cos 2x + \sqrt{1+\cos^2 x})$ 。 **2154.** $-\frac{6x+x^3}{9} -$

- $-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x (|x|<1)$ 。 2155. $-\frac{x^2}{6}-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg} x +$
 $+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + \frac{2}{3}\ln(1+x^2)$ 。 2156. $-\frac{x}{4(1+x^2)} - \frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\operatorname{arctg} x$ 。
 2157. $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}} (|x|<1)$ 。 2158. $-\frac{x^2}{4} +$
 $+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{1}{4}(\arcsin x)^2, (|x|<1)$ 。 2159. $\frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} +$
 $+\frac{1}{4}(1+x^2)^2\operatorname{arctg} x$ 。 2160. $x^x (x>0)$ 。 2161. $x-e^{-x}\arcsin(e^x) -$
 $-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}}) (x<0)$ 。 2162. $x-\ln(1+e^x)-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} -$
 $-(\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}})^2$ 。 2163. $-\frac{\operatorname{cth} 1}{4}[x-\ln(1+e^x\operatorname{ch} 1)] - \frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh} 1}$ 。
 2164. $-\ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x} + \sqrt{2}\operatorname{th} x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x} - \sqrt{2}\operatorname{th} x}$ 。
 2165. $e^x\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ 。 2166. $\frac{x|x|}{2}$ 。 2167. $\frac{x^2|x|}{3}$ 。 2168. $\frac{2x^2}{3} (x+|x|)$ 。
 2169. $\frac{(1+x)|1+x|}{2} + \frac{(1-x)|1-x|}{2}$ 。 2170. e^x-1 , 若 $x<0$; $1-e^{-x}$, 若
 $x\geq 0$ 。 2171. x , 若 $|x|\leq 1$; $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\operatorname{sgn} x$, 若 $|x|>1$ 。 2172. $\frac{x}{4} +$
 $+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}$, 其中 $(x)=x-[x]$ 。 2173. $\frac{[x]}{x}\{[x]-$
 $-(-1)^{[x]}\cos \pi x\}$ 。 2174. 当 $|x|\leq 1$ 时 $x-\frac{x^3}{3}$; 当 $|x|>1$ 时 $x -$
 $-\frac{x}{2}[x] + \frac{1}{6}\operatorname{sgn} x$ 。 2175. x , 若 $-\infty < x \leq 0$; $\frac{x^2}{2} + x$, 若 $0 \leq x \leq 1$; $x^2 +$
 $+\frac{1}{2}$, 若 $x>1$ 。 2176. $xf'(x)-f(x)$ 。 2177. $\frac{1}{2}f(2x)$ 。
 2178. $f(x)=2\sqrt{x}$ 。 2179. $x-\frac{x^3}{3}$ 。 2180. 当 $-\infty < x \leq 0$, $f(x)=x$;
 当 $0 < x < +\infty$, $f(x)=e^x-1$ 。

第 四 章

2181. $12\frac{1}{2}$ 。 2182. (a) $\underline{S}_n = 16\frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$, $\bar{S}_n = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$;
 (b) $\underline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}}$, $\bar{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}$; (B) $\underline{S}_n = \frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}$, $\bar{S}_n =$

- $= \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}$ 。 2183. $\delta = 31 \cdot \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{32} - 1}; \frac{31}{5}$ 。 2184. $v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ 。
2185. 3。 2186. $\frac{a-1}{\ln a}$ 。 2187. 1。 2188. $\sin x$ 。 2189. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 。
2190. $\frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ 。 2191. $\ln \frac{b}{a}$ 。 2192. (a) 0, 若 $|a| < 1$; (b) $\pi \ln a^2$, 若 $|a| > 1$ 。 2201. 一般地说, 不。 2203. 未必。 2206. $11 \frac{1}{4}$ 。
2207. 2。 2208. $\frac{\pi}{6}$ 。 2209. $\frac{\pi}{3}$ 。 2210. 1。 2211. 1。 2212. $\frac{\pi}{2 \sin a}$ 。
2213. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ 。 2214. $\frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$ 。 2215. $\frac{\pi}{2|ab|}$ 。 2216. (a) 被积函数 $\frac{1}{x}$ 及其原函数 $\ln|x|$ 在积分区间 $[-1, 1]$ 内不连续; (b) 原函数 $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{\tg x}{\sqrt{2}}\right)$ 当 $0 \leq x \leq 2\pi$ 不连续; (B) 函数 $\arctg \frac{1}{x}$ 当 $x=0$ 不连续。
2217. $\frac{2}{3}$ 。 2218. $200\sqrt{2}$ 。 2219. $\frac{1}{2}$ 。 2220. $\ln 2$ 。 2221. $\frac{\pi}{4}$ 。
2222. $\frac{2}{\pi}$ 。 2223. $\frac{1}{p+1}$ 。 2224. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ 。 2225. $\frac{1}{e}$ 。
2226. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 。 2227. $\frac{5}{6}\pi$ 。 2228. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 。 2229. $x + \frac{1}{2}$ 。
2230. $\frac{1}{\ln 2}$ 。 2231. 0; $-\sin a^2$; $\sin b^2$ 。 2232. (a) $2x\sqrt{1+x^2}$; (b) $\frac{3x^3}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$; (B) $(\sin x - \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x)$ 。 2233. (a) 1; (b) $\frac{x^2}{4}$; (B) 0。
2235. 1。 2237. (a) $\frac{5}{6}$; (b) $\frac{t}{2}$ 。 2238. (a) 若 $a < 0$, $\frac{1}{3} - \frac{a}{2}$; 若 $0 \leq a \leq 1$, $\frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3}$; 若 $a > 1$, $\frac{a}{2} - \frac{1}{3}$; (b) 若 $|a| \leq 1$, $\frac{\pi}{2}$; 若 $|a| > 1$, $\frac{\pi}{2a^2}$; (B) 若 $|a| \leq 1$, 2; 若 $|a| > 1$, $\frac{2}{|a|}$ 。 2239. $\frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$ 。
2240. π 。 2241. 4π 。 2242. $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ 。 2243. 1。 2244. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ 。
2245. $\frac{1}{6}$ 。 2246. $\frac{\pi a^4}{16}$ 。 2247. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$ 。 2248. $2 - \frac{\pi}{2}$ 。
2249. $\frac{\pi^2}{4}$ 。 2250. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 。 2251. (a) 反函数 $x = \pm t^{\frac{2}{3}}$ 是双值的; (b) 函数 $x = \frac{1}{t}$ 当 $t=0$ 不连续; (B) 定义于有限区间 $[\alpha, \beta]$ 内并通过由 0 到 π 的值的

- 函数 $x = A \operatorname{re} t g t$ 无单值連續的一枝。 2252. 不。 2253. 可。
2256. $f(x+b) - f(x+a)$ 。 2260. $\frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}$ 。 2261. $\int_0^1 [f(\arcsin t) - f(x - \arcsin t)] dt + \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(x - \arcsin t)] dt$ 。 2262. $4n$ 。
2263. $\frac{\pi^2}{4}$ 。 2264. $\operatorname{arctg} \frac{32}{27} - 2\pi$ 。 2268. $315 \frac{1}{26}$ 。 2269. $\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ 。 2270. $\frac{5}{27} e^3 - \frac{1}{9}$ 。 2271. $-66 \frac{6}{7}$ 。 2272. $-\ln \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 。
2273. $\frac{29}{270}$ 。 2274. $\frac{4}{3} \pi - \sqrt{3}$ 。 2275. $2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ 。
2276. $2\pi\sqrt{2}$ 。 2277. $\frac{1}{6}$ 。 2278. $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4}$ 。 2279. $\frac{3}{5} (e^x - 1)$ 。
2280. $\frac{3}{8} \ln 2 - \frac{225}{1024}$ 。 2281. $I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, 若 $n=2k$; $I_n = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, 若 $n=2k+1$ 。 2282. (参看 № 2281)。 2283. $(-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \right]$ 。 2284. $2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ 。 2285. (参看 № 2281)。
2286. $I_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ 。 2287. $I_n = (-1)^n \left\{ -\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] \right\}$ 。 2290. $\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1} m! n! (m+n)!}$ 。
2291. 0, 若 n —偶数; π , 若 n —奇数。 2292. $(-1)^n \pi$ 。 2293. $\frac{\pi}{2^n}$ 。
2294. $\frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}$ 。 2295. 0。 2296. 0。 2297. $\frac{1}{2^{2n} a} (1 - e^{-2a\pi}) \times \left[C_{2n}^0 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right]$ 。 2298. $\frac{\pi}{4n} (-1)^{n-1}$ 。
2299. $\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ 。 2302. 导函数 $F'(x)$ 在函数 $f(x)$ 不連續的各点可以存在也可以不存在。 2303. $|x| + C$ 。 2304. $\operatorname{arccos}(\cos x) + C$ 。
2305. $x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C$ 。 2306. $\frac{x^3[x]}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + C$ 。
2307. $C + \frac{1}{\pi} \operatorname{arccos}(\cos \pi x)$ 。 2308. $\frac{1}{2} (|l+x| - |l-x|) + C$ 。
2309. -1 。 2310. $14 - \ln 71$ 。 2311. $\frac{30}{\pi}$ 。 2312. $-\frac{\pi^2}{4}$ 。 2313. $\ln n!$ 。
2314. $-\operatorname{th} \frac{\pi}{2}$ 。 2315. $\frac{8}{3}$ 。 2316. (a) -; (b) +; (c) +; (d) -。

2317. (a) 第二个; (b) 第二个; (c) 第一个. 2318. (a) $\frac{1}{3}$; (b) $6\frac{2}{3}$;
 (c) 10; (d) $\frac{1}{2} \cos \varphi$. 2319. $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b$ 橢圓的短半軸. 2320. $v_{平均} =$
 $= \frac{1}{2}(v_0 + v_1)$, 其中 v 为物体的末速度. 2321. $\frac{1}{2} i_0^2$. 2322. (a) $\theta =$
 $= \sqrt{\frac{1}{n+1}}$; (b) $\theta = \frac{1}{e}$; (c) $\theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta = 1$.
 2323. $\frac{8\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3} \theta (|\theta| < 1)$. 2324. 介于 $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ 和 $\frac{1}{10}$ 之間.
 2325. $0.01 - 0.005 \theta (0 < \theta < 1)$. 2326. $\frac{\theta}{50\pi} (0 < \theta < 1)$.
 2329. $\frac{2}{a} \theta (|\theta| < 1)$. 2330. $\frac{\theta}{a} (|\theta| < 1)\pi$. 2334. $\frac{1}{a}$. 2335. -1 .
 2336. x . 2337. x . 2338. $\frac{2}{3} \ln 2$. 2339. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. 2340. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
 2341. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2342. $\frac{\pi}{2}$. 2343. $\frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. 2344. 0 .
 2345. $\frac{\pi}{2} - 1$. 2346. $\frac{a}{a^2 + b^2}$. 2347. $\frac{b}{a^2 + b^2}$. 2348. $I_n = n!$.
 2349. $I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi a^{n-1} \sin a}{(a^2 - b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$. 2350. $I_n = n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k \ln x$
 $\times (k+1)$, 其中 C_n^k 为从 n 个元素中每次取 k 个的组合数. 2351. 若 n 为
 偶数, $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}$; 若 n 为奇数 $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$. 2352. 若 n 为偶数
 $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \pi$; 若 n 为奇数, $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$. 2353. (a) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$;
 (b) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$. 2354. $\frac{2\sqrt[4]{8} e^{-\frac{\pi}{4}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}}$. 2356. (a) 1; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) 0.
 2357. (a) 1; (b) $\frac{1}{3}$; (c) 1; (d) $\frac{1}{a} f(0)$. 2358. 收敛. 2359. 收敛.
 2360. 发散. 2361. 当 $p > 0$ 时收敛. 2362. 若 $p > -1$ 和 $q > -1$, 收
 敛. 2363. 若 $m > -1$ 和 $n - m > 1$, 收敛. 2364. 当 $1 < n < 2$, 收敛.
 2365. 当 $1 < n < 2$, 收敛. 2366. 若 $m > -2$ 和 $n - m > 1$, 收敛.
 2367. 当 $n > 0 (a \neq 0)$, 收敛. 2368. 发散. 2369. 若 $p < 1$ 和 $q < 1$, 收
 敛. 2370. 当 $n > -1$, 收敛. 2371. 若 $\min(p, q) < 1$ 和 $\max(p, q) > 1$,
 收敛. 2372. 收敛. 2373. 收敛. 2374. 若 $p > 1$ 和 $q < 1$, 收敛.
 2375. 当 $p > 1$, q 是任意的, $r < 1$ 和当 $p = 1$, $q > 1$, $r < 1$, 收敛. 2376. 若

$p_i < 1 (i=1, 2, \dots, n)$ 和 $\sum_{i=1}^n p_i > 1$, 收敛。

2377. 若 $P_n(x)$ 在区间

$[0, +\infty)$ 内无根和 $n > m+1$, 收敛。 2378. 非绝对收敛。 2379. 非绝对收敛。

2380. 若 $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$, 绝对收敛; 若 $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$, 条件收敛。

2381. 若 $p > -2, q > p+1$, 绝对收敛; 若 $p > -2, p < q \leq p+1$, 条件收敛。

2382. 当 $0 < n < 2$, 条件收敛。 2383. 当 $n > m+1$ 绝对收敛; 当

$m < n \leq m+1$, 条件收敛。 2385. 不。 2392. $\ln \frac{1}{2}$ 。 2393. 0。

2394. π 。 2395. 0。 2397. $\frac{a^2}{3}$ 。 2398. $4 \frac{1}{2}$ 。 2399. $4 \frac{1}{2}$ 。

2400. $9.9 - 8.1 \lg e \approx 6.38$ 。 2401. $\frac{\pi}{2}$ 。 2402. πa^2 。 2403. πab 。

2404. $\frac{4}{3} a^3$ 。 2405. $\frac{88}{15} \sqrt{2} p^2$ 。 2406. $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$ 。 2407. $3\pi a^3$ 。

2408. $\frac{\pi a^2}{2}$ 。 2409. $\frac{2\pi}{n+2}$ 。 2410. $\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} \approx 0.546$ 。 2411. $(3\pi-2):$

$(9\pi-2)$ 。 2412. $x = a \operatorname{ch} \frac{S}{a^2}, y = a \operatorname{sh} \frac{S}{a^2}$ 。 2413. $3\pi a^2$ 。 2414. $\frac{8}{15}$ 。

2415. $\frac{a^2}{3} (4\pi^3 + 3\pi)$ 。 2416. $6\pi a^2$ 。 2417. $\frac{3\pi}{8} \cdot \frac{c^4}{ab}$ 。 2418. a^2 。

2419. $\frac{3\pi a^2}{2}$ 。 2420. $\frac{\pi a^2}{4}$ 。 2421. $\frac{p^2}{6} (3 + 4\sqrt{2})$ 。 2422. $\frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。

2423. $(\pi-1) \frac{a^2}{4}$ 。 2424. $\frac{1}{2} \left(1 - \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$ 。 2425. $\pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) a^2$ 。

2426. $\frac{3}{2} a^2$ 。 2427. $\pi a^2 \sqrt{2}$ 。 2428. a^2 。 2429. $\frac{3}{8} \pi a^2$ 。

2430. $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$ 。 2431. $\frac{8}{27} (10\sqrt{10}-1)$ 。 2432. $2\sqrt{x_0 \left(x_0 + \frac{p}{2} \right)} +$

$+ p \ln \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$ 。 2433. $\sqrt{h^2 - a^2}$ 。 2434. $x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^{2x_0}} -$

$-\ln \frac{1 + \sqrt{1 + 2e^{x_0}}}{1 + \sqrt{2}}$ 。 2435. $\frac{e^2 + 1}{4}$ 。 2436. $a \ln \frac{a+b}{a-b} - b$ 。

2437. $\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right)$ 。 2438. $a \ln \frac{a}{b}$ 。 2439. $4a \left(1 + 3\sqrt{3} \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$ 。

2440. $6a$ 。 2441. $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$ 。 2442. $1 + \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}}$ 。 2443. $8a$ 。

2444. $2\pi^2 a$. 2445. $2\left(\operatorname{ch} \frac{T}{2} \sqrt{\operatorname{ch} T} - 1\right) - \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{T}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} T}}{1 + \sqrt{2}}$.
2446. $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln (2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$. 2447. $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} a$.
2448. $8a$. 2449. $p[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. 2450. $\frac{3\pi a}{2}$.
2451. $a(2\pi - \operatorname{th} \alpha)$. 2452. $2 + \frac{1}{2} \ln 3$. 2453. $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \approx 0.73$.
2456. $\frac{bh}{6}(2a + c)$. 2457. $\frac{h}{6}[(2A + a)B + (A + 2a)b]$. 2458. $\frac{\pi h}{6} \times$
 $\times [(2A + a)B + (A + 2a)b]$. 2459. $\frac{1}{2} SH$. 2462. $\frac{2}{3} abc$.
2463. $\frac{4}{3} \pi abc$. 2464. $\frac{8\pi abc}{3}$. 2465. $\frac{16}{3} a^3$. 2466. $\frac{2}{3} R^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.
2467. $\frac{16}{15} a^2 \sqrt{ab}$. 2468. $\frac{\pi a^3}{2}$. 2469. $\frac{2}{15}$. 2470. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3} a^3$.
2472. $\frac{3}{7} \pi ab^2$. 2473. (a) $\frac{16\pi}{15}$; (b) $\frac{8a}{3}$. 2474. (a) $\frac{\pi^2}{2}$; (b) $2\pi^2$.
2475. (a) $\frac{4}{15} \pi ab^2$; (b) $\frac{\pi a^2 b}{6}$. 2476. (a) $\frac{\pi}{2}$; (b) 2π . 2477. $2\pi^2 a^2 b$.
2478. $\frac{8\pi a^3}{3}$. 2479. $\frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})}$. 2480. (a) $5\pi^2 a^3$; (b) $6\pi^3 a^3$;
 (B) $7\pi^2 a^3$. 2481. (a) $\frac{32}{105} \pi ab^2$; (b) $\frac{32}{105} \pi a^2 b$. 2483. (a) $\frac{8}{3} \pi a^2$;
 (b) $\frac{13}{4} \pi^2 a^3$. 2484. (a) $\frac{\pi a^3}{4} \left[\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right]$; (b) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$;
 (B) $\frac{\pi^2 a^3}{4}$. 2485. $\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}$. 2486. $\frac{4\pi a^2}{243} \left(21\sqrt{13} + 2 \ln \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right)$.
2487. $2a\sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2} + \frac{8b^2}{\pi} \ln \frac{\pi a + \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2}}{2b}$. 2488. $\pi \left[(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \right.$
 $\left. + \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2} \right]$. 2489. (a) $\frac{2\pi}{3} [(2x_0 + p)\sqrt{2px_0 + p^2} - p^2]$;
 (b) $\frac{\pi}{4} \left[(p + 4x_0)\sqrt{2x_0(p + 2x_0)} - p^2 \ln \times \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{p + 2x_0}}{\sqrt{p}} \right]$. 2490. (a)
 $2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\operatorname{arc} \sin \varepsilon}{\varepsilon}$; (b) $2\pi a^2 + \frac{2\pi b^3}{\varepsilon} \ln \left[\frac{a}{b} (1 + \varepsilon) \right]$, 其中 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
 是椭圆之离心率. 2491. $4\pi^2 ab$. 2492. $\frac{12}{5} \pi a^2$. 2493. (a) $\pi a(2b +$

$$+ a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}); (6) 2\pi a \left(a + b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right), \quad 2494. 4\pi a^3.$$

$$2495. (a) \frac{64}{3} \pi a^2; (6) 16\pi^2 a^2; (B) \frac{32}{3} \pi a^2. \quad 2496. \frac{3\pi}{5} a^2 (4\sqrt{2} - 1).$$

$$2497. \frac{32}{5} \pi a^2. \quad 2498. (a) 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}); (5) 2\pi a^2 \sqrt{2}; (B) 4\pi a^2.$$

$$2499. \frac{5}{128\sqrt{10}} [14\sqrt{5} + 17 \ln(2 + \sqrt{5})] \approx 1.013. \quad 2500. V = \frac{4\pi}{3} p^2;$$

$$P = 2\pi p^2 [(2 - \sqrt{2}) + \ln(1 + \sqrt{2})]. \quad 2501. M_1 = 2a^2; M_2 = \frac{\pi a^3}{2}.$$

$$2502. M_1 = \frac{bh^2}{6}; M_2 = \frac{bh^3}{12}. \quad 2503. M_2^{(x)} = \frac{\pi ab^3}{4}; M_2^{(y)} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

$$2504. M_1 = \frac{\pi r^2 h^2}{12}; M_2 = \frac{\pi}{30} r^2 h^3. \quad 2507. x_0 = a \frac{\sin a}{a}; y_0 = 0.$$

$$2508. \left(\frac{9}{20} a, \frac{9}{20} a \right). \quad 2509. \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi} \right). \quad 2510. \left(0, 0, \frac{3}{8} a \right).$$

$$2511. \varphi_0 = \varphi - \alpha, \text{ 其中 } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2m}; r_0 = \frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}, \text{ 对数螺线 } r_0 = \frac{am}{\sqrt{1+4m^2}} e^{i\theta(\varphi_0 + \alpha)}. \quad 2512. \varphi_0 = 0, r_0 = \frac{5}{6} a. \quad 2513. x_0 = \pi a, y_0 = \frac{5}{6} a.$$

$$2514. x_0 = \frac{2}{3} a, y_0 = 0. \quad 2515. \left(0, 0, \frac{a}{2} \right). \quad 2516. 75 \text{ 千克}.$$

$$2517. A_h = mg \frac{Rh}{R+h}, \text{ 其中 } R \text{—地球半径. } A_\infty = mgR. \quad 2518. 0.5 \text{ 千克}$$

$$\text{米. } 2519. 1740 \text{ 千克米. } 2520. \frac{2}{3} a^3. \quad 2521. 708 \frac{1}{3} T. \quad 2522. v_0 T +$$

$$+ \frac{a}{2} T^2. \quad 2523. \frac{4}{15} \pi \alpha^2 R^3. \quad 2524. \text{引力在坐标轴上的射影; } X=0,$$

$$Y = -\frac{2km\mu_0}{a}, \text{ 其中 } k \text{—引力常数. } 2525. 2\pi km\delta_0 \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), \text{ 其中}$$

$$k \text{—引力常数. } 2526. \text{大约 3 小时. } 2527. \text{容器应当是把曲线 } y = Cx^4 \text{ 绕} \\ \text{铅直轴 } Oy \text{ 旋转所构的曲面围成的. } 2528. Q = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1000}}.$$

$$2529. 99.92\%. \quad 2530. \frac{\gamma H^2}{6E}. \text{表中的值给出定积分近似计算出的答案.}$$

$$2531. -6.2832. \quad 2532. 0.69315. \quad 2533. 0.83566. \quad 2534. 1.4675.$$

$$2535. 17.333. \quad 2536. 5.4024. \quad 2537. 1.37039. \quad 2538. 0.2268.$$

$$2539. 0.915966. \quad 2540. 3.14159. \quad 2541. 1.463. \quad 2542. 0.3179.$$

$$2543. 0.8862. \quad 2544. 51.04.$$

2545.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42	

第 五 章

2546. $\frac{2}{3}$. 2547. $\frac{3}{2}$. 2548. 3. 2549. 1. 2550. $\frac{1}{3}$. 2551. (a)

$\frac{q \sin \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$; (6) $\frac{q \cos \alpha - q^2}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$. 2552. $1 - \sqrt{2}$. 2553. 仅当

$x = k\pi$ (k 为整数) 时收敛. 2556. 发散. 2557. 发散. 2558. 收敛.

2559. 发散. 2560. 发散. 2561. 发散. 2562. 收敛. 2563. 收敛.

2564. 发散. 2566. 可为收敛, 可为发散. 2567. (a) 可为收敛, 可为发

散; (6) 发散. 2578. 收敛. 2579. 收敛. 2580. 收敛. 2581. (a) 收

敛; (6) 发散. 2582. 收敛. 2583. 收敛. 2584. 收敛. 2585. 收敛.

2586. 收敛. 2587. 发散. 2588. 发散. 2589. 收敛. 2590. 收敛.

2595. 收敛. 2596. 收敛. 2597. 收敛. 2598. 当 $p > 2$ 时收敛.

2599. 当 $\frac{b-a}{d} > 1$ 时, 收敛. 2600. 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛. 2601. 收敛.

2602. 当 $p+q > 1$ 时收敛. 2603. 当 $q > p$ 时收敛. 2604. 当 $\frac{p}{2} + q > 1$

时收敛. 2605. 当 $x > 1-p$ 时收敛. 2607. 当 $q > p+1$ 时收敛.

2608. 当 $p > 0$ 时收敛. 2609. 当 $p > 0$ 时收敛. 2610. 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛.

2611. 当 $b \neq 1$ 时收敛. 2612. 当 $p > 1$ 时收敛. 2613. 发散. 2614. 发

散. 2616. 当 $x < \frac{1}{e}$ 时收敛. 2617. 收敛. 2618. 发散. 2619. 当

$p > 1$ 时收敛. 2620. 当 $p > 1$, q 为任意和当 $p = 1$, $q > 1$ 时收敛.

2621. 发散. 2623. 1.20. 2626. 当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 收敛. 2627. 若 $\alpha = \frac{1}{2}$, 收

敛. 2628. 发散. 2629. 收敛. 2630. 当 $\alpha > 2$ 时收敛. 2631. 收敛.

2632. 收敛. 2633. 收敛. 2634. 若 $c = 0$, $\frac{a}{\alpha} < -1$, 收敛. 2635. 发

散. 2636. 若 $\alpha \neq 0$ 时收敛. 2637. 收敛. 2638. 发散. 2639. 收敛.

2640. 若 $\alpha = \sqrt{bc}$ 时收敛. 2641. 若 $\alpha < -1$, 收敛. 2642. 若 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时

- 收敛。2643. 当 $a^b > c$, $c=0$ 及当 $a^c > 1$ 时收敛。2644. 当 $a+b > 1$ 时收敛。2645. 收敛。2646. 收敛。2647. 收敛。2648. 发散。2649. 收敛。2650. 收敛。2651. 收敛。2652. 当 $a > 2$ 时收敛。2653. 收敛。2654. 收敛。2655. (a) $N > 100000$; (b) $N > 12$; (c) $N > 4$ 。2659. $\frac{2}{9}$ 。2660. $1\frac{3}{7}$ 。2661. $\ln 2$ 。2662. (a) $\frac{3}{2} \ln 2$; (b) $\frac{1}{2} \ln 2$ 。2664. 收敛。2665. 收敛。2666. 收敛。2667. 收敛。2668. 收敛。2669. 收敛。2670. 发散。2671. 收敛。2672. 收敛。2673. 发散。2675. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛。2676. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛。2677. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛。2678. 当 $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 时绝对收敛; 当 $x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}$ 时条件收敛。2679. 对于不为负整数的任何 x 条件收敛。2680. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛。2681. 当 $p > 2$ 时绝对收敛; 当 $1 < p \leq 2$ 时条件收敛。2682. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛。2683. 条件收敛。2684. 绝对收敛。2685. 发散。2686. 条件收敛。2687. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛。2688. 发散。2689. 当 $p > 2$ 时绝对收敛; 当 $0 < p \leq 2$ 时条件收敛。2690. 收敛。2691. 发散。2692. 当 $q > p+1$ 时绝对收敛; 当 $p < q \leq p+1$ 时条件收敛。2693. 当 $p > 1$, $q > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p = q \leq 1$ 时条件收敛。2694. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $p = 1$ 时条件收敛。2695. 当 $p > 1$ 时绝对收敛; 当 $p = 1$ 时条件收敛。2696. 当 $p > 1$, $q > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < p = q \leq 1$ 时条件收敛。2698. (a) $p > 1$; (b) $0 < p \leq 1$ 。2699. (a) $q > p+1$; (b) $p < q \leq p+1$ 。2700. 当 $m \geq 0$ 时绝对收敛; 当 $-1 < m < 0$ 时条件收敛。2706. (a) 发散; (b) 可为收敛, 可为发散。2707. $\frac{2}{3}$ 。2708. $\frac{3}{4}$ 。2709. $-\frac{2}{7}$ 。2710. $\frac{y(1+x)}{1-xy}$ 。2716. 当 $|x| > 1$ 时绝对收敛。2717. 当 $x > 0$ 时绝对收敛; 当 $x = 0$ 时条件收敛。2718. 当 $x > -\frac{1}{3}$ 和当 $x < -1$ 时绝对收敛。2719. 当 $|x| \neq 1$ 时绝对收敛; 当 $x = -1$ 时条件收敛。2720. 当 $-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3}$ 及当 $\frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6}$ 时绝对收敛。2721. 当

- $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时绝对收敛。 2722. 当 $p > 1$ 和 $x \neq k$ ($k = -1, -2, \dots$) 时绝对收敛, 当 $0 < p \leq 1, x \neq k$ 时条件收敛。 2723. 当 $q > p+1$ 时绝对收敛, 当 $p < q \leq p+1$ 时条件收敛。 2724. 当 $|x| < 1$ 时绝对收敛。 2725. 当 $|x| < 1$ 时绝对收敛。 2726. 当 $|x| \neq 1$ 时绝对收敛。 2727. 当 $x \neq -1$ 时绝对收敛。 2728. 当 $x > 0$ 时绝对收敛。 2729. 若 $|x| > 1$, 当 $0 < |x| < +\infty$ 时绝对收敛; 若 $|x| \leq 1$ 或若 $x = 0$ 时发散。 2730. 当 $x = 2$ 及当 $x > e$ 时绝对收敛。 2731. 当 $x > 1$ 时绝对收敛。 2732. 若 $0 < \min(x, y) < 1$, 收敛。 2733. 当 $|x| < 1, 0 \leq y < +\infty$ 及当 $|x| > 1, y > |x|$ 时绝对收敛; 当 $x = -1, 0 \leq y \leq 1$ 时条件收敛。 2734. 当 $\max(|x|, |y|) < 1$ 时绝对收敛。 2735. 当: 1) $0 \leq x < 1, -\infty < y < +\infty$; 2) $x = 1, y > 1$; 3) $x > 1, y > 2$ 时绝对收敛。 2736. 当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ 时绝对收敛, 其中 k 为整数。 2738. $\frac{1}{2} < |x| < 2; \frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$ 。 2739. (a) 当 $x \geq 0$ 时绝对收敛, 当 $-1 < x < 0$ 时条件收敛; (b) 当 $p+x > 1$ 及当 $x = 0, 1, 2, \dots$ 时绝对收敛, 当 $0 < p+x \leq 1$ 时条件收敛; (c) 当: 1) $|x| < 1, y$ 为任意数; 2) $x = \pm 1, y > \frac{1}{2}$; 3) x 为任意数, $y = 0, 1, 2, \dots$ 时绝对收敛; 当 $x = 1, -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ 时条件收敛。 2743. 当 $\varepsilon = 0.001$ 及 $x = \sqrt[m]{0.1}, N \geq 3m$, 不。 2744. $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 。 2745. $n \geq 26$ 。 2746. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛。 2747. 一致收敛。 2748. 非一致收敛。 2749. 一致收敛。 2750. 一致收敛。 2751. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛。 (c) 一致收敛。 2752. (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛。 2753. 一致收敛。 2754. 非一致收敛。 2755. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛。 2756. (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛。 2757. 非一致收敛。 2758. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛。 2759. 一致收敛。 2760. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛。 2761. 一致收敛。 2762. 一致收敛。 2763. 非一致收敛。 2767. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛。 2768. 一致收敛。 2769. 非一致收敛。 2770. 一致收敛。 2771. 非一致收敛。 2772. 一致收敛。 2773. (a) 非一致收敛; (b) 一致收敛。 2775. (a) 一致收敛; (b) 非一致收敛。 2776. 非一致收敛。 2779. 一致收敛。 2780. 一致收敛。 2781. 一致收敛。 2782. 一致收敛。 2783. 可以。 2785. 未必。

2795. (a) 当 $|x| < 1$ 时存在并連續; (b) 当 $|x| < +\infty$ 时存在并連續; (c) $|x| < +\infty$ 时存在; 当 $x=0$ 不連續。 2799. (a) 当 $x \neq -k$ ($k=1, 2, 3, \dots$), 存在并可微分; (b) 当 $|x| < +\infty$ 时存在, 除 $x=0$ 外处处可微分。

2802. (a) α 为任意的; (b) $\alpha < 1$; (c) $\alpha < 2$ 。 2805. 不是。 2806. $\frac{1}{2} \ln 2$ 。

2807. 1。 2808. 1。 2809. 合理。 2810. 是。 2812. $R=1; (-1, 1)$, 当 $x=-1$ 时, 若 $p>1$ 为絕對收斂, 若 $0 < p \leq 1$ 为条件收斂; 当 $x=1$ 时若 $p>1$ 为絕對收斂, 若 $p \leq 1$ 为发散。 2813. $R=\frac{1}{3}; (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$; 当

$x=-\frac{4}{3}$ 时条件收斂; 当 $x=-\frac{2}{3}$ 时发散。 2814. $R=4; (-4, 4)$ 。 当

$x=\pm 4$ 时发散。 2815. $R=+\infty; (-\infty, +\infty)$ 。 2816. $R=\frac{1}{e};$

$(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ 。 当 $x=\pm \frac{1}{e}$ 时发散。 2817. $R=+\infty; (-\infty, +\infty)$ 。

2818. $R=2; (-1, 3)$ 。 当 $x=-1$ 时若 $p>2$ 为絕對收斂, 若 $0 < p \leq 2$ 为条件收斂; 当 $x=3$ 时若 $p>2$ 为絕對收斂, 若 $p \leq 2$ 为发散。 2819. $R=2^p;$

$(-2^p, 2^p)$ 。 当 $x=-2^p$ 时, 若 $p>2$ 为絕對收斂, 若 $p \leq 2$ 为发散; 当 $x=2^p$

时若 $p>2$ 为絕對收斂, 若 $0 < p \leq 2$ 为条件收斂。 2820. $R=1; (-1, 1)$ 。 当

$x=-1$ 时若 $m \geq 0$ 为絕對收斂, 若 $m < 0$ 为发散; 当 $x=1$ 时若 $m \geq 0$ 为絕

对收斂, 若 $-1 < m < 0$ 为条件收斂。 2821. $R=\min(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}); (-R, R)$ 。

当 $x=-R$ 时若 $a \geq b$, 条件收斂, 若 $a < b$ 絕對收斂; 当 $x=R$ 时, 若 $a \geq b$ 发

散, 若 $a < b$ 絕對收斂。 2822. $R=\max(a, b); (-R, R)$ 。 当 $x=\pm R$ 时

发散。 2823. $R=1; (-1, 1)$ 。 当 $x=\pm 1$ 时若 $a > 1$ 絕對收斂, 若 $a \leq 1$ 发

散。 2824. $R=1; (-1, 1)$ 。 当 $x=\pm 1$ 絕對收斂。 2825. $R=1;$

$(-1, 1)$ 。 当 $x=-1$ 时条件收斂, 当 $x=1$ 发散。 2826. $R=1; (-1, 1)$ 。

当 $x=-1$ 时发散; 当 $x=1$ 时条件收斂。 2827. $R=1; (-1, 1)$ 。 当 $x=\pm 1$

时发散。 2828. $R=\frac{1}{4}; (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 。 当 $x=\pm \frac{1}{4}$ 时发散。 2829. $R=\frac{1}{3};$

$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 。 当 $x=\pm \frac{1}{3}$ 时发散。 2830. $R=1; (-1, 1)$ 。 当 $x=\pm 1$ 时

絕對收斂。 2831. $R=1; (-1, 1)$ 。 当 $x=\pm 1$ 时条件收斂。 2832. $R=1;$

$(-1, 1)$ 。 当 $x=-1$ 时若 $\gamma-\alpha-\beta > 0$ 为絕對收斂, 若 $-1 < \gamma-\alpha-\beta \leq 0$ 为

条件收斂; 当 $x=1$ 时若 $\gamma-\alpha-\beta > 0$ 为絕對收斂; 若 $\gamma-\alpha-\beta \leq 0$ 为发散。

2833. $x > 0$, 2834. $|x| > \frac{1}{2}$, 2835. $0 < |x| < +\infty$, 2836. $x > -1$.

2837. $|x - kx| < \frac{x}{4}$, 其中 k 为整数. 2838. $-1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 +$

$+(x+1)^3$. 2839. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$ ($|x| < |a|$); (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$

($|x-b| < |a-b|$); (B) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}$ ($|x| > |a|$). 2840. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \times$

$\times \frac{(x-1)^n}{n}$ ($0 < x \leq 2$); $\ln 2$. 2841. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ($|x| < +\infty$).

2842. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ($|x| < +\infty$). 2843. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}$

x^{2n} ($|x| < +\infty$). 2844. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$ ($|x| < +\infty$). 2845. $\mu x +$

$+\frac{\mu(1^2-\mu^2)}{3!}x^3 + \frac{\mu(1^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)}{5!}x^5 + \dots$ ($|x| < 1$). 2846. $1 - \frac{\mu^2}{2!}x^2 -$

$-\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{4!}x^4 - \dots$ ($|x| < 1$). 2847. $1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} +$

$+\dots$ ($0 < x < 2$). 2848. $e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \dots\right)$ ($|x| < 1$).

2849. $\sin(x+h) = \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \dots$ ($|h| < +\infty$);

$\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x + \frac{h^3}{3!} \sin x + \dots$ ($|h| < +\infty$).

2850. (a) $(-2, 2)$; (b) $(3, 7)$. 2851. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ ($|x| < +\infty$).

2852. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$ ($|x| < +\infty$). 2853. $\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times$

$\times \frac{3^{2n-1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ ($|x| < +\infty$). 2854. $\sum_{n=10}^{\infty} x^n$ ($|x| < 1$).

2855. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ ($|x| < 1$). 2856. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1} \times$

$\times \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right)$. 2857. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ($|x| < 1$). 2858. $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [1 -$

$-(-2)^n] x^n$ ($|x| < \frac{1}{2}$). 2859. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right] x^n$ ($|x| < 1$).

2860. $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1 - (-1)^n}{2}\right] x^n$ ($|x| < 1$). 2861. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 其中 $a_n =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} \right]$ 斐波拉奇数. 2862. $\frac{2}{\sqrt{3}} \times$

- $\times \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{2\pi(n+1)}{3} \quad (|x| < 1)。$
- 2863.** $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos na \quad (|x| < 1)。$
- 2864.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(n+1)a \quad (|x| < 1)。$
- 2865.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} na \quad (|x| < e^{-|a|})。$
- 2866.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (|x| < 1)。$
- 2867.** $\sum_{n=1}^{\infty} x$
- $\times \frac{(-1)^{n+1} + [1 + (-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)。$
- 2868.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos na}{n!} x^n$
- $(|x| < +\infty)。$
- 2869.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1); \frac{\pi}{4}。$
- 2870.** $x +$
- $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1)。$
- 2871.** $x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \right.$
- $\times \left. \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\} \quad (|x| \leq 1)。$
- 2872.** $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n} x^n \quad (|x| \leq 1)。$
- 2873.** (a) $x +$
- $+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad (-1 \leq x \leq 1);$
- $(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (-1 < x < 1);$
- $(b) \operatorname{arctg} 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right);$
- $(c) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times \right.$
- $\times \left. \frac{x^{2n+1}}{2^n(2^n+1)} \right\} \quad (-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2});$
- $(d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} \quad (-1 \leq x \leq$
- $\leq 1);$
- $(e) 2|x| \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} \right\} \quad (-1 \leq x \leq 1);$
- $(f) 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x$
- $\times \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \right\} \quad (-1 \leq x \leq 1);$
- $(g) -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \times$
- $\times \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)。$
- 2874.** (a) $e^{2x} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} + \right.$
- $\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right];$
- $(b) \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{x}{2}} \left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x + \right.$
- $\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2 + \dots \right];$
- $(c) \frac{(-1)^{n-1} n!}{(1+x^2)^n} \left[x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} + \right.$
- $\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} x^{n-5} - \dots \right]。$
- 2875.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^{2n}$
- $(-2 \leq x \leq 0)。$
- 2876.** $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \quad (|x| > 1)。$
- 2877.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}$
- $(x > 0)。$
- 2878.** $\frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{n+1} \left(x > -\frac{1}{2} \right)。$
- 2881.** $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \dots \quad (|x| < 1)。$
- 2882.** $1 +$
- $+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty)。$
- 2883.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} + \right.$

$+\frac{1}{(2n-4)!}]x^n (|x|<+\infty)$, 其中 $0!=1, (-1)!=\infty, (-2)!=\infty$ 等等。

$$2884. 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 \leq x < 1). \quad 2885. x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x$$

$$\times \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1} \quad (|x| \leq 1). \quad 2886. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).$$

$$2887. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty). \quad 2888. \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n \right\} \quad (-1 < x \leq 1). \quad 2889. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) \frac{x^{2n}}{n}$$

$$(|x| \leq 1). \quad 2890. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n} \quad (|x| \leq 1). \quad 2891. x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \cdots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right). \quad 2892. x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \cdots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2893. -\frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \cdots \quad (|x| < \pi). \quad 2894. E_0=1,$$

$$\sum_{k=0}^n \left\{ (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)! (2n-2k)!} \right\} = 0, \quad 2895. P_0(x)=1; P_n(t) = \frac{(2n-1)!!}{n!} \times \\ \times \left[t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \cdots \right] \quad (n \geq 1) \quad (\text{洛阳德}$$

$$\text{多项式}). \quad 2896. \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \text{ 其中 } s_n = \sum_{k=0}^n a_k. \quad 2897. (a) R \geq \min(R_1, R_2);$$

$$(6) R \geq R_1 R_2. \quad 2901. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)} \quad (|x| < +\infty). \quad 2902. x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (|x| \leq 1). \quad 2903. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

$$(|x| < +\infty). \quad 2904. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (|x| \leq 1). \quad 2905. x + \frac{x^2}{4} -$$

$$- \frac{x^3}{36} + \frac{x^5}{96} - \cdots \quad (|x| < 1). \quad 2906. \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1). \quad 2907. \operatorname{arctg} x$$

$$(|x| \leq 1). \quad 2908. \operatorname{ch} x \quad (|x| < +\infty). \quad 2909. 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \quad (|x| \leq 1).$$

$$2910. \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x < 1). \quad 2911. \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1). \quad 2912. \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$$

$$(|x| < 1). \quad 2913. \frac{2x}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1). \quad 2916. R=2; (x-1)^2 +$$

$$(y+1)^2 < 4. \quad 2917. R = \frac{1}{\sqrt{2}}; x^2 + y^2 < \frac{1}{2}. \quad 2918. R=1; x^2 + y^2 < 1.$$

2919. $R=1; x^2+y^2<1$. 2920. $R=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|; (x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<4\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 2921. 2.080. 2922. (a) $0.87606=\text{arc } 50^\circ 11'40''$; (b) 1.99527; (c) 0.60653; (d) 0.22314. 2923. 0.30902. 2924. 0.999848. 2925. 0.168. 2926. 2.718282. 2927. 0.1823. 2928. 3.1416. 2929. 3.142. 2930. 3.141592654. 2931. $\ln 2=0.69315; \ln 3=1.09861$. 2932. (a) 0.747; (b) 2.835; (c) 1.605; (d) 0.905; (e) 1.057; (f) 0.119; (g) 0.337; (h) 0.927; (i) 8.041; (j) 0.488; (k) 0.507; (l) 0.783. 2933. 3.82. 2934. 4.84. 2935. 20.02 米
2936. $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$. 2937. 福里哀级数就是多项式 $P_n(x)$. 2938. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}; \frac{\pi}{4}$. 2939. $\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}$. 2940. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. 2941. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 2942. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. 2943. $-\frac{(a-b)x}{4}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. 2944. $\frac{2}{3}x^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$. 2945. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]$. 2946. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}x\times\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}$. 2947. $\frac{2\text{sh}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2+a^2}$. 2948. $2\text{sh}\pi ah\left[\frac{1}{2ah}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos nx-\pi n\sin nx}{(ah)^2+(\pi n)^2}\right]$. 2949. $a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ ($a<x<a+2l$). 2950. $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$. 2951. $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$. 2952. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right\}$. 2953. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$. 2954. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. 2955. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$ ($x\neq k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 2956. $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. 2957. $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$. 2958. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$. 2959. $\frac{a}{1-a^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{1-a}\cos nx$. 2960. $\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[2+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^k\right]\times\right.$

$$\times \frac{(-1)^m}{m} \sin \frac{m\pi}{2} \cos(8k+4)x \Big\} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1)^k \left[\frac{8}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^k \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{(-1)^m}{2m-1} \sin(2m-1) \frac{\pi}{4} \right] \cos 8kx \right\}. \quad 2961. \quad (a) \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$[-\pi \leq x \leq \pi]; \quad (b) 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} \quad (0 \leq x < \pi);$$

$$(c) \frac{4x^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi). \quad \frac{\pi^2}{6}, \quad \frac{\pi^2}{12}, \quad \frac{\pi^2}{8}.$$

$$2962. \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}; \quad x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \times \\ \times (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}; \quad x^4 = \frac{1}{5} \pi^4 + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos nx.$$

$$2963. \quad \frac{\alpha(x-\alpha)}{2}; \quad \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}. \quad 2964. \quad \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2\pi nx}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi nx}{3}}{n^2} \quad (0 \leq x \leq 3). \quad 2965. \quad \frac{1}{2^m} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k=1}^m C_{2m}^{m-k} \cos 2kx.$$

$$2966. \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx \quad (|q| < 1). \quad 2967. \quad 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx \quad (|q| < 1).$$

$$2968. \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx. \quad 2969. \quad -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx. \quad 2970. \quad -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

$$2971. \quad -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n}. \quad 2972. \quad -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}.$$

$$2973. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}. \quad 2974. \quad x(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \times \\ \times \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}; \quad y(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \times \\ \times \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}.$$

$$2975. \quad f(-x) = f(x); \quad f(\pi-x) = -f(x). \quad 2976. \quad f(-x) = -f(x);$$

$$f(\pi-x) = f(x). \quad 2977. \quad (a) -\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{(2k+1)^2} - \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \right] \cos(2k+1)x \right\}$$

$$\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right); \quad (b) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^3} \right] \sin(2k+1)x \right\} \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$2978. \quad a_{2n} = b_{2n} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad 2979. \quad a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad 2980. \quad (a) a_n = 0, \quad b_{2k-1} = 0; \quad (b) a_n = 0, \quad b_{2k} = 0. \quad 2981. \quad \alpha_n = a_n,$$

$$\beta_n = -b_n. \quad 2982. \quad \alpha_n = -a_n, \quad \beta_n = b_n. \quad 2983. \quad \bar{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh,$$

$$\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh. \quad 2984. \quad A_0 = a_0, \quad A_n = a_n \frac{\sin nh}{nh}, \quad B_n = b_n \frac{\sin nh}{nh}$$

$$(n=1, 2, \dots). \quad 2985. \quad A_0 = a_0^2, \quad A_n = a_n^2 + b_n^2; \quad B_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

$$2986. \frac{1}{2}. \quad 2987. \frac{1}{4}. \quad 2988. 2 \ln 2 - 1. \quad 2989. \frac{1}{4}. \quad 2990. \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right). \quad 2991. \ln 2 - \frac{1}{2}. \quad 2992. \frac{3}{4}. \quad 2993. 1.$$

$$2994. 2(1 - \ln 2). \quad 2995. 2e. \quad 2996. 3e^2. \quad 2997. \frac{x^3}{3} - 3.$$

$$2998. \frac{x^2}{4} - \frac{39}{16}. \quad 2999. \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1). \quad 3000. \frac{1}{3}(4 \ln 2 - 1).$$

3001. $e^x(\alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha_0)$, 其中的系数 α_k ($k=0, 1, \cdots, m$) 由等式 $P(n) = \alpha_n n(n-1) \cdots (n-m+1) + \alpha_{n-1} n(n-1) \cdots (n-m+2) + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0$ 决定. 3002. $e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 \right)$. 3003. $\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x} - \frac{1}{x}$.

$$3004. \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x. \quad 3005. \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - e \operatorname{ch} \sqrt{x} \right), \text{若 } x \geq 0;$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right), \text{若 } x < 0. \quad 3006. \ln \frac{1}{1-x}.$$

$$3007. 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) \quad (|x| \leq 1). \quad 3008. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$(|x| < 1). \quad 3009. (1-x)^{-\frac{x}{2}} - 1 \quad (|x| < 1). \quad 3010. \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1.$$

$$3011. \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1). \quad 3012. \frac{x(3-x)}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1). \quad 3013. (1+2x^2)e^{x^2}.$$

$$3014. \frac{x}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2. \quad 3015. \frac{\pi}{4}. \quad 3016. \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 3017. \frac{x}{2}.$$

$$3018. \frac{x-x}{2} \quad (0 < x < 2\pi). \quad 3019. -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \quad (0 < x < 2\pi).$$

$$3020. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} \right|. \quad 3021. \frac{\pi}{4}, \text{若 } 0 < x < 2\alpha; 0, \text{若 } \alpha < x < 2\pi - 2\alpha;$$

$$-\frac{\pi}{4}, \text{若 } 2\pi - 2\alpha < x < 2\pi. \quad 3022. \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x \quad (|x| < \pi).$$

$$3023. \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) - \frac{x}{2} \sin x \quad (|x| < \pi). \quad 3024. \frac{x^2}{8} - \frac{\pi}{4} |x| \quad (|x| \leq \pi).$$

$$3025. \frac{x}{2} (1 + \cos x) - \sin x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \quad (|x| < \pi). \quad 3026. e^{\cos x} \cos(\sin x) \quad (|x| < +\infty).$$

$$3027. x = ix, y = jx \quad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$$3028. 2(\operatorname{arcsin} x)^2 \quad (|x| \leq 1). \quad 3029. \text{若 } x \geq 0, \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arcsin} x$$

- $\times \frac{\sqrt{x}}{2}$; 若 $x < 0$, $\frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \ln \frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{4-x}}{2}$. 3030. $\frac{1}{x-1}$.
 3031. $\frac{a_1}{x}$. 3032. (a) $\frac{x}{1-x}$; (b) $\frac{1}{1-x}$. 3033. (a) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$; (b) $\frac{x}{(x-1)^2}$.
 3034. 1. 3035. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(2n+1)^2}$. 3036. $\frac{\pi^2}{12}$.
 3037. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(p+nq)}$. 3038. $2 - \frac{\pi^2}{6}$. 3039. $\frac{1}{24}$. 3040. $\frac{\pi^2}{12}$.
 3041. $F(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\}$. 3042. $E(k) =$
 $= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}$. 3043. $2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \varepsilon^2 - \right.$
 $\left. - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \dots \right]$, 其中 ε 为椭圆的离心率. 3047. $\frac{2\pi a^4}{n!}$. 3048. 当
 $|\alpha| < 1$ 时 $\ln(1+\alpha)$; 当 $|\alpha| > 1$ 时 $\frac{1}{\alpha^2} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)$. 3049. 当 $|\alpha| \leq 1$ 时 0;
 当 $|\alpha| > 1$ 时 $\pi \ln \alpha^2$. 3050. $2 \cdot 10^{-6}$. 3061. $\frac{1}{4}$. 3062. 2. 3063. $\frac{3}{7}$.
 3064. $a^{-\ln 2}$. 3065. (a) 不; (b) 是; (c) 是; (d) 是. 3066. 发散于零.
 3067. 收敛. 3068. 当 $p > 1$ 时收敛. 3069. 发散于零. 3070. 对任
 何的 p 收敛. 3071. 若 $a_1 = a$, 收敛. 3072. 若 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^p b_i$ 收敛.
 3073. 发散于零. 3074. 收敛. 3075. 收敛. 3076. 收敛. 3077. 对
 任何的 x 收敛. 3078. 对任何的 x 收敛. 3079. 当 $|x| < 1$ 时收敛.
 3080. 当 $|x| < 2$ 时收敛. 3081. 当 $|x| > e$ 时收敛. 3082. 对任何的
 x 收敛. 3083. 当 $|x| < 1$, p, q 为任意的及当 $x = \pm 1$, $p > 1$, $q > \frac{1}{2}$ 时收
 敛. 3084. 对任何的 x 及 p , 收敛. 3085. 发散. 3086. 条件收敛.
 3089. 发散. 3090. 若 $p > 1$, 绝对收敛, 若 $\frac{1}{2} < p \leq 1$, 条件收敛.
 3091. 发散. 3092. 发散. 3093. 发散. 3094. 条件收敛. 3095. 条
 件收敛. 3096. 发散. 3097. 当 $a > 1$ 绝对收敛; 当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 条件收敛.
 3109. $F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}$; $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$, $|f'_n(x)| < c_n (n=1,$
 $2, \dots)$, 其中 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$. 3111. $157.970 + \theta \cdot 0.0004 (0 < \theta < 1)$.
 3112. $10^{2866} \cdot 7.7 \left(1 + \frac{\theta}{12000} \right) (|\theta| < 1)$. 3113. $0.0798 \left(1 + \frac{\theta}{300} \right)$

$$(|\theta| < 1), \quad 3114. 10^{28} \cdot 1.378 \left(1 + \frac{\theta}{288}\right) (|\theta| \leq 1). \quad 3115. 10^{42} \times$$

$$\times 4.792 \left(1 + \frac{\theta}{120}\right) (|\theta| \leq 1). \quad 3116. 0.124 \left(1 + \frac{\theta}{300}\right) (|\theta| < 1).$$

$$3117. 0.355 \left(1 + \frac{\theta}{600}\right) (|\theta| < 1). \quad 3118. (2n-1)!! = \sqrt{2} (2n)^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}}$$

$$(|\theta_n| < 1). \quad 3119. \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{\theta_n}{6n}} (|\theta_n| < 1). \quad 3120. (a) 1; (b) e; (B) \frac{e}{2};$$

$$(r) 1. \quad 3121. P_3(x) = 1 - \frac{55}{21}x + \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3, \quad P_3(-1) \approx 3.43;$$

$$P_3(1) = -1.57; \quad P_3(6) \approx 8.43. \quad 3122. y = y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2h^2}(x - x_0)^2. \quad 3123. y = 0.808 + 0.193x - 0.00101x^2.$$

$$3124. \sin x^\circ \approx \frac{5x}{288} \left[1 - \left(\frac{x}{150}\right)^2\right]; \quad \sin 20^\circ \approx 0.341; \quad \sin 40^\circ \approx 0.645;$$

$$\sin 80^\circ \approx 0.994. \quad 3125. P(x) = \frac{1}{3}(7x^2 - 4x^4). \quad 3126. 7\frac{1}{3}.$$

$$3127. B_n(x) = x; \quad B_n(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}; \quad B_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)x^3 +$$

$$+ \frac{3}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 - \frac{1}{n^2}x. \quad 3128. B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(a + \frac{i}{n}l\right) C_n^i \times$$

$$\times \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{l^n}, \text{ 其中 } l = b-a. \quad 3129. B_n(x) = \frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3 +$$

$$+ \frac{1}{16}(1+x)^4. \quad 3130. B_{2n}(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \sum_{i=1}^n i C_{2n}^{n-i} \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^i +$$

$$+ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^i\right]. \quad 3131. B_n(x) = e^{kn} \left[1 + \left(e^{\frac{kl}{n}} - 1\right) \frac{x-a}{l}\right]^n, \text{ 其中 } l = b-a.$$

$$3132. B_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right],$$

$$\text{其中 } i = \sqrt{-1}. \quad 3135. \sigma_{2n-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

第 二 編

第 六 章

$$3136. \text{ 半平面 } y \geq 0, \quad 3137. |x| \leq 1; |y| \geq 1. \quad 3138. \text{ 圆 } x^2 + y^2 \leq 1.$$

3139. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的外面。 3140. 环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ 。 3141. 月形 $x \leq x^2 + y^2 < 2x$ 。 3142. $-1 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ 。 3143. 半平面 $x + y < 0$ 。
3144. 一对对顶的直角 $|y| \leq |x| (x \neq 0)$ 。 3145. 由直线: $y = 0$ 和 $y = -2x$ 所围成的一对对顶的角, 包含边界在内, 但不要公共顶点 $O(0, 0)$ 。 3146. 由抛物线 $y^2 = x$, $y^2 = -x$ 和直线 $y = 2$ 所包围的曲三角形, 除去顶点 $O(0, 0)$ 。
3147. 同心环族 $2\pi k \leq x^2 + y^2 \leq \pi(2k+1) (k=0, 1, 2, \dots)$ 。 3148. 圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的外面, 除去顶点, 包含边界在内。 3149. 空间四个卦限的总体。 3150. 双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的内部。 3151. 平行直线。
3152. 同心圆。 3153. 以 $y = \pm x$ 为公共渐近线的等轴双曲线族。 3154. 平行直线。 3155. 以坐标原点为顶点的直线束, 但顶点除外。
3156. 相似椭圆族。 3157. 位于 I 和 III 象限内且以坐标轴为渐近线的等轴双曲线。 3158. 两节的折线族, 其顶点位于 Oy 轴上。 3159. 当 $z = 0$ 时为 I 和 III 象限; 当 $z > 0$ 时为两节的折线族, 它的各节平行于坐标轴, 而顶点位于直线 $x + y = 0$ 上。 3160. 经过坐标原点 (不包含此原点在内) 并与 Ox 轴垂直的圆束。 3161. 曲线 $y = \frac{C}{\ln x}$ 。 3162. 曲线 $y = \frac{C+x}{\ln x}$ 。
3163. 中心在 Ox 轴上, 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 成正交的圆族。 3164. 与 Oy 成正交且经过点 $(-a, 0)$, $(a, 0)$ 的圆族, 除去后面这两点而外。 3165. 若 $z = 0$, 直线 $x = m\pi$ 和 $y = n\pi (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$; 若 $z = -1$ 或 $z = 1$, 正方形系 $m\pi < x < (m+1)\pi$, $n\pi < y < (n+1)\pi$, 其中 $(-1)^{m+n} = z$ 。
3166. 平行平面族。 3167. 中心在坐标原点的同心球族。 3168. 当 $u < 0$, 双叶双曲面族; 当 $u > 0$, 单叶双曲面族; 当 $u = 0$, 圆锥。 3169. 椭圆柱族, 其公共轴为 $x + y = 0, z = 0$ 。 3170. 若 $u = 0$, 同心球族 $x^2 + y^2 + z^2 = \pi n (n = 0, 1, 2, \dots)$; 若 $u = -1$ 或 $u = 1$, 球层族 $\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < \pi(n+1)$, 其中 $(-1)^n = u$ 。 3171. 方向为 $z = f(y), x = 0$ 的圆柱面, 其母线平行于直线 $y = ax, z = 0$ 。 3172. 曲线 $z = f(x), y = 0$ 绕 Oz 轴所成的旋转面。
3173. 顶点在坐标原点, 方向为: $x = 1, z = f(y)$ 的圆锥面。 3174. 导线为: $x = 1, z = f(y)$ 且母线平行于 Oxy 平面的锥面。 3176. $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$ 。
3177. $\sqrt{1+x^2}$ 。 3178. $f(t) = 2t + t^2; z = x - 1 + \sqrt{y} (x > 0)$ 。
3179. $f(x) = x^2 - x; z = 2y + (x - y)^2$ 。 3180. $f(x, y) = x^2 \frac{1-y}{1+y}$ 。
3184. (a) $0, 1$; (б) $\frac{1}{2}, 1$; (в) $0, 1$; (г) $0, 1$; (д) $1, \infty$ 。 3185. 0 。

3186. 0. 3187. a . 3188. 0. 3189. 0. 3190. 1. 3191. e .

3192. $\ln 2$. 3193. (a) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$; (b) $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$.

3194. 不連續点: $x=0, y=0$. 3195. 直綫 $x+y=0$ 上一切点.

3196. $O(0, 0)$ 为无穷型間断点; 直綫 $x+y=0 (x \neq 0)$ 的各点——可移去間断点. 3197. 在坐标軸上的諸点. 3198. 直綫 $x=m\pi$ 和 $y=n\pi (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 上点的总体. 3199. 圓周 $x^2+y^2=1$ 的各点. 3200. 坐标面: $x=0, y=0$ 和 $z=0$ 的各点. 3201. (a, b, c) . 3212. $f'_w(x, 1)=1$.

3213. $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2, \frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-16xy,$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$. 3214. $\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y}, \frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=1-$

$-\frac{1}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}$. 3215. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{2}{y^3},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{6x}{y^4}$. 3216. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$. 3217. $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+$

$+x \cos(x+y), \frac{\partial u}{\partial y}=x \cos(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2 \cos(x+y)-x \sin(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=$

$=\cos(x+y)-x \sin(x+y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x \sin(x+y)$. 3218. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x \sin x^2}{y},$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\cos x^2}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2 \sin x^2+4x^2 \cos x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{2x \sin x^2}{y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2 \cos x^2}{y^3}$.

3219. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y}+\frac{8x^2}{y^2} \sin \frac{x^2}{y} \sec^3 \frac{x^2}{y},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{2x}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y}-\frac{4x^3}{y^3} \sin \frac{x^2}{y} \sec^3 \frac{x^2}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y}+\frac{2x^4}{y^4} \sin \frac{x^2}{y} \sec^3 \frac{x^2}{y}$.

3220. $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}, \frac{\partial u}{\partial y}=x^y \ln x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=x^{y-1}(1+y \ln x),$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^y \ln^2 x (x>0)$. 3221. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$. 3222. $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. 3223. $\frac{\partial u}{\partial x}=$

$=\frac{1}{1+x^2}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2} (xy \neq$

$$\neq 1)。$$

3224. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2 + y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2 - y^2) \operatorname{sgn} y}{(x^2 + y^2)^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^3} (y \neq 0)。$ **3225.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}。$$
 3226. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y} \right)^z,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^z, \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y} \right)^z \ln \frac{x}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2} \left(\frac{x}{y} \right)^z, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2} \left(\frac{x}{y} \right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y} \right)^z \ln^2 \frac{x}{y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{x}{y} \right)^z, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{y} \right)^z \left(1 + z \ln \frac{x}{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{y} \times \left(\frac{x}{y} \right)^z \left(1 + z \ln \frac{x}{y} \right) \left(\frac{x}{y} > 0 \right)。$$
 3227. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu}{xz}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u \ln x}{z},$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yu}{z^2} \ln x, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2 z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u \ln^2 x}{z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu \ln x}{z^4} (2z + y \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(z + y \ln x)u}{xz^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{yu(z + y \ln x)}{xz^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = -\frac{u \ln x (z + y \ln x)}{z^3}$$

$$(xz \neq 0)。$$
 3228. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^z}{x} u, \frac{\partial u}{\partial y} + zy^{z-1} u \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = y^z u \ln x \ln y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

$$= \frac{y^z(y^z - 1)}{x^2} u, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = zy^{z-2} u (z - 1 + zy^2 \ln x) \ln x, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = y^z u (1 + y^z \ln x) \times$$

$$\times \ln x \ln^2 y, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{zy^{z-1} u}{x} (1 + y^z \ln x), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{y^z u \ln y}{x} (1 + y^z \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = y^{z-1} u \ln x [1 + z \ln y (1 + y^z \ln x)] (x > 0, y > 0)。$$
 3235. $du =$

$$= x^{m-1} y^{n-1} (my dx + nx dy), d^2u = x^{m-2} y^{n-2} [m(m-1)y^2 dx^2 + 2mnxy dx dy +$$

$$+ n(n-1)x^2 dy^2]。$$
 3236. $du = \frac{y dx - x dy}{y^2}, d^2u = -\frac{2}{y^3} dy (y dx - x dy)。$

$$\mathbf{3237.} \quad du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad d^2u = \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}。$$
 3238. $du = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2},$

$$d^2u = \frac{(y^3 - x^3)(dx^2 - dy^2) - 4xy dx dy}{(x^2 + y^2)^2}。$$
 3239. $du = e^{xy} (y dx + x dy);$

$$d^2u = e^{xy} [y^2 dx^2 + 2(1 + xy) dx dy + x^2 dy^2]。$$
 3240. $du = (y + z) dx +$

$$+ (z + x) dy + (x + y) dz, d^2u = 2(dx dy + dy dz + dz dx)。$$
 3241. $du =$

$$= \frac{(x^2 + y^2) dz - 2z(x dx + y dy)}{(x^2 + y^2)^2}, d^2u = \frac{2z[(3x^2 - y^2) dx^2 + 8xy dx dy +$$

$$+ (3y^2 - x^2) dy^2] - 4(x^2 + y^2)(x dx + y dy) dz}{(x^2 + y^2)^3}。$$
 3242. $dx - dy; -2(dx -$

$$- dy)(dy + dz)。$$
 3244. (a) $1 + mx + my$; (b) xy ; (c) $x + y$ 。 **3245.** (a) 108.972; (b) 1.055; (c) 2.95; (d) 0.502; (e) 0.97。 **3246.** 对角线减小

約3毫米, 面积减小約140平方厘米。 3247. 减小1.7毫米。 3249. $\Delta \approx 10.2$ 立方公尺; $\delta \approx 13\%$ 。 3250. $\Delta \approx 7.6$ 公尺。 3251. $f'_x(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻近无界。 3256. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 0$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} =$

$$= -16. \quad 3257. \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial y^3} = 0. \quad 3258. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6(\cos x + \cos y).$$

$$3259. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0. \quad 3260. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz} (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2).$$

$$3261. \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta} = -\frac{6}{r^4} + \frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}, \text{ 其中 } r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

$$3262. \frac{\partial p + qu}{\partial x \partial y} = p, q \quad 3263. \frac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+ny)}{(x-y)^{m+n+1}}.$$

$$3264. e^{x+y} [x^2 + y^2 + 2(mx + ny) - m(m-1) + n(n-1)]. \quad 3265. (x+p) \times \\ \times (y+q)(z+r)u. \quad 3266. \sin \frac{n\pi}{2}. \quad 3267. F(t) = f'(t) + 3tf''(t) +$$

$$+ t^2 f'''(t). \quad 3268. d^4 u = 24(dx^4 - 2dx^3 dy - 2dx dy^3 + dy^4); \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = -12, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} = -12, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24. \quad 3269. d^3 u =$$

$$= 6(dx^3 - 3dx^2 dy + 3dx dy^2 + dy^3). \quad 3270. d^3 u = -8(x dx + y dy)^3 \cos x \\ \times (x^2 + y^2) - 12(x dx + y dy)(dx^2 + dy^2) \sin(x^2 + y^2). \quad 3271. d^{10} u =$$

$$= -\frac{9!(dx + dy)^{10}}{(x+y)^{10}}. \quad 3272. d^6 u = -(dx^6 - 15dx^4 dy^2 + 15dx^2 dy^4 - dy^6) \times$$

$$\times \cos x \operatorname{ch} y - 2dx dy (3dx^4 - 10dx^2 dy^2 + 3dy^4) \sin x \sin y. \quad 3273. d^3 u =$$

$$= 6dx dy dz. \quad 3274. d^4 u = 2\left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}\right). \quad 3275. d^n u =$$

$$= e^{ax+by}(adx + bdy)^n. \quad 3276. d^n u = \sum_{k=0}^n C_n^k X^{(n-k)}(x) Y^{(k)}(y) dx^{n-k} dy^k.$$

$$3277. d^n u = f^{(n)}(x+y+z)(dx+dy+dz)^n. \quad 3278. d^n u = e^{ax+by+cz}(a dx + \\ + b dy + c dz)^n. \quad 3280. (a) Au = -u, A^2 u = u; (b) Au = 1, A^2 u = 0.$$

$$3281. (a) Au = 0; (b) Au = 0. \quad 3282. (a) A_1 u = 9[(x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + \\ + (z^2 - xy)^2], A_2 u = 6(x+y+z); (b) A_1 u = \frac{1}{r^4}, \text{ 其中 } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$A_2 u = 0. \quad 3283. \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 +$$

$$+ y^2 + z^2); \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y} = 4xyf''(x^2 + y^2 + z^2). \quad 3284. \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1\left(x, \frac{x}{y}\right) +$$

$$+ \frac{1}{y} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right); \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{2}{y} f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{y^2} f''_{22} \left(x, \frac{x}{y} \right); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = - \frac{x}{y^2} f'_{12} \left(x, \frac{x}{y} \right) - \frac{x}{y^3} f''_{22} \left(x, \frac{x}{y} \right) - \frac{1}{y^2} f'_2 \left(x, \frac{x}{y} \right); \\
& \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^4} f''_{22} \left(x, \frac{x}{y} \right) + \frac{2x}{y^3} f'_2 \left(x, \frac{x}{y} \right). \quad 3285. \quad \frac{\partial u}{\partial x} f'_1 + y f'_2 + y z f'_3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \\
& = x f'_2 + x z f'_3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x y f'_3; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + y^2 f''_{22} + y^2 z^2 f''_{33} + 2 y f''_{12} + 2 y z f''_{13} + 2 y^2 z f''_{23}; \\
& \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 f''_{22} + 2 x^2 z f''_{23} + x^2 z^2 f''_{33}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f''_{33}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x y f''_{22} + x y z^2 f''_{33} + \\
& + x f''_{12} + x z f''_{13} + 2 x y z f''_{23} + f'_2 + z f'_3; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = x y f''_{13} + x y^2 f''_{23} + x y z^2 f''_{33} + y f'_3; \\
& \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2 y f''_{23} + x^2 y z f''_{33} + x f'_3. \quad 3286. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{11} + (x+y) f''_{12} + x y f''_{22} + f'_2. \\
3287. \quad \Delta u = 3 f''_{11} + 4 (x+y+z) f''_{12} + 4 (x^2+y^2+z^2) f''_{22} + 6 f'_2. \quad 3288. \quad du = \\
& = f'(t) (dx+dy); \quad d^2 u = f''(t) (dx+dy)^2. \quad 3289. \quad du = f'(t) \frac{x dy - y dx}{x^2}; \\
& d^2 u = f''(t) \frac{(x dy - y dx)^2}{x^4} - 2 f'(t) \frac{dx (x dy - y dx)}{x^3}. \quad 3090. \quad du = \\
& = f' \cdot \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad d^2 u = f'' \cdot \frac{(x dx - y dy)^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad 3291. \quad du = \\
& = f'(t) dt, \quad d^2 u = f''(t) dt^2 + f'(t) d^2 t, \quad \text{其中 } dt = yz dx + xz dy + xy dz \text{ 及 } d^2 t = \\
& = 2 (z dx dy + y dx dz + x dy dz). \quad 3292. \quad du = 2 f' \cdot (x dx + y dy + z dz); \\
& d^2 u = 4 f'' \cdot (x dx + y dy + z dz)^2 + 2 f' \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad 3293. \quad du = \\
& = a f'_1 dx + b f'_2 dy; \quad d^2 u = a^2 f''_{11} dx^2 + 2 ab f''_{12} dx dy + b^2 f''_{22} dy^2. \quad 3294. \quad du = \\
& = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot (dx - dy); \quad d^2 u = f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2 f''_{12} \cdot (dx^2 - dy^2) + \\
& + f''_{22} \cdot (dx - dy)^2. \quad 3295. \quad du = f'_1 \cdot (y dx + x dy) + f'_2 \cdot \frac{y dx - x dy}{y^2}; \quad d^2 u = \\
& = f''_{11} \cdot (y dx + x dy)^2 + 2 f''_{12} \cdot \frac{y^2 dx^2 - x^2 dy^2}{y^2} + f''_{22} \cdot \frac{(y dx - x dy)^2}{y^4} + 2 f'_1 \cdot dx dy - \\
& - 2 f'_2 \cdot \frac{(y dx - x dy) dy}{y^3}. \quad 3296. \quad du = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot dz; \quad d^2 u = \\
& = f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2 f''_{12} \cdot (dx + dy) dz + f''_{22} \cdot dz^2. \quad 3297. \quad du = \\
& = f'_1 \cdot (dx + dy + dz) + 2 f'_2 \cdot (x dx + y dy + z dz); \quad d^2 u = f''_{11} \cdot (dx + dy + dz)^2 + \\
& + 4 f''_{12} \cdot (dx + dy + dz) (x dx + y dy + z dz) - 4 f''_{22} \cdot (x dx + y dy + z dz)^2 + \\
& + 2 f'_2 \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad 3298. \quad du = f'_1 \cdot \frac{y dx - x dy}{y^2} + f'_2 \cdot \frac{z dy - y dz}{z^2}; \\
& d^2 u = f''_{11} \cdot \frac{(y dx - x dy)^2}{y^4} + 2 f''_{12} \cdot \frac{(y dx - x dy) (z dy - y dz)}{y^2 z^2} + f''_{22} \cdot \frac{(z dy - y dz)^2}{z^4} - \\
& - 2 f'_1 \cdot \frac{(y dx - x dy) dy}{y^3} - 2 f'_2 \cdot \frac{(z dy - y dz) dz}{z^3}. \quad 3299. \quad du = (f'_1 + 2 t f'_2 +
\end{aligned}$$

$$+ 3t^2 f_3' \, dt; \quad d^2u = (f_{11}'' + 4t f_{12}'' + 4t^2 f_{22}'' + 6t^2 f_{13}'' + 12t^3 f_{23}'' + 9t^4 f_{33}'' + 2f_2' + 6t f_3') dt^2.$$

$$3300. \quad du = af_1' dx + bf_2' dy + cf_3' dz; \quad d^2u = a^2 f_{11}'' dx^2 + b^2 f_{22}'' dy^2 + c^2 f_{33}'' dz^2 + 2ab f_{12}'' dx dy + 2ac f_{13}'' dx dz + 2bc f_{23}'' dy dz.$$

$$3301. \quad du = 2f_1' \cdot (x dx + y dy) + 2f_2' \cdot (x dx - y dy) + 2f_3' \cdot (y dx + x dy); \quad d^2u = 4f_{11}'' \cdot (x dx + y dy)^2 + 4f_{22}'' \cdot (x dx - y dy)^2 + 4f_{33}'' \cdot (y dx + x dy)^2 + 8f_{12}'' \cdot (x^2 dx^2 - y^2 dy^2) + 8f_{13}'' \cdot (x dx + y dy)(y dx + x dy) + 8f_{23}'' \cdot (x dx - y dy)(y dx + x dy) + 2f_1' \cdot (dx^2 + dy^2) + 2f_2' (dx^2 - dy^2) + 4f_3' \cdot dx dy.$$

$$3302. \quad d^nu = f^{(n)}(ax + by + cz)(a dx + b dy + c dz)^{n-1}. \quad 3303. \quad d^nu =$$

$$= \left(a dx \frac{\partial}{\partial \xi} + b dy \frac{\partial}{\partial \eta} + c dz \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^n f(\xi, \eta, \zeta), \quad \text{其中 } \xi = ax, \eta = by, \zeta = cz.$$

$$3304. \quad d^nu = \left[dx \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dy \left(b_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + b_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dz \left(c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + c_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right]^n f(\xi, \eta, \zeta). \quad 3305. \quad F'(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r). \quad 3316. \quad 1.$$

$$3319. \quad xyz. \quad 3331. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x. \quad 3332. \quad 2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

$$3333. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad 3334. \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad 3335. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ z \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad 3336. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0. \quad 3337. \quad z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}. \quad 3338. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} -$$

$$- \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad 3339. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z. \quad 3340. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$3341. \quad 1 - \sqrt{3}. \quad 3342. \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \cos \alpha + \sin \alpha. \quad (\text{a}) \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad (\text{b}) \alpha = \frac{5\pi}{4}; \quad (\text{c}) \alpha =$$

$$= \frac{3\pi}{4} \text{ 及 } \alpha = \frac{7\pi}{4}. \quad 3343. \quad \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \quad 3344. \quad \frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2 + b^2)}. \quad 3345. \quad \frac{\partial u}{\partial t} =$$

$$= \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma; \quad |\text{grad } u| = \sqrt{3}. \quad 3346. \quad |\text{grad } u| = \frac{1}{r_0^2};$$

$$\cos(\widehat{\text{grad } u, x}) = -\frac{x_0}{r_0}, \quad \cos(\widehat{\text{grad } u, y}) = -\frac{y_0}{r_0}, \quad \cos(\widehat{\text{grad } u, z}) = -\frac{z_0}{r_0},$$

$$\text{其中 } r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \quad 3347. \quad \frac{\pi}{2}. \quad 3348. \quad 1000x\sqrt{3} \approx 3142.$$

$$3350. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos^2 \gamma + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cos \beta +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \cos \alpha \cos \gamma + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cos \beta \cos \gamma. \quad 3352. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}. \quad 3353. \quad u_{xx}(x,$$

$$2x) = u_{yy}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x, \quad u_{xy}(x, 2x) = \frac{5}{3}x. \quad 3354. \quad z = x\varphi(y) + \psi(y).$$

$$3355. \quad z = \varphi(x) + \psi(y). \quad 3356. \quad z = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + \cdots + y^{n-1}\varphi_{n-1}(x).$$

3357. $u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z)$.

3358. $u = 1 + x^2y + y^2 - 2x^4$.

3359. $z = 1 + xy + y^2$.

3360. $z = x + y^2 + \frac{1}{2}xy(x+y)$.

3362. 函

数 $f(x)$ 的零点的集合在区间 (a, b) 内应为每一处皆不是密集的, 即是函数 $f(x)$ 为零的点不能完全填满任何的区间 $(a, \beta) \subset (a, b)$.

3363. 函数 $f(x)$ 的零点的集合在区间 (a, b) 内应为每一处皆不是密集的, 而且函数 $f(x)$ 的零点同时为函数 $g(x)$ 的零点, 此外有旁的极限 $\lim_{x \rightarrow \xi} [g(x)/f(x)]$ 存在.

3364. (1) 无限集; (2) 二; (3) (a) 一; (6) 二.

3365. 1) 无限集; 2) 四: $y = x, y = -x, y = |x|$ 和 $y = -|x|$; 3) 二;

4) (a) 二; (5) 四; 5) 一. 3366. 1) 没有; 2) $0 < |x| < 1, |x| =$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}; 3) x = 0, |x| = 1; 4) 1 < |x| < \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}; \text{单值的各}$$

$$\text{枝: } y = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}} \left(|x| \leq \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} \right); y = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}$$

$$\left(1 \leq |x| \leq \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} \right), \text{其中 } \varepsilon = -1, 1. 3367. \text{枝点: } (-1, 0), (0, 0),$$

$$(1, 0). y = \varepsilon(x) \sqrt{\frac{\sqrt{8x^2 - 1} - (2x^2 + 1)}{2}} \quad (|x| \leq 1), \text{其中 } \varepsilon(x) = -1, 1,$$

$\operatorname{sgn} x$ 及 $-\operatorname{sgn} x$. 3368. 函数 $\varphi(y)$ 之值的集合与函数 $f(x)$ 之值的集合应

$$\text{有公共点. 3371. } y' = -\frac{x+y}{x-y}; y'' = \frac{2a^2}{(x-y)^3}. 3372. y' = \frac{x+y}{x-y};$$

$$y'' = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}. 3373. y' = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}; y'' = \frac{-\varepsilon \sin y}{(1 - \varepsilon \cos y)^3}. 3374. y' =$$

$$= \frac{y^2(1 - \ln x)}{x^2(1 - \ln y)}; y'' = \frac{y^2[y(1 - \ln x)^2 - 2(x-y)(1 - \ln x)(1 - \ln y) - x(1 - \ln y)^2]}{x^4(1 - \ln y)^3}$$

$$3375. y' = \frac{y}{x}; y'' = 0. 3378. y'_1(0) = -1; y'_2(0) = 1. 3379. y'_1(0) = 0,$$

$$y'_2(0) = -\sqrt{3}, y'_3(0) = \sqrt{3}. 3380. y' = -\frac{2x+y}{x+2y}; y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3};$$

$$y''' = -\frac{162x}{(x+2y)^5}. 3381. y' = 0; y'' = -\frac{2}{3}; y''' = -\frac{2}{3}. 3383. \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= -\frac{x}{z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}.$$

$$3384. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^2z}{(z^2 - xy)^3}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^2yz}{(z^2 - xy)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4 - 2xyx^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}. 3385. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}. 3386. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz}{x^2 - y^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yz}{x^2 - y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= -\frac{y^2 z}{(x^2 - y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 z}{(x^2 - y^2)^2}. \quad 3387 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= -1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad 3388. \quad (a) -2; \quad (b) -1. \quad 3389. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= -\frac{2}{5}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{5}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{394}{125}. \quad 3390. \quad dz = -\frac{c^2}{z} \left(\frac{x dx}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} \right);$$

$$d^2 z = -\frac{c^4}{z^3} \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2 b^2} dx dy + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dy^2}{b^2} \right].$$

$$3391. \quad dz = -\frac{(1-yz)dx + (1-xz)dy}{1-xy};$$

$$d^2 z = -\frac{2\{y(1-yz)dx^2 + [z+y-z(1+xy)]dx dy + x(1-xz)dy^2\}}{(1-xy)^2}.$$

$$3392. \quad dz = \frac{z(y dx + z dy)}{y(x+z)}; \quad d^2 z = -\frac{z^2(y dx - x dy)^2}{y^2(x+z)^3}. \quad 3393. \quad dz = dx -$$

$$-\frac{(x-z)dy}{(x-z)^2 + y(y+1)}; \quad d^2 z = \frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2 + y^2]}{[(x-z)^2 + y(y+1)]^3} dy^2. \quad 3394. \quad du =$$

$$= -\frac{u^2(dx + dy) - z^2 dz}{u[2(x+y) - u]}. \quad 3395. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1 + 2zF'_2)^3} [F_2'^2 F_{11}'' -$$

$$-2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}''] - \frac{2(F'_1 + 2xF'_2)(F'_1 + 2yF'_2)F'_2}{(F'_1 - 2zF'_2)^3}. \quad 3396. \quad \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \frac{F'_1 - F'_2}{F'_2 - F'_3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_2 - F'_1}{F'_2 - F'_3}. \quad 3397. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\left(1 + \frac{F_1 + F'_2}{F'_3}\right); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(1 + \frac{F'_2}{F'_3}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -F_3'^{-3} [F_3'^2 (F_{11}'' + 2F_{12}'' + F_{22}'') - 2(F'_1 + F'_2)F'_3 (F_{13}'' + F_{23}'') + (F'_1 + F'_2)^2 F_{33}''].$$

$$3398. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(xF'_1 + yF'_2)^{-3} [y^2 z^2 (F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}'') - 2z(xF'_1 +$$

$$+ yF'_2) F_1'^2]. \quad 3399. \quad (a) \quad d^2 z = -\frac{F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}''}{(F'_1 + F'_2)^3} (dx - dy)^2;$$

$$(b) \quad d^2 z = \frac{F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1' F_2' F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}''}{(xF'_1 + yF'_2)^3} (ydx - xdy)^2. \quad 3401. \quad \frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y};$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}. \quad 3402. \quad \frac{dx}{dz} = 0, \quad \frac{dy}{dz} = -1, \quad \frac{d^2 x}{dz^2} = -\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{1}{4}. \quad 3403. \quad \frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$= -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 > 0).$$

$$3404. \quad du = \frac{(\sin v + x \cos v)dx - (\sin u - x \cos v)dy}{x \cos v + y \cos u};$$

$$dv = \frac{-(\sin v - y \cos u)dx + (\sin u + y \cos u)dy}{x \cos v + y \cos u}; \quad d^2 u = -d^2 v =$$

$$= \frac{(2dx \cos v - x dv \sin v)dv - (2dy \cos u - y du \sin u)du}{x \cos v + y \cos u}. \quad 3405. \quad du =$$

$$= \frac{1}{2} (dx + dy); \quad dv = \frac{\pi}{4} dy - \frac{1}{2} (dx - dy); \quad d^2u = dx^2; \quad d^2v = \frac{1}{2} (dx - dy)^2.$$

$$3406. \quad \frac{dy}{dx} = 2 \left(t + \frac{1}{t} \right); \quad \frac{dz}{dx} = 3 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1 \right); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 6 \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

$$3407. \quad y > \frac{x^2}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -3uv; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2} (u+v) \quad (u \neq v). \quad 3408. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= -\frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\sin^3 \varphi}. \quad 3409. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sin 2v}{u^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}. \quad 3410. \quad dz = 0; \quad d^2z = \frac{1}{2} (dx^2 - dy^2). \quad 3411. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{4x - 2y}{x - 2y} + \frac{6x}{(x - 2y)^2}. \quad 3412. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y+z} + \frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{y-z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= -\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{y-z}. \quad 3413. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right), \quad \text{其中 } I = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}. \quad 3414. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial v}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{I^2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 \left. \right\}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{I^3} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \left. \right\}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{I^3} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \left. \right\}, \quad \text{其中 } I = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

$$3415. \quad (a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos \frac{v}{u}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin \frac{v}{u}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} \right); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos \frac{v}{u} +$$

$$+ \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u}; \quad (b) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u (\sin v - \cos v) + 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u (\sin v - \cos v) + 1}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{-(e^u - \cos v)}{u[e^u (\sin v - \cos v) + 1]}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{u[e^u (\sin v - \cos v) + 1]}. \quad 3416. \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{I_1};$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{I_1^2} \left\{ \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial(h, f)}{\partial(y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right\}, \quad \text{其中 } I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)}, \quad I_2 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)},$$

$$I_3 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)} \quad \text{及 } I = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)}. \quad 3417. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{I_2}{I_1} \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \text{其中}$$

$$I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} \quad \text{及 } I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(z, t)}. \quad 3418. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I_1}{I}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{I_2}{I}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_3}{I}, \quad \text{其中}$$

$$I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(v, w)}, I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(v, w)}, I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)} \text{ 及 } I = \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)}. \quad 3419. \quad dz =$$

$$= -\frac{I_1 dx + I_2 dy}{I_3}, \text{ 其中 } I_1 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, t)}, I_2 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, t)}, I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}.$$

$$3431. \quad x''' + xx'' = 0. \quad 3432. \quad x^{IV} = 0. \quad 3433. \quad \frac{d^2x}{dt^2} - t \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0.$$

$$3434. \quad \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0. \quad 3435. \quad \frac{d^3y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - 6y = 0. \quad 3436. \quad \frac{d^2y}{dt^2} + n^2y =$$

$$= 0. \quad 3437. \quad \frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0. \quad 3438. \quad u'' + \left[q(x) - \frac{1}{4} p^2(x) - \frac{1}{2} p'(x) \right] u = 0.$$

$$3439. \quad \frac{d^2u}{dt^2} + (u+3) \frac{du}{dt} + 2u = 0. \quad 3440. \quad \frac{d^2u}{dt^2} = 0. \quad 3441. \quad \frac{d^2u}{dt^2} = 0.$$

$$3442. \quad \frac{d^2u}{dt^2} + 8u \left(\frac{du}{dt} \right)^3 = 0. \quad 3443. \quad t^3 \frac{d^3u}{dt^3} + (3t^2 + 1) \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0.$$

$$3444. \quad u'' - u' = \frac{A}{(a-b)^2} u. \quad 3446. \quad \varphi(1, u, u' + u^2) = 0. \quad 3447. \quad F(xu' + u^2 - u, u, 1) = 0. \quad 3450. \quad \frac{dr}{d\varphi} = r. \quad 3451. \quad r'^2 = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^2.$$

$$3452. \quad r(r^2 + 2r'^2 - rr'') = r'^3. \quad 3453. \quad \frac{r'}{r}. \quad 3454. \quad K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$3455. \quad \frac{dr}{dt} = kr^3; \quad \frac{d\varphi}{dt} = -1. \quad 3456. \quad w = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right). \quad 3457. \quad Y' = x;$$

$$Y'' = \frac{1}{y''}; \quad Y''' = -\frac{y'''}{y''^3}. \quad 3458. \quad z = \varphi(x+y), \text{ 其中 } \varphi \text{ 任意的函数.}$$

$$3459. \quad z = \varphi(x^2 + y^2). \quad 3460. \quad z = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz). \quad 3461. \quad z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$3462. \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^{2shv}. \quad 3463. \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}. \quad 3464. \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}.$$

$$3465. \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v} \cdot \frac{z^2 + u}{z^2 - u}. \quad 3466. \quad (z-v) \frac{\partial z}{\partial u} + (z-u) \frac{\partial z}{\partial v} = u + v - z.$$

$$3467. \quad \frac{e^{x+y} - z^2}{1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta}}. \quad 3468. \quad \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2}{u^2 + v^2}. \quad 3469. \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

$$3470. \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-y}{y}. \quad 3471. \quad \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}. \quad 3472. \quad A =$$

$$= \frac{x^2 - 2xu + u^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \right]}{x^4 \left(u \frac{\partial x}{\partial u} + v \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2}. \quad 3473. \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} + 3u + (e^{\xi} + e^{\eta} + e^{\zeta}) =$$

- $=0$ 。 3474. $\frac{\partial w}{\partial v}=0$ 。 3475. $\frac{\partial w}{\partial u}=0$ 。 3476. $\frac{\partial w}{\partial v}=0$ 。 3477. $u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 +$
 $+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = w^2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}$ 。 3478. $\frac{e^{2u}\left(1 - \frac{\partial w}{\partial v} \cos^2 v\right)}{\frac{\partial u}{\partial u}}$ 。 3479. $A = \frac{\partial w}{\partial u} : \frac{\partial w}{\partial v}$ 。
3480. $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\xi \eta}{\xi}$ 。 3481. $w = \frac{\partial u}{\partial \varphi}$ 。 3482. $v = r \frac{\partial u}{\partial r}$ 。 3483. $v = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 +$
 $+ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$ 。 3484. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ 。 3485. $w = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ 。
3486. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ 。 3487. $I = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \right)$ 。 3488. $u = \varphi(x-at) +$
 $+ \psi(x+at)$, 其中 φ 及 ψ 为任意的函数。 3489. $3 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$ 。
3490. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$ 。 3491. $a \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u} \right) + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + b \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$ 。
3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$ 。 3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + m^2 e^{2u} z = 0$ 。 3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ 。
3495. $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial v}$ 。 3496. $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2}{u(4-uv)} \frac{\partial z}{\partial v}$ 。 3497. $(u^2 - v^2) \times$
 $\times \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial z}{\partial u}$ 。 3498. $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{2uv^2}{u^2 + v^2} \frac{\partial z}{\partial u}$ 。 3499. $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u^2 - v^2} \left(v \frac{\partial z}{\partial u} - \right.$
 $\left. - u \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$ 。 3500. $\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 1$ 。 3501. $u =$
 $= \varphi(x + \lambda_1 y) + \psi(x + \lambda_2 y)$, 其中 λ_1 及 λ_2 为方程式 $A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$ 的根。
3503. (a) $\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$; (b) $\Delta(\Delta u) = \frac{d^4 u}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 u}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{du}{dr}$ 。
3504. $u \frac{d^2 w}{du^2} + \frac{dw}{du} + cw = 0$ 。 3505. $A = X \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Y \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}$ 。
3508. $\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = 2 \left(\xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \xi \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + \right.$
 $\left. + \eta \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} \right)$ 。 3509. $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} = 0$ 。 3510. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$ 。 3511. $\Delta_1 u =$
 $= \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2$; $\Delta_2 u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \right.$
 $\left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right]$ 。 3512. $w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$ 。 3513. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$ 。
3514. $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ 。 3515. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$ 。 3516. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2w$ 。 3517. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} +$
 $+ \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ 。 3518. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = 0$ 。

$$3519. \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{w}{4 \sin^2(u-v)}. \quad 3520. \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0. \quad 3523. \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0.$$

$$3524. \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} + (e^w - 1) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right].$$

$$3526. x = y\varphi(z) + \psi(z).$$

$$3527. A(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} -$$

$$- 2B(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + C(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0.$$

$$3528. \frac{x - x_0}{-\cos \alpha \sin t_0} =$$

$$= \frac{y - y_0}{-\sin \alpha \sin t_0} = \frac{z - z_0}{\cos t_0}; \quad z - z_0 = (x - x_0) \cos \alpha \operatorname{tg} t_0 + (y - y_0) \sin \alpha \operatorname{tg} t_0, \text{ 其}$$

$$\text{中 } x_0 = a \cos \alpha \cos t_0, \quad y_0 = a \sin \alpha \cos t_0, \quad z_0 = a \sin t_0. \quad 3529. \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$y = \frac{b}{2}; \quad ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2). \quad 3530. \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}, \quad x + y + 2z = 4.$$

$$3531. \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}; \quad 3x + 3y - z = 3. \quad 3532. x + z = 2; \quad y + 2 = 0;$$

$$x - z = 0. \quad 3533. M_1(-1, 1, -1); \quad M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right). \quad 3537. \operatorname{tg} \varphi =$$

$$= f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha. \quad 3538. \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{16}{243}. \quad 3539. 2x + 4y -$$

$$- z - 5 = 0; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}. \quad 3540. 3x + 4y + 12z = 169; \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12},$$

$$3541. z = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}(x - y); \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{2}. \quad 3542. ax_0x + by_0y +$$

$$+ cz_0z = 1; \quad \frac{x - x_0}{ax_0} = \frac{y - y_0}{by_0} = \frac{z - z_0}{cz_0}. \quad 3543. x + y - 2z = 0; \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} =$$

$$= \frac{z-1}{2}. \quad 3544. x + y - 4z = 0; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}. \quad 3545. \frac{x}{a} \cos \psi_0 \cos \varphi_0 +$$

$$+ \frac{y}{b} \cos \psi_0 \sin \varphi_0 + \frac{z}{c} \sin \psi_0 = 1; \quad \frac{x \sec \psi_0 \sec \varphi_0 - a}{bc} = \frac{y \sec \psi_0 \operatorname{cosec} \varphi_0 - b}{ac} =$$

$$= \frac{z \operatorname{cosec} \psi_0 - c}{ab}. \quad 3546. x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 - z \operatorname{tg} \alpha = 0; \quad \frac{x - r_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} =$$

$$= \frac{y - r_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0} = \frac{z - r_0 \operatorname{ctg} \alpha}{-\operatorname{tg} \alpha}. \quad 3547. ax \sin v_0 - ay \cos v_0 + u_0 z = au_0 v_0;$$

$$\frac{x - u_0 \cos v_0}{a \sin v_0} = \frac{y - u_0 \sin v_0}{-a \cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0}. \quad 3548. \frac{3x}{u_0} - \frac{3y}{u_0^2} + \frac{z}{u_0^3} = 2. \quad 3549. A(0,$$

$$\pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}); \quad B(\pm 2, \mp 4, \pm 2); \quad C(\pm 4, \mp 2, 0). \quad 3550. x =$$

$$= \pm \frac{a^2}{d}, \quad y = \pm \frac{b^2}{d}, \quad z = \pm \frac{c^2}{d}, \quad \text{其中 } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad 3551. x + 4y + 6z =$$

$$= \pm 21. \quad 3556. x^2 + y^2 - xy = 1, \quad z = 0; \quad 3y^2 + 4z^2 = 4, \quad x = 0; \quad 3x^2 + 4z^2 = 4,$$

$$y=0. \quad 3557. \delta < 0.003. \quad 3559. \cos \varphi = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}. \quad 3563. \frac{\partial u}{\partial n} =$$

$$= x_0 + y_0 + z_0. \quad (\text{a}) x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad (\text{b}) x_0 = y_0 = z_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad (\text{B}) \text{ 在圓}$$

$$x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=1 \text{ 內}. \quad 3564. \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}. \quad 3566. x^2 +$$

$$+ y^2 = p^2. \quad 3567. y = \pm x. \quad 3568. y^2 = 4ax. \quad 3569. \text{无包綫}.$$

$$3570. x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}. \quad 3571. |xy| = \frac{S}{2\pi}. \quad 3572. y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

$$3574. (\text{a}) y=0 \text{—包綫(拐点的軌迹)}; (\text{b}) y=0 \text{—包綫}; (\text{B}) y=0 \text{ 奇点的軌迹(尖点)}; (\text{r}) x=0 \text{ 二重点的軌迹}; x=a \text{—包綫}. \quad 3575. \text{圓环}$$

$$(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2. \quad 3576. x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + z^2 \sin^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma = 1. \quad 3577. |xyz| =$$

$$= \frac{V}{4\pi\sqrt{3}}. \quad 3578. |z \pm \sqrt{x^2+y^2}| = \rho\sqrt{2}. \quad 3579. \left| \begin{matrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{matrix} \right|^2 +$$

$$+ \left| \begin{matrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{matrix} \right|^2 \leq R^2(x^2+y^2+z^2). \quad 3580. (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (z-z_0)^2. \quad 3581. f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

$$3582. f(x, y, z) = 3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1). \quad 3583. \Delta f(1, -1) = h - 3k + (-h^2 - 2hk + k^2) + (h^2k + hk^2).$$

$$3584. f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + 2[h(Ax + Dy + Ez) + k(Dx + By + Fz) + l(Ex + Fy + Cz)] + f(h, k, l). \quad 3585. x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2[1+\theta(x-1), 1+\theta(y-1)] \quad (0 < \theta < 1),$$

$$\text{其中 } R_2(x, y) = \frac{1}{6} x^y \left[\left(\frac{y}{x} dx + \ln x \cdot dy \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{x} dx + \ln x \cdot dy \right) \left(-\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy \right) + \left(\frac{2y}{x^3} dx^3 - \frac{3}{x^2} dx^2 dy \right) \right] \text{ 及 } dx = x-1, dy = y-1. \quad 3586. 1 -$$

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2. \quad 3587. (\text{a}) 1 - \frac{1}{2}(x^2-y^2); (\text{b}) \frac{\pi}{4} + x - xy.$$

$$3588. -(xy+xz+yz). \quad 3589. F(x, y) = \frac{h^2}{4}(f''_{xx} + f''_{yy}) + \frac{h^4}{48}(f''''_{xxx} + f''''_{yyy}) + \dots \quad 3590. F(\rho) = f(x, y) + \frac{\rho^2}{4}[f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y)].$$

$$3591. \Delta_{xy} f(x, y) = h^2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^{n-1} k^{n-m-1}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right].$$

$$3592. F(\rho) = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \Delta^n f(x, y), \text{ 其中 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

$$3593. 1 + (mx + ny) + \left[\frac{m(m-1)}{2!} x^2 + mnxy + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 \right] + \dots \quad (|x| < 1, |y| < 1).$$

$$3594. \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} (m+n-1)!}{m!n!} x^m y^n \quad (|x| + |y| < 1).$$

$$3595. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n+1}}{m! (2n+1)!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

$$3596. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n}}{m! (2n)!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

$$3597. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1} y^{2n+1}}{(2m+1)! (2n+1)!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

$$3598. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m} y^{2n}}{(2m)! (2n)!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

$$3599. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2 - y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x^2 + y^2 < +\infty).$$

$$3600. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{x^m y^n}{m!n!} \quad (|x| < 1, |y| < 1). \quad 3601. f(x, y) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) y. \quad 3602. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^m (y+1)^n}{m!n!} \quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

$$3603. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 + (x-1)] (y-1)^n \quad (-\infty < x < +\infty, 0 < y < 2).$$

$$3604. z = 1 + [2(x-1) - (y-1)] - [8(x-1)^2 - 10(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2] + \dots$$

3605. 若 $a < 0$, $(0, 0)$ —孤立点; 若 $a = 0$, 尖点; 若 $a > 0$, 二重点.

3606. $(0, 0)$ —二重点.

3607. $(0, 0)$ —孤立点.

3608. $(0, 0)$ —孤立点. 3609. $(0, 0)$ —二重点. 3610. $(0, 0)$ —尖点 (第二类).

3611. $(0, 0)$ —二重点.

3612. 若 $a < b < c$, 则曲线由长圆形和无穷的一枝所组成; 若 $a = b < c$, 则 $A(a, 0)$ 为孤立点; 若 $a < b = c$, 则 $B(b, 0)$ 为二重点; 若 $a = b = c$, 则 $A(a, 0)$ 为尖点.

3613. $(0, 0)$ 为二重点.

3614. $(0, 0)$ 为尖点. 3615. $(0, 0)$ 为静止点. 3616. $(0, 0)$ —角点.

3617. $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第一类不连续点. 3618. $x = 0$ 为第二类不连续点.

3619. $x = 0$ 为二重点. 3620. $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为尖点.

3621. 当 $x = 0$ 和 $y = 1$ 时 $z_{\text{极小}} = 0$. 3622. 无极值点.

3623. 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上各点, 准极小值 $z = 0$. 3624. 当 $x = 1$ 和 $y = 0$ 时 $z_{\text{极小}} = -1$.

3625. 当 $x = 2, y = 3$ 时 $z_{\text{极大}} = 108$; 当 $x = 0, 0 < y < 6$ 时准极小值 $z = 0$; 当 $x = 0, -\infty < y < 0$ 及 $6 < y < +\infty$ 时准极大值 $z = 0$.

3626. 当 $x = 1$ 及 $y = 1$ 时 $z_{\text{极小}} = -1$. 3627. 当 $x_1 = -1, y_1 = -1$ 及

- $x_2=1, y_2=1$ 时 $z_{\text{极小}}=-2$; 当 $x=0, y=0$ 时无极值。 3628. 当 $x=5$ 及 $y=2$ 时极小值 $z=30$ 。 3629. 当 $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $z_{\text{极小}}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$; 当 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $z_{\text{极大}}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ 。 3630. 当 $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$ 时, 若 $c>0$; $z_{\text{极大}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 当 $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$ 时, 若 $c<0$ $z_{\text{极小}}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 若 $c=0, a^2+b^2\neq 0$, 极值不存在。 3631. $z_{\text{极大}}=1$ 当 $x=0$ 及 $y=0$ 。 3632. 当 $x=0, y=0$ 时极小值 $z=0$; 当 $x=-\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}$ 时鞍背点 $z=\frac{1}{2}e^{-2}$ 。 3633. 当 $x=1, y=-2$ 时鞍背点 $z=e^3$ 。 3634. 当 $x=1, y=3$ 时极大值 $z=e^{-13}\approx 2.26\cdot 10^{-6}$ 。 当 $x=-\frac{1}{26}, y=-\frac{3}{26}$ 时极小值 $z=-26\cdot e^{-\frac{1}{52}}\approx -25.51$ 。 3635. 当 $x=1, y=2$ 时极小值 $z=7-10\ln 2\approx 0.0685$ 。 3636. 当 $x=\frac{\pi}{3}$ 及 $y=\frac{\pi}{6}$ 时 $z_{\text{极大}}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 。 3637. 当 $x=y=\frac{2\pi}{3}$ 时 $z_{\text{极小}}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$; 当 $x=y=\frac{\pi}{3}$ 时 $z_{\text{极大}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 。 3638. 当 $x=1, y=1$ 时鞍点 $z=-1+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}x\approx 1.70$ 。 3639. 当 $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\approx \pm 0.43$ 时极小值 $z=-\frac{1}{2e}\approx -0.184$; 当 $x=-y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$ 时极大值 $z=\frac{1}{2e}$; 在静止点 $x=0, y=1$ 及 $x=1, y=0$ 时无极值。 3640. 静止点: $x=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m+n)\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m-n)\frac{\pi}{2} (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。极值 $z=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2\cdot(-1)^n$, 若 m 及 n 有不同的奇偶性 (当 m 为奇数及 n 为偶数时为极大值, 当 m 为偶数及 n 为奇数时为极小值); 若 m 及 n 有相同的奇偶性, 无极值。 3641. 当 $x=0$ 及 $y=0$ 时 $z_{\text{极小}}=0$ 当 $x^2+y^2=1$ 时弱极大值 $z=e^{-1}$ 。 3642. 当 $x=-1, y=-2, z=3$ 时 $u_{\text{极小}}=-14$ 。 3643. 当 $x=24, y=-144, z=-1$ 时极小值 $u=-6913$ 。 3644. 当 $x=\frac{1}{2}, y=1, z=1$ 时极小值 $u=4$ 。 3645. 当 $x=y=z=\frac{a}{7}$ 时 $u_{\text{极大}}=\frac{a^7}{7^7}$ 。 当 $y=0, x\neq 0, z\neq 0, x+2y+3z\neq a$ 时准极值 $u=0$ 。 3646. 当 $x=\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b}, y=\frac{1}{4}\sqrt[15]{16a^4b}, z=\frac{1}{2}\sqrt[15]{\frac{a^9b^7}{4}}$ 时极小值 $u=\frac{15a^{15}}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$ 。 3647. 当 $x=y=z=\frac{\pi}{2}$ 时极大值 $u=4$; 当 $x=y=z=0$ 及 $x=y=z=\pi$ 时边

界的极小值 $u=0$ 。 3648. 当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}$ 时 $u_{\text{极大}}=$

$=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{2}}$ 。 3649. 当 $x_1=2^{\frac{1}{n+1}}$, $x_2=x_1^2$, \cdots , $x_n=\omega^n$ 时极小值

$u=(n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$ 。 3650. 数 $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$ 构成有公比为 $q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$ 的几何

级数。 3651. 当 $x=1$, $y=-1$ 时极小值 $z_1=-2$ 及极大值 $z_2=6$ 。 3652. 当

$x=y=-(3+\sqrt{6})$ 时 $z_{\text{极小}}=-(4+2\sqrt{6})$; 当 $x=y=-(3-\sqrt{6})$ 时

$z_{\text{极大}}=2\sqrt{6}-4$ 。 3653. 当 $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z<0$ 时准极小值 $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$;

当 $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z>0$ 时准极大值 $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ 。 3654. 当 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ 时

$z_{\text{极大}}=\frac{1}{4}$ 。 3655. 当 $x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时, $z_{\text{极小}}=$

$=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$; 当 $x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时其中 $\varepsilon=\operatorname{sgn} ab \neq 0$,

$z_{\text{极大}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ 。 3656. 当 $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时 $z_{\text{极大}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 。

3657. $u_{\text{极小}}=\lambda_1$, $u_{\text{极大}}=\lambda_2$, 其中 λ_1 及 λ_2 为方程式 $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=0$

的根且 $\lambda_1<\lambda_2$ 。 3658. 当 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2,$

\cdots) 时极值 $z=1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ (若 k —偶数; 极大值, 若 k —奇数, 极小值)。

3659. 当 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$ 时 $z_{\text{极小}}=-3$; 当 $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$,

$z=\frac{2}{3}$ 时 $z_{\text{极大}}=3$ 。 3660. 当 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}$ 时 $u_{\text{极大}}=$

$=\frac{a^{m+n+p}m^mp^n}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ 。 3661. 当 $x=0$, $y=0$, $z=\pm c$ 时 $u_{\text{极小}}=c^2$; 当 x

$=\pm a$, $y=0$, $z=0$ 时 $u_{\text{极大}}=a^2$ 。 3662. 当 $x=y=z=\frac{a}{6}$ 时 $u_{\text{极大}}=\left(\frac{a}{6}\right)^6$ 。

3663. 当 $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 及 $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 及 $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=$

$=\frac{1}{\sqrt{6}}$ 及 $x=-\frac{2}{\sqrt{6}}$ 时 $u_{\text{极小}}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$; 当 $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 及 $z=\frac{2}{\sqrt{6}}$,

$x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 及 $y=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 及 $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$ 时 $u_{\text{极大}}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$ 。

3664. 当 $x=y=z=\frac{\pi}{6}$ 时 $u_{\text{极大}}=\frac{1}{8}$ 。 3665. $u_{\text{极小}}=\lambda_1$ 及 $u_{\text{极大}}=\lambda_2$, 其中 λ_1

及 λ_2 为方程式 $\lambda^2 - \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} + \frac{\sin^2 \gamma}{c^2} \right) \lambda + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a^2 c^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2 b^2} \right) = 0$ ($\lambda_1 < \lambda_2$) 的根。 3666. $u_{\text{最小}} = \frac{R^2 (A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$; $u_{\text{最大}} = R^2$ 。

3667. 当 $x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 时 $u_{\text{最小}} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1}$ 。

3668. 当 $x_i = \frac{a}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 时 $u_{\text{最小}} = \frac{a^p}{n^{p-1}}$ 。 3669. 当 $x_i =$

$= \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right)^{-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 时 $u_{\text{最小}} = \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right)^2$ 。 3670. 当

$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_n}{\alpha_n} = \frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$ $u_{\text{最大}} = \left(\frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_n^{\alpha_n}$ 。 3671. 极值 $u = \lambda$ 由方程式 $|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$ 所确定, 其中当 $i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$ 而 $\delta_{ii} = 1$ 。

3675. $\inf z = -5$; $\sup z = -2$ 。 3676. $\inf z = -75$;

$\sup z = 125$ 。 3677. $\inf z = 0$; $\sup z = 1$ 。 3678. $\inf u = 0$; $\sup u = 300$ 。

3679. $\inf u = -\frac{1}{2}$; $\sup u = 1 + \sqrt{2}$ 。 3680. $\inf u = 0$; $\sup u = e^{-1} \approx$

≈ 0.37 。 3682. 不。 3683. 极小值等于 $\frac{n}{\sqrt[n]{a}}$ 。 3684. 相加数相等。

3685. 乘数等于 $x_i = \frac{(a \alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}} \dots \alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}})^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}}}{(a_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}$ ($i=1, 2, \dots, n$), 其中

α_i ($i=1, 2, \dots, n$) 为相应的乘方的指数, 和的最小值是 $\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) \times$

$\times (a \alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}} \dots \alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}})^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}}$ 。 3686. $x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$, $y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$,

其中 $M = \sum_{i=1}^n m_i$ 。 3687. 浴盆的尺寸: $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2V}$ 。

3688. $H = 2R = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, 其中 R —为圆柱面的半径, H —它的母线。

3689. $x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$, $y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i$, $z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i$, 其中 $N =$

$= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)^2}$ 。 距离平方的最小和等于 $n - 2N +$

$+ \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$ 。 3690. 圆锥的母线对其底的倾角等于 $\arcsin \frac{2}{3}$ 。

3691. 角锥的侧面对其底的倾角等于 $\arcsin \frac{2}{3}$ 。 3692. 矩形的边为 $\frac{2p}{3}$ 及

$\frac{p}{3}$ 。 3693. 三角形的边为 $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ 及 $\frac{3p}{4}$ 。 3694. 平行六面体的尺寸为

$$\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}} \text{ 及 } \frac{R}{\sqrt{3}}。$$

3695. 平行六面体的高等于 $\frac{1}{3}$ 圆锥的高。

3696. 平行六面体的尺寸为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ 及 $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ 。 3697. 平行六面体的高

$$h = l \sin \alpha \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}{2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}, \text{ 若 } \alpha \geq \arctg \sqrt{2}; \text{ 及 } h = 0, \text{ 若 } 0 < \alpha < \arctg \sqrt{2}。$$

3698. 平行六面体的尺寸 a, b 及 $\frac{c}{2}$ 。 3699. $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 。 3700. $d =$

$$= \frac{1}{\pm \Delta} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \text{ 其中 } \Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}。$$

$$3701. \frac{7}{4\sqrt{2}}。$$

3702. 半轴的平方 $a^2 = \lambda_1$ 及 $b^2 = \lambda_2$ 为方程式 $(1 - \lambda A)$

$(1 - \lambda C) - \lambda^2 B^2 = 0$ 的根。 3703. 半轴的平方 $a^2 = \lambda_1$, $b^2 = \lambda_2$ 及 $c^2 = \lambda_3$ 为

$$\text{方程式 } \begin{vmatrix} \Delta\lambda - 1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda - 1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 的根。} \quad 3704. \frac{\pi ab}{|C|} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}。$$

$$3705. \frac{\pi abc}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}}。 \quad 3707. \text{投射角 } \arcsin \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right);$$

光线的偏斜等于 $2 \arcsin \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha$ 。 3708. 未知系数 a 和 b 由方程组:

$$a[xx] + b[x1] = [xy], \quad a[x1] + bn = [y1] \text{ 所确定, 其中 } [xy] = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ 等等。}$$

若 $\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \neq 0$, 问题有确定的解答。

$$3709. \operatorname{tg} 2\alpha =$$

$$= \frac{2(\bar{x} \cdot \bar{y} - \overline{xy})}{|\bar{x}^2 - (\bar{x})^2| - |\bar{y}^2 - (\bar{y})^2|}, \quad p = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha, \text{ 其中 } \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ 等}$$

是平均值。 3710. $4x - \frac{7}{2}$; $\Delta_{\text{最小}} = \frac{1}{2}$ 。

第 七 章

3711. $F(y) = 1$, 若 $-\infty < y < 0$; $F(y) = 1 - 2y$, 若 $0 \leq y \leq 1$; $F(y) = -1$,

若 $1 < y < +\infty$ 。 3712. $F(y)$ 当 $y = 0$ 不连续。 3713. (a) $\frac{\pi}{4}$; (b) 1;

(c) $\frac{8}{3}$; (d) $\ln \frac{2e}{1+e}$ 。 3715. 不能。 3716. 不能。 3717. $F'(x) =$

$= 2xe^{-x^2} - e^{-x^2} - \int_0^{x^2} y^2 e^{-y^2} dy$. 3718. (a) $-(e^{a \sin \alpha} \sin \alpha + e^{a \cos \alpha} \cos \alpha) +$
 $+\int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} e^{a\sqrt{1-x^2}} dx$; (b) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+a}\right) \sin \alpha(b+\alpha) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+\alpha}\right) \sin \alpha \times$
 $\times (a+\alpha)$; (B) $\frac{2}{a} \ln(1+\alpha^2)$; (r) $f(\alpha, -\alpha) + 2 \int_0^\alpha f'_u(u, v) du$ 其中 $u = x + \alpha$

及 $v = x - \alpha$; (A) $2\alpha \int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2) dy + 2 \int_0^{\alpha^2} \sin 2x^2 \cos 2\alpha x dx -$
 $- 2\alpha \int_0^\alpha dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy$. 3719. $F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$.

3720. 若 $x \in (a, b)$, $F''(x) = 2f(x)$; 若 $x \notin (a, b)$, $F''(x) = 0$.

3721. $F''(x) = \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}$, 其中 $\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$.

3722. $F^{(n)}(x) = (n-1)!f(x)$. 3723. $4x - \frac{11}{3}$. 3724. $0.934 + 0.428x$

(近似地!). 3725. $\frac{dE}{dk} = \frac{E-F}{k}$; $\frac{dF}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{F}{k}$. 3729. $F''_{xy}(x,$

$y) = x(2-3y^2)f(xy) - \frac{x}{y^2} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2y(1-y^2)f'(xy)$. 3732. $\pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$.

3733. 0, 若 $|a| \leq 1$; $\pi \ln a^2$, 若 $|a| > 1$. 3734. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \ln(1+|a|)$.

3735. $\pi \arcsin a$. 3736. $\frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2})$. 3737. $\ln \frac{b+1}{a+1}$. 3738. (a)

$\arctg \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; (b) $\frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. 3741. $a \geq 0$. 3742. 极

大 $(p, q) > 1$. 3743. $\left| \frac{p-1}{q} \right| < 1$. 3744. $p < 1$. 3745. $n < 0$ 及 $n > \frac{1}{2}$.

3746. $p > \frac{1}{2}$. 3747. 当 $a > 0$ 及当 $a = -\frac{2n-1}{2} \pi$ ($n=1, 2, \dots$) 时收敛.

3748. 当 $n > 4$ 时收敛. 3749. 当 $p > 1$ 时收敛. 3750. 当 $-1 < n < 2$

时收敛. 3756. 一致收敛. 3757. 一致收敛. 3758. 一致收敛.

3759. 一致收敛. 3760. 一致收敛. 3761. 一致收敛. 3762. 非一致

收敛. 3763. a) 一致收敛; b) 非一致收敛. 3764. 非一致收敛.

3765. 一致收敛. 3766. a) 一致收敛; b) 非一致收敛. 3767. 一致

收敛. 3768. 非一致收敛. 3769. 一致收敛. 3770. 一致收敛.

3772. 不. 3776. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3778. $a = \pm 1$. 3779. 连续. 3780. 连续.

3781. 连续. 3782. 连续. 3783. 当 $\alpha = 0$ 时不连续. 3784. $\frac{(-1)^{nm} n!}{n^{m+1}}$.

3785. $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-(n+\frac{1}{2})}$. 3788. $\ln \frac{b}{a}$. 3790. $\ln \frac{b}{a}$. 3791. 0.
3792. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$. 3793. $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{a}$. 3794. $\ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(a+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$.
3795. $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m} \quad (m \neq 0)$. 3796. $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$. 3797. $-\pi \times$
 $\times (1 - \sqrt{1-\alpha^2})$. 3798. $\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$. 3799. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha (1 + |\alpha| -$
 $-\sqrt{1+\alpha^2})$. 3800. $\frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|) \quad (\beta \neq 0)$. 3801. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}$
 $(\alpha > 0, \beta > 0)$. 3802. $\frac{2\pi}{3} [\alpha\beta(\alpha+\beta) + \alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta - (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha+\beta)]$
 $(\alpha > 0, \beta > 0)$. 3803. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3804. $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$.
3805. $\frac{(a+2b^2)a_1 - 4ab b_1 + 2a^2 c_1}{2a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. 3806. $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$.
3807. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$. 3808. $\sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{a})$. 3809. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$.
3810. $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 3811. $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \cdot \frac{d^{2n}}{db^{2n}} (e^{-b^2})$. 3812. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta$.
3813. $\pi \frac{|\beta|}{2} - \sqrt{\pi a}$. 3814. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+\beta}{x-\beta} \right|$. 3815. 0, 若 $|\alpha| < |\beta|$;
 $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha$, 若 $|\alpha| = |\beta|$; $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha$, 若 $|\alpha| > |\beta|$. 3816. $\frac{\pi}{4}$.
3817. $\frac{\pi}{2} |x|$. 3818. $\frac{3\pi}{8} a |a|$. 3819. $\frac{\pi}{4}$. 3820. $\frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$.
3821. $\frac{\pi}{4}$. 3822. $\frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha+\beta}{k} - \frac{\alpha-\beta}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha-\beta}{k} + \frac{k}{4} \ln \frac{k^2 + (\alpha-\beta)^2}{k^2 + (\alpha+\beta)^2}$.
3823. 当 $|x| < 1$ 时 $D(x) = 1$; 当 $x = \pm 1$ 时 $D(x) = \frac{1}{2}$; 当 $|x| > 1$ 时
 $D(x) = 0$. 3824. (a) $\pi \operatorname{sgn} a \cos ab$; (b) $\pi \operatorname{sgn} a \sin ab$. 3825. $\frac{\pi}{2} e^{-|a|}$.
3826. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a e^{-|a|}$. 3827. $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-2})$. 3828. $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4} e^{-|\alpha|}$.
3829. $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \cos \frac{ba}{a} e^{-\frac{|\alpha|}{a} \sqrt{ac-b^2}}$. 3830. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
3831. $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin \left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a \right)$. 3832. $\sqrt{\pi} \cos \left(a^2 + \frac{\pi}{4} \right)$.
3833. $\sqrt{\pi} \sin \left(a^2 + \frac{\pi}{4} \right)$. 3835. (a) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; (c) 当 $p > a$ 时

$$\frac{1}{p-a}; \quad (\Gamma) \frac{1}{(p+a)^2}; \quad (\Delta) \frac{p}{p^2+1}; \quad (\Theta) \ln\left(1+\frac{1}{p}\right); \quad (\text{Ж}) \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}.$$

$$3837 \quad (\text{a}) 1; \quad (\text{б}) x^2 + \frac{1}{2}; \quad (\text{B}) e^{2ax+a^2}; \quad (\Gamma) e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax. \quad 3839. \quad (\varphi)x =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{其中 } \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad 3843. \quad \frac{\pi}{8}. \quad 3844. \quad \frac{\pi a^4}{16}.$$

$$3845. \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad 3846. \quad \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \quad 3847. \quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad 3848. \quad \frac{3\pi}{512}.$$

$$3849. \quad \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}. \quad 3850. \quad \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad 3851. \quad \frac{\pi}{2n \sin \frac{m\pi}{n}} \quad (0 < m < n).$$

$$3852. \quad B(n-m, m) \quad (0 < m < n). \quad 3853. \quad \frac{a^{-p}}{n} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} B\left(\frac{m+1}{n},\right.$$

$$p - \frac{m+1}{n} \left) \left(0 < \frac{m+1}{n} < p\right). \quad 3854. \quad \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}} B(m+1, n+1)$$

$$(m > -1, n > -1). \quad 3855. \quad \frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n}\right) \quad (n < 0 \text{ 或 } n > 1).$$

$$3856. \quad \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad (m > -1, n > -1). \quad 3857. \quad \frac{\pi}{2 \cos \frac{n\pi}{2}}$$

$$(|n| < 1). \quad 3858. \quad \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \quad (n > 0). \quad 3859. \quad \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(n > 0). \quad 3860. \quad \frac{1}{|n|} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \left(\frac{m+1}{n} > 0\right). \quad 3861. \quad \Gamma(p+1) \quad (p > -1).$$

$$3862. \quad \frac{d}{dp} \left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}} \right] \quad (p > -1). \quad 3863. \quad -\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi} \quad (0 < p < 1).$$

$$3864. \quad x^2 \cdot \frac{1 + \cos^2 p\pi}{\sin^2 p\pi} \quad (0 < p < 1). \quad 3865. \quad \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{q\pi}{2}} \right| \quad (0 < p < 1,$$

$$0 < q < 1). \quad 3866. \quad \pi \operatorname{ctg} \pi p. \quad 3867. \quad \frac{\pi}{2\beta} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2\beta}. \quad 3868. \quad \ln \sqrt{2\pi}.$$

$$3869. \quad \ln \sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1). \quad 3870. \quad \frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right). \quad 3871. \quad \frac{1}{4n}.$$

$$3876. \quad \frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2}} \quad (a > 0). \quad 3877. \quad \frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m) \sin \frac{m\pi}{2}} \quad (a > 0).$$

3879. $aB\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)$. 3880. $\frac{2a^2}{n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. 3881. $f(x) =$
 $= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda$. 3882. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda$.
 3883. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(x-a) - \sin \lambda(x-b)}{\lambda} d\lambda$. 3884. $f(x) =$
 $= \frac{2h}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos a\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda$. 3885. $\frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x d\lambda$.
 3886. $\frac{x}{a^2 + x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \sin \lambda x d\lambda$. 3887. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \pi}{1 - \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda$.
 3888. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\lambda x}{2}}{1 - \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda$. 3889. $f(t) = \frac{2A\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2 - \omega^2} \times$
 $\times \sin \lambda t d\lambda$. 3890. $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + \alpha^2} d\lambda$. 3891. $f(x) =$
 $= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(\lambda - \beta)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\lambda + \beta)^2 + \alpha^2} \right] \cos \lambda x d\lambda$. 3892. $f(x) =$
 $= \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{[(\lambda - \beta)^2 + \alpha^2][(\lambda + \beta)^2 + \alpha^2]} d\lambda$. 3893. $e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \times$
 $\times \cos \lambda x d\lambda$. 3894. $xe^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \sin \lambda x d\lambda$. 3895. $(a)e^{-x} =$
 $= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda \quad (0 \leq x < +\infty)$; (6) $e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1 + \lambda^2} d\lambda \quad (0 < x < +$
 $+ \infty)$. 3896. $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$. 3897. $F(x) = -i\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha x}{(x^2 + \alpha^2)^2}$.
 3898. $F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 3899. $F(x) = e^{-\frac{x^2 + \alpha^2}{2}} \operatorname{ch} \alpha x$. 3900. (a) $\varphi(y) = e^{-y}$
 $(y \geq 0)$; (6) $\psi(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y}{1 + y^2} \quad (y \geq 0)$.

第 八 章

3901. $\frac{1}{4}$. 3902. $\underline{S} = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$; $\bar{S} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}$; $13\frac{1}{3}$.
 3903. 9.88。精确值 $2\pi(7 - \sqrt{24}) \approx 13.19$. 3904. 0.402。精确值 0.4。
 3905. $\delta < 0.00022$. 3906. 1. 3907. $\frac{1}{40}$. 3908. $\frac{\pi a^3}{3}$. 3910. $I =$
 $= F(A, B) - F(A, b) - F(a, B) + F(a, b)$. 3912. (a) 負的; (6) 負的;

(B) 正的. 3913. $\frac{1}{4}$. 3914. $1.96 < I < 2$. 3915. $a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}$.

3916. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$. 3917. $\int_{-2}^2 dx \int_{\frac{|x|}{2}}^1 f(x, y) dy =$

$= \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$. 3918. $\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx +$

$+ \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx$. 3919. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,$

$y) dx$. 3920. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$.

3921. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$. 3922. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,$

$y) dy + \int_{-1}^1 dx \left\{ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right\} + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,$

$y) dy$. 3924. $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$.

3925. $\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) dx$.

3926. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} f(x, y) dx$.

3927. $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx +$

$+ \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.

3928. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.

3929. $\int_0^a dy \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx \right\} + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,$

$y) dx$. 3930. $\int_0^1 dy \int_{ey}^e f(x, y) dx$.

3931. $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx -$

$- \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$. 3932. $\frac{p^5}{2!}$. 3933. $\left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}$.

3934. $\frac{a^4}{2}$. 3935. $14a^4$. 3936. $\frac{35\pi a^4}{12}$. 3937. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r f(r \cos \varphi,$

$r \sin \varphi) dr$. 3938. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr \quad (a > 0)$.

3939. $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{|a|}^{|b|} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr$. 3940. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})}} r f(r \cos \varphi,$

$r \sin \varphi) dr$. 3941. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}}^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr +$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr.$$

3942. 在这样的情况下:如果积分域是由中心在原点的两同心圆和由原点引出的两条射线所围成。

$$3943. \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

$$3944. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})}}^1 r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi. 3945. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi}} r f(r) dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi}} r f(r) dr = \frac{\pi}{12} \int_0^{2\sqrt{2}} r f(r) dr + \int_{2\sqrt{2}}^4 \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{r} \right) r f(r) dr.$$

$$3946. \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}}^{\frac{1}{\cos^2 \varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_0^1 r dr \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

$$3947. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_0^a r dr \int_{-\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{a^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi. 3948. \int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi. 3949. \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi.$$

$$3950. \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi. 3951. 2\pi \int_0^1 r f(r) dr.$$

$$3952. \pi \int_0^1 r f(r) dr + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4 \arccos \frac{1}{r} \right) r f(r) dr.$$

$$3953. \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg} \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi. 3954. \frac{2\pi a^3}{3}. 3955. -6\pi^2.$$

$$3956. \frac{6}{5} \cdot \frac{b^2 + b(b+h) + (b+h)^2 + (2b-h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a} + \sqrt{a-h})(\sqrt{b} + \sqrt{b+h})}; \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$3957. \int_a^b u du \int_a^b f(u, uv) dv. 3958. \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

3959. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v \cos^3 v dv \int_0^a u f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) du$. 3961. $u = xy$,
 $v = x - y$. 3962. $\int_{-1}^1 f(u) du$. 3963. $2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) du$.
 3964. $\ln 2 \cdot \int_1^2 f(u) du$. 3965. $\frac{\pi}{2}$. 3966. $\frac{4}{3}$. 3967. $\frac{2}{3} \pi ab$.
 3968. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 3969. $5.43 \frac{11}{15}$. 3970. $1 \frac{37}{128} - \ln 2$. 3971. 2π .
 3972. $\frac{9}{16} \pi$. 3973. $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{4}$. 3974. $\frac{4}{3} \pi + 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. 3975. 6 .
 3976. $\frac{4}{3} (4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$. 3978. $f(0, 0)$. 3979. $\frac{2}{t} F(t)$, 若 $t > 0$.
 3980. $2 \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$. 3981. $F'(t) = \int_0^{2\pi} t f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) d\varphi$.
 3984. $\left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2\right) a^2$. 3985. $\frac{2}{3} (p+q) \sqrt{pq}$. 3986. πa^2 .
 3987. $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3} a^3$. 3988. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1+\sqrt{2})$. 3989. $\frac{\pi a^2}{4}$.
 3990. $a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}\right)$. 3991. $\frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$.
 3992. $\frac{ab}{3} \left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right) + \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2}\right]$. 3993. $\frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$.
 3994. $\frac{a^4 b h (a h + 2 b h)}{6 h^3 (a k + b h)^2}$. 3995. $\frac{ab}{70}$. 3996. $\frac{(\beta-a)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$.
 3997. $\frac{a^2}{2} \ln 2$. 3998. $\frac{4}{3} (q-p)(s-r)$. 3999. $\frac{65}{108} ab$.
 4000. $\frac{c^2}{6} (\sqrt{10}-2) \arcsin \frac{1}{3}$. 4001. $\frac{\pi}{|\delta|}$.
 4002. $\frac{c^2}{4} [(v_2-v_1)(\operatorname{sh} 2u_2 - \operatorname{sh} 2u_1) - (u_2-u_1)(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)]$.
 4003. $\frac{2}{3} \pi a^2$. 4004. $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$. 4007. $\frac{5}{6}$. 4008. $\frac{\pi R^2 a}{4} - \frac{2}{3} R^3$.
 4009. $\frac{88}{105}$. 4010. π . 4011. π . 4012. $\frac{17}{12} - 2 \ln 2$. 4013. $\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma^2 \times$
 $\times \left(\frac{3}{4}\right) x^3$. 4014. $\frac{\pi}{8}$. 4015. $\frac{45}{32} \pi$. 4016. $\frac{16}{9} a^3$. 4017. $\frac{\pi a^3}{8}$.
 4018. $\pi(1-e^{-R^2})$. 4019. $2a^2 c \cdot \frac{(\beta-a)(\pi-2)}{\pi^2}$. 4020. $\frac{\pi}{8}$.
 4021. $\frac{1}{3} \pi abc(2-\sqrt{2})$. 4022. $\frac{4}{3} \pi abc(2\sqrt{2}-1)$. 4023. $\frac{3\pi abc}{8}$.

$$4024. \frac{2}{3} \pi abc. \quad 4025. \frac{abc}{3}. \quad 4026. \frac{2}{9} abc (3\pi + 20 - 16\sqrt{2}).$$

$$4027. \frac{\pi(b^3 - a^3)}{12}. \quad 4028. \frac{9}{2} a^4. \quad 4029. \frac{3}{4}. \quad 4030. \frac{a^2 c}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

$$4031. \frac{8}{35}. \quad 4032. \frac{75}{256} \pi abc. \quad 4033. \frac{\pi^4 a^2 c}{128}. \quad 4034. \frac{abc}{3a^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

$$4035. \frac{abc}{2m+n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)}. \quad 4036. \frac{2}{3} \pi a^2 (2\sqrt{2} - 1). \quad 4037. 16a^2.$$

$$4038. 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}. \quad 4039. \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad 4040. 8a^2. \quad 4041. \pi\sqrt{2}. \quad 4042. \frac{\pi a^2}{2}.$$

$$4043. -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4} \ln 3\right) + \frac{8}{3} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad 4044. -\frac{a^2}{9} (20 - 3\pi).$$

$$4045. 2a^2. \quad 4046. S = 4\pi(3 + 2\sqrt{3})a^2; V = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} a^3. \quad 4047. (\varphi_2 - \varphi_1) \times$$

$\times (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) R^2$, 其中 φ_1, φ_2 —經綫的經度, ψ_1, ψ_2 —緯綫的緯度,

R —球半徑。 $4048. \pi \left\{ a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h} \right\}. \quad 4049. S =$

$$= a(\varphi_2 - \varphi_1) [b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)]; 4\pi^2 ab. \quad 4050. \omega =$$

$$= \arcsin \sqrt{\frac{bc}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}}. \quad \omega \approx \frac{bc}{a^2}. \quad 4051. \frac{\rho_0 a^2}{3} [2 + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})].$$

$$4052. x_0 = -\frac{a}{2}; y_0 = \frac{8}{5} a. \quad 4053. x_0 = y_0 = \frac{a}{5}. \quad 4054. x_0 = y_0 = \frac{256}{315\pi} a.$$

$$4055. x_0 = \frac{a^2 b}{14c^2}; y_0 = \frac{ab^2}{14c^2}. \quad 4056. x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8}. \quad 4057. x_0 = \frac{5}{6} a;$$

$$y_0 = \frac{16}{9\pi} a. \quad 4058. x_0 = \pi a; y_0 = \frac{5}{6} a. \quad 4059. x_0 = -\frac{a}{5}; y_0 = 0.$$

$$4060. \text{拋物綫 } y_0 = \frac{1}{8} \sqrt{30} p x_0. \quad 4061. I_x = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{h(b_1^2 + b_2^2)}{12}$$

$$(b = |b_1 + b_2|). \quad 4062. I_x = I_y = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi). \quad 4063. I_x = \frac{21\pi a^4}{32};$$

$$I_y = \frac{49\pi a^4}{32}. \quad 4064. I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}. \quad 4065. I_x = I_y = \frac{9}{5} a^4. \quad 4066. I_0 =$$

$$= \frac{\pi a^4}{8}. \quad 4069. I_a = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}. \quad 4070. X = ah^2; Y = 0,$$

其中 X, Y —为压力在坐标轴 Ox 及 Oy 上的射影。 $4071. P_1 = \pi a^2 \delta \times$

$\times \left(h - \frac{2}{3} a\right)$; $P_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{2}{3} a\right)$ 。 4072. 坐标轴位于过圆柱轴的铅垂

平面上, Ox 轴是水平的, 而 Oz 轴是铅垂的, 压力在 Ox 轴和 Oz 轴上的射影分别等于: $X_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \sin \alpha$, $Z_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \cos \alpha$; $X_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \sin \alpha$, $Z_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha\right) \cos \alpha$ 。

4073. 压力在坐标轴 Ox , Oy 及 Oz 上的射影分别等于: $X=0$, $Y=0$, $Z = -\frac{2kmM}{a^2 h} \left\{ |b| - |b-h| + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \right\}$, 其中 k —引力

常数。 4074. $p_{cp} = \frac{1}{2} p_0$ 。 4075. $A = \frac{kp}{12} \left\{ 2ab\sqrt{a^2 + b^2} + a^3 \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + b^3 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right\}$ 。 4076. $\frac{1}{364}$ 。 4077. $\frac{1}{2} \ln 2 -$

$-\frac{5}{16}$ 。 4078. $\frac{1}{48}$ 。 4079. $\frac{4}{5} \pi abc$ 。 4080. $\frac{\pi}{6}$ 。

4081. $\int_0^1 dx \left\{ \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy + \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy \right\} =$
 $= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right\}$ 。

4082. $\int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx$ 。

4083. $\int_0^1 dx \left\{ \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \right\} =$
 $= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right\} +$
 $+ \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx$ 。 4084. $\frac{1}{2} \int_0^x (x-\xi)^2 f(\xi) d\xi$ 。

4085. $\frac{1}{2} \int_0^1 (2-z^2) f(z) dz + \frac{1}{2} \int_1^2 (2-z)^2 f(z) dz$ 。 4086. $F(A, B, C) -$
 $-F(A, B, c) - F(A, b, C) - F(a, B, C) + F(A, b, c) + F(a, B, c) +$
 $+ F(a, b, C) - F(a, b, c)$ 。 4087. $\frac{\pi}{10}$ 。 4088. $\frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1)$ 。

4089. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\arctg \frac{1}{\cos \varphi}} \cos \psi d\psi \int_{\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \psi}}^{\frac{1}{\cos \varphi \cos \psi}} r^2 f(r) dr$ 。 4090. $\frac{\pi^2 abc}{4}$ 。

4091. $\frac{16\pi}{3}$ 。 4092. $\frac{2}{27} \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}$ 。 4093. $\frac{1}{32} \times$
 $\times \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) (b^3 - a^3) \left[(\beta^2 - \alpha^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right]$ 。 4094. $\frac{6}{5}$ 。

$$4095. 3(e-2). \quad 4096. u = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\theta R}}, \text{ 其中 } |\theta| < 1.$$

$$4098. (a) F'(t) = 4xt^2 f(t^2); (6) F'(t) = \frac{3}{t} [F(t) + \iiint_V xyz f'(xyz) dx dy dz],$$

其中 $t > 0$ 及 $V = \{0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t\}$. 4099. 若数 m, n 及 p 中之一非偶数, 0; 若数 m, n 及 p 为偶数, $\frac{4\pi}{m+n+p+3} \cdot \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$.

$$4100. \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}. \quad 4101. \frac{3}{35}. \quad 4102. \frac{7}{24}.$$

$$4103. \frac{2}{3} a^3 (3x-4). \quad 4104. \frac{\pi a^3}{6}. \quad 4105. \frac{a^3}{24} (3x-4). \quad 4106. \frac{32}{3} \pi.$$

$$4107. \pi a^3. \quad 4108. \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. \quad 4109. \frac{1}{2}. \quad 4110. \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) (b^3 - a^3).$$

$$4111. \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a^2 bc}{h}. \quad 4112. \frac{\pi^2}{4} abc. \quad 4113. \frac{5\pi abc}{12} (3 - \sqrt{5}).$$

$$4114. \frac{8\pi}{5} abc. \quad 4115. \frac{abc}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right). \quad 4116. \frac{abc}{60} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

$$4117. \frac{abc}{554400}. \quad 4118. \frac{abc}{3}. \quad 4119. \frac{9}{4} a^2. \quad 4120. \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma^2 \times \\ \times \left(\frac{3}{4}\right). \quad 4121. \frac{4\pi}{3} a^3. \quad 4122. \frac{\pi abc^2}{3h} (1 - e^{-1}). \quad 4123. \frac{3}{2} abc.$$

$$4124. 5abc \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right). \quad 4125. 37:27. \quad 4126. V = \frac{5\pi a^3}{6}; S = \frac{\pi a^2}{6} (6\sqrt{2} + \\ + 5\sqrt{5} - 1). \quad 4127. \frac{8h_1 h_2 h_3}{|A|}. \quad 4128. \frac{4\pi h^3}{3|A|}. \quad 4129. \frac{\pi^2}{3n \sin \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{abc^2}{h}.$$

$$4130. \frac{abc}{mn+mp+np} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)}. \quad 4131. \frac{3}{2}. \quad 4132. 4\pi\rho_0 \times$$

$$\times \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right) e^{-k}. \quad 4133. \left(0, 0, \frac{3}{4}c\right). \quad 4134. x_0 = y_0 = \frac{2}{5}a;$$

$$z_0 = \frac{7}{30}a^2. \quad 4135. x_0 = \frac{7}{18}p; y_0 = 0; z_0 = \frac{7}{176}p. \quad 4136. x_0 = \frac{3}{8}a;$$

$$y_0 = \frac{3}{8}b; z_0 = \frac{3}{8}c. \quad 4137. x_0 = y_0 = 0; z_0 = \frac{3a}{8}. \quad 4138. x_0 = y_0 = 1;$$

$$z_0 = \frac{5}{3}. \quad 4139. x_0 = \frac{9\pi}{448}a; y_0 = \frac{9\pi}{448}b; z_0 = \frac{9\pi}{448}c. \quad 4140. x_0 = y_0 = 0;$$

$$z_0 = \frac{7}{20}. \quad 4141. \quad \frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}. \quad 4142. \quad x_0 = \alpha; y_0 = \beta;$$

$$z_0 = \gamma. \quad 4143. \quad I_{xy} = \frac{abc^3}{60}; I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}; I_{zx} = \frac{ab^3c}{60}. \quad 4144. \quad I_{xy} =$$

$$= \frac{4}{15} \pi abc^3; I_{yz} = \frac{4}{15} \pi a^3bc; I_{zx} = \frac{4}{15} \pi ab^3c. \quad 4145. \quad I_{xy} = \frac{\pi abc^3}{5}; I_{yz} =$$

$$= \frac{\pi a^3bc}{20}; I_{zx} = \frac{\pi ab^3c}{20}. \quad 4146. \quad I_{xy} = \frac{2abc^3}{225}(15\pi - 16); I_{yz} = \frac{2ab^3c}{1575}(105\pi - 272);$$

$$I_{zx} = \frac{2a^3bc}{1575}(105\pi - 92). \quad 4147. \quad I_{xy} = \frac{7}{2} \pi abc^3; I_{yz} = \frac{4}{3} \pi ab^3c; I_{zx} =$$

$$= \frac{4}{3} \pi a^3bc. \quad 4148. \quad I_z = \frac{14}{45}. \quad 4149. \quad I_z = \frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5). \quad 4150. \quad \frac{4}{9} MR^2.$$

$$4153. \quad I = \frac{M}{3} \left(a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right), \text{ 其中 } M = 2\pi\rho_0 a^2 h \text{—圆柱的质量。} \quad 4154. \quad I_0 =$$

$$= \frac{\pi^2 a^5 \rho_0}{8}. \quad 4155. \quad u = 2\pi\rho_0 \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right), \text{ 若 } r \leq R; u = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3r}, \text{ 若 } r > R, \text{ 其}$$

$$\text{中 } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad 4156. \quad u = 4\pi \int_{n_1}^{R_1} f(\rho) \text{ 极小} \left(\frac{\rho^2}{r}, \rho \right) d\rho, \text{ 其中 } r =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad 4157. \quad u = \pi\rho_0 \left\{ (h-z) \sqrt{a^2 + (h-z)^2} + z \sqrt{a^2 + z^2} - \right.$$

$$\left. - [(h-z)|h-z| + z|z|] + a^2 \ln \left| \frac{h-z + \sqrt{a^2 + (h-z)^2}}{z - \sqrt{a^2 + z^2}} \right| \right\}. \quad 4158. \quad X=0;$$

$$Y=0; Z = -\frac{kMm}{a^2}. \text{ 若 } a \geq R, Z = -\frac{kMm}{R^3} a, \text{ 若 } a < R. \quad 4159. \quad X=0;$$

$$Y=0; Z = -2\pi\rho_0 k \{ \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (h-z)^2} - (|z| - |h-z|) \}.$$

$$4160. \quad X=0; Y=0; Z = -\pi k\rho_0 R \sin^2 \alpha. \quad 4161. \quad \text{当 } p > 1 \text{ 时收敛。} \quad 4162. \quad \text{当}$$

$$p > 1 \text{ 及 } q > 1 \text{ 时收敛。} \quad 4163. \quad \text{当 } p > \frac{1}{2} \text{ 时收敛。} \quad 4164. \quad \text{当 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 \text{ 时收敛。}$$

$$4165. \quad \text{发散。} \quad 4169. \quad \frac{1}{(p-q)(q-1)} \quad (p > q > 1). \quad 4170. \quad \frac{1}{p-1} \quad (p > 1).$$

$$4171. \quad 2\pi. \quad 4172. \quad \frac{\pi}{p-1} \quad (p > 1). \quad 4173. \quad \pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}. \quad 4174. \quad \frac{1}{2}.$$

$$4175. \quad \pi. \quad 4176. \quad \frac{\pi}{2}. \quad 4177. \quad \frac{\pi}{2}. \quad 4178. \quad \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{A}{\delta}}, \text{ 其中 } \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \text{ 及}$$

$$A = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}. \quad 4179. \quad \frac{\pi}{e} ab. \quad 4180. \quad -\frac{\pi a^2 b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad 4181. \quad \text{收敛。}$$

$$4182. \quad \text{当 } p < 1 \text{ 时收敛。} \quad 4183. \quad \text{当 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1 \text{ 时收敛。} \quad 4184. \quad \text{当 } p < 1 \text{ 时收敛。}$$

4185. 当 $p < 1$ 时收敛。 4187. $\frac{\pi}{2}$ 。 4188. πa 。 4189. $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$ 。

4190. 2。 4191. 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛。 4192. 当 $p < \frac{3}{2}$ 时收敛。 4193. 当

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ 时收敛。 4194. 当 $p < 1$ 时收敛。 4195. 当 $p < 1$ 时收敛。

4196. $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}$ ($p < 1, q < 1, r < 1$)。 4197. $\frac{4\pi}{3}$ 。

4198. $2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right)$ ($p < 1$)。 4199. $\pi^{\frac{5}{2}}$ 。 4200. $\sqrt{\frac{\pi^3}{|\Delta|}}$, 其中

$\Delta = |a_{ij}|$ 。 4204. (a) $\frac{n}{3}$; (b) $\frac{n(3n+1)}{12}$ 。 4205. $\frac{a^n}{n!}$ 。 4206. $\frac{1}{2^n n!}$ 。

4207. $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$ 。 4208. $\frac{2^n h_1 h_2 \cdots h_n}{|\Delta|}$ 。 4209. $\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}$ 。

4210. $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \cdots a_n$ 。 4211. $\frac{\pi^{\frac{n}{2}} a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$ 。 4212. $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} a^{n-1} h^3}{12\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ 。

4213. $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ 。 4218. $R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 f(\sqrt{u}) u^{\frac{n}{2}-1} du$ 。 4219. $u =$

$= \frac{16}{15} \alpha^2 \rho_0^2 R^3$ 。 4220. $\sqrt{\frac{\pi^n}{|\delta|}} e^{-\frac{\delta}{\delta}}$, 其中 $\delta = |a_{ij}|$ 及 $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{a_{ij}}{b_j} \\ \frac{b_i}{e} \end{vmatrix}$ 为附

上线的行列式。 4221. $1 + \sqrt{2}$ 。 4222. $\frac{256}{15} a^3$ 。 4223. $2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2)$ 。

4224. $\frac{a^3}{6} (\operatorname{ch}^{\frac{3}{2}} 2t_0 - 1)$ 。 4225. $4a^{\frac{7}{3}}$ 。 4226. $2(e^a - 1) + \frac{\pi}{4} a e^a$ 。

4227. $2a^2 (2 - \sqrt{2})$ 。 4228. $\frac{2ka^2 \sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$ 。 4229. $2a^2$ 。 4230. $\frac{\pi}{a}$ 。

4231. 5。 4232. $\sqrt{3}$ 。 4233. $|x_0| + |z_0|$, 其中 $|x_0| < a$ 。

4234. $\frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}} \right)$ 。 4235. $\left(1 + \frac{2z_0}{3c}\right) \sqrt{cz_0}$ 。

4236. $a\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{|z|}{\sqrt{a^2 - z^2}}$ 。 4237. $\frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4x^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

4238. $\frac{2}{3} \pi a^3$ 。 4239. $\frac{1}{3} [(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]$ 。 4240. $\frac{a^2}{256\sqrt{2}} [100\sqrt{38} -$

$-72 - 17 \ln \frac{25+4\sqrt{38}}{17}]$ 。 4241. $2b \left(b + a \frac{\operatorname{arcsin} \epsilon}{\epsilon} \right)$, 其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

- 一橢圓的離心率。 4242. $\frac{a}{8} \left[(3\sqrt{3}-1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \right]$ 。 4243. $x_0 = -b - a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$; $y_0 = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$ 。 4244. $x_0 = y_0 = \frac{4}{3}a$ 。 4245. $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}$ 。 4246. $x_0 = \frac{2}{5}$; $y_0 = -\frac{1}{5}$; $z_0 = \frac{1}{2}$ 。 4247. $I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$; $I_z = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$ 。 4248. (a) 0; (b) $\frac{2}{3}$; (B) 2。 4249. (a) 2; (b) 2; (B) 2。 4250. $-\frac{14}{15}$ 。 4251. $\frac{4}{3}$ 。 4252. 0。 4253. $-2\pi a^2$ 。 4254. -2π 。 4255. 0。 4256. 0。 4257. $\frac{\pi}{4} - 1$ 。 4258. 8。 4259. 12。 4260. 4。 4261. -2。 4262. $\int_0^{a+b} f(u) du$ 。 4263. $-\frac{3}{2}$ 。 4264. 9。 4265. $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy$ 。 4266. 62。 4267. 1。 4268. $\pi+1$ 。 4269. $e^a \cos b - 1$ 。 4271. $z = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$ 。 4272. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-y}{2y\sqrt{2}} + C$ 。 4273. $z = -\frac{2y^2}{(x+y)^2} + \ln|x+y| + C$ 。 4274. $z = e^{x+y}(x-y+1) + ye^x + C$ 。 4275. $z = \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} + C$ 。 4276. $z = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) + C$ 。 4278. $|I_R| \leq \frac{8\pi}{R^2}$ 。 4279. $\frac{1}{35}$ 。 4280. $-\pi a^2$ 。 4281. $2\pi\sqrt{2}a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ 。 4282. $-\frac{\pi a^2}{4}$ 。 4283. -4。 4284. $-53\frac{7}{12}$ 。 4285. 0。 4286. $b-a$ 。 4287. $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy + \int_{z_1}^{z_2} \chi(z) dz$ 。 4288. $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u) du$ 。 4289. $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} u f(u) du$ 。 4290. $u = \frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - 2xyz + C$ 。 4291. $u = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$ 。 4292. $u = \ln \sqrt{(x+y)^2 + z^2} + \operatorname{arctg} \frac{z}{x+y} + C$ 。 4293. $A = -mg(z_2 - z_1)$ 。 4294. $\Delta = -\frac{k}{2}(a^2 - b^2)$ 。 4295. $A = k\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$, 其中 $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ ($i=1, 2$)。 4296. $I = \iint_S y^2 dx dy$ 。 4297. $-46\frac{2}{3}$ 。 4298. $-\frac{\pi a^4}{2}$ 。 4299. $-2\pi ab$ 。 4300. $-\frac{1}{5}(e^x - 1)$ 。 4301. 0。 4302. $I_1 - I_2 = 2$ 。 4303. $\frac{\pi m a^2}{8}$ 。 4304. $mS + e^x \varphi(y_2) -$

$$-e^{x_1} \varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1). \quad 4305. \quad P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = kx + \frac{\partial u}{\partial y},$$

其中 u —可微分两次的函数而 k —常数。

$$4306. \quad \frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)].$$

$$4307. \quad (1) \quad I=0; \quad (2) \quad I=2\pi.$$

$$4308. \quad \pi ab.$$

$$4309. \quad \frac{3}{8} \pi ab. \quad 4310. \quad \frac{a^2}{6}. \quad 4311. \quad \frac{3}{2} a^2. \quad 4312. \quad a^2. \quad 4313. \quad \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

$$4314. \quad \frac{a^2}{2} B(2m+1, 2n+1). \quad 4315. \quad \frac{ab}{2n} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}. \quad 4316. \quad \frac{ab}{n} \left[1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right].$$

$$4317. \quad \frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$

$$4318. \quad \pi(n+1)(n+2)r^2; 6\pi r^2.$$

$$4319. \quad \pi(n-1) \times$$

$$\times (n-2)r^2; 6\pi r^2.$$

$$4320. \quad 4a^2.$$

$$4321. \quad \operatorname{sgn}(ad-bc).$$

$$4322. \quad I =$$

$$= \sum \operatorname{sgn} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}, \text{ 其中求和遍及于二曲线在围线 } C \text{ 内的一切交点上:}$$

$$\varphi(x, y) = 0 \text{ 及 } \psi(x, y) = 0.$$

$$4324. \quad I = 2S, \text{ 其中 } S \text{ 为由围线 } C \text{ 所围的面积.}$$

$$4325. \quad X'_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0). \quad 4326. \quad \text{力在坐标轴上的射影: } X=0;$$

$$Y = \frac{2kmM}{\pi a^2} \text{ 其中 } k \text{—引力常数.} \quad 4327. \quad u = 2\pi \kappa R \ln \frac{1}{R}, \text{ 若 } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq$$

$$\leq R; \quad u = 2\pi \kappa R \ln \frac{1}{\rho}, \text{ 若 } \rho > R. \quad 4328. \quad I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi,$$

$$\text{若 } 0 \leq \rho \leq 1; \quad I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi, \text{ 若 } \rho > 1. \quad 4329. \quad u =$$

$$= 2\pi, \text{ 若点 } A(x, y) \text{ 在围线 } C \text{ 内, } u = \pi, \text{ 若点 } A(x, y) \text{ 在围线 } C \text{ 上; } u = 0,$$

$$\text{若点 } A(x, y) \text{ 在围线 } C \text{ 之外.} \quad 4330. \quad K_1 = \pi \rho^m \cos m\varphi, \quad K_2 = \pi \rho^m \sin m\varphi,$$

$$\text{若 } 0 \leq \rho < 1; \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \text{ 若 } \rho = 1; \quad K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi, \quad K_2 = -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi$$

$$\text{若 } \rho > 1. \quad 4339. \quad Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad 4340. \quad H_x =$$

$$= ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y) dz - (\xi - z) dy]; \quad H_y = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - z) dx - (\xi - x) dz];$$

$$H_z = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x) dy - (\eta - y) dx]. \quad 4341. \quad I_1 - I_2 = (4\pi - 2\sqrt{3}) a^4.$$

$$4342. \quad \frac{7}{2} \pi \sqrt{2} a^3. \quad 4343. \quad \pi a^3. \quad 4344. \quad \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2}). \quad 4345. \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{2} +$$

$$+ (\sqrt{3} - 1) \ln 2. \quad 4346. \quad \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}. \quad 4347. \quad \frac{4\pi}{3} abc \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right).$$

4348. $x^2 [a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})]$. 4349. $\frac{\pi a^4}{2} \sin a \cos^2 a (0 \leq a \leq \frac{\pi}{2})$. 4350. $\frac{64}{15} \sqrt{2} a^4$. 4352. $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. 4353. $\frac{4}{3} \pi \rho_0 a^4$.
4354. $\frac{\pi \rho_0 a (3a^2 + 2b^2) \sqrt{a^2 + b^2}}{12}$. 4355. $x_0 = \frac{a}{2}$; $y_0 = 0$; $z_0 = \frac{16}{9\pi} a$.
4356. $x_0 = y_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$; $z_0 = \frac{a}{\pi} (\sqrt{2} + 1)$. 4357. 引力在坐标轴上的射影:
 $X=0$; $Y=0$; $Z = \pi k m \rho_0 \ln \frac{a}{b}$. 4358. $u = 4\pi \rho_0$ 极小 $(a, \frac{a^2}{r_0})$, 其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. 4359. $F(t) = \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2$, 若 $|t| \leq \sqrt{3}$; $F(t) = 0$, 若 $|t| > \sqrt{3}$. 4360. $F(t) = \frac{\pi(8 - 5\sqrt{2})}{6} t^4$. 4361. $F=0$, 若 $t \leq r-a$; $F = \frac{\pi t}{r} [a^2 - (r-t)^2]$, 若 $r-a < t < r+a$; $F=0$, 若 $t > r+a (t \geq 0)$.
4362. $4\pi a^3$. 4363. $\left[\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} + \frac{h(c)-h(0)}{c} \right] abc$.
4364. 0. 4365. $\frac{4\pi}{abc} (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. 4366. $\frac{8\pi}{3} (a+b+c) R^3$.
4367. $-\pi a^2 \sqrt{3}$. 4368. $\frac{h^3}{3}$. 4369. 2 面积 S . 4370. 0.
4371. $-2\pi a(a+h)$. 4372. $2\pi R r^3$. 4373. $-\frac{9}{2} a^3$. 4374. 0.
4376. $3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$. 4377. 0. 4378. $2 \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
4379. $\iiint_V \Delta u dx dy dz$, 其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 4380. 0.
4384. $\frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|$. 4385. $\frac{2}{9} a^3$. 4387. $3a^4$.
4388. $\frac{12}{5} \pi a^3$. 4389. 1. 4390. $-\frac{\pi h^4}{2}$. 4392. (a) $I=0$; (b) $I=4\pi$.
4401. (a) $\text{grad } u(0) = 3i - 2j - 6k$, $\cos \alpha = \frac{3}{7}$, $\cos \beta = -\frac{2}{7}$, $\cos \gamma = -\frac{6}{7}$;
 (b) $\text{grad } u(A) = 6i + 3j$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \gamma = 0$; (c) $\text{grad } u(B) = 7i$, $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$; 在点 $M(-2, 1, 1)$ $\text{grad } u = 0$.
4402. (a) $xy = z^2$; (b) $x=y=0$ 及 $x=y=z$; (c) $x=y=z$. 4403. $r=1$.
4404. $\frac{4(x^2 + y^2)}{u^2 - 256} + \frac{4z^2}{u^2} = 1 \quad (u \geq 16)$; $\frac{x^2 + y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1$; 极大 $u=20$.

4405. $\cos \varphi = -\frac{4}{405}$. 4406. 等位面——圆锥孔; 梯度的等模面——圆环;
 $\inf u = 0, \sup u = 1; \inf |\operatorname{grad} u| = 0, \sup |\operatorname{grad} u| = \frac{1}{2}$.

4407. $\frac{|4c|}{|\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)|}$. 4409. (a) $\frac{r}{r}$; (b) $2r$; (B) $-\frac{r}{r^3}$.

4410. $f'(r) \frac{r}{r}$. 4411. c . 4412. $2r(c \cdot c) - 2c(c \cdot r)$. 4416. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2u}{r}$,

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. $\frac{\partial u}{\partial r} = |\operatorname{grad} u|$, 若 $a = b = c$. 4417. $\frac{\partial u}{\partial l} =$

$-\frac{\cos(l, r)}{r^2}$ 若 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0, l \perp r$. 4418. $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$ 若 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$,

$\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$. 4419. $a = \frac{i(\sqrt{x^2 + y^2 + yz}) - j\sqrt{x^2 + y^2 + xz} + k(x - y)z}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4420. $y = c_1 x, z = c_2 x^2$. 4423. 0. 4425. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$, 其中 $\Delta u =$
 $= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. 4426. $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r); f(r) = c + \frac{c_1}{r}$, 其中 c 及 c_1 —

常数. 4427. (a) 3; (b) $\frac{2}{r}$. 4428. $\frac{f'(r)}{r}(c \cdot r)$. 4429. $3f(r) +$
 $+ r f'(r); f(r) = \frac{6}{r^3}$, 其中 c —常数. 4430. (a) $u \Delta u + (\operatorname{grad} u)^2$; (b)

$u \Delta v - \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$, 其中 Δu —拉普拉斯算子. 4431. $\operatorname{div} v = 0$;

$\operatorname{div} w = -2\omega^2$, 若在已知时刻点属于物体. 4432. 0, 在引力中心之外.

4433. $\operatorname{div} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$, 其中 a_r, a_φ 为向量 a 在坐标线 $\varphi =$ 常

数及 $r =$ 常数上的射影. 4434. $\operatorname{div} a = \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u} (MN \cdot a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (NL \cdot a_v) + \right.$
 $\left. + \frac{\partial}{\partial w} (LM a_w) \right]$, 其中 a_u, a_v, a_w 为向量 a 在对应的坐标线上之射影, $L =$

$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}$, $M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$, $N =$

$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. 若 r, φ, z 为圆柱坐标, 则 $\operatorname{div} a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \right.$

$\left. + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right]$; 若 ρ, θ, φ 为球坐标, 则 $\operatorname{div} a = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (a_\rho \rho^2 \sin \theta) + \right.$

$\left. + \rho \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \rho \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$. 4436. (a) 0; (b) 0. 4437. (a)

$\frac{f'(r)}{r} [r \times c]$; (b) $2f(r)c + \frac{f'(r)}{r} [c(r \cdot r) - r(c \cdot r)]$. 4439. (a) 0; (b)

- 0。4440. $\operatorname{rot} v = 2\omega$, 若在已知时刻点属于物体。4441. (a) 0; (b) πh^3 。
 4442. (a) 0; (b) 0。4443. π 。4444. $\frac{3\pi}{8}$ 。4445. 0。4447. $4\pi m$ 。
 4448. $\sum_{i=1}^n e_i$ 。4450. $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$, 其中 c —比热及 ρ —物体密度。
 4452. $2\pi^2 b^3$ 。4453. $\int_{r_A}^{r_B} f(r) r dr$ 。4454. (a) $2x$; (b) $2x$ 。
 4455. (a) $\Gamma = 0$; (b) $\Gamma = 2\pi n$, 其中 n —为圈线 C 绕 Oz 旋转的数目。
 4456. $Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$; $T = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ 。
 4457. $u = xyz(x+y+z) + C$ 。4458. $u = \frac{m}{r}$ 。4459. $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$,
 其中 r_i —动点 $M(x, y, z)$ 与点 M_i ($i=1, 2, \dots, n$) 之间的距离。
 4460. $u(x, y, z) = \int_{r_0}^r t f(t) dt$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

附录

I 重要常数

$\pi = 3.1415926536$	$e^2 = 7.3890560989$
$\frac{1}{\pi} = 0.3183098862$	$\sqrt{e} = 1.6487212707$
$\pi^2 = 9.8696044011$	$M = \lg e = 0.4342944819$
$\sqrt{\pi} = 1.7724538509$	$\frac{1}{M} = \ln 10 = 2.3025850930$
$e = 2.7182818285$	1 弧度 = $57^{\circ}17'44.806''$
$\frac{1}{e} = 0.3678794412$	$\arcsin 1^{\circ} = 0.0174532925$

II 表

1. 倒数, 平方根及立方根, 指数函数

n	$\frac{1}{n}$	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	e^n	$e^{\frac{n}{10}}$	$e^{-\frac{n}{10}}$	e^{-n}
1	1.000	1.00	3.16	1.00	2.15	4.64	2.718	1.105	0.905	0.368
2	0.500	1.41	4.47	1.26	2.71	5.85	7.389	1.221	0.819	0.135
3	0.333	1.73	5.48	1.44	3.11	6.69	20.09	1.350	0.741	0.0498
4	0.250	2.00	6.32	1.59	3.42	7.37	54.60	1.492	0.670	0.0183
5	0.200	2.24	7.07	1.71	3.68	7.94	148.41	1.649	0.607	0.00674
6	0.167	2.45	7.75	1.82	3.91	8.43	403.4	1.822	0.549	$2.48 \cdot 10^{-2}$
7	0.143	2.65	8.37	1.91	4.12	8.88	1096.6	2.014	0.497	$9.12 \cdot 10^{-4}$
8	0.125	2.83	8.94	2.00	4.31	9.28	2981	2.226	0.449	$3.35 \cdot 10^{-4}$
9	0.111	3.00	9.49	2.08	4.48	9.65	8103	2.460	0.407	$1.23 \cdot 10^{-4}$
10	0.100	3.16	10.00	2.15	4.64	10.00	22026	2.718	0.368	$4.54 \cdot 10^{-5}$

2. 常用对数的尾数

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	000	301	477	602	699	778	845	903	954
10	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279
20	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462
30	477	491	506	519	531	544	556	568	580	591
40	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690
50	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771
60	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839
70	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898
80	903	908	914	919	924	929	934	940	944	949
90	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996

3. 自然对数

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	0.000	0.693	1.099	1.386	1.609	1.792	1.946	2.079	2.197
10	2.303	2.398	2.485	2.565	2.639	2.708	2.773	2.833	2.890	2.944
20	2.996	3.045	3.091	3.135	3.178	3.219	3.258	3.296	3.332	3.367
30	3.401	3.434	3.466	3.497	3.526	3.555	3.584	3.611	3.638	3.664
40	3.689	3.714	3.738	3.761	3.784	3.807	3.829	3.850	3.871	3.892
50	3.912	3.932	3.951	3.970	3.989	4.007	4.025	4.043	4.060	4.078
60	4.094	4.111	4.127	4.143	4.159	4.174	4.190	4.205	4.220	4.234
70	4.248	4.263	4.277	4.290	4.304	4.318	4.331	4.344	4.357	4.369
80	4.382	4.394	4.407	4.419	4.431	4.443	4.454	4.466	4.477	4.489
90	4.500	4.511	4.522	4.533	4.543	4.554	4.564	4.575	4.585	4.595
100	4.605	4.615	4.625	4.635	4.644	4.654	4.663	4.673	4.682	4.691

 $10^{\pm n}$ 的自然对数

n	+	-	n	+	-	n	+	-
1	2.3026	2.6974	3	6.9078	7.0922	5	11.5129	12.4871
2	4.6052	5.3948	4	9.2103	10.7897	6	13.8155	14.1845

4. 三角函数

α°	α 弧	$\sin \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\cos \alpha$		
0	0	0	0	∞	1	1.571	90
1	0.017	0.017	0.017	57.29	1.000	1.558	89
2	0.035	0.035	0.035	28.64	0.999	1.536	88
3	0.052	0.052	0.052	19.08	0.999	1.518	87
4	0.070	0.070	0.070	14.30	0.998	1.501	86
5	0.087	0.087	0.087	11.43	0.996	1.484	85
6	0.105	0.105	0.105	9.514	0.995	1.466	84
7	0.122	0.122	0.123	8.144	0.993	1.449	83
8	0.140	0.139	0.141	7.115	0.990	1.431	82
9	0.157	0.156	0.158	6.314	0.988	1.414	81
10	0.175	0.174	0.176	5.671	0.985	1.396	80
11	0.192	0.191	0.194	5.145	0.982	1.379	79
12	0.209	0.208	0.213	4.703	0.978	1.361	78
13	0.227	0.225	0.231	4.331	0.974	1.344	77
14	0.244	0.242	0.249	4.011	0.970	1.326	76
15	0.262	0.259	0.268	3.732	0.966	1.309	75
16	0.279	0.276	0.287	3.487	0.961	1.292	74
17	0.297	0.292	0.306	3.271	0.956	1.274	73
18	0.314	0.309	0.325	3.078	0.951	1.257	72
19	0.332	0.326	0.344	2.904	0.946	1.239	71
20	0.349	0.342	0.364	2.747	0.940	1.222	70
21	0.367	0.358	0.384	2.605	0.934	1.204	69
22	0.384	0.375	0.404	2.475	0.927	1.187	68
23	0.401	0.391	0.424	2.356	0.921	1.169	67
24	0.419	0.407	0.445	2.246	0.914	1.152	66
25	0.436	0.423	0.466	2.145	0.906	1.134	65
26	0.454	0.438	0.488	2.050	0.899	1.117	64
27	0.471	0.454	0.510	1.963	0.891	1.100	63
28	0.489	0.469	0.532	1.881	0.883	1.082	62
29	0.506	0.485	0.554	1.804	0.875	1.065	61
30	0.524	0.500	0.577	1.732	0.866	1.047	60
31	0.541	0.515	0.601	1.664	0.857	1.030	59
32	0.559	0.530	0.625	1.600	0.848	1.012	58
33	0.576	0.545	0.649	1.540	0.839	0.995	57
34	0.593	0.559	0.675	1.483	0.829	0.977	56
35	0.611	0.574	0.700	1.428	0.819	0.960	55
36	0.628	0.588	0.727	1.376	0.809	0.942	54
37	0.646	0.602	0.754	1.327	0.799	0.925	53
38	0.663	0.616	0.781	1.280	0.788	0.908	52
39	0.681	0.629	0.810	1.235	0.777	0.890	51
40	0.698	0.643	0.839	1.192	0.766	0.873	50
41	0.716	0.656	0.869	1.150	0.755	0.855	49
42	0.733	0.669	0.900	1.111	0.743	0.838	48
43	0.750	0.682	0.933	1.072	0.731	0.820	47
44	0.768	0.695	0.966	1.036	0.719	0.803	46
45	0.785	0.707	1.000	1.000	0.707	0.785	45
		$\cos \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\sin \alpha$	α 弧	α°

5. 双曲函数

x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$
0	0	1	0				
0.1	0.100	1.005	0.100	1.6	2.376	2.578	0.922
0.2	0.201	1.020	0.197	1.7	2.646	2.828	0.935
0.3	0.305	1.045	0.291	1.8	2.942	3.107	0.947
0.4	0.411	1.069	0.380	1.9	3.268	3.418	0.956
0.5	0.521	1.128	0.462	2.0	3.627	3.762	0.964
0.6	0.637	1.185	0.537	2.1	4.022	4.144	0.970
0.7	0.759	1.255	0.604	2.2	4.457	4.568	0.976
0.8	0.888	1.337	0.664	2.3	4.937	5.037	0.980
0.9	1.027	1.433	0.716	2.4	5.466	5.557	0.984
1.0	1.175	1.543	0.762	2.5	6.050	6.132	0.987
1.1	1.336	1.669	0.801	2.6	6.695	6.769	0.989
1.2	1.509	1.811	0.834	2.7	7.406	7.473	0.991
1.3	1.698	1.971	0.862	2.8	8.192	8.253	0.993
1.4	1.904	2.151	0.885	2.9	9.060	9.115	0.994
1.5	2.129	2.352	0.905	3.0	10.018	10.068	0.995

当 $x > 3$ 时误差小于 0.05 我们有:

$$\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{1}{2} e^x.$$

6. 阶乘及与其有关的函数

n	$n!$	$(2n-1)!!$	$(2n)!!$	$1/n!$	$1/(2n-1)!!$	$1/(2n)!!$
1	1	1	2	1	1	0.5
2	2	3	8	0.5	0.333 333 333	0.125
3	6	15	48	0.166 666 667	0.066 666 667	0.020 833 333
4	24	105	384	0.041 666 667	0.009 523 810	0.002 604 167
5	120	945	3 840	0.008 333 333	0.001 058 201	0.000 260 417
6	720	10 395	46 080	0.001 388 889	0.000 096 200	0.000 021 701
7	5 040	135 135	645 120	0.000 198 413	0.000 007 400	0.000 001 550
8	40 320	2 027 025	10 321 920	0.000 024 802	0.000 000 493	0.000 000 097
9	362 880	34 459 425	185 794 560	0.000 002 756	0.000 000 029	0.000 000 005
10	3 628 800	654 729 075	3 715 891 200	0.000 000 276	0.000 000 002	0.000 000 000

7. 加玛函数

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$\Gamma(x)$	1.000	0.951	0.918	0.897	0.887	0.886	0.894	0.909	0.931	0.962	1.000

当 $x > 0$ 时 $\min \Gamma(x) = \Gamma(1.4616) = 0.8856$ 。

马山 吉来多雄著

数学分析习题集题解

第二版

山东科学技术出版社

51.61

6

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

(一)

费定晖	周学圣	编演
郭大钧	邵品琮	主审

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(一)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品璋 主审

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂潍坊厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 16.25 印张 331 千字
1980 年 2 月第 1 版 1983 年 6 月第 3 次印刷
印数: 151,001—186,300
~~书号 15195·17~~ 定价 1.75 元

出版说明

吉米多维奇 (В. П. ДЕМИДОВИЧ) 著《数学分析习题集》一书的中译本, 自五十年代初在我国翻译出版以来, 引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生, 常以试解该习题集中的习题, 作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来, 对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题, 数量多, 内容丰富, 由浅入深, 部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限, 单变量函数的微分学, 不定积分, 定积分, 级数, 多变量函数的微分学, 带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等, 概括了数学分析的全部主题。当前, 我国广大读者, 特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者, 在为四个现代化而勤奋学习的热潮中, 迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此, 我们特约作者, 将全书4462题的所有解答汇辑成书, 共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书, 同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知, 原习题集, 题多难度大, 其中不少习题如果认真习作的话, 既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念, 又可以有效地提高我们的运算能力, 特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样, 我们殷切期望初学数学分析的青年读者, 一定要刻苦钻研, 千万不要

轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目 录

第一章 分析引论	1
§1. 实数	1
§2. 叙列的理论	26
§3. 函数的概念	106
§4. 函数的图形表示法	143
§5. 函数的极限	242
§6. 函数无穷小和无穷大的阶	384
§7. 函数的连续性	404
§8. 反函数, 用参数表示的函数	456
§9. 函数的一致连续性	476
§10. 函数方程	496

第一章 分析引论

§1. 实数

1°数学归纳法 为了证明某定理对任意的自然数 n 为真, 只须证明下面两点就够了: (1) 这定理对 $n=1$ 为真, (2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真, 则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真.

2°分割 假设分有理数为 A 和 B 两类, 使其满足于下列条件: (1) 两类均非空集, (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类, (3) 属于 A 类 (下类) 的任一数小于属于 B 类 (上类) 的任何数, 这样的分类法称为分割。

(a) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 则分割 A/B 确定一个有理数。(b) 若 A 类无最大数, 而 B 类亦无最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数。有理数和无理数统称为实数*。

3°绝对值 假若 x 为实数, 则用下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0, \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y , 有以下的不等式成立:

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

4°上确界和下确界 设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合. 若:

* 以后若没有相反的附带说明, 数这个字我们将理解为实数。

(1) 每一个 $x \in X^*$ 满足不等式

$$x \geq m;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x' \in X$, 使

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf \{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leq M,$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x'' \in X$, 使

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup \{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界, 则通常说

$$\inf \{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界, 则认为

$$\sup \{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差 设 a ($a \neq 0$) 是被测的量的准确数值, 而 x 是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半, 则说 x 有 n 位准确的数字.

* 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X .

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立:

1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

证 当 $n=1$ 时, 等式成立.

设对于 $n=k$ (自然数) 时, 等式成立, 即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}, \end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时等式也成立.

于是, 由数学归纳法知, 对于任何自然数 n , 有

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

证 当 $n=1$ 时, 等式成立.

设 $n=k$ 时, 等式成立, 即

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \\ = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)] \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},
\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ ，时等式也成立。

于是，对于任何自然数 n ，有

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$

证 当 $n=1$ 时，等式成立。

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 \\
&= (1 + 2 + \cdots + k)^2 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left\{ \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \right\}^2 \\
&= [1 + 2 + \cdots + (k+1)]^2,
\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立。

于是，对于任何自然数 n ，有

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

4. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$

证 当 $n=1$ 时，等式成立。

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} + 2^k \\ = (2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

5. 设 $a^{[n]} = a(a-h)\dots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]} = 1$. 求证

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数, 由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n = 1$ 时, 由于

$$[a+b]^{[1]} = a+b$$

及
$$\sum_{m=0}^1 C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]} = a+b,$$

所以等式成立.

设 $n = k$ 时, 等式成立. 即

$$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}, \quad (1)$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$(a+b)^{[k+1]} = (a+b)^{[k]} \cdot (a+b-kh). \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得

$$(a+b)^{[k+1]} = (a+b-kh) \cdot \sum_{m=0}^k C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}$$

$$\begin{aligned}
&= (a+b-kh) \{ C_k^0 a^{(k)} b^{(0)} + C_k^1 a^{(k-1)} b^{(1)} + \dots \\
&\quad + C_k^k a^{(0)} b^{(k)} \} \\
&= \{ (a-kh) + b \} C_k^0 a^{(k)} b^{(0)} \\
&\quad + \{ [a-(k-1)h] + (b-h) \} C_k^1 a^{(k-1)} b^{(1)} \\
&\quad + \dots + \{ a + (b-kh) \} C_k^k a^{(0)} b^{(k)} \\
&= C_k^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + C_k^0 a^{(k)} b^{(1)} + C_k^1 a^{(k)} b^{(1)} \\
&\quad + C_k^1 a^{(k-1)} b^{(2)} + \dots + C_k^k a^{(1)} b^{(k)} \\
&\quad + C_k^k a^{(0)} b^{(k+1)} \\
&= C_{k+1}^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + (C_k^0 + C_k^1) a^{(k)} b^{(1)} \\
&\quad + \dots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{(1)} b^{(k)} + C_{k+1}^{k+1} a^{(0)} b^{(k+1)} \\
&= C_{k+1}^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + C_{k+1}^1 a^{(k)} b^{(1)} \\
&\quad + \dots + C_{k+1}^k a^{(1)} b^{(k)} + C_{k+1}^{k+1} a^{(0)} b^{(k+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{(k+1-m)} b^{(m)},
\end{aligned}$$

故由 $(a+b)^{(k)} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{(k-m)} b^{(m)}$ 可推得下式成立:

$$(a+b)^{(k+1)} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{(k+1-m)} b^{(m)},$$

即对于 $n=k+1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{(n-m)} b^{(m)}. \quad (3)$$

在式子

$$a^{(n)} = a(a-h) \cdots [a-(n-1)h]$$

中, 令 $h=0$, 即得

$$a^{[n]} = a^n. \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式, 得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m.$$

6. 证明贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 x_1, x_2, \dots, x_n 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时, 此式取等号.

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时, 由于 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 大于 -1 ,

所以 $1+x_i > 0$. 因而有

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & \geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & = (1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) \\ & \quad + (x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}). \end{aligned}$$

由于 $x_ix_j \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) \\ & \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}, \end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立,

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \\ & \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n. \end{aligned}$$

7. 证明若 $x > -1$, 则不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n \geq 1)$$

为真, 且仅当 $x=0$ 时, 等号成立。

证 只要在 6 题的贝努里不等式中, 设

$$x_i = x \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

即得证

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

从 6 题的证明过程中看出, 仅当 $x=0$ 时, 上式才取等号.

8. 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{当 } n \geq 1.$$

证 当 $n=2$ 时, 因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$, 故不等式成立.

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \quad (k=1, 2, \dots),$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

9. 证明不等式

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! \geq [(n+1)!]^2 \quad \text{当 } n \geq 1.$$

证 当 $n=2$ 时, 因为 $2! \cdot 4! = 48$, 及 $[(2+1)!]^2 = 36$, 所以, $2! \cdot 4! \geq [(2+1)!]^2$, 故不等式成立.

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$2! \cdot 4! \cdots (2k)! \geq [(k+1)!]^2,$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 2! \cdot 4! \cdots (2k+2)! &\geq [(k+1)!]^2 (2k+2)! \\ &= [(k+1)!]^{2+1} (k+2)(k+3) \cdots (2k+2) \\ &\geq [(k+1)!]^{2+1} (k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{2+1}, \end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立. 于是, 据归纳法原理, 本题证毕.

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时, 因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, 不等式显然成立.

设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n=k+1$ 而言, 由于

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$,

而上述不等式由于

$$4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4,$$

因而是成立的, 于是, 最后得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立. 由归纳法证毕.

11. 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 \sqrt{c} 的分割, 其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理数 b , 而 A 类包含所有其余的有理数. 求证在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a \in A$, 若 $a \leq 0$, 则显然存在 $a' > a$ ($a' > 0$) 且 $a' \in A$. 故可设 $a > 0$, 于是 $a^2 \leq c$. 但不可能有 $a^2 = c$.

因若 $a^2 = c$, 设 $a = \frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^2}{q^2} = c$.

由于 c 是正整数, 而 p^2 与 q^2 也是互质的, 故必 $q=1$, 从而 $c=p^2$, 此与假定矛盾, 故必 $a^2 < c$. 下面我们证明, 存在正整数 n , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < c,$$

于是 $a + \frac{1}{n}$ 也属于 A .

上述不等式相当于:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c - a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a+1}{n} < c - a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了。

为此，只要取

$$n > \frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的。因此，不论 a 为 A 类内的怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数。

同法可证 B 类中也无最小数。

实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 \sqrt{c} 。

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成： A 类包含所有的有理数 a ，而 $a^3 < 2$ ； B 类包含所有其余的有理数。证明在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数。
证 设 $a \in A$ ，即 $a^3 < 2$ 。下证必可取正整数 n ，使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^3 < 2.$$

事实上，上式相当于 $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 - a^3$ 。若 $a \leq 0$ ，

取 $n=1$ 即可。若 $a > 0$ ，注意到 $n \geq 1$ ，即知若取 n 充分大，

使 $n > \frac{3a^2 + 3a + 1}{2 - a^3}$ ，则上列各式均成立。从而 $a + \frac{1}{n} \in A$ 。

故 A 中无最大数。

下设 $b \in B$ ，则 $b^3 \geq 2$ 。下证不可能有 $b^3 = 2$ 。事实

上, 若 $b^3 = 2$, 设 $b = \frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数,

则 $\frac{p^3}{q^3} = 2$, $p^3 = 2q^3$, 从而 p^3 为偶数, 因此 p 必为偶

数: $p = 2r$, r 为正整数. 由于 q 与 p 是互质的, 故 q 必为奇数, 从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3 = 4r^3$, 故 q^3 又必是偶数, 因此矛盾. 由此可知必有 $b^3 > 2$. 仿前面之证, 可

取正整数 n , 使 $(b - \frac{1}{n})^3 > 2$, 从而 $b - \frac{1}{n} \in B$. 由此可知 B 类中无最小数. 实质上, 此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt[3]{2}$.

13. 作出适当的分割, 然后证明等式:

$$(a) \quad \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18};$$

$$(b) \quad \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

证 (a) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B : 一切有理数 $a \leq 0$ 以及满足 $a^2 \leq 2$ 的正有理数 a 都归于 A 类, 一切满足 $b^2 > 2$ 的正有理数 b 归入 B 类. 又作确定 $\sqrt{8}$ 的分割 A'/B' : 一切有理数 $a' \leq 0$ 以及满足 $a'^2 \leq 8$ 的正有理数 a' 归入 A' 类, 一切满足 $b'^2 > 8$ 的正有理数 b' 归入 B' 类. 我们知道, 根据实数加法的定义, 满足不等式.

$a + a' \leq c \leq b + b'$ (对任何 $a \in A, b \in B, a' \in A', b' \in B'$) 的唯一实数 c 就是 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$. 因此, 如果我们能证明恒有 $(a + a')^2 \leq 18$ (当 $a + a' > 0$ 时), $(b + b')^2 > 18$, 则有 $a + a' \leq \sqrt{18} \leq b + b'$. 于是得知 $\sqrt{18} = c = \sqrt{2} + \sqrt{8}$.

若 $a + a' > 0$, 则 a 与 a' 中至少有一个为正, 从而

由 $a^2 a'^2 \leq 16$ 知 $aa' \leq 4$, 从而 $(a+a')^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \leq 2+8+8=18$; 同样, 因 $b^2 \geq 2$, $b'^2 \geq 8$, $b \geq 0$, $b' \geq 0$, 故 $b^2 b'^2 \geq 16$, $bb' \geq 4$, $(b+b')^2 = b^2 + b'^2 + 2bb' \geq 2+8+8=18$. 于是证毕.

(6) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B 如 (a) 中所示, 再作确定 $\sqrt{3}$ 的分割 A_1/B_1 : 一切有理数 $a_1 \leq 0$ 以及满足 $a_1^2 \leq 3$ 的正有理数 a_1 归入 A_1 类, 一切满足 $b_1^2 \geq 3$ 的正有理数 b_1 归入 B_1 类. 根据实数乘法的定义, 满足

$$aa_1 < c_1 < bb_1 \quad (\text{对任何 } a \in A, a > 0; a_1 \in A_1, a_1 > 0, b \in B, b_1 \in B_1)$$

的 (正) 实数 c_1 存在唯一, 它就是 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. 但由于当 $a \in A, a > 0, a_1 \in A_1, a_1 > 0$ 时 $(aa_1)^2 \leq 6$, 而当 $b \in B, b_1 \in B_1$ 时, $(bb_1)^2 \geq 6$. 故恒有 $aa_1 < \sqrt{6} < bb_1$. 由此可知 $\sqrt{6} = c_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. 证完.

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

解 先作分割 A_1/B_1 , 使之确定数 $\sqrt{2}$.

其次, 作分割 A/B , 其中 A 类包含全体负有理数、零以及满足下述条件的正有理数 a :

如果有 $\frac{p}{q}$ (p, q 互质) 属于 A_1 , 则有

$$a' \leq 2^p;$$

而其余的正有理数归入 B 类.

这样的分割 A/B 就确定数 $2^{\sqrt{2}}$.

15. 求证任何非空且下方有界的数集有下确界, 而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性, 只证本题的后半部分, 分两种情形:

(1) A 中有最大数 \bar{a} . 此时, 设 $a \in A$, 则有 $a \leq \bar{a}$,

说明 \bar{a} 为 A 的上界. 又由于 $\bar{a} \in A$, 故对 A 的任何上界 M , 均有 $\bar{a} \leq M$, 故 \bar{a} 为 A 的上确界.

(2) A 中无最大数. 此时, 作分割 A_1/B_1 : 取集 A 的一切上界归入 B_1 类, 而其余的数归入 A_1 类. 这样, A 中一切数全部落在 A_1 内, A_1 及 A_2 均非空, 且 A_1 中的数小于 B_1 中的数, 这确实是一个实数分割, 易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数, 即 β 是 A 的最小上界, 从而 β 是 A 的上确界.

16. 证明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$ (式中 m 及 n 为自然数, 且 $0 < m < n$) 的集合无最小及最大的元素. 并求集合的上确界及下确界.

证 令 E 表一切有理真分式 $\frac{m}{n}$ (式中正整数 m, n 满足

$0 < m < n$) 所成的集合. 对任何 $\frac{m}{n} \in E$, 显然 $\frac{m+1}{n+1} \in E$

且 $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$, 又 $\frac{m^2}{n^2} \in E$, 且 $\frac{m^2}{n^2} < \frac{m}{n}$; 故 E 中既无最大数, 也无最小数. 显然

$$\sup E = 1, \quad \inf E = 0.$$

17. 有理数 r 满足不等式

$$r^2 < 2.$$

求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

解 用 E 表所有满足 $r^2 < 2$ 的有理数 r 所成的集合.

我们知道, 分割 A/B 确定无理数 $\sqrt{2}$, 这里 A 表由一

切非正有理数以及满足 $r^2 < 2$ 的正有理数 r 所成的类， B 表其余有理数构成的类，并且已证 A 中无最大数，于是

$$\sup E = \sup A = \sqrt{2}.$$

同样，分割 A'/B' 确定无理数 $-\sqrt{2}$ ，这里 B' 表由所有非负有理数以及满足 $r^2 < 2$ 的负有理数 r 构成的类， A' 表其余有理数构成的类，并且 B' 中无最小数。于是，显然有

$$\inf E = \inf B' = -\sqrt{2}.$$

18. 设 $\{-x\}$ 为数的集合，这些数是与 $x \in \{x\}$ 符号相反的数。证明等式：

$$(a) \inf\{-x\} = -\sup\{x\}; \quad (b) \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

证 (a) 设 $\inf\{-x\} = m'$ ，则有：

(1) 当 $-x \in \{-x\}$ 时， $-x \geq m'$ ；

(2) 对于任何的正数 ε ，存在有 $-x' \in \{-x\}$ ，使

$$-x' < m' + \varepsilon.$$

由(1)及(2)推得：

(3) 当 $x \in \{x\}$ 时， $x \leq -m'$ ；

(4) 对于任何的正数 ε ，存在有 $x' \in \{x\}$ ，使

$$x' > -m' - \varepsilon.$$

由(3)及(4)知数 $-m' = \sup\{x\}$ ，即 $m' = -\sup\{x\}$ ，所以 $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$ 。

(b) 设 $\sup\{-x\} = M'$ ，则有：

(5) 当 $-x \in \{-x\}$ 时， $-x \leq M'$ ；

(6) 对于任何的正数 ε ，存在有 $-x' \in \{-x\}$ ，使

$$-x' > M' - \varepsilon.$$

由(5)及(6)推得:

(7) 当 $x \in \{x\}$ 时, $x \geq -M'$;

(8) 对于任何的正数 ε , 存在有 $x' \in \{x\}$, 使

$$x' < -M' + \varepsilon.$$

由(7)及(8)知数 $-M' = \inf \{x\}$, 即 $M' = -\inf \{x\}$,

所以, $\sup \{-x\} = -\inf \{x\}$.

19. 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$. 证明等式:

(a) $\inf \{x+y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\}$;

(b) $\sup \{x+y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\}$.

证 (a) 设 $\inf \{x\} = m_1$, $\inf \{y\} = m_2$, 则有:

(1) 当 $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$ 时, $x \geq m_1$, $y \geq m_2$;

(2) 对于任何的正数 ε , 存在有数 $x' \in \{x\}$, $y' \in \{y\}$, 使

$$x' < m_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y' < m_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由(1)及(2)推得:

(3) 当 $x+y \in \{x+y\}$ 时 (其中 $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$),

$$x+y \geq m_1 + m_2;$$

(4) 对于任何的正数 ε , 存在有 $x'+y' \in \{x+y\}$ (其中 $x' \in \{x\}$, $y' \in \{y\}$), 使

$$x' + y' < (m_1 + m_2) + \varepsilon.$$

由(3)及(4)知数 $m_1 + m_2 = \inf \{x+y\}$, 即

$$\inf \{x+y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\}.$$

(b) 同法可证

$$\sup \{x+y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\}.$$

20. 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 且 $x \geq 0$ 及 $y \geq 0$. 证明等式:

$$(a) \inf\{xy\} = \inf\{x\} \inf\{y\};$$

$$(b) \sup\{x\} \sup\{y\} = \sup\{xy\}.$$

证 (a) 设 $\inf\{x\} = m_1$, $\inf\{y\} = m_2$, 由于恒有 $x \geq 0$, $y \geq 0$, 故必 $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$. 于是

(1) 当 $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$ 时, $x \geq m_1 \geq 0$, $y \geq m_2 \geq 0$;

(2) 对任何的正数 ε , 存在有数 $x' \in \{x\}$, $y' \in \{y\}$, 使

$$0 \leq x' < m_1 + \varepsilon, \quad 0 \leq y' < m_2 + \varepsilon.$$

由(1)及(2)推得:

(3) 当 $xy \in \{xy\}$, 其中 $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$, $xy \geq m_1 m_2$;

(4) 对于任何的正数 ε , 存在有 $x' y' \in \{xy\}$ (其中 $x' \in \{x\}$, $y' \in \{y\}$), 使

$$0 \leq x' y' < (m_1 + \varepsilon)(m_2 + \varepsilon) = m_1 m_2 + \varepsilon',$$

其中 $\varepsilon' = (m_1 + m_2)\varepsilon + \varepsilon^2$.

由(3)及(4)知数 $m_1 m_2 = \inf\{xy\}$, 即

$$\inf\{xy\} = \inf\{x\} \inf\{y\}.$$

(b) 同法可证

$$\sup\{xy\} = \sup\{x\} \sup\{y\}.$$

21. 求证不等式:

$$(a) |x - y| \geq ||x| - |y||;$$

$$(b) |x + x_1 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

证 (a) 由 $|x - y| = |x + (-y)| \geq |x| - |-y|$

$$= |x| - |y|,$$

及 $|x - y| = |y - x| \geq |y| - |x|$

$$= -(|x| - |y|),$$

即得

$$|x-y| \geq ||x| - |y||$$

也可如下证明：由 $|xy| \geq xy$ 知

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq x^2 - 2|xy| + y^2,$$

则 $(x-y)^2 \geq (|x| - |y|)^2,$

开方即得

$$|x-y| \geq ||x| - |y||.$$

$$(6) \quad |x+x_1+\cdots+x_n| \geq |x| - |x_1+\cdots+x_n|,$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad |x_1+\cdots+x_n| &\leq |x_1| + |x_2+\cdots+x_n| \leq \cdots \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \end{aligned}$$

所以,

$$|x+x_1+\cdots+x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

解不等式:

$$22. \quad |x+1| < 0.01.$$

解 由 $|x+1| < 0.01$ 推得

$$-0.01 < x+1 < 0.01,$$

所以,

$$-1.01 < x < -0.99.$$

$$23. \quad |x-2| \geq 10.$$

解 由 $|x-2| \geq 10$ 推得

$$x-2 \geq 10 \quad \text{或} \quad x-2 \leq -10,$$

所以,

$$x \geq 12 \quad \text{或} \quad x \leq -8.$$

$$24. \quad |x| > |x+1|.$$

解 两边平方, 即得

$$x^2 > (x+1)^2 \quad \text{或} \quad 2x+1 < 0.$$

于是, 有

$$x < -\frac{1}{2}.$$

25. $|2x-1| < |x-1|.$

解 两边平方, 即得

$$(2x-1)^2 < (x-1)^2 \quad \text{或} \quad 3x^2 - 2x < 0,$$

解之, 得

$$0 < x < \frac{2}{3}.$$

26. $|x+2| + |x-2| \leq 12.$

解 令 $x-2=t$, 则得

$$|t+4| + |t| \leq 12 \quad \text{或} \quad |t+4| \leq 12 - |t|.$$

两边平方, 即有

$$t^2 + 8t + 16 \leq 144 - 24|t| + t^2,$$

或

$$3|t| \leq 16 - t.$$

将上式两端再平方, 化简整理得

$$t^2 + 4t - 32 \leq 0,$$

于是, 有

$$-8 \leq t \leq 4.$$

从而得

$$-8 \leq x-2 \leq 4,$$

即

$$-6 \leq x \leq 6 \quad \text{或} \quad |x| \leq 6.$$

27. $|x+2| - |x| > 1.$

解 $1 + |x| < |x+2|$, 将此式两端平方, 化简得

$$2|x| \leq 4x + 3.$$

再平方之，化简得

$$4x^2 + 8x + 3 \geq 0.$$

于是，有

$$x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{或} \quad x \leq -\frac{3}{2}.$$

后者不适合，所以，

$$x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$28. \quad ||x+1| - |x-1|| \leq 1.$$

解 两端平方，化简得

$$x^2 + \frac{1}{2} \leq |x^2 - 1|,$$

即

$$x^2 - 1 \geq x^2 + \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad x^2 - 1 \leq -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right).$$

前者不可能，所以，

$$x^2 - 1 \leq -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right),$$

即 $x^2 \leq \frac{1}{4}$ ，解之得

$$|x| \leq \frac{1}{2}.$$

$$29. \quad |x(1-x)| \leq 0.05.$$

解 由 $|x - x^2| \leq \frac{1}{20}$ 得

$$x^2 - x + \frac{1}{20} \geq 0 \quad \text{或} \quad x^2 - x - \frac{1}{20} \leq 0,$$

解之得

$$\begin{cases} \frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{10} \\ \frac{5 + \sqrt{20}}{10} < x \text{ 或 } x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10}, \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10} \text{ 或} \\ \frac{5 + \sqrt{20}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{10}. \end{aligned}$$

30. 证明恒等式

$$\left(\frac{x + |x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2} \right)^2 = x^2.$$

证 $\left(\frac{x + |x|}{2} \right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2} \right)^2$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x|x| + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x|x| = x^2.$$

31. 当测量长度10厘米时, 绝对误差为0.5毫米; 当测量距离500仟米时, 绝对误差等于200米. 哪种测量较为精确?

解 用相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

进行比较, 其中 a 为被测量的精确值, 而 Δ 是绝对误差.

对于前者, $\delta = \frac{0.5 \times 0.1}{10} = 0.5\%,$

对于后者, $\delta = \frac{200}{500 \times 1000} = 0.04\%$,

所以, 后者测量较为精确.

32. 设数

$$x = 2.3752$$

的相对误差为 1%, 试求此数包含若干位准确数字?

解 因为 $\frac{\Delta}{2.3752} = 0.01$, 所以 $\Delta = 0.023752$.

因而, 此数包含两位准确数字.

33. 数

$$x = 12.125$$

包含三位准确数字. 试求此数的相对误差?

解 因为 x 包含三位准确数字, 所以 $\Delta \leq 0.05$. 于是得
相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} \leq \frac{0.05}{12.125} \leq 0.42\%$$

即

$$\delta \leq 0.42\%.$$

34. 矩形的边等于:

$$x = 2.50 \text{ 厘米} \pm 0.01 \text{ 厘米},$$

$$y = 4.00 \text{ 厘米} \pm 0.02 \text{ 厘米}.$$

这个矩形的面积 S 界于甚么范围内? 设其边长取平均值时, 矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 为何?

解 $S_{\min} = (2.50 - 0.01)(4.00 - 0.02)$
 $= 9.9102 \text{ (平方厘米) *),}$

$$S_{\max} = (2.50 + 0.01)(4.00 + 0.02)$$

$$=10.0902 \text{ (平方厘米)},$$

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max},$$

$$S_{\text{平均}} = 2.50 \times 4.00 = 10 \text{ (平方厘米)},$$

$$\Delta_1 = 10.0902 - 10 = 0.0902 \text{ (平方厘米)},$$

$$\Delta_2 = 10 - 9.9102 = 0.0898 \text{ (平方厘米)};$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.0902 \text{ (平方厘米)},$$

$$\delta = \frac{\Delta}{10} \leq \frac{0.0902}{10} \leq 0.91\%.$$

*) 以后各题简写为厘米², 厘米³等.

35. 物体的重量 $P = 12.59$ 克 ± 0.01 克, 其体积 $V = 3.2$ 厘米³ ± 0.2 厘米³. 若对物体的重量和体积都取其平均值, 试求物体的比重, 并估计比重的绝对误差和相对误差.

解 比重 $C = \frac{12.59}{3.2}$ 克/厘米³ $= 3.93$ 克/厘米³.

$$C_{\max} = \frac{12.60}{3.0} \text{ 克/厘米}^3 = 4.20 \text{ 克/厘米}^3,$$

$$C_{\min} = \frac{12.58}{3.4} \text{ 克/厘米}^3 = 3.70 \text{ 克/厘米}^3,$$

$$C_{\min} \leq C \leq C_{\max},$$

$$\Delta_1 = C_{\max} - C = 0.27 \text{ 克/厘米}^3,$$

$$\Delta_2 = C - C_{\min} = 0.23 \text{ 克/厘米}^3,$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.27 \text{ 克/厘米}^3;$$

一般地, 比重为 (3.93 ± 0.27) 克/厘米³;

$$\delta \leq \frac{0.27}{3.70} \leq 7.3\%.$$

36. * 圆半径

$$r = 7.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

若取 $\pi = 3.14$, 则求出的圆面积的最小相对误差为何?

解 圆面积 $A = \pi \times 7.2^2 \approx 51.84\pi (\text{米}^2)$

$$\Delta_1 = \pi(7.2 + 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2 = 1.45\pi.$$

$$\Delta_2 = |\pi(7.2 - 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2| = 1.43\pi.$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 1.45\pi (\text{米}^2)$$

即一般的圆面积 A 为 $(51.84 \pm 1.45)\pi (\text{米}^2)$, 故

$$\delta \leq \frac{1.45\pi}{51.84\pi} < 2.80\%.$$

37. 对直角平行六面体测得

$$x = 24.7 \text{ 米} \pm 0.2 \text{ 米},$$

$$y = 6.5 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米},$$

$$z = 1.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

这个平行六面体的体积 V 界于甚么范围内? 若测量的各结果都取其平均值, 则求出的平行六面体的体积可能有的绝对误差和相对误差为何?

解 $24.5 \times 6.4 \times 1.1 \leq V \leq 24.9 \times 6.6 \times 1.3$

即 $172.480 \text{ 米}^3 \leq V \leq 213.642 \text{ 米}^3.$

当 x, y, z 均取平均值时,

$$V = 24.7 \times 6.5 \times 1.2 = 192.660 \text{ 米}^3.$$

$$\Delta_1 = 213.642 - 192.660 = 20.982 (\text{米}^3),$$

$$\Delta_2 = 192.660 - 172.480 = 20.180 (\text{米}^3).$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的, 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

于是,

$$\Delta \leq 20.982 \text{米}^3;$$

$$\delta \leq \frac{20.982}{172.480} \approx 12.2\%.$$

38. 测量正方形的边 x , 此处 $2 \text{米} < x < 3 \text{米}$, 应有多小的绝对误差, 才能使此正方形面积有可能精确到 0.001米^2 ?

解 按题设我们有 $0 < x^2 - 4 < 0.001$ 或 $0 < 9 - x^2 < 0.001$, 解之得

$$2.99983 < x < 3 \quad \text{或} \quad 2 < x < 2.00024.$$

因此, Δ 取二者中误差较小者, 即

$$\Delta \leq 0.00017 \text{ (米)} = 0.17 \text{ 毫米},$$

故当边长 x 的绝对误差不超过 0.17 毫米时, 就能使此正方形的面积精确到 0.001米^2 .

39. 假定矩形每边的长皆不超过 10 米, 为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 0.01 平方米, 问测量矩形的边 x 与 y 时, 许可的绝对误差 Δ 的值多大^{*)}?

解 按题设我们有

$$(x + \Delta)(y + \Delta) - xy \leq 0.01,$$

即
$$\Delta^2 + (x + y)\Delta \leq 0.01,$$

由于 $x \leq 10$ 及 $y \leq 10$, 所以只要

$$\Delta^2 + 20\Delta \leq 0.01 \quad \text{或} \quad \Delta^2 + 20\Delta - 0.01 \leq 0$$

即可. 解之, 得

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 0.04}}{2} = -10 + \frac{20.00099}{2} \\ &\approx 0.000499 < 0.0005 \text{ (米)}. \end{aligned}$$

*) 此题假设 x, y 有相等的绝对误差, 又原著上为“0.01平方米”, 而误译为“0.01平方厘米”.

40. 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差, $\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差, 求证:

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y),$$

证 设 $x = a + \Delta_x, \quad y = b + \Delta_y,$

其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值, Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差, 则有

$$xy - ab = b\Delta_x + a\Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y.$$

于是,

$$\begin{aligned} \Delta &= |xy - ab| \\ &\leq |b| \cdot \Delta_x + |a| \cdot \Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y. \end{aligned}$$

最后即得

$$\delta(xy) = \frac{\Delta}{|ab|} \leq \frac{\Delta_x}{|a|} + \frac{\Delta_y}{|b|} + \frac{\Delta_x}{|a|} \cdot \frac{\Delta_y}{|b|}.$$

此即

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

§2. 叙列的理论

1° 叙列的极限的概念 假设对于任何的 $\varepsilon > 0$, 有数 $N = N(\varepsilon)$, 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \varepsilon,$$

则称叙列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 有极限 a (或者说, 收敛于 a), 亦即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

其中, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

则称 x_n 为无穷小.

没有极限的叙列, 称为发散的.

2° 极限存在的准则

(1) 设

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

(2) 单调而且有界的叙列有极限.

(3) 哥西判别法 叙列 $\{x_n\}$ 的极限存在的必要而且充分的条件是: 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 有数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

3° 关于叙列的极限的基本定理 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 和 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在, 则有:

$$(1) \text{ 若 } x_n \leq y_n, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(4) \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

4° 数 e 叙列

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

有确定的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\dots$$

5° 无穷极限 符号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 有数 $N = N(E)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$.

6° 聚点 设已知叙列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 有子叙列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots$$

适合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数 ξ (或符号 ∞) 为已知数列 a_n ($n=1, 2, \dots$) 的聚点.

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点 (波尔查诺—外尔斯特拉斯原理). 若这个聚点是唯一的, 则它即为已知叙列的有穷极限.

叙列 x_n 的最小聚点 (有穷的或无穷的)

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为下极限, 而它的最大聚点

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为此叙列的上极限。

等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

为叙列 x_n 的（有穷或无穷）极限存在的必要而且充分的条件。

41. 设

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

即：对于任一个给定的 $\varepsilon > 0$ ，求数 $N = N(\varepsilon)$ 使得

$$\text{在 } n > N \text{ 时, } |x_n - 1| < \varepsilon.$$

填下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
N					

证 $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1}$. 任给 $\varepsilon > 0$ ，要 $|x_n - 1| < \varepsilon$ ，只要

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

即只要 $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. 可取

$$N = N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil,$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \varepsilon$. 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
N	10	100	1000	10000	...

42. 假若:

$$(a) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad (b) \frac{2n}{n^3 + 1};$$

$$(B) x_n = \frac{1}{n!}; \quad (r) x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n.$$

对于任何的 $\varepsilon > 0$, 求出数 $N = N(\varepsilon)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| < \varepsilon$;

即证明 x_n ($n=1, 2, \dots$) 为无穷小 (就是说, 有极限值为 0)。

对应着上面四种情形, 填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	...
N				

证 (a) $|x_n| = \frac{1}{n}$. 任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|x_n| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

即只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]^*$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \varepsilon$,

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(6) $|x_n| = \frac{2n}{n^2+1} < \frac{2}{n^2}$. 任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|x_n| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{2}{n^2} < \varepsilon,$$

即只要 $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$. 取 $N = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right]$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \varepsilon$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(B) $|x_n| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. 任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|x_n| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon,$$

即只要 $n > 1 + \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. 取

$$N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1,$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \varepsilon$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(F) $|x_n| = 0.999^n$. 任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|x_n| < \varepsilon$, 只要 $n \lg 0.999 < \lg \varepsilon$.

由于 $\lg 0.999 < 0$, 故只要 $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg 0.999} \approx 2500 \lg \frac{1}{\varepsilon}$. ** 取

$$N = \left[2500 \lg \frac{1}{\varepsilon} \right],$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \varepsilon$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

填下表:

ε		0.1	0.01	0.001	...
(a)	N	10	100	1000	...
(b)	N	4	14	44	...
(B)	N	4	7	10	...
(r)	N	2500	5000	7500	...

*) 或取 $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$. 以下各题类似, 不再一一说明.

**) 查四位数学用表所得的数据.

43. 证明叙列

(a) $x_n = (-1)^n n$, (b) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, (B) $x_n = \lg(\lg n)$
($n \geq 2$)

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有无穷极限 (即成为无穷大), 即:

对任意的 $E > 0$, 求数 $N = N(E)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$.

对应着上面的每一种情形, 填下表:

E	10	100	1000	10000	...
N					

证 (a) $|x_n| = n$. 任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要
 $n > E$.

取 $N = [E]$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

(6) $|x_n| = 2^{\sqrt{n}}$. 任给 $E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要 $2^{\sqrt{n}} > E$.

即只要 $n > \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$. 取

$$N = \left[\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2\right],$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

(B) 当 $n > 10$ 时, $\lg n > 1$ 及 $\lg(\lg n) > 0$.

任给 $E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要

$$\lg(\lg n) > E,$$

即只要 $n > 10^{(10^E)}$. 取

$$N = [10^{(10^E)}],$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

填下表:

E		10	100	1000	10000	...
(a)	N	10	100	1000	10000	...
(6)	N	11	44	99	176	...
(B)	N	$10^{(10^{10})}$	$10^{(10^{100})}$	$10^{(10^{1000})}$	$10^{(10^{10000})}$...

44. 求证

$$x_n = n(-1)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

无界, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它并不成为无穷大.

证 因为 $x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 2k, & \text{当 } n=2k, k \text{ 为自然数,} \\ \frac{1}{2k+1}, & \text{当 } n=2k+1, \end{cases}$

所以,

$$x_{2k} \rightarrow \infty, x_{2k+1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

由于 $x_{2k} \rightarrow \infty$, 故 x_n 无界; 但因 $x_{2k+1} \rightarrow 0$, 故 x_n 并不趋于无穷大.

45. 用不等式表示下列各式:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

解 (a) 对于任给的正数 E , 存在有自然数 $N = N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

(b) 对于任给的正数 E , 存在有自然数 $N = N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $x_n < -E$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

(c) 对于任给的正数 E , 存在有自然数 $N = N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $x_n > E$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

设 n 跑过自然数列, 求下列各式之值:

$$46. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1}.$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000}{n + \frac{1}{n}} = 0.$$

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

48. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}.$

解 因为 $\sin n!$ 有界: $|\sin n!| \leq 1$ 及 $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = 0.$$

49. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3}.$

50. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}.$

51. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$

52. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right].$

解 当 $n=2k$ 时 (k 为自然数),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \\ &= \frac{1}{2k} - \frac{2}{2k} + \frac{3}{2k} - \dots - \frac{2k}{2k} = \frac{-k}{2k} = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

当 $n=2k+1$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \\ &= \frac{1}{2k+1} - \frac{2}{2k+1} + \frac{3}{2k+1} - \dots + \frac{2k+1}{2k+1} \\ &= \frac{k+1}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

由于取不同方式时, 所得的极限值不同, 所以, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right]$$

不存在.

53. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right].$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^3} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = \frac{1}{3}.$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right].$$

解 设 $f(n) = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3}$, 由53题

$$\text{即得 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [8f(2n) - 4f(n)] = \frac{4}{3}.$$

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

$$\text{解 设 } f(n) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n},$$

$$g(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\text{则有 } 2f(n+1) - g(n) = f(n) + 1,$$

$$\text{又由 } 2f(n+1) - f(n) = f(n) + \frac{2n+1}{2^n} = g(n) + 1,$$

$$\text{故 } f(n) = g(n) + 1 - \frac{2n+1}{2^n}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n) + 1] = 3$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0$ (*), 故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right) = 3.$$

*) 参看58题

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$$

$$\text{解} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{相加之, 得 } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[1]{2} \cdot \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdots \sqrt[n]{2}).$$

$$\text{解} \quad \text{由于 } \sqrt[1]{2} \cdot \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdots \sqrt[n]{2}$$

$$= 2^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)}$$

$$= 2^{\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right]},$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[1]{2} \cdot \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdots \sqrt[n]{2})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right] = 2.$$

证明下列等式:

58. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$

证 因为 $2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \dots + 1$

$$> \frac{n(n-1)}{2} \quad (n > 2),$$

故 $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1};$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

59. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$

证 因为 $0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \dots \frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

60. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$

证 令 $a = 1 + \lambda \quad (\lambda > 0),$

$$\text{则 } a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \dots$$

$$+ \lambda^n > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \quad (n \geq 2).$$

当 $n \geq 2$ 时, $n-1 \geq \frac{n}{2}$, 此时,

$$a^n > \frac{n^2}{4}\lambda^2 = \frac{n^2(a-1)^2}{4}.$$

分三种情形:

(1) 当 $k \leq 0$ 时, 这时显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n \cdot n^{-k}} = 0.$$

(2) 当 $k=1$ 时,

$$0 < \frac{n^k}{a^n} = \frac{n}{a^n} < \frac{4n}{n^2(a-1)^2},$$

而 $\frac{4n}{n^2(a-1)^2} \rightarrow 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0;$$

(3) 当 $k > 0$ 时,

$$\frac{n^k}{a^n} = \left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \right]^k,$$

而 $a^{\frac{1}{k}} > 1$, 于是由 (1) 知, $\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \rightarrow 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

$$61. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

证 令 k 代表任何一个大于 $2|a|$ 的自然数,
则当 $n \geq k$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < \left| \frac{a^n}{n!} \right| &= \left(\frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdots \frac{|a|}{k} \right) \left(\frac{|a|}{k+1} \cdot \frac{|a|}{k+2} \cdots \frac{|a|}{n} \right) \\ &\leq |a|^k \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} = \frac{(2|a|)^k}{2^n}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2|a|)^k}{2^n} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

$$62. \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \text{ 若 } |q| < 1.$$

证 (1) 当 $0 < q < 1$ 时, 可令 $q = \frac{1}{a}$, 其中 $a > 1$, 所以,

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $nq^n = \frac{n}{a^n} \rightarrow 0$ *);

(2) 当 $-1 < q < 0$ 时, 可令 $q = -q'$, 其中 $0 < q' < 1$, 所以,

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $nq^n = (-1)^n nq'^n \rightarrow 0$;

(3) 当 $q = 0$ 时, $nq^n = 0$.

总之, 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$.

*) 利用60题的结果.

$$63. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

证 (1) 当 $a=1$ 时, 等式显然成立;

(2) 当 $a>1$ 时, 因为 $(1+\varepsilon)^n > 1+n\varepsilon$ ($n>1, \varepsilon>0$), 则当 n 充分大后, 可使 $1+n\varepsilon > a$, 即 $(1+\varepsilon)^n > a$. 事实上, 只要取 $N = \left\lceil \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rceil$, 当 $n>N$ 时, 就可保证这点. 所以,

$$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon,$$

于是, 当 $n>N$ 时, $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$;

(3) 当 $0 < a < 1$ 时, 则令 $a = \frac{1}{a'}$, 其中 $a' > 1$.

于是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} \rightarrow 1$.

总之, 当 $a>0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

64. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a>1).$

证 先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 事实上, 令 $a_n = \sqrt[n]{n}$. 则 $a_n > 1$. 由60题前半部分的推导知

$$a_n^2 > \frac{n^2}{4} (a_n - 1)^2,$$

即
$$n > \frac{n^2}{4} (\sqrt[n]{n} - 1)^2,$$

由此可知

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 成立.

现任给 $\varepsilon > 0$. 因 $a' > 1$ ($a > 1$), 故存在 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 时, 恒有 $\sqrt[n]{n} < a'$, 由此可知 ($n > N$),

$$0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

65. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证 在64题的证明过程中已证.

66. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

证 由数学归纳法易证 $n! \geq \frac{1}{2} n^{\frac{n}{2}}$, 从而 $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq 2^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$,

又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

67. 当 n 充分大时, 下面的式子哪个大些?

(a) $100n + 200$ 或 $0.01n^2$?; (b) 2^n 或 n^{1000} ?

(B) 1000^n 或 $n!$?

证 (a) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n + 200}{0.01n^2} = 0$, 所以,

当 n 充分大时, $0.01n^2$ 较 $100n + 200$ 大些.

(b) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1000}}{2^n} = 0^*$, 所以,

当 n 充分大时, 2^n 较 n^{1000} 大些.

(B) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!} = 0$ (**), 所以,

当 n 充分大时, $n!$ 较 1000^n 大些.

*) 利用60题的结果.

**) 利用61题的结果.

68. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

证 因为 $0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (*),

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

*) 利用10题的结果.

69. 证明叙列

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

是单调增加的, 且上方有界. 而叙列

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

是单调减少的, 且下方有界, 由此推出这些叙列有公共的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = e.$$

$$\begin{aligned}
\text{证 } x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \dots \\
&\quad + C_n^k \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

其中每一项都为正，当 n 增加时，不但对应的项数增多，而且每一个括弧内的数值也增大，所以，数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 单调增加。

又当 $k \geq 2$ 时， $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1$ ， $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$ ，所以，

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3,
\end{aligned}$$

此即数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 上方有界。

由此，我们知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在，以 e 表之。

其次，由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n},$$

$$\text{即 } \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \frac{n+1}{n},$$

$$\text{也即 } \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \text{ 所以,}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

此即 $y_{n-1} > y_n$, 因而, 数列 y_n ($n=1, 2, \dots$) 单调减少. 又因

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

所以, 数列 y_n ($n=1, 2, \dots$) 下方有界.

由此, 我们知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在, 且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e. \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

70. 证明

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

当指数 n 是甚么样的数值时, 表示式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之

差小于0.001.

证 利用69题的结果知

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

$$\text{即 } 0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right] \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}, \end{aligned}$$

$$\text{因而 } 0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}.$$

其次, 要 $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 0.001$, 只要 $\frac{3}{n} \leq 0.001$,

即只要 $n \geq 3000$, 所以, 当指数 n 是代表任一不小于3000

的自然数, 表示式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差就小于0.001.

71. 设 p_n ($n=1, 2, \dots$) 为趋于 $+\infty$ 的任意数列, 而 q_n ($n=1, 2, \dots$) 为趋于 $-\infty$ 的任意数列. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

证 令 $k_n = [p_n]$, 即 k_n 表 p_n 的整数部分, 则 $k_n \leq p_n < k_n + 1$.

由于 $p_n \rightarrow +\infty$, 故 $k_n \rightarrow +\infty$. 从而显然 $\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \rightarrow e$

(参看89题题解). 由于

$$\frac{1}{k_n} \geq \frac{1}{p_n} > \frac{1}{k_n+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} > \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} > \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = e,$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \\ &\cdot \left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} = e, \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$

其次, 若 $q_n \rightarrow -\infty$, 令 $q_n = -p_n$, 其中 $p_n \rightarrow +\infty$. 于是,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{p_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n}\right) = e, \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$

72. 已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e$.

由此推出公式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$$

其中 $0 < \theta_n < 1$, 并计算数 e 准确到 10^{-5} .

证 因为 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) +$$

$$\cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),$$

若固定 k , 且 $n > k$, 则有

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

今使 n 趋于无穷, 在上式两边取极限, 得

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

由于此不等式对任何自然数 k 皆成立, 因此,

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq e.$$

另一方面, 有

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ 及 } x_n \rightarrow e,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e.$

其次, 设 $\omega_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, 则

$$\begin{aligned} 0 < \omega_{n+m} - \omega_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)} \right\} < \frac{1}{(n+1)!} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right\} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}, \end{aligned}$$

今让 n 固定不变, 并让 m 趋于无穷, 取极限, 得

$$0 \leq e - \omega_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

由于 $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$, 所以,

$$0 < e - \omega_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n},$$

即 $0 < e - \omega_n = \frac{\theta_n}{n!n}$, 其中 $0 < \theta_n < 1$,

因而 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$. (1)

下面将用公式 (1) 计算 e , 使之准确到 10^{-5} . 首先须确定怎样选取 n , 才能实现这一准确度. 取 $n=8$, 在公式 (1) 中的余项已是小于

$$\frac{1}{8!8} < 0.0000032,$$

所以弃去它时, 由公式所造成的误差远远地小于所规定的限度. 因此, 取 $n=8$ 计算之. 其次, 还须考虑计算每一项时的舍入误差, 为保证 e 准确到 10^{-5} , 我们在计算每一项时, 计算到第六位小数上四舍五入凑成整数,

则舍入误差总的不超过 $\frac{1}{2 \cdot 10^6} \times 6 = \frac{3}{10^6}$. 于是总误差

$$6.2 \times 10^{-6} < 10^{-5}.$$

列表:

$$2.000000$$

$$\frac{1}{2!} = 0.500000$$

$$\frac{1}{3!} = 0.166667 \quad (-)$$

$$\frac{1}{4!} = 0.041667 \quad (-)$$

$$\frac{1}{5!} = 0.008333 \quad (+)$$

$$\frac{1}{6!} = 0.001389 \quad (-)$$

$$\frac{1}{7!} = 0.000198 \quad (+)$$

$$\frac{\frac{1}{8!} = 0.000025}{2.718279} \quad (-)$$

考虑到修正数的符号，则总误差介于 $-\frac{2}{10^6}$ 和 $\frac{4}{10^6}$ 之间，

因而，数 e 介于

$$2.718277 \text{ 及 } 2.718283$$

之间，所以，

$$e = 2.71828 \pm 0.00001.$$

73. 证明数 e 为无理数.

证 假设 e 为有理数 $\frac{m}{n}$ ，则对于这个 n 有公式

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n} \quad (0 \leq \theta_n < 1).$$

在等式两端同乘以 $n!$ ，我们即得出左端是整数，而右端

是整数加一真分数 $\frac{\theta_n}{n}$ ，但这是矛盾的，所以数 e 为无理数.

74. 证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

证 由 $\sqrt{i(n-i)} \leq \frac{n}{2}$ ，则 $\frac{1}{2} [\ln i + \ln (n-i)] \leq \ln \frac{n}{2}$.

从而 $\sum_{i=1}^{n-1} \ln i \leq (n-1) \ln \frac{n}{2}$, $(n-1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$.

两边同乘以 $\frac{n}{2}$, 得 $\frac{1}{2}n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$. 于是

$$n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n < e \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

即 $n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

再证 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$.

设 $x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e} < n.$$

所以 (注意到 $x_1 = \frac{1}{e} < 1$)

$$x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!.$$

从而证得 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$.

75. 证明不等式:

(a) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 式中 n 为任意的自然数.

(b) $1 + a < e^a$, 式中 a 为异于零的实数.

证 (a) 因为 $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$, 两边取对数, 得

$$0 < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1,$$

故 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n};$

又因为 $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 两边取对数, 得

$$1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

故 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$

因而 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$

(6) $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x > 0, n$ 为正整数) .

设 a 为正有理数: $a = \frac{p}{q}$, p, q 是正整数. 则由于 $e >$

$\left(1 + \frac{1}{q}\right)^q$, 故 $e^a > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{qa} = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^p \geq 1 + \frac{p}{q} = 1 + a.$

至于 a 为任意实数 ($\neq 0$) 时的证明见1289题 (a) .

76. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \quad (a > 0),$$

式中 $\ln a$ 是取 $e = 2.718 \dots$ 作底时数 a 的对数.

证 先设 $a > 1$. 令 $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$, 则 $b_n > 0$,

且 $\frac{\ln a}{n} = \ln(1 + b_n)$, 故

$$n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \cdot \frac{b_n}{\ln(1+b_n)}.$$

由于 $b_n \rightarrow 0$, 故存在正整数 N , 使当 $n \geq N$ 时, $0 < b_n < 1$.

于是, 对每个 $n \geq N$, 存在唯一正整数 k_n , 使 $\frac{1}{k_n+1} \leq$

$b_n < \frac{1}{k_n}$. 由于 $b_n \rightarrow 0$, 故 $k_n \rightarrow +\infty$. 由75题 (a) 知

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_n+2} &< \ln\left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right) \leq \ln(1+b_n) \\ &< \ln\left(1 + \frac{1}{k_n}\right) < \frac{1}{k_n}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{k_n+1} &= \frac{k_n}{k_n+1} < \frac{b_n}{\ln(1+b_n)} < \frac{k_n+2}{k_n} \\ &= 1 + \frac{2}{k_n}, \end{aligned}$$

由于 $k_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 故 $\frac{b_n}{\ln(1+b_n)} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$),

由此得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a.$$

现设 $0 < a < 1$. 则 $\frac{1}{a} > 1$. 于是, 由上结果可知

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-a^{\frac{1}{n}}) \cdot n\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) \\ &= -\ln \frac{1}{a} = \ln a.\end{aligned}$$

当 $a=1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$ 显然成立, 故此式对任何 $a > 0$ 成立, 证毕.

利用关于单调而且有界的数列的极限存在的定理, 证明以下各数列的收敛性:

$$77. x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

式中 p_i ($i=0, 1, 2, \cdots$) 是非负的整数, 从 p_1 起不大于 9.

证 $x_{n+1} = x_n + \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$, 由于 $p_{n+1} \geq 0$, 所以,

$$x_{n+1} \geq x_n,$$

因而, x_n ($n=1, 2, \cdots$) 是单调增加的. 其次由于 $p_0 + \frac{1}{10}$

$$\leq x_n \leq 9\left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right) + p_0 \leq 1 + p_0, \text{ 所以, 数列 } x_n$$

($n=1, 2, \cdots$) 是有界的.

因而, 根据单调而且有界的数列的极限存在的定理, 可知数列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

$$78. x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}.$$

解 当 $n \leq 10$ 时, 虽然 $\{x_n\}$ 单调增加; 但当 $n > 10$ 时, 由 $\frac{n+9}{2n-1} < 1$ 知数列 $\{x_n\}$ 单调减少. 注意有下界 $x_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$). 因而, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$79. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

证 因 $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < x_n$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的.

又因 $0 < x_n < 1$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

$$80. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

证 因 $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > x_n$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的.

又因 $1 + a < e^a$, 所以,

$$0 < x_n < e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{4}} \cdots e^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}} < e,$$

即数列是有界的. 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

$$81. x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots,$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}, \dots$$

证 数列 $\{x_n\}$ 显然是单调增加的.

其次, 利用数学归纳法可以证明: $x_n \leq \sqrt{2} + 1$. 事实

上, 对于 $n=1$ 是成立的. 假设 $x_k \leq \sqrt{2} + 1$, 则

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sqrt{2+x_k} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}+1} \\ &\leq \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1, \end{aligned}$$

因而, 不等式对一切自然数均成立.

由此知数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

利用哥西判别法, 证明以下各数列的收敛性:

82. $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n,$

其中 $|a_k| \leq M$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) 且 $|q| < 1$.

$$\begin{aligned} \text{证 } |x_m - x_n| &= |a_{n+1} q^{n+1} + \cdots + a_m q^m| \\ &\leq |a_{n+1}| \cdot |q|^{n+1} + \cdots + |a_m| \cdot |q|^m \\ &\leq M \cdot |q|^{n+1} (1 + |q| + \cdots + |q|^{m-n-1}) \\ &\leq M \cdot |q|^{n+1} \cdot \frac{1}{1-|q|} \quad (m > n). \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 由于 $|q|^{n+1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 故存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 有

$$|q|^{n+1} \leq \frac{(1-|q|)\varepsilon}{M}.$$

于是, 当 $m > n > N$ 时, 恒有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

由此可知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}.$

$$\text{证 } |x_m - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin m}{2^n} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-n-1}} \right)$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \quad (m > n).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil$,

则当 $m > n > N$ 时, 必有 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, 从而 $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} - \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$

证 $|x_m - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\cos m!}{m(m+1)} \right|$

$$< \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{m^2}$$

$$< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \quad (m > n).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $m > n > N$ 时, 必有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$

$$\text{证 } |x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}, \quad (m > n).$$

以下与84题证法步骤相同, 故知叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

86. 若存在数 c , 使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < c \\ (n=2, 3, \cdots),$$

则称叙列 x_n ($n=1, 2, \cdots$) 有有界变差.

证明凡有有界变差的叙列是收敛的.

举出一个收敛叙列而无有界变差的例子.

$$\text{证 设 } y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| \\ (n=2, 3, \cdots),$$

则叙列 $\{y_n\}$ 单调增加且有界, 所以它是收敛的.

根据哥西收敛准则, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 N , 使

$$\text{当 } m > n > N \text{ 时, } |y_m - y_n| < \varepsilon,$$

$$\text{即 } |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

而对于叙列 $\{x_n\}$ 有

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots \\ + x_{n+1} - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots \\ + |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon,$$

所以, 叙列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

$$\text{叙列: } 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n},$$

$(-1)^{\frac{1}{n}}, \cdots$, 它是以零为极限的收敛叙列, 但它不是有有界变差的. 事实上,

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + \cdots$$

$$\begin{aligned}
& + |x_{2n} - x_{2n-1}| \geq |x_2 - x_1| + |x_4 - x_3| + \cdots \\
& + |x_{2n} - x_{2n-1}| \\
& = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \right),
\end{aligned}$$

而叙列 $\omega_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 是发散的^{*}), 又是递增的, 故 $\omega_n \rightarrow +\infty$. 于是,

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}|$$

不是有界的, 因而, 收敛叙列 $\{x_n\}$: $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \cdots$ 无有界变差.

^{*}) 详见88题的证明.

87. 试叙述“某叙列不满足哥西准则”的意义.

解 即存在某一个 $\varepsilon_0 > 0$, 不论对于怎样的数 N , 总有 $n_0 > N, m_0 > N$, 使得

$$|x_{n_0} - x_{m_0}| \geq \varepsilon_0.$$

88. 利用哥西判别法, 证明叙列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

的发散性.

证 取 $m = 2n$, 则

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

所以, 叙列 $\{x_n\}$ 发散.

89. 证明若叙列 x_n ($n = 1, 2, \cdots$) 收敛, 则它的任何子叙列 x_{p_n} 也收敛, 且有同一极限;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在有正整数 N , 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \varepsilon.$$

今因自然数叙列 $\{p_k\}$ 以 $+\infty$ 为其极限, 所以, 对于 N , 存在有正整数 k_0 , 使

$$\text{当 } k > k_0 \text{ 时, } p_k > N,$$

此时 $|x_{p_k} - a| < \varepsilon$ ($k > k_0$), 所以, 子叙列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

90. 证明: 若单调叙列的某一子叙列收敛, 则此单调叙列本身是收敛的.

证 不失一般性, 假设叙列 $\{x_n\}$ 单调增加, 其一子叙列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛于 a . 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使

$$\text{当 } k > N \text{ 时, } |x_{p_k} - a| < \varepsilon,$$

令 $N' = p_{N+1}$. 设 $n > N'$, 由于 $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots \rightarrow +\infty$, 故必有 p_k ($k > N$) 使 $p_k \leq n < p_{k+1}$. 由上知

$$|x_{p_k} - a| < \varepsilon, |x_{p_{k+1}} - a| < \varepsilon,$$

而 $x_{p_k} \leq x_n \leq x_{p_{k+1}}$ (因 x_n 递增), 故必

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 即 $\{x_n\}$ 是收敛的.

91. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在有数 N , 使当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$. 又因 $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, 故当 $n > N$ 时, $||x_n| - |a|| < \varepsilon$. 于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

92. 设 $x_n \rightarrow a$, 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

是什么?

解 按题意, 应设 $x_n \neq 0$ ($n=1, 2, \dots$).

若 $a \neq 0$, 则显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

若 $a=0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能不存在, 例如, 若 $\{x_n\}$ 为:

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

则 $x_n \rightarrow 0$, 但显然 $\frac{x_{2m}}{x_{2m-1}} \rightarrow 1, \frac{x_{2m+1}}{x_{2m}} \rightarrow \frac{1}{2}$, 故

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在. 下面我们证明, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 设为 b , 则必有 $-1 \leq b \leq 1$.

用反证法, 若 $|b| > 1$. 取 r , 使 $|b| > r > 1$. 利用91题结果, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = |b|.$$

于是, 存在正整数 N , 使当 $n \geq N$ 时, 恒有 $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| > r$.

从而, 当 $n \geq N$ 时,

$$|x_n| = |x_N| \cdot \left| \frac{x_{N+1}}{x_N} \right| \cdot \left| \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \right| \cdots \left| \frac{x_n}{x_{n-1}} \right| > |x_N| \cdot r^{n-N},$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, 此与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 矛盾, 故必有

$$-1 \leq b \leq 1.$$

总结起来, 若 $a \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$; 若 $a = 0$, 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在, 当存在时, 它必属于 $[-1, 1]$.

93. 证明收敛的数列是有界的.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 要证 $\{x_n\}$ 有界. 对于正数 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N , 使当 $n \geq N$ 时, 必有 $|x_n - a| < 1$, 从而 $|x_n| < |a| + 1$ ($n \geq N$). 于是, 令

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a| + 1\}.$$

则 $|x_n| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$), 由此可知 $\{x_n\}$ 有界.

94. 证明收敛的数列或达到其上确界, 或达到其下确界, 或两者都达到. 举出这三类数列的例子.

证 (1) 对于各项恒为常数的数列, 显然上、下确界均达到.

(2) 对于不恒为常数的收敛数列,

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则或存在某 $x_i > A$, 或存在某 $x_i < A$, 或

这种 x_i, x_j 都存在. 作 A 的充分小的邻域使它不包含 x_i 或

x_i , 或 x_i, x_j 都不包含在此邻域内. 由于 $x_n \rightarrow A$, 故在这三种情况的任一种下, 这个邻域外部都只有 $\{x_n\}$ 中的有限个元素, 因此分别为必达到上确界、必达到下确界或上、下确界均必达到. 在第一种情形下确界可能达到, 也可能达不到; 在第二种情形, 上确界可能达到也可能达不到.

95. 证明趋近于 $+\infty$ 的数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 必定达到其下确界.

证 由题设可知存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时恒有 $x_n > x_1$, 于是, 显然, x_1, x_2, \dots, x_N 中的最小者即为 $\{x_n\}$ 的下确界.

求数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 的最大项, 设:

96. $x_n = \frac{n^2}{2^n}.$

解 当 $n=3$ 时, $n^2 > 2^n$; 当 $n \neq 3$ 时, $n^2 \leq 2^n$;

所以, 最大项为 $x_3 = \frac{9}{8}$.

97. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}.$

解 $x_n = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{n} - \frac{10}{\sqrt[4]{n}}\right)^2 + 20} \leq \frac{1}{20}$, 其中 $x_{100} = \frac{1}{20}$,

所以, 最大项为 $x_{100} = \frac{1}{20}$.

98. $x_n = \frac{1000^n}{n!}.$

解 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}.$

当 $n+1 < 1000$ 时, $x_{n+1} > x_n$;

当 $n+1 > 1000$ 时, $x_{n+1} < x_n$.

所以, 最大项为 $x_{999} = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}.$

求数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 的最小项, 若:

99. $x_n = n^2 - 9n - 100.$

解 若 $n^2 - 9n \geq 0$, 则 $n \geq 9$;

若 $n^2 - 9n < 0$, 则 $0 < n < 9$.

所以, 最小项从 x_1 到 x_8 中寻找, 比较之, 得 x_n 的最小项为

$$x_4 = x_5 = -20 - 100 = -120.$$

100. $x_n = n + \frac{100}{n}.$

解 $x_n = \left(\sqrt{n} - \sqrt{\frac{10}{n}}\right)^2 + 20 \geq 20$, 其中 $x_{10} = 20$, 所以, 最小项为 $x_{10} = 20$.

求数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 的 $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, 设:

101. $x_n = 1 - \frac{1}{n}.$

解 $\inf\{x_n\} = 0; \quad \sup\{x_n\} = 1;$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$

$$102. x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \inf\{x_n\} &= -1; & \sup\{x_n\} &= \frac{3}{2}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 0; & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= 1; \end{aligned}$$

$$103. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad x_1 &= 1, \quad x_2 = 1 - \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1 + \frac{4}{5}, \quad \dots \\ \inf\{x_n\} &= 0; & \sup\{x_n\} &= 2; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 0; & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= 2. \end{aligned}$$

$$104. x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad x_{4k} &= 1 - 2 + 3, & x_{4k+1} &= 1 + 2 + 3, \\ x_{4k+2} &= 1 - 2 - 3, & x_{4k+3} &= 1 + 2 - 3 \quad (k=0, 1, 2, \dots). \\ \inf\{x_n\} &= -4; & \sup\{x_n\} &= 6; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= -4; & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= 6. \end{aligned}$$

$$105. x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad x_1 &= 0, \quad x_2 = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right), \quad x_3 = \frac{1}{2}, \\ x_4 &= \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{2} \right), \quad x_5 = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right), \quad x_6 = \frac{5}{7}, \\ x_7 &= \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \right), \quad x_8 = \frac{7}{9} \left(-\frac{1}{2} \right), \quad x_9 = \frac{4}{5}, \quad \dots \end{aligned}$$

$$\inf \{x_n\} = -\frac{1}{2}; \quad \sup \{x_n\} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

$$106. x_n = (-1)^n n.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \inf \{x_n\} &= -\infty; & \sup \{x_n\} &= +\infty; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= -\infty; & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= +\infty. \end{aligned}$$

$$107. x_n = -n(2 + (-1)^n).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \inf \{x_n\} &= -\infty; & \sup \{x_n\} &= -1; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= -\infty; & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= -\infty. \end{aligned}$$

$$108. x_n = n(-1)^n.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \inf \{x_n\} &= 0; & \sup \{x_n\} &= +\infty; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= 0; & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= +\infty. \end{aligned}$$

$$109. x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad x_1 &= 1+1, \quad x_2 = 1+0, \quad x_3 = 1-3, \quad x_4 = 1+0, \\ x_5 &= 1+5, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \inf \{x_n\} &= -\infty; & \sup \{x_n\} &= +\infty; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= -\infty; & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= +\infty. \end{aligned}$$

$$110. x_n = \frac{1}{n-10.2}.$$

解 当 n 由 1 到 10 时, x_n 由负数往下降;
当 n 由 11 到 $+\infty$ 时, x_n 由正数往下降, 所以,

$$\inf\{x_n\}=x_{10}=-5; \quad \sup\{x_n\}=x_{11}=1.25;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. 设:

$$111. x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

$$112. x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n \div \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = e + 1.$$

$$113. x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

$$114. x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot (-1)^n}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \quad (\text{因 } (2^{2k} + 1)^{\frac{1}{2k}})$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{2^{2k}}\right)^{\frac{1}{2k}} \rightarrow 2).$$

$$115. x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

求下列各叙列的聚点:

$$116. \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$$

解 聚点为 0 及 1.

$$117. 1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \dots,$$

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

解 聚点为

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

它们分别为子数列:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{1+\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right\}, \dots \text{的极限.}$$

$$118. \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

解 所述数列正好包含 $(0, 1)$ 中全部有理数, 故对于闭区间 $[0, 1]$ 上的每一点 x , 在其任意的 ϵ 邻域内均有此数列中无穷个数, 因此 x 必可作为某子数列的极限, 所以, x 是所述数列的聚点. 由此可知 $[0, 1]$ 中的任何点都是所述数列的聚点. 显然, $[0, 1]$ 外的点都不是所述数列的聚点.

$$119. x_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n.$$

解 因为 $2 \cdot (-1)^n$ 或为2或为-2. 所以, 聚点为5及1.

$$120. x_n = \frac{1}{2} \left[(a+b) + (-1)^n (a-b) \right].$$

解 聚点为 a 及 b .

121. 试举出以已知数

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

作为聚点的数列的例子.

解 数列

$$a_1 - \frac{1}{2}, a_2 - \frac{1}{2}, \dots, a_p - \frac{1}{2}, a_1 - \frac{1}{3},$$

$$a_2 - \frac{1}{3}, \dots, a_p - \frac{1}{3}, \dots, a_1 - \frac{1}{n}, a_2 - \frac{1}{n}, \dots,$$

$$a_p - \frac{1}{n}, \dots$$

显然以 a_1, a_2, \dots, a_p 为聚点.

122. 试举出数列的例子, 对此数列而言, 已知数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

的所有各项皆为其聚点. 又已知数列还必有怎样的聚点?

解 例如, 数列

$$a_1 + \frac{1}{2}, a_2 + \frac{1}{2}, a_1 + \frac{1}{3}, a_2 + \frac{1}{3}, a_3 + \frac{1}{3},$$

$$a_1 + \frac{1}{4}, a_2 + \frac{1}{4}, a_3 + \frac{1}{4}, a_4 + \frac{1}{4}, \dots,$$

$$a_1 + \frac{1}{n}, a_2 + \frac{1}{n}, a_3 + \frac{1}{n}, \dots, a_n + \frac{1}{n}, \dots$$

就以 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 为其聚点.

123. 举出叙列的例子:

- 解** (a) 叙列 $x_n = n$ ($n = 1, 2, \dots$) 没有有限的聚点.

$-n, \dots$ 有唯一有限的聚点 0, 但此数列却不收敛.

(T)我们按下述“对角线法则”来构造一个叙列，使元素后面跟一个对应的负数，排列顺次如图1.1所



$$x_1=1, x_2=-1, x_3=\frac{1}{2}, x_4=-\frac{1}{2}, x_5=2,$$

$$x_6=-2, x_7=3, x_8=-3, x_9=\frac{2}{2},$$

$$x_{10}=-\frac{2}{2}, x_{11}=\frac{1}{3}, x_{12}=-\frac{1}{3}, \dots$$

此叙列以每一实数作为其聚点,即聚点的集合为 $(-\infty, +\infty)$,

124. 证明叙列 x_n 和 $y_n = x_n \cdot \sqrt[n]{n}$ ($n=1, 2, \dots$) 有相同的聚点.

证 因为 $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, 所以, 叙列 $\{x_n\}$ 的子叙列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{y_n\}$ 的对应子叙列 $\{x_{n_k} \cdot \sqrt[n_k]{n_k}\}$ 同时收敛, 且具有相同的极限, 此即叙列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 有相同的聚点.

125. 证明从有界的叙列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 中, 永远可选出收敛的子叙列 x_{p_n} ($n=1, 2, \dots$).

证 因为叙列 $\{x_n\}$ 有界, 故可设一切项满足不等式

$$a \leq x_n \leq b,$$

其中 a, b 为有限的实数. 将区间 $[a, b]$ 二等分之, 得区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, 其中必至少有一个包含所给叙列的无限多项, 将它记成 $[a_1, b_1]$ (若两者均含无穷多项, 则任取其一作为 $[a_1, b_1]$). 再将区间 $[a_1, b_1]$ 等分之, 又可得区间 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, 它包含所给叙列的无限多项. 依次类推, 于是得一串区间:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

其中每一 $[a_n, b_n]$ 都包含所给数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项, 且有

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \text{ 因此, 根据区间套}$$

定理诸 $[a_n, b_n]$ 具有唯一的公共点 c , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c.$$

现按下法选出 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{p_k}\}$: 在包含于 $[a_1, b_1]$ 内的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_1} . 然后, 在包含于 $[a_2, b_2]$ 内且在 x_{p_1} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_2} , 然后, 又在包含于 $[a_3, b_3]$ 内且在 x_{p_2} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_3} . 余类推 (这是可能的, 因为每个 $[a_k, b_k]$ 中都包含有 x_n 无穷多项). 于是, 我们得出 $\{x_n\}$ 的一子数列 $\{x_{p_k}\}$, 满足

$$a_k \leq x_{p_k} \leq b_k \quad (k=1, 2, \dots),$$

由此, 知 $|x_{p_k} - c| \leq b_k - a_k \quad (k=1, 2, \dots)$,

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = c$. 从而 $\{x_{p_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个收敛子数列.

证毕.

126. 证明: 若数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 无界, 则存在子数列 x_{p_k} ($n=1, 2, \dots$), 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \infty.$$

证 因 x_n ($n=1, 2, \dots$) 无界, 故存在某项 x_{p_1} 满足 $|x_{p_1}| \geq 1$. 由于数列 x_n ($n=p_1+1, p_1+2, \dots$) 也无界, 故又存在某项 x_{p_2} ($p_2 \geq p_1$), 使 $|x_{p_2}| \geq 2$; 又由于数列 x_n ($n=p_2+1, p_2+2, \dots$) 无界, 故又存

在某项 x_{p_3} ($p_3 > p_2$), 使 $|x_{p_3}| > 3$. 余类推, 于是, 我们得 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{p_k}\}$, 满足

$$|x_{p_k}| > k \quad (k=1, 2, \dots).$$

由此可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \infty.$$

证毕.

127. 设数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 收敛, 而数列 y_n ($n=1, 2, \dots$) 发散, 则能否断定关于数列

(a) $x_n + y_n$; (b) $x_n y_n$

的收敛性?

举出适当的例子.

解 (a) $\{x_n + y_n\}$ 一定发散. 如果 $\{x_n + y_n\}$ 收敛, 则由 $(x_n + y_n) - x_n = y_n$, 知 $\{y_n\}$ 收敛, 与题设矛盾.

(b) 数列 $\{x_n y_n\}$ 可能收敛, 也可能发散. 例如:

(1) 数列 $x_n = \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) 收敛,

数列 $y_n = n$ ($n=1, 2, \dots$) 发散,

而数列 $x_n y_n = 1$ ($n=1, 2, \dots$) 是收敛的.

(2) 数列 $x_n = \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) 收敛,

数列 $y_n = n^2$ ($n=1, 2, \dots$) 发散,

而数列 $x_n y_n = n$ ($n=1, 2, \dots$) 却是发散的.

128. 设数列 x_n 和 y_n 发散 ($n=1, 2, \dots$). 可否断定数列

(a) $x_n + y_n$; (b) $x_n y_n$

也发散呢?

举出适当的例子.

解 不能.例如,叙列

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \text{ 及 } y_n = \frac{1-(-1)^n}{2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

都发散,但叙列

$$x_n + y_n = 1 \quad (n=1, 2, \dots)$$

及

$$x_n y_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

卻都是收敛的,

129. 设:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

及 y_n ($n=1, 2, \dots$) 为任意叙列,能否断定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0 \quad ?$$

举出适当的例子,

解 不能.例如,叙列

$$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

及

$$y_n = n \quad (n=1, 2, \dots)$$

的乘积

$$x_n y_n = 1 \quad (n=1, 2, \dots),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于1,不趋于0.

130. 设:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

是否由此可得出或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?

解 不能.例如,叙列

$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \text{ 及 } y_n = \frac{1-(-1)^n}{2} (n=1, 2, \cdots),$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0,$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均不存在.

当然, 还可举例 $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = n$, ($n=1, 2, \cdots$), 则 $x_n y_n \rightarrow 0$, $x_n \rightarrow 0$, 而 $\{y_n\}$ 极限不存在 (当 $n \rightarrow \infty$). 注意, 假若已知 $x_n y_n \rightarrow 0$, 而又已知 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 中至少有一个数列有极限的话, 则: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ 至少

有一个是成立的。

131. 证明

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

及

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在上面关系式中仅不等号成立的例子.

证 (a) 先证右端不等式. 根据定义, 存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} \rightarrow \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 对于序列 $\{y_{n_k}\}$, 必有子序列 $y_{n_{k_l}} \rightarrow \beta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$. 显然 $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$. 由于 $x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}} \rightarrow \alpha + \beta$, 故 $\alpha + \beta$ 是 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点.

由此可知

$$\alpha + \beta \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n).$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \alpha + \beta \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

再证左端的不等式. 根据定义, 存在 $\{x_n + y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow \alpha' = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} + y_{n_k})$.

对于序列 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使 $x_{n_{k_i}} \rightarrow \beta' = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}$,

显然 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}$. 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha' - \beta'.$$

故 $\alpha' - \beta'$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点, 从而

$$\alpha' - \beta' \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \alpha' \geq \beta' + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(6) 先证右端不等式. 根据定义, 存在 $\{x_n + y_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow r = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} + y_{n_k})$. 对

于序列 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列 $x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}$. 显然

$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}$. 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow r - \tau,$$

故 $r - \tau$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点, 从而

$$r - \tau \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = r \leq \tau + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

再证左端的不等式. 根据定义, 存在 $\{y_n\}$ 的一个子序列 $\{y_{n_k}\}$, 使 $y_{n_k} \rightarrow r' = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$. 对于序列 $\{x_{n_k}\}$,

存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使 $x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau' = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}$. 显然 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 由于

$$x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}} \rightarrow r' + \tau',$$

故 $r' + \tau'$ 是 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点, 从而

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq r' + \tau'.$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq r' + \tau' \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

证毕.

以下举不等号成立的例子. 例如, 令

$\{x_n\}$ 为: 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

$\{y_n\}$ 为: 0, 2, 0, 2, 0, 2,

则有不等式

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 &< \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 1 \\ &< \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 2. \end{aligned}$$

而对于数列

$\{x_n\}$ 为: 0, 2, 0, 2, 0, 2, ...

$\{y_n\}$ 为: 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...,

则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 &< \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 2 \\ &< \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 3. \end{aligned}$$

132. 设 $x_n \geq 0$ 和 $y_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$).

证明:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

及

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在这些关系式中仅不等号成立的例子。

证 (a) 先证右端的不等式。根据定义，存在 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$ ，使 $x_{n_k} \rightarrow \alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$ ；对于序列 $\{y_n\}$ ，存在子序列 $\{y_{n_{k_i}}\}$ ，使 $y_{n_{k_i}} \rightarrow \beta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_{k_i}} \geq 0$ 。显然 $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_{k_i}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ 。由于 $x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow \alpha\beta$ ，故 $\alpha\beta$ 是序列 $\{x_n y_n\}$ 的一个聚点，因此

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \alpha\beta,$$

由此，再注意到 $\alpha \geq 0$ ， $\beta \geq 0$ ，即得知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \alpha\beta \leq \alpha(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

再证左端的不等式。若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ，则此不等式显然成立。故设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta^* > 0$ 。于是，存在正整数 N_0 ，使当 $n > N_0$ 时， $x_n > 0$ 。根据定义，存在 $\{x_n y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow \alpha' = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq 0.$$

对于序列 $\{x_{n_k}\}$ ，存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ ，使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \beta' = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}.$$

注意到 $\beta' = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta^* > 0$ 以及 $x_n > 0 (n > N_0)$ ，

知

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

故 $\frac{\alpha'}{\beta'}$ 是 $\{y_n\}$ 之一聚点, 从而

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \alpha' \geq \beta' (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) \geq (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

(6) 先证右端不等式. 可设 $\{y_n\}$ 有界 (若 $\{y_n\}$ 无界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 从而此不等式显然成立). 根据定义, 存在 $\{x_n y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow \bar{\alpha} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq 0.$$

对于 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \bar{\beta} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq 0.$$

若 $\bar{\beta} = 0$, 则由于 $\{y_n\}$ 有界, 知 $x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow 0$, 从而 $\bar{\alpha} = 0$, 此时所要证的不等式显然成立. 故下设 $\bar{\beta} > 0$. 于是, 当 i 充分大时 ($i > i_0$), $x_{n_{k_i}} > 0$, 故得

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

因此, $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 是 $\{y_n\}$ 之一聚点, 从而 $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$; 由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \bar{\alpha} \leq \bar{\beta} (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

再证左端的不等式. 根据定义, 存在 $\{y_n\}$ 的一子

序列 $\{y_{n_i}\}$, 使 $y_{n_i} \rightarrow r = \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} y_{n_i} \geq 0$. 对于 $\{x_{n_i}\}$, 存在

子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq 0.$$

显然, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$. 由于

$$x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow \tau r,$$

故 τr 是 $\{x_n y_n\}$ 之一聚点, 从而

$$\tau r \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),$$

由此可知

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq \tau r \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n).$$

证毕.

下面举不等号成立的例子, 例如, 令

$$\{x_n\} \text{ 为: } \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$$

$$\{y_n\} \text{ 为: } 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, \dots$$

则有不等式

$$\begin{aligned} (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) &= \frac{1}{8} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \\ &= \frac{1}{2} < (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = 1. \end{aligned}$$

再令

$$\{x_n\} \text{ 为: } 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, \dots$$

$\{y_n\}$ 为: $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$

则有不等式

$$\begin{aligned} (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) &= \frac{1}{2} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \\ &= 1 < (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = 4. \end{aligned}$$

133. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则对任何的叙列 y_n ($n=1, 2, \dots$),

有

$$(a) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

及

$$(b) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (x_n \geq 0).$$

证 (a) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

从而, 利用131题的结果可知

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n), \end{aligned}$$

故得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(b) 分三种情形: (i) 设 $y_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$). 则利用132题的结果可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n)$$

$$\begin{aligned}
&= (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \\
&= (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),
\end{aligned}$$

故得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

(ii) 设 $y_n \leq 0$ ($n=1, 2, \dots$). 则 $-y_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$), 于是, 仍利用132题的结果可知

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n),
\end{aligned}$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n);$$

但是根据上、下极限的定义, 显然有等式

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) &= -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n), \\
\lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) &= -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,
\end{aligned}$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(iii) 设 $\{y_n\}$ 中有无穷多项是非负的, 设这些项构成的子序列为 $\{y_{n_k}\}$ ($y_{n_k} \geq 0$, $k=1, 2, \dots$) (如果 $\{y_n\}$ 中只有有限项是非负的, 则从某一项开始有 $y_n \leq 0$, 这时应用(ii)的结果即知所要证的等式成立). 于是,

注意到 $x_n \geq 0$, 显然有 (利用(i)已证的结果)

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} y_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \cdot \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.\end{aligned}$$

证毕.

134. 证明: 若对于某非负^{*} 叙列 x_n ($x_n \geq 0$, $n=1, 2, \dots$), 任何叙列 y_n ($n=1, 2, \dots$) 都使下二等式中至少有一成立:

$$(a) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

或

$$(b) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

则叙列 x_n 是收敛的.

证 取 $\{x_n\}$ 的子叙列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x_{n_k} \rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

取

$$y_n = \begin{cases} -x_n, & \text{当 } n \neq n_k \text{ 时,} \\ A, & \text{当 } n = n_k \text{ 时,} \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots),$$

其中 A 为任取的正常数. 对此 $\{y_n\}$, 若 (a) 成立, 则由 (注意到 $x_n \geq 0$)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = A,$$

知

$$(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A,$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

故 $\{x_n\}$ 收敛.

若(6)成立, 则由(同样, 注意到 $x_n \geq 0$)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = A \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

知

$$A \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

故 $\{x_n\}$ 也是收敛的. 证毕.

*) 编者注: 原著中将 $x_n \geq 0$ 的假定加在条件(6)后, 似不妥, 因为叙列 x_n 应该是预先给定的.

135. 证明: 若 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1,$$

则叙列 x_n 是收敛的.

证 由假定知

$$0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n < +\infty, \quad 0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} < +\infty. \quad (*)$$

由于(利用132题的结果)

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{x_n} \right) \leq \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \right) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{x_n} \right) = 1, \end{aligned}$$

故

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}\right) = 1,$$

从而

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \cdot \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}\right) = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}\right).$$

由此, 再注意到(*)式, 即知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (0 < a < +\infty).$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在有限, 因此 $\{x_n\}$ 收敛, 证毕.

136. 证明: 若数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 有界, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

则此数列的聚点密布于下极限和上极限

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 和 } L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

之间, 即是说间隔 $[l, L]$ 中的任意一个数都是已知数列的聚点.

证 根据定义, l 与 L 都是 $\{x_n\}$ 的聚点, 故我们只要证明 l 与 L 之间的任何数 a ($l < a < L$) 都是 $\{x_n\}$ 的聚点. 先证: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 及任意给定的正整数 N , 必有正整数 $n^* > N$ 存在, 使 $|x_{n^*} - a| < \varepsilon$.

由假定, 必有正整数 N' 存在, 使当 $n > N'$ 时, 恒有 $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. 令 $N_0 = \max\{N, N'\}$, 则于数列 x_n ($n = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots$) 中必至少有两项 $x_{n'}$ 和 $x_{n''}$ 存在, 使 $x_{n'} < a$, $x_{n''} > a$ (因为否则的话, 例如, 无小于 a 的项, 则必 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a$, 此与 $l < a$ 矛盾), 不妨设 $n' < n''$. 令满足 $n' \leq n \leq n''$ 且使 $x_n < a$ 的正整数 n 中之

最大者为 n^* . 显然 $n^* \leq n'' - 1$, 且 $x_{n^*} < a$, $x_{n^*+1} > a$.
故 $n^* > N$, $n^* > N'$ 并且

$$|x_{n^*} - a| < x_{n^*+1} - x_{n^*} < \varepsilon.$$

现取 $\varepsilon_1 = 1$, $N_1 = 1$, 则存在 x_{n_1} ($n_1 > 1$) 使 $|x_{n_1} - a| < 1$; 再取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, $N_2 = n_1$, 则存在 x_{n_2} ($n_2 > n_1$)

使 $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$; 又取 $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$, $N_3 = n_2$, 存在则 x_{n_3}

($n_3 > n_2$) 使 $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$; 这样一直继续下去, 则得 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{n_k}\}$, 满足

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad (k=1, 2, \dots),$$

故 $x_{n_k} \rightarrow a$, 即 a 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点. 证毕.

137. 设数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 满足条件

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n=1, 2, \dots).$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

证 证法一:

由于

$$x_n \leq x_{n-1} + x_1 \leq x_{n-2} + x_1 + x_1 \leq \dots \leq nx_1,$$

故 $0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1$, 从而数列 $\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$ 有界, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = a$,

则 $0 \leq a \leq x_1$. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > 1$ 使 $\frac{x_N}{N} < a$

$+\varepsilon$. 任何正整数 $n > N$ 都可表为 $n = qN + r$ 的形式, 其中 q 为正整数, r 为小于 N 的非负整数 ($0 \leq r < N$).

我们有

$$\begin{aligned} x_n = x_{(N+r)} &\leq x_{(i-1)N} + x_N + x_r \leq x_{(i-2)N} + x_N + \\ &+ x_N + x_r \leq \dots \leq qx_N + x_r \leq qx_N + rx_1 \\ &\leq qx_N + Nx_1, \end{aligned}$$

从而

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{qx_N}{n} + \frac{Nx_1}{n} \leq \frac{x_N}{N} + \frac{Nx_1}{n} < a + e + \frac{Nx_1}{n}.$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq a + e,$$

再根据 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq a,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n},$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在有限。

证法二:

用反证法. 假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 不存在, 则序列 $\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$ 至少有两个聚点 a 与 b . 不妨设 $a < b$. 由于 (证法一中已证)

$$0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故 $0 \leq a < b \leq x_1$. 根据聚点定义, 存在 $\{x_n\}$ 的两个子序列 $\{x_{n_i}\}$ 与 $\{x_{m_j}\}$, 使

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_{n_i}}{n_i} = a, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} = b.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 必存在正整数 $i_0 > 1$, 使

$$\frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} < a + \varepsilon.$$

显然, 当 j 充分大时 ($j > j_0$), 必 $m_j > n_{i_0}$, 此时仿证法一, 有不等式 ($[x]$ 表 x 的整数部分)

$$x_{m_j} \leq \left[\frac{m_j}{n_{i_0}} \right] x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1 \leq \frac{m_j}{n_{i_0}} x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1,$$

故 ($j > j_0$ 时)

$$\frac{x_{m_j}}{m_j} \leq \frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j} < a + \varepsilon + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j},$$

由此可知

$$b = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} \leq a + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得 $b \leq a$, 此与 $a < b$ 矛盾. 证毕.

138. 证明: 若叙列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 收敛, 则算术平均值的叙列

$$\xi_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (n=1, 2, \dots)$$

也收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

反之, 则结论不真, 举例以明之.

证 令 $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 则

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n}{n - N} \cdot \left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设收敛于 a , 则对于任给的 $\varepsilon > 0$ 存在序号 N , 使当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$, 即 x_{N+1}, x_{N+2}, \dots 均 $\in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. 由此推得 $\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n}{n - N}$ 也含在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之内, 即

$$\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \cdots + x_n}{n - N} = a + \alpha,$$

式中 $|\alpha| < \varepsilon$.

这样, $\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + (a + \alpha) \left(1 - \frac{N}{n}\right)$, 由此得

$$\left| \frac{s_n}{n} - a \right| \leq \frac{|s_N|}{n} + |\alpha| + (|\alpha| + |\alpha|) \frac{N}{n}.$$

今取 $N' > N$, 使当 $n > N'$ 时, 恒有

$$\frac{|s_N|}{n} < \varepsilon, \quad \frac{N}{n} < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + \varepsilon}.$$

于是, 当 $n > N'$ 时, 恒有 $\left| \frac{s_n}{n} - a \right| < 3\varepsilon$.

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = a,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

但反之不然. 例如数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ ($n=1, 2, \cdots$) 是发散的, 但是数列

$$\xi_n = \begin{cases} 0 & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

却是收敛的.

139. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

则
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 故对于任给的 $M > 0$, 存在有序号 N , 使当 $n > N$ 时, $x_n > 3M$. 此时, 仿 138 题之证, 有

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n - N} \left(1 - \frac{N}{n}\right) > \frac{s_N}{n} + 3M \left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

又因 $\frac{s_N}{n} \rightarrow 0$, $1 - \frac{N}{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), 故可取正整数 $N' > N$, 使当 $n > N'$ 时, 恒有

$$\frac{|s_N|}{n} < \frac{M}{2}, \quad 1 - \frac{N}{n} > \frac{1}{2}.$$

于是, 当 $n > N'$ 时恒有 $\frac{s_n}{n} > M$. 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

140. 证明: 若数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 收敛, 且 $x_n > 0$,

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 因 $x_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 故 $a \geq 0$.

先设 $a > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln a$, 于是, 利用 138 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n) = \ln a.$$

由此可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)} \\ &= e^{\ln a} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln x_n) = +\infty$. 利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n) = +\infty,$$

由此可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)} \\ &= 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

证毕.

141. 证明: 若 $x_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 令 $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ ($n=1, 2, \dots$), 则 $y_n > 0$. 由假定

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 设为 a . 利用140题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_1 y_2 \cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} = a.$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1} \sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1} \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1} \left[(y_1 y_2 \cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} \\ &= 1 \cdot a = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}. \end{aligned}$$

142. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

证 设数列 $x_n = \frac{n^n}{n!}$ ($n=1, 2, \dots$), 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e,$$

所以, 利用141题的结果, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = e.$$

143. 证明: 若

(a) $y_{n+1} > y_n$ ($n=1, 2, \dots$),

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \text{ 存在,}$$

$$\text{则} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

证 假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$. 由此, 并注意到 $y_n \rightarrow +\infty$,

知对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在有序号 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{且 } y_n > 0).$$

于是分数 (当 $n > N$ 时)

$$\frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \frac{x_{N+3} - x_{N+2}}{y_{N+3} - y_{N+2}}, \dots,$$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

都包含在 $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$ 之内. 因为 $y_{n+1} > y_n$, 所以, 这些分数的分母都是正数, 于是得

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}) \leq x_{N+2} - x_{N+1}$$

$$\leq (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}),$$

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3} - y_{N+2}) \leq x_{N+3} - x_{N+2}$$

$$\leq (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+1} - y_{N+2}),$$

.....

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_n) \leq x_{n+1} - x_n$$

$$\leq (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_n),$$

相加之, 得

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_{N+1}) \leq x_{n+1} - x_{N+1}$$

$$\leq (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_{N+1}),$$

即
$$a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} \leq a + \frac{\varepsilon}{2},$$

所以, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另外, 我们有 (当 $n > N$ 时)

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} - a &= \frac{x_{N+1} - a y_{N+1}}{y_n} + \left(1 - \frac{y_{N+1}}{y_n}\right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{x_n - x_{N+1}}{y_n - y_{N+1}} - a\right), \end{aligned}$$

故

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \left| \frac{x_{N+1} - a y_{N+1}}{y_n} \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

现取正整数 $N' > N$, 使当 $n > N'$ 时, 恒有

$$\frac{|x_{N+1} - ay_{N+1}|}{y_N} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $n \geq N'$ 时, 恒有

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \varepsilon.$$

由此可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$

注. 本题中, 若将条件 (B) 换为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty \text{ (或 } -\infty \text{)}$$

则结论仍成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

详见Г.М.菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章§2.

144. 求 (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} \quad (a > 1);$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n}.$$

解 (a) 设 $x_n = n^2$, $y_n = a^n \quad (a > 1).$

则 $y_{n+1} > y_n$, $y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{a^{n+1} - a^n} = \frac{2n+1}{a^n(a-1)}.$$

再设 $x'_n = 2n+1$, $y'_n = a^n$,

则 $y'_{n+1} > y'_n$, $y'_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} = \frac{2}{a^n(a-1)} \rightarrow 0,$$

因而利用143题的结果得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{a^n} = 0,$$

即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 0$$

继续利用143题的结果, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0,$$

即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = 0.$$

(6) 设 $x_n = \lg n$, $y_n = n$,

则 $y_{n+1} > y_n$, $y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0,$$

故
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0.$$

注 143题的结果属于 *O. Stolz*, 当 $y_n = n$ 时, 早已被 *A. L. Cauchy* 所证明. 此结果常用于确定“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的待

定式 $\frac{x_n}{y_n}$ 的极限, 144 题即是一例. 应用此结果, 也可证明138题及139题的结果 (此结果属于哥西 *Cauchy*). 事实上, 令

$$x'_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad y'_n = n,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n}{y'_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

145. 证明: 若 p 为自然数, 则

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

证 (a) 令 $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$, $y_n = n^{p+1}$,

则 $y_{n+1} > y_n$, $y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{p+1 + o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{1}{p+1}, \end{aligned}$$

式中 $\lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 为无穷小, 以下不再说明,

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

$$\begin{aligned} (b) \text{ 令 } x_n &= (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1}, \\ y_n &= (p+1)n^p, \end{aligned}$$

则 $y_{n+1} > y_n$, $y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} &= \frac{(p+1)(n+1)^p + [n^{p+1} - (n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} \\ &= \frac{\frac{p(p+1)}{2} n^{p-1} + \dots}{p(p+1) n^{p-1} + \dots}.\end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

(B) 令 $x_n = 1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p$, $y_n = n^{p+1}$,

则 $y_{n+1} > y_n$, $y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} &= \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p + \dots} \\ &= \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^p}{p+1 + o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{2^p}{p+1},\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} \\ &= \frac{2^p}{p+1}.\end{aligned}$$

146. 证明: 叙列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n=1, 2, \dots)$$

收敛.

因此有公式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

式中 $C=0.577216\cdots$ 称为尤拉常数，且当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 。

证 因为 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ ^{*}，

故 $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$ ，

令 $n=1, 2, 3, \cdots n$ 得出

$$\ln 2 - \ln 1 < 1,$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2},$$

$$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3},$$

.....

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

相加之得

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

于是，

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)$$

$$> \frac{1}{n+1} > 0,$$

即 $\{x_n\}$ 是一个有下界的数列。其次，

$$x_n - x_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1};$$

因为 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{**})$, 所以 $x_n - x_{n+1} > 0$, 这就是说, $\{x_n\}$ 又是一个单调下降的数列. 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 用 C 表示之, 即

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

它的近似值为 0.577216. 或表成

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

*)及**)利用75题(a)的结果.

147. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

解 因为

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n, \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} = C + \ln 2n + \varepsilon_{2n}, \quad (2)$$

其中 C 为尤拉常数, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\varepsilon_{2n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

(2)式减(1)式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \ln 2n - \ln n + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) \\ &= \ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) \rightarrow \ln 2^* \quad (n \rightarrow \infty),\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

148. 数列 x_n ($n=1, 2, \dots$) 是由下列各式

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n=3, 4, \dots)$$

所确定, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

解 由于

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2} \\ &= \cdots = \frac{x_2 - x_1}{(-2)^{n-1}} = \frac{b-a}{(-2)^{n-1}}.\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \sum_{m=1}^n (x_{m+1} - x_m) + x_1 \\ &= (b-a) \sum_{m=1}^n \frac{1}{(-2)^{m-1}} + a,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b-a}{1 - (-\frac{1}{2})} + a = \frac{a+2b}{3}.$$

149. 设 $a > 0$ 和 x_n ($n=1, 2, \dots$) 为由以下各式

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

所确定的数列. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

证 由 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_n} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}} \right)^2 + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}$

$$(n=0, 1, 2, \dots),$$

则 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} - x_n \right) \leq 0.$

知 $\{x_n\}$ 为单调下降的有界数列, 必有极限存在. 设其极限为 l , 则 $l \geq \sqrt{a} > 0$, 对于等式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

两端取极限, 即得

$$l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right),$$

解之得

$$l = \sqrt{a} \quad (\text{负值不合适}),$$

故证得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

150. 证明由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列 x_n 和 y_n ($n=1, 2, \dots$) 有公共的极限

$$\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(数 a 和 b 的算术—几何平均数)。

证 分两种情形:

1) a 与 b 中至少有一个为零。例如, 设 $a=0$, 则

显然有 $x_n=0$ ($n=1, 2, \dots$), $y_{n+1}=\frac{y_n}{2}$, 从而,

递推得

$$y_n = -\frac{b}{2^{n-1}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2) 设 $a \neq 0$, $b \neq 0$. 这时, 必须 $a > 0$, $b > 0$. 否则, 若 $ab < 0$, 则 $x_2 = \sqrt{ab}$ 没有意义; 若 $a < 0$,

$b < 0$, 则 $x_2 = \sqrt{ab} > 0$, $y_2 = \frac{a+b}{2} < 0$, 从而

$x_3 = \sqrt{x_2 y_2}$ 没有意义. 因此, 必须 $a > 0$, $b > 0$.

不妨假定 $a \leq b$. 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项, 并且都界于原来两数之间, 故有

$$a \leq x_2 \leq y_2 \leq b,$$

由此又有

$$a \leq x_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq y_2 \leq b.$$

应用数学归纳法可知一般有

$$a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq b \quad (n=2, 3, \dots).$$

故 $\{x_n\}$ 为单调增大的有界数列, $\{y_n\}$ 为单调减小的有界数列, 因此它们的极限都存在. 令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

在等式

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

两端取极限, 得

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

故 $\alpha = \beta$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

证毕.

§3. 函数的概念

1° 函数的概念 若对于集合 $X = \{x\}$ 中的每一个 x , 有一个确定的实数 $y \in Y = \{y\}$ 与之对应, 则变量 y 称为变量 x 在已知变域 X 的单值函数 f , 并记为 $y = f(x)$.

集合 X 名为函数 $f(x)$ 的定义域或存在域; Y 称为这个函数的值域, 在最简单的情形下, 集合 X 或为开区间 (a, b) : $a < x < b$, 或为半开区间 $(a, b]$: $a < x \leq b$ 或 $[a, b)$: $a \leq x < b$, 或为闭区间 (线段) $[a, b]$: $a \leq x \leq b$, 其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 和 $+\infty$.

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y = f(x)$ 与之对应, 则 y 称为 x 的多值函数.

2° 反函数 若把 x 了解为满足方程式

$$f(x) = y$$

(式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 中之一固定数值) 的任何数值, 则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x = f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的反函数, 这个函数一般地说来是多值的. 若函数 $y = f(x)$ 是严格单调的, 即当 $x_2 > x_1$ 时, $f(x_2) > f(x_1)$ [或相应地 $f(x_2) < f(x_1)$], 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 为单值而且严格的单调函数.

求下列函数的存在域:

$$151. y = \frac{x^2}{1+x}.$$

解 当 $1+x \neq 0$, 即 $x \neq -1$ 时, 函数 y 才有意义, 所以, 它的存在域为 $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$.

$$152. y = \sqrt{3x - x^3}.$$

解 存在域为满足不等式

$$3x - x^3 \geq 0$$

的实数 x 的集合. 解之, 得存在域为 $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[0, \sqrt{3}]$.

$$153. y = (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

解 当 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ 时, y 值确定.

解之, 得存在域为满足

$$-1 \leq x < 1$$

的数 x 的集合.

$$154. (a) y = \log(x^2 - 4), (b) y = \log(x+2) + \log(x-2),$$

解 (a) 当 $x^2 - 4 > 0$ 时, y 值确定. 解之, 得存在域为 $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$.

(6) 函数 y 由两个函数组成, 其中第一个函数的存在域为 $(-2, +\infty)$, 而第二个函数的存在域为 $(2, +\infty)$, 于是, 函数 y 的存在域为它们的公共部分, 即 $(2, +\infty)$.

155. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

解 当 $\sin\sqrt{x} \geq 0$ 时, y 值才为确定的实数. 解之, 得

$$2k\pi \leq \sqrt{x} \leq (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

存在域为满足不等式

$$4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

156. $y = \sqrt{\cos x^2}$.

解 当 $\cos x^2 \geq 0$ 时, y 值才为确定的实数, 即只要 x 满足

$$0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ 及 } (4k-1)\frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq (4k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$(k=1, 2, \dots).$$

解之, 得存在域为满足不等式

$$|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ 及 } \sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}} \leq |x| \leq \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$(k=1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

157. $y = \log\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 当 $\sin \frac{\pi}{x} > 0$ 时, y 值确定, 即只要

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$$

及 $(k=0, 1, 2, \dots)$

$$-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi,$$

所以, 存在域为满足不等式

$$\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k},$$

及 $(k=0, 1, 2, \dots)$

$$-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$$

的数 x 的集合.

158. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}.$

解 当 $x \geq 0$ 及 $\sin \pi x \neq 0$ 时, y 值确定. 解之, 得存在域为满足关系式

$$x > 0, x \neq n \quad (n=1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

159. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}.$

解 当 $\left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1$ 时, y 值确定. 解之, 得

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1,$$

$$-1 \leq 2 - \frac{2}{1+x} \leq 1,$$

$$-3 \leq -\frac{2}{1+x} \leq -1,$$

$$\frac{2}{3} \leq 1+x \leq 2.$$

最后得存在域为满足不等式

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

的数 x 的集合.

160. $y = \arccos(2\sin x).$

解 当 $|2\sin x| \leq 1$ 时, y 值确定. 解之, 得存在域为满足不等式

$$\left| x - k\pi \right| \leq \frac{\pi}{6} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

161. $y = \lg[\cos(\lg x)].$

解 当 $\cos(\lg x) > 0$ 时, y 值确定. 解之, 得

$$\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < \lg x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

从而存在域为满足不等式

$$10^{\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi} < x < 10^{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

$$162^{\dagger} \quad y = (x - |x|) \sqrt{-\sin^2 \pi x}.$$

解 由于 $\sin^2 \pi x \geq 0$, 故仅当 $\sin \pi x = 0$ 时 $\sqrt{-\sin^2 \pi x}$ 才有意义, 从而函数 y 才有意义. 解之, 得存在域为

$$x = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$163. \quad y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x).$$

解 当 $\sin \pi x \neq 0$ 时, 第一项有意义, 即 $x \neq k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

当 $0 \leq 2^x \leq 1$ 时, 第二项有意义, 即 $x \leq 0$. 由此得存在域为满足关系式

$$x \leq 0, \quad x \neq -n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

$$164. \quad y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x).$$

解 当 $-1 \leq 1-x \leq 1$, 即 $0 \leq x \leq 2$ 时, 第一个函数有意义;

当 $\lg x > 0$, 即 $x > 1$ 时, 第二个函数有意义.

由此得存在域为满足不等式

$$1 < x \leq 2$$

的数 x 的集合.

$$165^{\dagger} \quad y = (2x)_I.$$

解 当 $2x = n$ ($n = 0, 1, \dots$) 时, y 值确定, 所以, 存在域为集合:

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{5}{2}, \quad \dots, \quad \frac{n}{2}, \dots.$$

求下列函数的存在域和函数值域:

$$166. \quad y = \sqrt{2+x-x^2}.$$

解 当 $2+x-x^2 \geq 0$ 时, y 值确定. 解之, 得存在域为满足不等式

$$-1 \leq x \leq 2$$

的数 x 的集合. 又因

$$y = \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{3}{2},$$

所以, 函数值域为满足不等式

$$0 \leq y \leq \frac{3}{2}$$

的数 y 的集合.

167. $y = \lg(1 - 2\cos x).$

解 当 $1 - 2\cos x > 0$ 时, y 值确定. 解之, 得存在域为满足不等式

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的数 x 的集合 A . 因为

$$\max_{x \in A} (1 - 2\cos x) = 1 - (-2) = 3,$$

$$\inf_{x \in A} (1 - 2\cos x) = 0,$$

所以, 函数值域为满足不等式

$$-\infty < y \leq \lg 3$$

的数 y 的集合.

168. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$

解 当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$ 时, y 值确定, 而对于 $-\infty < x < \infty$

$+\infty$ 来说, 始终有 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, 所以, 存在域为全体实数所组成的集合, 而函数值域为闭区间 $[0, \pi]$.

169. $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$.

解 当 $-1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1$ 时, 即当 $\frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10$, 或 $1 \leq x \leq 100$ 时, y 值确定, 且在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上变化, 所以, 存在域为闭区间 $[1, 100]$, 函数值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

170. $y = (-1)^x$.

解 存在域为数 x : $x = \frac{p}{2q+1}$ (p, q 为整数) 的集合, 而函数值域为: $y = (-1)^p$, 即由 $-1, 1$ 两数组成的集合.

171. 在底为 $AC=b$ 和高为 $BD=h$ 的三角形 ABC 中(图1.2)内接一个高为 $NM=x$ 的矩形 $KLMN$. 把矩形 $KLMN$ 的周长 P 及其面积 S 表为 x 之函数.

作函数 $P = P(x)$ 及 $S = S(x)$ 的图形.

解 因为 $\frac{LM}{b} = \frac{h-x}{h}$,
所以,

$$LM = b \left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

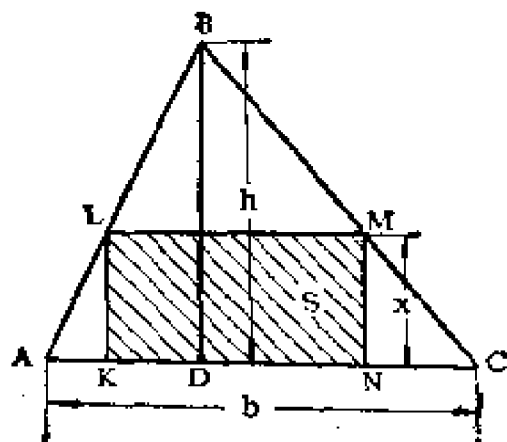


图 1.2

周长 $P=2LM+2x$, 即

$$P=P(x)=2\left(1-\frac{b}{h}\right)x+2b,$$

式中 $0 < x < h$.

当 $b < h$ 时, 如图 1.3 中直线段 AB 所示 (不包含 A, B 两点).

当 $b > h$ 时, 如图 1.3 中直线段 AC 所示 (不包含 A, C 两点). 其中 $OA=2b$, B 及 C 的坐标为 h 和 $2h$.

矩形面积

$$S=LM \cdot x = bx$$

$$\cdot \left(1-\frac{x}{h}\right) \quad (0 < x < h).$$

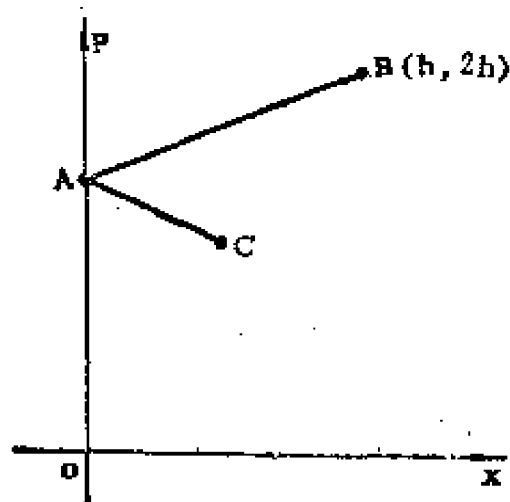


图 1.3

如图 1.4 所示, 它是一段不包含 O 点及 B 点的抛物线弧 OAB .

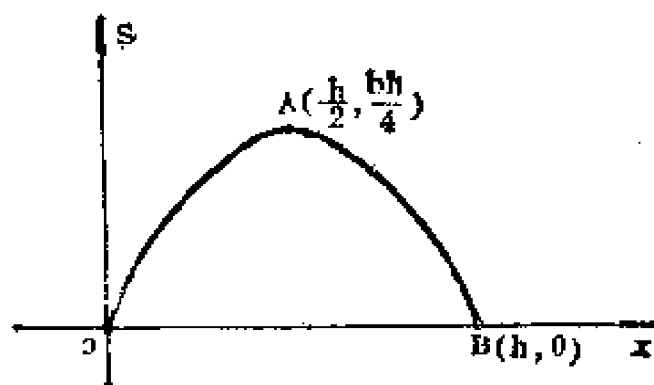


图 1.4

172. 在三角形 ABC 中, 边 $AB=6$ 厘米, 边 $AC=8$ 厘米, 角 $BAC=x$, 把边 $BC=a$ 和面积 $ABC=S$ 表为变量

x 的函数, 作函数 $a=a(x)$ 及 $S=S(x)$ 的图形。

解 利用余弦定理得三角形的边

$$a = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos x} = \sqrt{100 - 96 \cos x} \\ (0 < x < \pi),$$

如图1.5所示 (系一不包含 A 点及 B 点的曲线弧 \widehat{AB}), 而三角形的面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \sin x = 24 \sin x \quad (0 < x < \pi).$$

如图1.6所示 (两轴单位取得不同, 系一不包含 O 点及 A 点的弧 \widehat{OBA}).

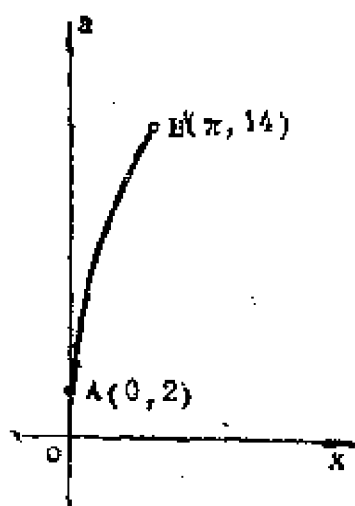


图 1.5

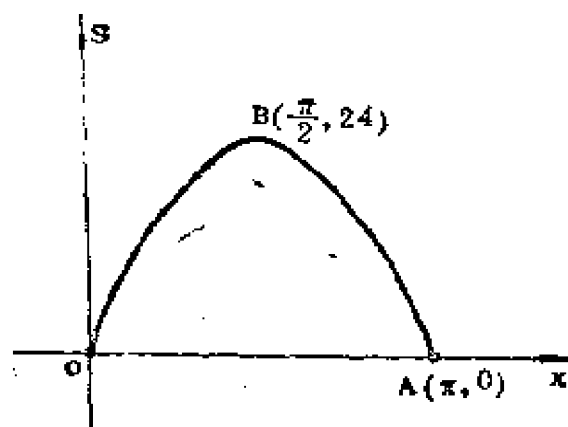


图 1.6

173. 在等腰梯形 $ABCD$ 中 (图1.7), 底为 $AD=a$, $BC=b$ ($a > b$), 高为 $HB=h$, 引直线 $MN \parallel BH$, MN 与顶点 A 相距 $AM=x$, 把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表为变量 x 的函数, 作函数 $S=S(x)$ 的图形。

解 $AH = \frac{1}{2}(a-b)$, 分三种情况讨论:

(1) 当 $0 \leq x \leq \frac{a-b}{2}$ 时, 即 MN 线
在 $\triangle ABH$ 内, 此时
 $\frac{MN}{h} = \frac{x}{\frac{a-b}{2}}, MN = \frac{2hx}{a-b}$.

于是,

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot x = \frac{hx^2}{a-b},$$

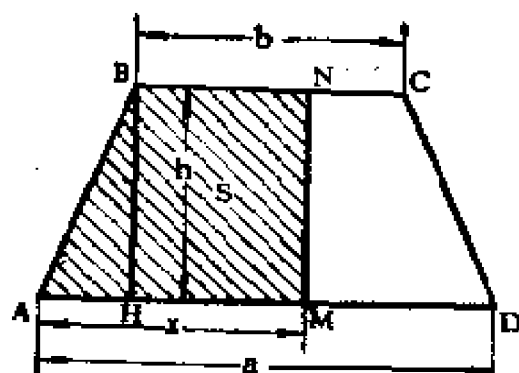


图 1.7

如图1.8中弧 \widehat{OA} (系抛物线段).

(2) 当 $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$ 时, 面积

$$S = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{h}{2} + h \left(x - \frac{a-b}{2} \right) = h \left(x - \frac{a-b}{4} \right),$$

如图1.8中不含 A 点及 B 点的直线段 AB .

(3) 当 $\frac{a+b}{2} \leq x \leq a$ 时, 面积

$$\begin{aligned} S &= \frac{h(a+b)}{2} - \frac{h}{a-b} \\ &\quad \cdot (a-x^2) \\ &= h \left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b} \right], \end{aligned}$$

如图1.8中抛物线段 \widehat{BC} .

图1.8中各点的位置如下:

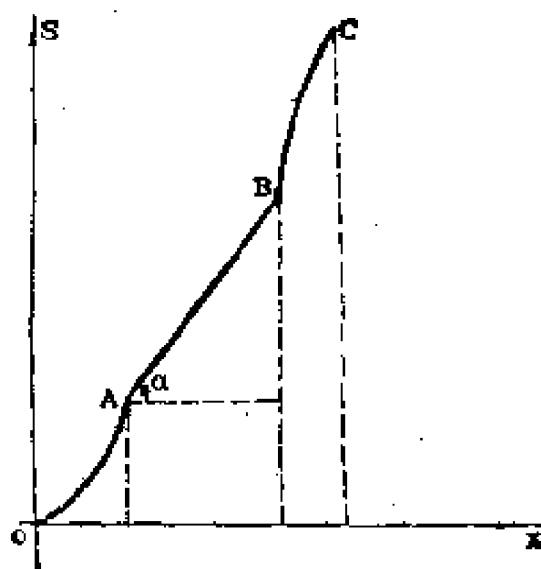


图 1.8

$$A\left(\frac{a-b}{2}, \frac{h(a-b)}{4}\right), B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{h(a+3b)}{4}\right),$$

$$C\left(a, \frac{h(a+b)}{2}\right),$$

又 $\operatorname{tg} \alpha = h$.

174. 在 Ox 轴上的闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 内有等于 2 克的质量均匀地分布着, 而在此轴上的两点 $x=2$ 和 $x=3$ 有集中的质量各 1 克.

设 $m(x)$ 是介于区间 $(-\infty, x)$ 的质量的值, 求函数 $m=m(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的解析表示式, 并作这个函数的图形.

解 当 $-\infty < x \leq 0$ 时, $m(x)=0$;

当 $0 < x \leq 1$ 时, 因为

$$1 : x=2 : m(x),$$

于是,

$$m(x)=2x;$$

当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$m(x)=2;$$

当 $2 < x \leq 3$ 时,

$$m(x)=3;$$

当 $3 < x < +\infty$

时, $m(x)=4$.

如图 1.9 所示.

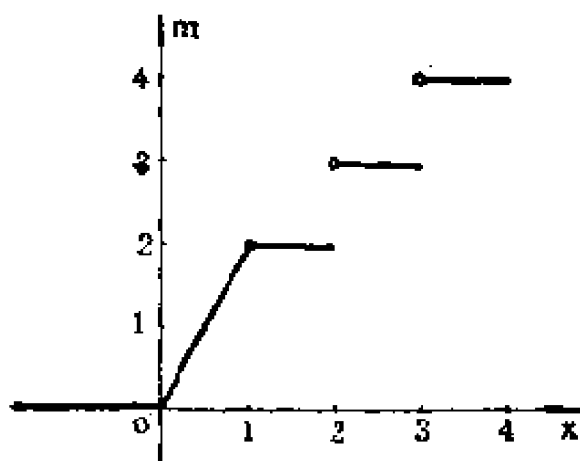


图 1.9

175. 函数 $y = \operatorname{sgn} x$, 用下列方法来定义:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{若 } x > 0; \\ 0, & \text{若 } x = 0; \\ -1, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

作这个函数的图形. 证明

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

解 函数 $\operatorname{sgn} x$ 的图形如图

1.10所示.

因为

当 $x < 0$ 时,

$$|x| = -x = x \operatorname{sgn} x;$$

当 $x = 0$ 时,

$$|x| = 0 = x \operatorname{sgn} x;$$

当 $x > 0$ 时,

$$|x| = x = x \operatorname{sgn} x.$$

所以,

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

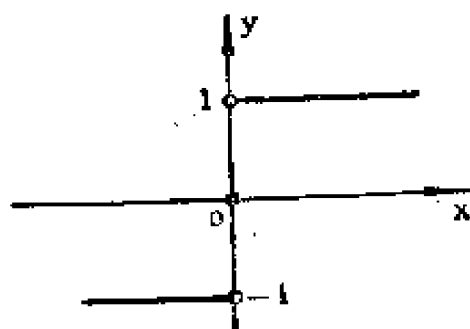


图 1.10

176. 函数 $y = [x]$ (数 x 的整数部分) 用下法定义: 若 $x = n + r$, 式中 n 为整数且 $0 \leq r < 1$, 则

$$[x] = n.$$

作这个函数的图形.

解 当 $x \in [n, n+1)$ 时 (n 为整数) $y = n$, 如图 1.11 所示.

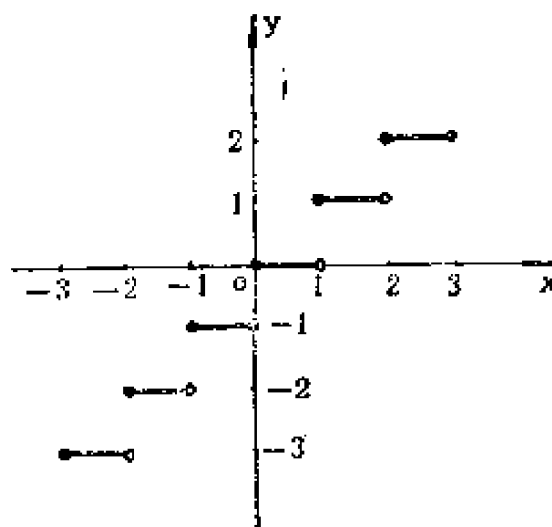


图 1.11

177. 设:

$$y = \pi(x) \quad (x \geq 0),$$

表示不超过数 x 的素数的数目。对于自变数 $0 \leq x \leq 20$ 的值，作这个函数的图形。

解 按题设可知：

当 $0 \leq x < 2$ 时， $\pi(x) = 0$ ；

当 $2 \leq x < 3$ 时， $\pi(x) = 1$ ；

当 $3 \leq x < 5$ 时， $\pi(x) = 2$ ；

当 $5 \leq x < 7$ 时， $\pi(x) = 3$ ；

当 $7 \leq x < 11$ 时， $\pi(x) = 4$ ；

当 $11 \leq x < 13$ 时， $\pi(x) = 5$ ；

当 $13 \leq x < 17$ 时， $\pi(x) = 6$ ；

当 $17 \leq x < 19$ 时， $\pi(x) = 7$ ；

当 $19 \leq x \leq 20$ 时， $\pi(x) = 8$ （如图1.12所示）。

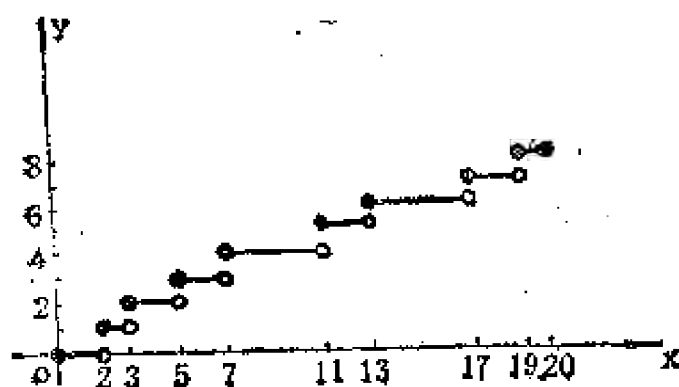


图 1.12

函数 $y = f(x)$ 在怎样的集合 E_x 上映出集合 E_y ，若：

178. $y = x^2$, $E_x = \{1 \leq x \leq 2\}$.

解 $E_y = \{1 \leq y \leq 4\}$.

179. $y = \lg x$, $E_x = \{10 < x < 1000\}$.

解 $E_y = \{1 < y < 3\}$.

$$180. y = \frac{1}{\pi} \arctan x, E_x = \{-\infty < x < +\infty\}.$$

解 $E_y = \{0 < y < 1\}.$

$$181. y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}, E_x = \{0 < |x| \leq 1\}.$$

解 $E_y = \{1 < |y| < +\infty\}.$

$$182. y = |x|, E_x = \{1 \leq |x| \leq 2\}.$$

解 $E_y = \{1 \leq y \leq 2\}.$

变量 x 跑过区间 $0 < x < 1$, 则变量 y 跑过怎样的集合, 若

$$183. y = a + (b - a)x.$$

解 变量 x 从 0 变至 1 时, y 从 a 变至 b . 于是, 变量 y 的变化区间为 $a < y < b$ (当 $a < b$) 或 $b < y < a$ (当 $b < a$).

$$184. y = \frac{1}{1-x}.$$

解 当 x 从 0 变至 1 时, y 从 1 变至正无穷大. 于是, y 的变化区间为 $1 < y < +\infty$.

$$185. y = \frac{x}{2x-1}.$$

解 $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1}.$

当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$, y 从 0 变至负无穷大; 当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时, y 从正无穷大变至 1. 于是, y 的变化区间为 $-\infty < y < 0$, $1 < y < +\infty$.

$$186. y = \sqrt{x-x^2}.$$

解 $y = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{2}$ (最大值); 由于 x 趋于 0 时, y 趋于 0, 而 $y \geq 0$, 从而 $y = 0$ 是变量 y 的下确界. 于是, y 的变化区间为 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$.

187. $y = \operatorname{ctg} \pi x$.

解 当 x 从 0 变至 1 时, 变量 y 从 $+\infty$ 变至 $-\infty$. 于是, 变量 y 的变化区间为 $-\infty < y < +\infty$.

188. $y = x + [2x]$.

解 当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$ 时, y 从 0 变至 $\frac{1}{2}$; 当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时, y 从 $\frac{3}{2}$ 变至 2. 于是, y 的变化区间为 $0 \leq y < \frac{1}{2}$,

$$\frac{3}{2} \leq y < 2.$$

189. 设:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x,$$

求 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

解 因为 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 所以,

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0,$$

$$f(4) = 24.$$

190. 设:

$$f(x) = \lg x^2,$$

求 $f(-1)$, $f(-0.001)$, $f(100)$.

解 $f(-1) = \lg 1 = 0$;

$$f(-0.001) = \lg 0.000001 = -6;$$

$$f(100) = \lg 10000 = 4.$$

191. 设:

$$f(x) = 1 + [x],$$

求 $f(0.9)$, $f(0.99)$, $f(0.999)$, $f(1)$.

解 $f(0.9) = f(0.99) = f(0.999) = 1$,

$$f(1) = 2.$$

192. 设:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{当 } -\infty < x \leq 0; \\ 2^x, & \text{当 } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

解 $f(-2) = 1 - 2 = -1$,

$$f(-1) = 1 - 1 = 0,$$

$$f(0) = 1 + 0 = 1,$$

$$f(1) = 2^1 = 2,$$

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

193. 设:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x},$$

求 $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$\frac{1}{f(x)}.$$

解 $f(0) = 1$,

$$\therefore f(-x) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = -\frac{x}{x+2},$$

$$f(x)+1 = \frac{1-x}{1+x} + 1 = \frac{2}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{1-x}.$$

194. 设:

$$(a) f(x) = x - x^3; \quad (b) f(x) = \sin \frac{\pi}{x};$$

$$(B) f(x) = (x + |x|)(1-x).$$

求使以下各式满足的 x 值:

$$(1) f(x) = 0; \quad (2) f(x) > 0; \quad (3) f(x) < 0.$$

解 (a) (1) $x - x^3 = 0$, 所以, $x = 0, 1$ 及 -1 ,

$$(2) x - x^3 > 0, \text{ 即 } x(1-x)(1+x) > 0,$$

所以, $-\infty < x < -1$ 和 $0 < x < 1$.

(3) $x(1-x)(1+x) < 0$, 所以, $-1 < x < 0$ 和 $1 < x < +\infty$.

$$(b) (1) \sin \frac{\pi}{x} = 0, \text{ 则 } \frac{\pi}{x} = k\pi \quad (k=0, \pm 1,$$

$\pm 2, \dots$), 所以, $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

(2) $\sin \frac{\pi}{x} > 0$, 则 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 和

$-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$, 所以

$$\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \text{ 和 } -\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$$

($k=0, 1, 2, \dots$)

(3) $\sin \frac{\pi}{x} < 0$, 则 $(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+2)\pi$ 和

$-(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < -2k\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$),

所以, $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$ 和 $-\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1}$

($k=0, 1, 2, \dots$)

(B) (1) $(x+|x|)(1-x) = 0$, 则 $x \leq 0$ 和 $x = 1$.

(2) 因为 $x+|x| \geq 0$, 所以 $1-x > 0$, 即 $x < 1$.

而由 $f(x) > 0$, 得 $x+|x| > 0$, 即 $x > 0$.

总之, 当 $0 < x < 1$ 时, $(x+|x|)(1-x) > 0$.

(3) $(x+|x|)(1-x) < 0$.

首先, $x > 0$, 否则 $x+|x| = 0$.

其次, 应有 $1-x < 0$, 所以 $x > 1$, 此即所求之解.

195. 设:

(a) $f(x) = ax + b$; (b) $f(x) = x^2$; (B) $f(x) = a^x$.

求 $\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \cdot \frac{1}{h} = a$

解 (a) $\varphi(x) = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = a;$

(b) $\varphi(x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h;$

(B) $\varphi(x) = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}.$

196. 设:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

证明 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0.$

证 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)$
 $= a(x+3)^2 + b(x+3) + c - 3[a(x+2)^2 + b(x+2) + c] + 3[a(x+1)^2 + b(x+1) + c] - [ax^2 + bx + c]$
 $= ax^2 + 6ax + 9a + bx + 3b + c - 3ax^2 - 12ax - 12a - 3bx - 6b - 3c + 3ax^2 + 6ax + 3a + 3bx + 3b + 3c - ax^2 - bx - c$
 $\equiv 0;$

于是,

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0.$$

197. 若 $f(0) = -2$, $f(3) = 5$, 求线性整函数:

$$f(x) = ax + b.$$

$f(1)$ 及 $f(2)$ 等于什么 (线性补插法)?

解 因为 $f(0) = b = -2$ 及 $f(3) = 3a + b = 5$,

所以,

$$a = \frac{7}{3}, b = -2.$$

于是, 所求的线性整函数为

$$f(x) = \frac{7}{3}x - 2,$$

且 $f(1) = \frac{1}{3}, f(2) = \frac{8}{3}.$

198. 若 $f(-2)=0, f(0)=1, f(1)=5$, 求二次有理整函数:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

$f(-1)$ 及 $f(0.5)$ 等于什么 (二次补插法)?

解 因为 $f(-2) = 4a - 2b + c = 0,$

$$f(0) = c = 1, f(1) = a + b + c = 5,$$

$$\text{所以, } a = \frac{7}{6}, b = \frac{17}{6}, c = 1.$$

于是, 所求的二次有理整函数为

$$f(x) = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1,$$

且 $f(-1) = -\frac{2}{3}, f(0.5) = \frac{65}{24} = 2\frac{17}{24}.$

199. 设 $f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=-3, f(2)=5$. 求三次有理整函数:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

解 因为 $f(-1) = -a + b - c + d = 0,$

$$f(0) = d = 2,$$

$$f(1) = a + b + c + d = -3,$$

$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 5,$$

所以, $a = \frac{10}{3}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = -\frac{29}{6}$, $d = 2$.

于是, 所求的三次有理整函数为

$$f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2.$$

200. 设 $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$, 求形状为

$$f(x) = a + bc^x$$

的函数.

解 因为 $f(0) = a + b = 15$,

$$f(2) = a + bc^2 = 30,$$

$$f(4) = a + bc^4 = 90,$$

所以, $a = 10$, $b = 5$, $c = 2$ (-2 不适合).

于是, 所求的函数为

$$f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x.$$

201. 证明: 对于线性函数

$$f(x) = ax + b,$$

若自变量的诸值 $x = x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 组成一等差级数, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 也组成一等差级数.

证 设数列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 为

$$x_1, x_1 + d, x_1 + 2d, x_1 + 3d, \dots,$$

$$x_1 + (n-1)d, \dots$$

其中 d 为公差.

于是,

$$y_n - y_{n-1} = (ax_n + b) - (ax_{n-1} + b)$$

$$= \{a[x_1 + (n-1)d] + b\} -$$

$$\{a[x_1 + (n-2)d] + b\} = ad,$$

由于 ad 为一常数, 所以, 数列 $y_n = f(x_n)$ 也组成等差级数.

202. 证明: 对于指数函数

$$f(x) = a^x \quad (a > 0),$$

若自变数 $x = x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 的值组成一等差级数, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 组成一等比级数.

证 因为 $x_n - x_{n-1} = d$, 所以:

$$y_n : y_{n-1} = a^{x_n} : a^{x_{n-1}} = a^{x_n - x_{n-1}} = a^d,$$

即函数值 $y_n = f(x_n)$ 组成一等比级数.

203. 设当 $0 < u < 1$ 函数 $f(u)$ 有定义. 求下列函数的定义域:

(a) $f(\sin x)$; (b) $f(\ln x)$; (c) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

解 (a) 因为 $0 < \sin x < 1$, 所以,

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 且}$$

$$x \neq \frac{4k+1}{2}\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

(b) 因为 $0 < \ln x < 1$, 所以, $1 < x < e$;

(c) 因为 $0 < \frac{[x]}{x} < 1$,

所以, $x > 1$ 且 $x \neq k$ ($k = 2, 3, 4, \dots$).

204. 设:

$$f(x) = \frac{1}{2} (a^x + a^{-x}) \quad (a > 0).$$

证明: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$.

$$\text{证} \quad f(x+y)+f(x-y) :$$

$$= \frac{1}{2}(a^{x+y}+a^{-x-y}) + \frac{1}{2}(a^{x-y}+a^{-x+y})$$

$$= \frac{1}{2}(a^x \cdot a^y + a^{-x} \cdot a^{-y}) + \frac{1}{2}(a^x \cdot a^{-y} + a^{-x} \cdot a^y)$$

$$= \frac{1}{2}a^x(a^y + a^{-y}) + \frac{1}{2}a^{-x}(a^{-y} + a^y)$$

$$= \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})(a^y + a^{-y})$$

$$= 2f(x)f(y),$$

于是,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

205. 设:

$$f(x)+f(y)=f(z),$$

求出 z , 若:

$$(a) f(x)=ax; \quad (b) f(x)=\frac{1}{x};$$

$$(B) f(x)=\operatorname{arctg} x (|x| \leq 1); \quad (r) f(x)=\lg \frac{1+x}{1-x}.$$

$$\text{解} \quad (a) f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y),$$

$$f(z)=az,$$

$$\text{由 } f(x)+f(y)=f(z) \text{ 得 } z=x+y.$$

$$(b) \text{ 由 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \text{ 得 } z = \frac{xy}{x+y}.$$

$$(B) \text{ 由 } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} z \text{ 得}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg} z,$$

所以, $z = \frac{x+y}{1-xy}$;

$$(r) \text{ 由 } \lg \frac{1+x}{1-x} + \lg \frac{1+y}{1-y} = \lg \frac{1+z}{1-z} \text{ 得}$$

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+z}{1-z},$$

所以, $z = \frac{x+y}{1+xy}$.

求 $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$, 设:

206. $\varphi(x) = x^2$ 及 $\psi(x) = 2^x$.

解 $\varphi[\varphi(x)] = (x^2)^2 = x^4$; $\varphi[\psi(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x}$;

$\psi[\psi(x)] = 2(2^x)$; $\psi[\varphi(x)] = 2(x^2)$.

207. $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

解 $\varphi[\varphi(x)] = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x) = \operatorname{sgn} x$;

$\psi[\psi(x)] = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (x \neq 0)$;

$\varphi[\psi(x)] = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0)$;

$\psi[\varphi(x)] = \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0)$.

208. $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0, \\ x, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$ 及 $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0, \\ -x^2, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$

解 $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$; $\psi[\psi(x)] = 0$ (因为 $-x^2 \leq 0$);

$\varphi[\psi(x)] = 0$; $\psi[\varphi(x)] = \psi(x)$.

209. 设:

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

求 $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$.

解 $f[f(x)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{x};$

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x.$$

210. 设:

$$f_n(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}},$$

若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解 当 $n=2$ 时, $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$

设对于 $n=k$ 时, 有

$$f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$f_{k+1}(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而由数学归纳法知, 对于任何自然数 n , 有

$$f_+(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

211. 设:

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2,$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f(x+1) = (x+1)^2 - 5(x+1) + 6$, 于是,

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

212. 设:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, 于是,

$$f(x) = x^2 - 2.$$

213. 设:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0),$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}$, 于是,

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

证明下列各函数在所示间隔内是单调增函数:

214. $f(x) = x^2$ ($0 \leq x < +\infty$).

证 当 $x_2 \geq x_1 \geq 0$ 时,

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2$$

$$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0,$$

于是 $f(x) = x^2$ 在 $0 \leq x < +\infty$ 内是单调增函数。

215. $f(x) = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right).$

证 当 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ 及 } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以, } \cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \text{ 及 } \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0.$$

$$\text{又因 } f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1$$

$$= 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0,$$

所以, $f(x) = \sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数。

216. $f(x) = \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right).$

$$\text{证 } f(x_2) - f(x_1) = \operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1}$$

$$= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_1 \cos x_2}$$

$$= \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2},$$

当 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x_1 > 0$, $\cos x_2 > 0$
及 $\sin(x_2 - x_1) > 0$, 从而可知

$$f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

所以, $f(x) = \operatorname{tg} x$ 在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

217. $f(x) = 2x + \sin x$ ($-\infty < x < +\infty$).

证 $f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1$,

因为 $|\sin x_2 - \sin x_1|$

$$\begin{aligned} &= 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \leq 2 \cdot \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \\ &\leq 2 \cdot \left| \frac{x_2 - x_1}{2} \right| = |x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

所以当 $x_2 > x_1$ 时, 有

$$-(x_2 - x_1) \leq \sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1,$$

从而

$$\begin{aligned} 2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1 &\geq 2(x_2 - x_1) \\ -(x_2 - x_1) &= x_2 - x_1 > 0, \end{aligned}$$

即 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 于是, $f(x) = 2x + \sin x$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内是单调增函数.

证明下列各函数在所示间隔内是单调减函数:

218. $f(x) = x^2$ ($-\infty < x \leq 0$).

证 $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0$
($x_1 < x_2 \leq 0$),

于是, $f(x) = x^2$ 在 $-\infty < x \leq 0$ 内是单调减函数.

219. $f(x) = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$.

证 $f(x_2) - f(x_1) = \cos x_2 - \cos x_1$

$$= -2 \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2},$$

当 $0 < x_1 < x_2 < \pi$ 时,

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi \text{ 及 } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

于是, $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, 从而

$$f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

即 $f(x) = \cos x$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 内是单调减函数.

220. $f(x) = \operatorname{ctg} x \quad (0 < x < \pi)$.

$$\text{证 } f(x_2) - f(x_1) = \frac{\cos x_2}{\sin x_2} - \frac{\cos x_1}{\sin x_1}$$

$$= \frac{\cos x_2 \sin x_1 - \cos x_1 \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2}$$

$$= \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} < 0$$

(当 $0 < x_1 < x_2 < \pi$ 时),

于是, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ 在 $0 < x < \pi$ 内是单调减函数.

221. 研究下列函数的单调性:

$$(a) f(x) = ax + b; \quad (b) f(x) = ax^2 + bx + c;$$

$$(v) f(x) = x^3; \quad (r) f(x) = \frac{ax + b}{cx + d};$$

$$(d) f(x) = a^x \quad (a > 0).$$

解 (a) 对于 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$.
 当 $a > 0$ 时, 它大于零; 当 $a < 0$ 时, 它小于零. 所以,
 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 是增函数; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 是减函数.

$$(b) f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

(1) 当 $a > 0$ 时, 图形呈凹状, 顶点在 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$, 于是, 在 $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ 内, 函数单调下降, 在 $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$ 内, 函数单调上升.

(2) 当 $a < 0$ 时, 图形呈凸状. 于是, 在 $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ 内增加, 而在 $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$ 内减小.

(B) $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3$
 $= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0 \quad (x_2 > x_1),$
 于是, $f(x) = x^3$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内单调增加.

(r) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-a\frac{d}{c}}{cx+d}$, 其中 $c \neq 0$, 若 $c = 0$, 则同 (a) 一样讨论. 下面不妨就 $c > 0$ 讨论其增减性.

(1) 当 $b > a\frac{d}{c}$ 时, 若 x 值单调增加, 则 $f(x)$ 值减小. 所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{d}{c})$ 及 $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ 内

减小.

(2) 当 $b < \frac{ad}{c}$ 时, 若 x 值单调增加, 则 $f(x)$ 值也增加. 所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{d}{c})$ 及 $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ 内增加.

(A) $f(x_2) - f(x_1) = a^2 x_2 - a^2 x_1$. 若 $x_2 > x_1$, 则
当 $0 < a < 1$ 时, $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 此时 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内减小.

当 $a > 1$ 时, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 此时, $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内增加.

222. 不等式能否逐项取对数?

解 不一定可以, 当底大于 1 时才可以. 因为对于对数函数当底大于 1 时为单调增函数. 若底介于 0 与 1 之间, 则为单调减函数, 所以, 此时就不能逐项取对数.

223. 设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数, 证明: 若
$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad (1)$$

则
$$\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]. \quad (2)$$

证 设 x_0 为三个函数公共域内的任一点, 则

$$\varphi(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi(x_0).$$

由 (1) 以及函数 $f(x)$ 的单调增性知

$$f[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)],$$

$$\varphi[\varphi(x_0)] \leq f[\varphi(x_0)];$$

从而

$$\varphi[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)].$$

同理, 可证

$$f[f(x_0)] \leq \psi[\psi(x_0)],$$

由 x_0 的任意性, 于是 (2) 式得证.

求反函数 $x = \varphi(y)$ 和它的存在域, 若:

224. $y = 2x + 3 \quad (-\infty < x < +\infty).$

解 $x = \frac{y-3}{2}, \quad -\infty < y < +\infty.$

225. $y = x^2, \quad (a) (-\infty < x \leq 0); (b) (0 \leq x < +\infty).$

解 (a) $x = -\sqrt{y}, \quad 0 \leq y < +\infty;$

(b) $x = \sqrt{y}, \quad 0 \leq y < +\infty.$

226. $y = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1).$

解 由于 $y + xy = 1 - x$, 解出 x 得反函数

$$x = \frac{1-y}{1+y}, \quad y \neq -1.$$

227. $y = \sqrt{1-x^2}. \quad (a) (-1 \leq x \leq 0); (b) (0 \leq x \leq 1).$

解 (a) $x = -\sqrt{1-y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1;$

(b) $x = \sqrt{1-y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1.$

228. $y = \operatorname{sh} x$, 式中 $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (-\infty < x < +\infty).$

解 由于 $2y = e^x - e^{-x}$, 即

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0,$$

解出 e^x 两端再取对数, 即得

$$x = \operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2}), \quad -\infty < y < +\infty.$$

229. $y = \operatorname{th} x$, 式中 $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty).$

解 由于 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1}$, 即

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y},$$

两端取对数, 并注意到 $\frac{1+y}{1-y} > 0$ 即 $-1 < y < 1$, 于是

$$x = \operatorname{arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, \quad -1 < y < 1.$$

230.
$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{若 } 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x, & \text{若 } 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

解
$$x = \begin{cases} y, & \text{若 } -\infty < y < 1; \\ \sqrt{y}, & \text{若 } 1 \leq y \leq 16; \\ \log_2 y, & \text{若 } 16 < y < +\infty. \end{cases}$$

231. 函数 $f(x)$ 定义于对称区间 $(-l, l)$ 中, 且若

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数, 若

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

确定下列各已知函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数:

(a) $f(x) = 3x - x^3$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(B) $f(x) = a^x + a^{-x} \ (a > 0)$; (r) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

$$(A) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

解 (a) $f(-x) = -3x + x^3 = -f(x)$, 故为奇函数.

$$(b) f(-x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = f(x),$$

故为偶函数.

$$(B) f(-x) = a^{-x} + b^x = f(x), \text{ 故为偶函数.}$$

$$(C) f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x),$$

故为奇函数.

$$(D) f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x),$$

故为奇函数.

232. 证明定义于对称区间 $(-l, l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 可以表示为偶函数与奇函数之和的形式,

证 因为

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

而 $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 为偶函数, $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 为奇

函数, 于是本题得证.

233. 若存在有数 $T > 0$ (函数的周期——在广义的意义上) 使对于一切被考虑的自变量 x 满足等式

$$f(x + nT) = f(x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

则函数 $f(x)$ 称为周期函数.

说明下列各已知函数中哪些是周期函数, 并求它

们的最小周期。设：

$$(a) f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x,$$

$$(b) f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

$$(B) f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}, \quad (r) f(x) = \sin^2 x,$$

$$(n) f(x) = \sin x^2, \quad (e) f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x},$$

$$(ж) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}, \quad (3) f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2}).$$

解 对于(a)，由于

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) &= A \cos \lambda\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) + B \sin \lambda\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) \\ &= A \cos \lambda x + B \sin \lambda x = f(x), \end{aligned}$$

故为周期函数，最小周期为 $T = \frac{2\pi}{\lambda} (\lambda > 0)$ 。同理可

证：(b)、(B)、(r)和(e)也是周期函数，最小周期分别为 2π 、 6π 、 π 和 π 。对于(n)，若周期为 a ，即 $\sin(x+a)^2 = \sin x^2$ 。令 $x=0$ 即得 $a = \pm \sqrt{m\pi}$ (m 为某正整数)，代入，又令 $x = \sqrt{2m\pi}$ ，易得 $\sin(2\sqrt{2}m\pi) = 0$ 。但 $2\sqrt{2}m$ 显然不是整数，得到矛盾。于是， $\sin x^2$ 不是周期函数。同理，(ж)和(3)也不是周期函数。

234. 证明：对于迪里黑里函数

$$x(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

任何有理数皆为其周期。

证 设 l 为任一有理数，则当 x 为有理数时， $x+l$ 也

为有理数. 若 x 为无理数, 则 $x+1$ 也为无理数, 所以

$$z(x+1) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

即 $z(x+1)=z(x)$, 1 为周期.

235. 证明定义于公共的集合上且周期是可公度的二个周期函数之和及其乘积也是周期函数.

证 设 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 为定义在集合 A 上的周期函数, T_1 及 T_2 分别为它们的周期, 又设 T 为 T_1 及 T_2 的公约数, 即

$$T_1 = Tk_1, \quad T_2 = Tk_2,$$

其中 k_1, k_2 为正整数. 于是

$$f_1(x+k_2T_1)=f_1(x), \quad f_2(x+k_1T_2)=f_2(x).$$

设

$$F_1(x)=f_1(x)+f_2(x), \quad F_2(x)=f_1(x)f_2(x),$$

可以证明: k_1k_2T 分别是 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的周期. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} F_1(x+k_1k_2T) &= f_1(x+k_1k_2T) \\ &\quad + f_2(x+k_1k_2T) \\ &= f_1(x) + f_2(x) = F_1(x). \\ F_2(x+k_1k_2T) &= f_1(x+k_1k_2T) f_2(x+k_1k_2T) \\ &= f_1(x) f_2(x) = F_2(x). \end{aligned}$$

从而本题得证.

236. 证明: 若对于函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 有等式

$$f(x+T) = kf(x)$$

(式中 k 和 T 为正的常数) 成立, 则

$$f(x) = a^x \varphi(x)$$

(式中 a 为大于零的常数, 而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数)。

证 由假定 $k > 0$, $T > 0$, 令 $a = k^{\frac{1}{T}} > 0$, 则 $a^T = k$. 于是有

$$f(x+T) = a^T f(x).$$

今定义函数 $\varphi(x)$ 如下:

$$\varphi(x) = a^{-x} f(x).$$

易知 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 事实上,

$$\begin{aligned} \varphi(x+T) &= a^{-(x+T)} f(x+T) = a^{-x} a^{-T} a^T f(x) \\ &= a^{-x} f(x) = \varphi(x). \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = a^x \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 证毕.

§4. 函数的图形表示法

1° 要作函数 $y = f(x)$ 的图形可用下法来进行: (1) 确定函数的存在域 $X = \{x\}$; (2) 从 X 中选出充分密集的自变数值 x_1, x_2, \dots, x_n 并作出函数

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

的对应数值表; (3) 在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 并用线把它们连接起来, 此连线的性质就是可认为是许多中间点的位置.

2° 为了得到函数的正确图形, 应当研究这个函数的一般性质.

首先必须：(1)解方程式 $f(x)=0$ ，求出函数图形与 Ox 轴的交点(函数值为零的点)；(2)确定使函数为正或为负时自变数的变域；(3)尽可能地说明函数单调(增或减)的区间；(4)研究当自变数无限趋近于函数存在域的境界点时函数的情况。

这一节里要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质，如幂函数、指数函数、三角函数等。

利用这些性质，不用作大量的计算工作，立即可以画出许多函数的略图，其他的图形有时就是这些最简单图形的组合(和或乘积等等)。

237. 作出线性齐次函数

$$y=ax$$

当 $a=0, \frac{1}{2}, 1, 2, -1$ 时的图形。

解 如图1·13所示。

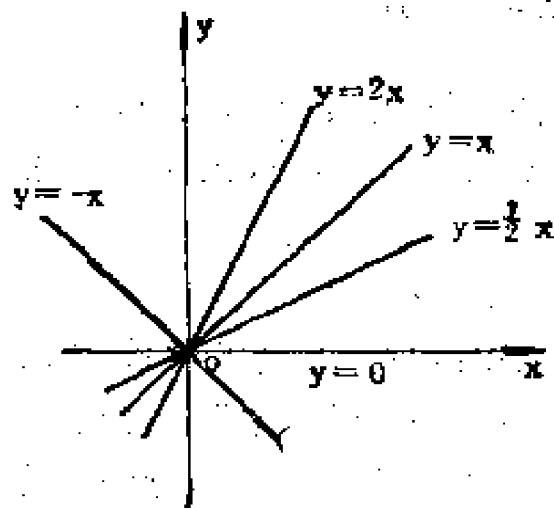


图 1·13

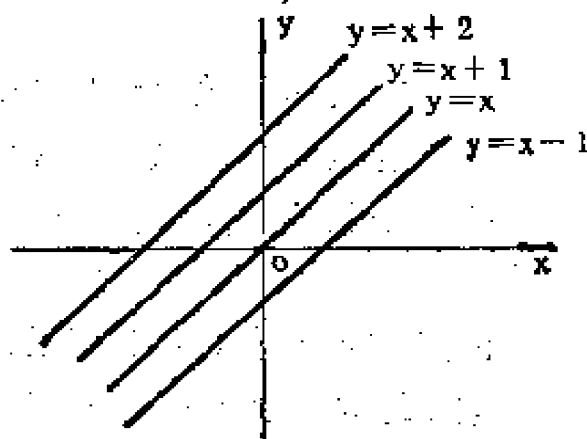


图 1·14

238. 作出线性函数

$$y=x+b$$

当 $b=0, 1, 2, -1$ 时的图形.

解 如图1·14所示.

239. 作出线性函数的图形:

(a) $y=2x+3$;

(b) $y=2-0.1x$;

(B) $y=-\frac{x}{2}-1$.

解 如图1·15所示.

240. 铁的线性膨胀系数

$\alpha=1.2 \times 10^{-6}$. 在适当

的尺度下作出函数

$l=f(T)$

$(-40^{\circ} \leq T \leq 100^{\circ})$

的图形, 其中 T 表温度 (以度计), l 表当温度为 T 时铁棒的长. 设当 $T=0^{\circ}$ 时, $l=100$ 厘米.

解 铁棒的长与温度的关系为

$l=l_0(1+\alpha T)$.

当 $T=0$ 时, $l=100$,

代入上式得 $l_0=100$.

于是,

$l=100(1+1.2 \times 10^{-6} T)$,

如图1·16所示 (两轴单位不同).

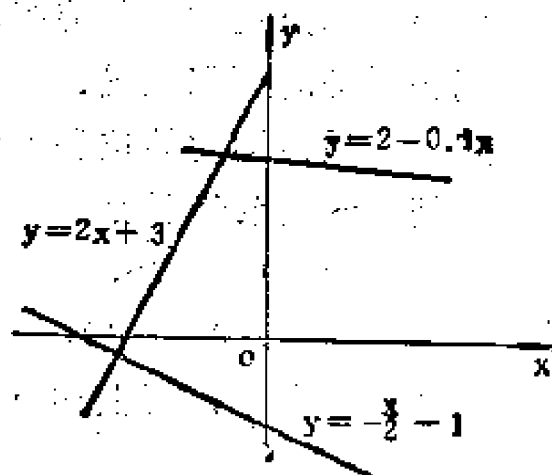


图 1-15

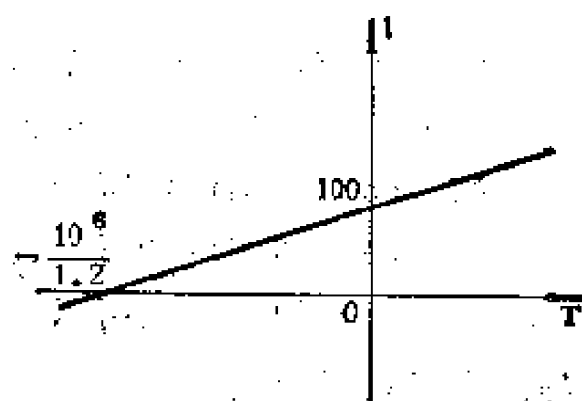


图 1-16

241. 二质点在数轴上运动, 第一质点在时间 $t=0$ 的时刻在原点左方 20 米处, 其速度为 $v_1=10$ 米/每秒; 第二

质点当 $t=0$ 时在原点 O 之右方 30 米处, 其速度为 $v_2 = -20$ 米/每秒; 作出此二点运动方程的图形并求它们相遇的时刻和位置.

解 二质点运动的位移 s 与时间 t 的关系分别为

$$s = 10t - 20,$$

$$s = -20t + 30,$$

如图 1.17 所示. 解上述方程, 得

$$t = 1\frac{2}{3} \text{ (秒)}, \quad s = -3\frac{1}{3} \text{ (米)},$$

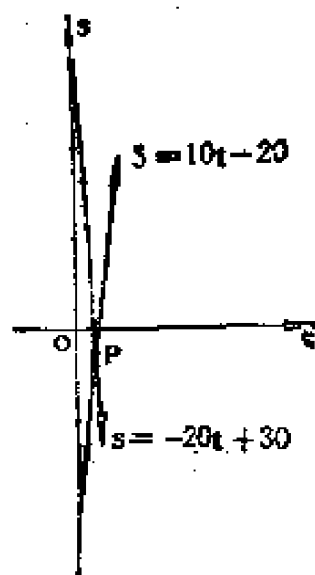


图 1.17

即在运动开始后 $1\frac{2}{3}$ 秒, 在 Ot 轴之下方 $3\frac{1}{3}$ 米处相遇,

如图中 P 点所示.

242. 作出二次有理整函数的图形 (抛物线):

(a) $y = ax^2$, 当 $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$;

(b) $y = (x - x_0)^2$, 当 $x_0 = 0, 1, 2, -1$;

(B) $y = x^2 + c$, 当 $c = 0, 1, 2, -1$.

解 (a) 如图 1.18 所示.

(b) 如图 1.19 所示.

(B) 如图 1.20 所示.

243. 把二次三项式

$$y = ax^2 + bx + c$$

化为下面的形状

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

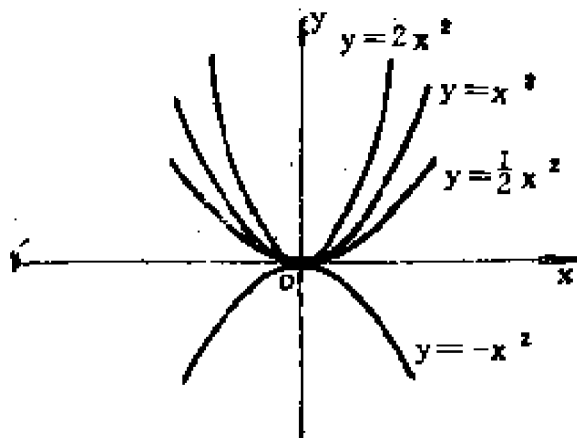


图 1.18

作出它的图形，研究例子：

(a) $y = 8x - 2x^2$; (b) $y = x^2 - 3x + 2$;

(c) $y = -x^2 + 2x - 1$; (r) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

图 1-19

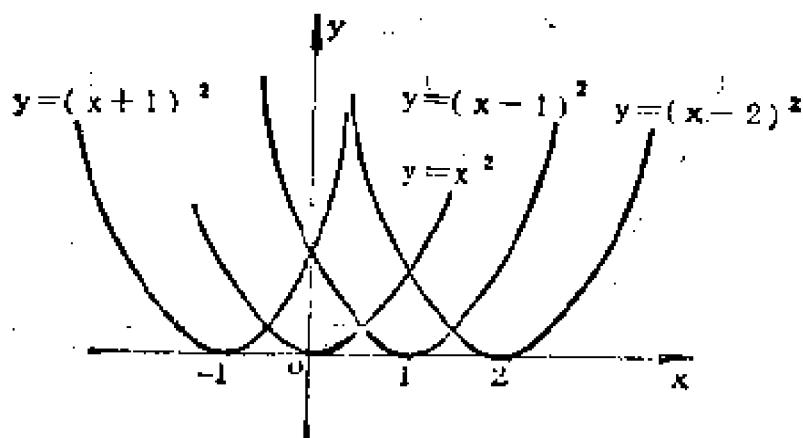
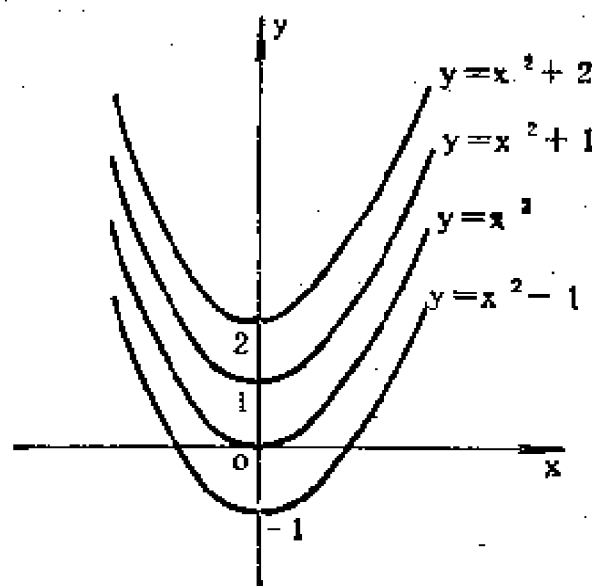


图 1-20



解 利用配方法得

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

其中

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad (2)$$

如图1·21所示.

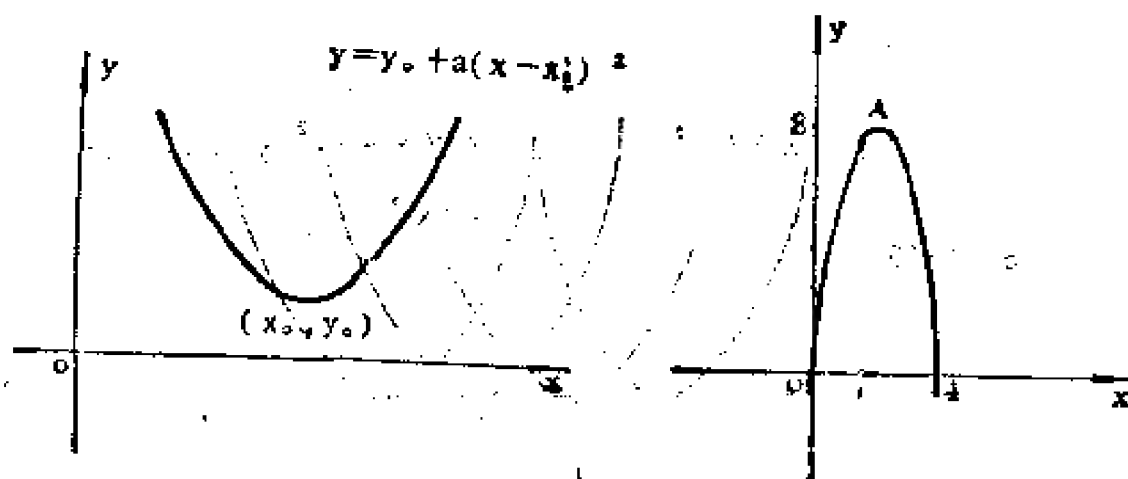


图 1·21

图 1·22

$$(a) \quad y = 8x - 2x^2 = 8 - 2(x - 2)^2,$$

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 8, \quad a = -2,$$

如图1·22所示, 顶点 $A(2, 8)$.

$$(b) \quad y = x^2 - 3x + 2$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$$x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{4}, \quad a = 1,$$

如图1·23所示. 顶点 $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

$$(B) \quad y = -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2,$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad a = -1,$$

如图1·24所示. 顶点 $C(1, 0)$.

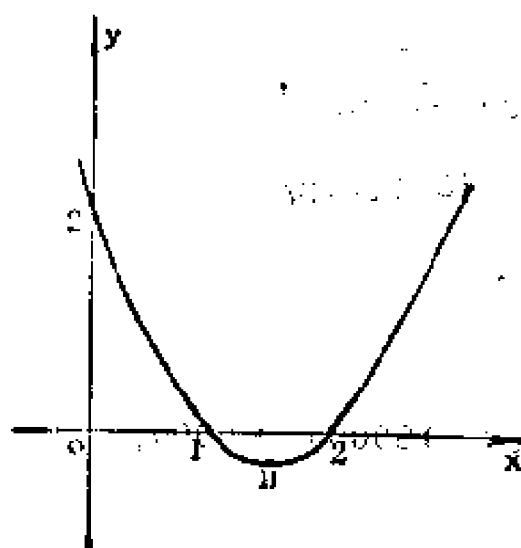


图 1-23

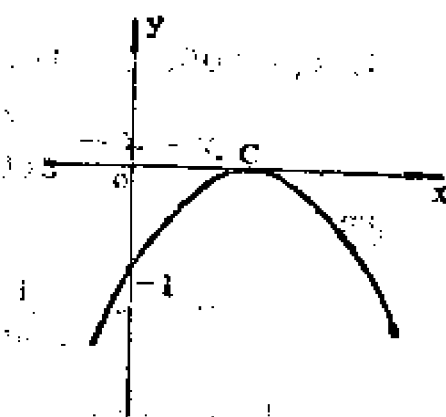


图 1-24

$$(P) \quad y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2},$$

$$x_0 = -1, \quad y_0 = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2},$$

如图1-25所示。顶点

$$D(-1, \frac{1}{2}).$$

244. 质点以初速度 $v_0 = 600$ 米/每秒沿与水平面成角 $\alpha = 45^\circ$ 的方向射出。作出运动轨道的图形，并求最大的升

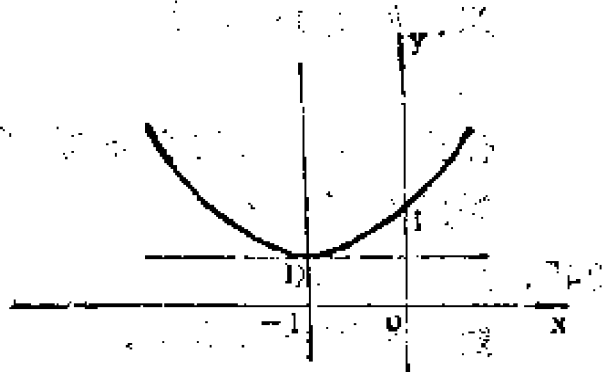


图 1-25

高及飞行的射程（假定 $g \approx 10$ 米/每秒²，空气的阻力不计）。

解 运动轨道方程为

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

以 $v_0 = 600$, $g = 10$, $\alpha = 45^\circ$ 代入得

$$y = x - \frac{x^2}{36000},$$

即

$$y = -\frac{1}{36000}(x - 18000)^2 + 9000.$$

当 $x = 18000$
时, y 值最大,
最大升高为 9000
米;

当 $x = 36000$
时, $y = 0$, 即飞
行射程为 36000
米. 如图 1.26 所
示.

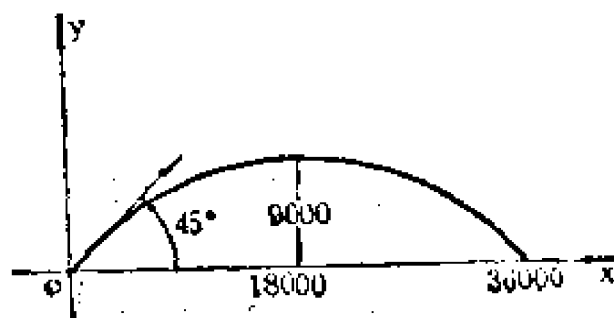


图 1.26

作出高于二次的有理整函
数的图形:

245. $y = x^3 + 1.$

解 如图 1.27 所示.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x).$

解 当 $x = \pm 1, -2$ 时,
 $y = 0$;

当 $x < -2, -1 < x < 1$
时, $y > 0$;

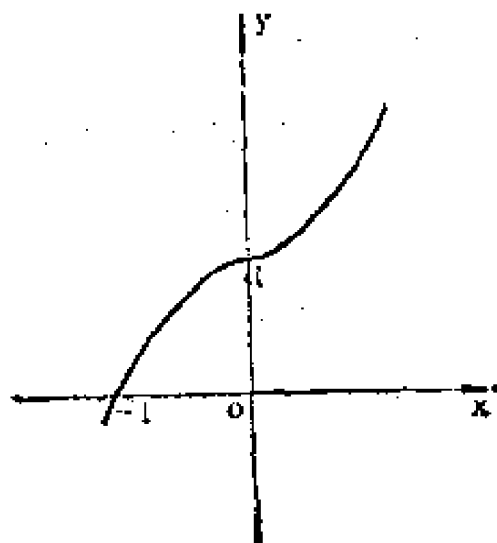


图 1.27

当 $-2 < x < -1$
及 $x > 1$ 时, $y < 0$.

当 $x < -2$ 及 $x > 0$
时, 曲线下降; 当 -1
 $< x < 1$ 时, 曲线由上
升到下降; 当 $-2 < x <$
 -1 时, 曲线由下降到
上升. 如图 1·28 所示.

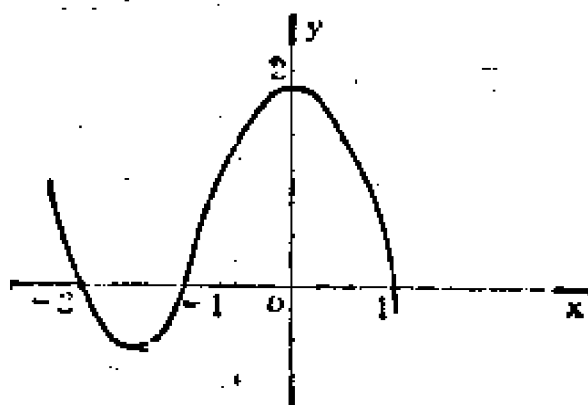


图 1·28

247. $y = x^2 - x^4$.

解 $y = x^2(1-x)(1+x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$.

图形关于 Oy 轴对称, 与两坐标轴的交点为
 $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$,
且在 $(0, 0)$ 点与 Ox 轴相切.

当 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y = \frac{1}{4}$, 此时 $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$

及 $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$ 均为图形上的最高点.

当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 曲线上升;

当 $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$

时, 曲线下降. 如图
1·29 所示.

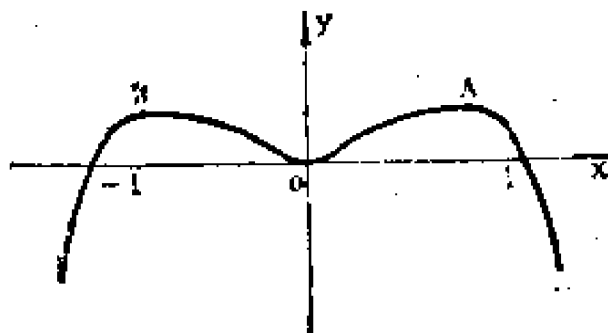


图 1·29

248. $y = x(a-x)^2(a+x)^3$
($a > 0$).

解 当 $x=0, a, -a$ 时, $y=0$. $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 为切点.

当 $x > 0$ 及 $x < -a$ 时, $y > 0$;

当 $-a < x < 0$ 时, $y < 0$. 如图1.30所示.

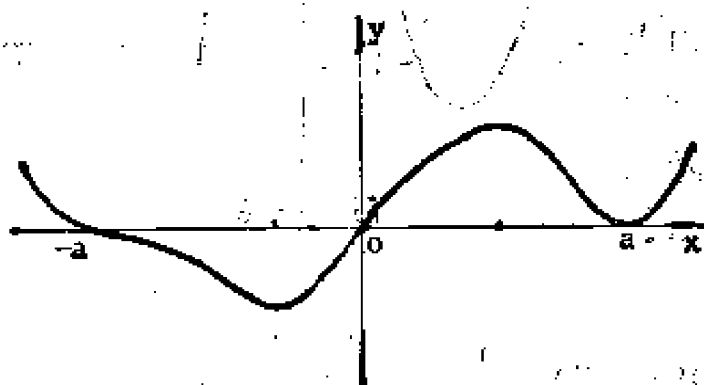


图 1.30

作出线性分式函数的图形(双曲线):

249. $y = \frac{1}{x}$.

解 如图1.31所示.

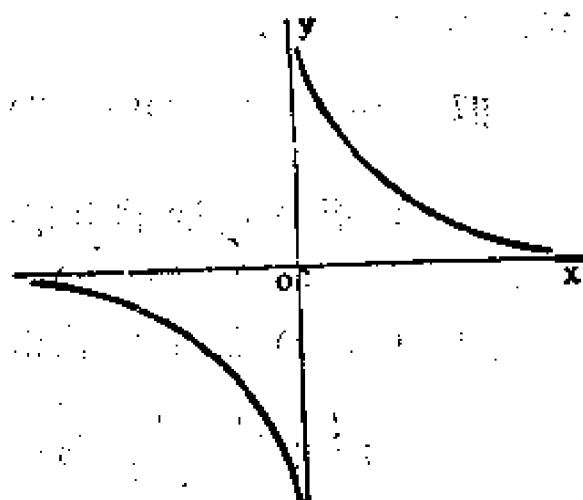


图 1.31

250. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

解 $y = -1 + \frac{2}{1+x}$.

图形的对称中心为 $(-1, -1)$, 如图1.32所示.

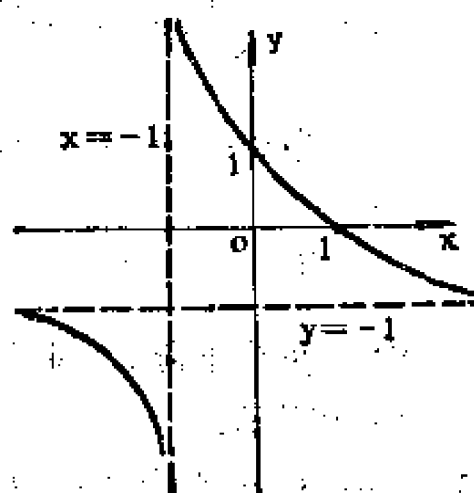


图 1.32

251. 把线性分式函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$(ad - bc \neq 0, c \neq 0).$$

化为下面的形式

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}.$$

再作它的图形.

研究例子

$$y = \frac{3x + 2}{2x - 3}.$$

$$\text{解 } y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)} = y_0 + \frac{m}{x - x_0},$$

其中

$$x_0 = -\frac{d}{c}, \quad y_0 = \frac{a}{c}, \quad m = \frac{bc - ad}{c^2},$$

如图1.33所示.

对于 $y = \frac{3x + 2}{2x - 3}$, 有

$x_0 = y_0 = \frac{3}{2}$, 如图1.34所示.

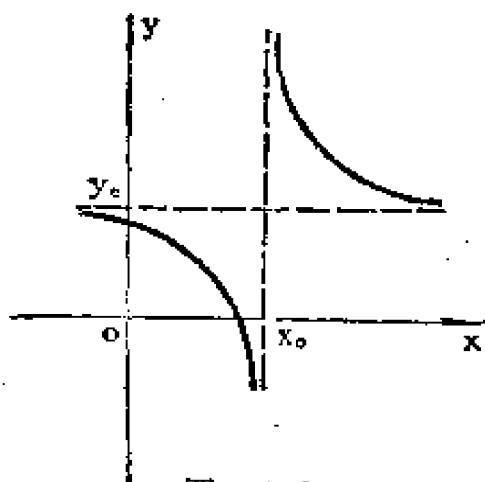


图 1.33

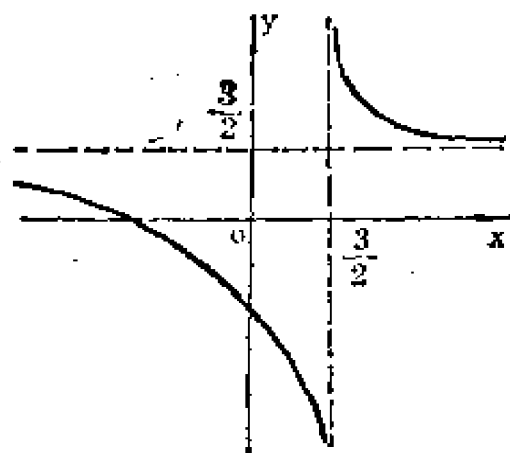


图 1.34

252. 气体当压力 $p_0 = 1$ 大气压时占有体积 $v_0 = 12$ 立方米. 设气体的温度保持不变作出气体体积 v 随压力变化而变化的图形 (波义耳—马瑞阿特定律) .

解 当温度 $T = k$ (常数) 时, 气体体积 v 与压力 p 成反比, 即

$$pv = C,$$

其中 C 为常数.

当 $p_0 = 1$ 时, $v_0 = 12$, 故 $C = 12$, 从而 $pv = 12$, 如图 1.35 所示.

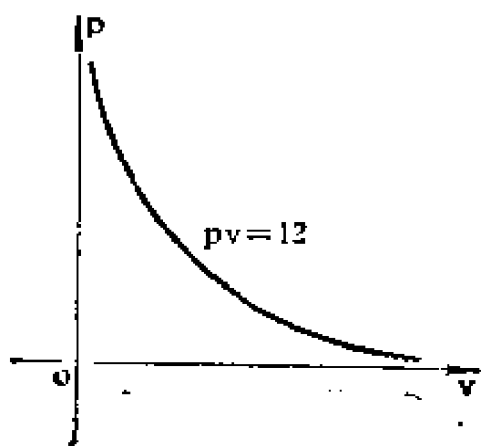


图 1.35

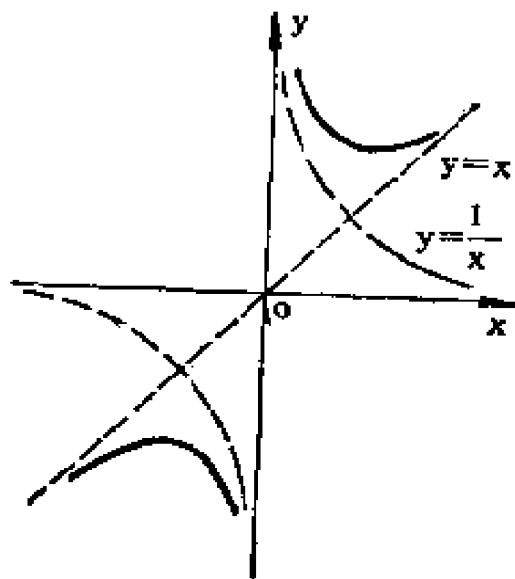


图 1.36

作下列有理分式函数的图形:

253. $y = x + \frac{1}{x}$ (双曲线) .

解 将 $y = x$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形叠加即得, 如图 1.36 中黑粗线所示.

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (牛顿三次曲线) .

解 将 $y = x^2$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形叠加即得, 如图 1·37 中黑粗线所示.

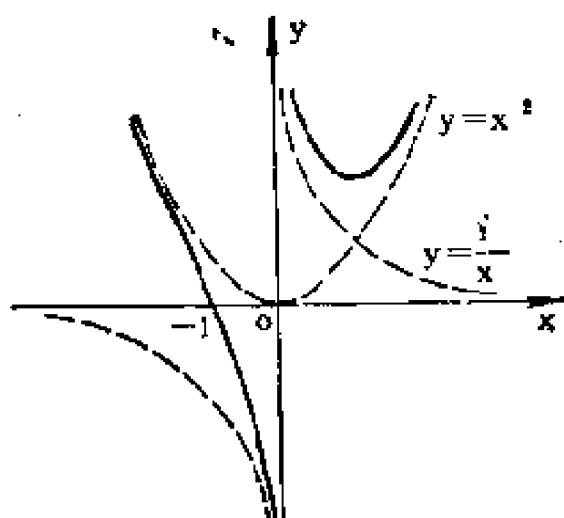


图 1·37

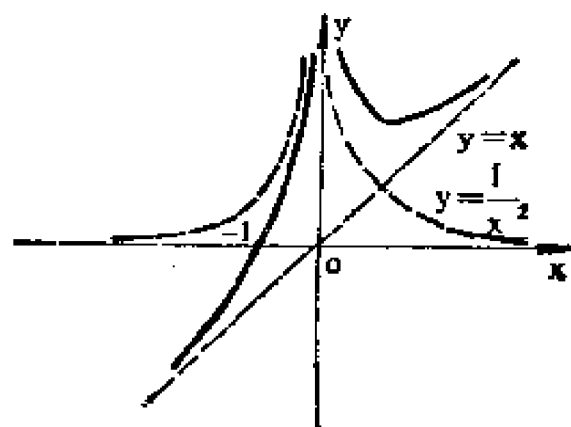


图 1·38

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

解 如图 1·38 中黑粗线所示.

256. $y = \frac{1}{1+x^2}$ (箕舌线) .

解 图形对称于 Oy 轴; 位于 Ox 轴上方, 最高点为 $(0, 1)$. 当 x 的绝对值无限增大时, y 值无限变小. 如图 1·39 所示.

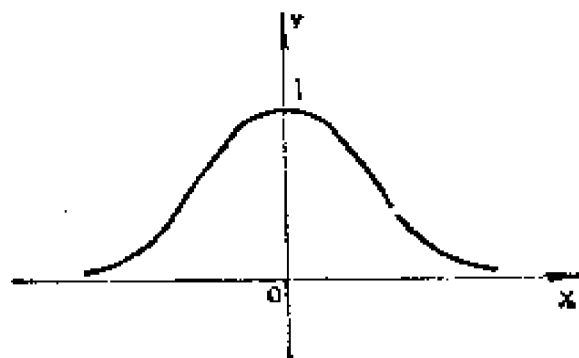


图 1·39

257. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ (牛顿蛇形线).

解 以 $-x$ 换 x , y 值的绝对值不变但改变符号, 故图形对称于原点.

又因 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, 故 $-1 \leq y \leq 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$, 曲线上升; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $y > 0$, 曲线下降.

图形以 Ox 轴为渐近线, 如图 1.40 所示.

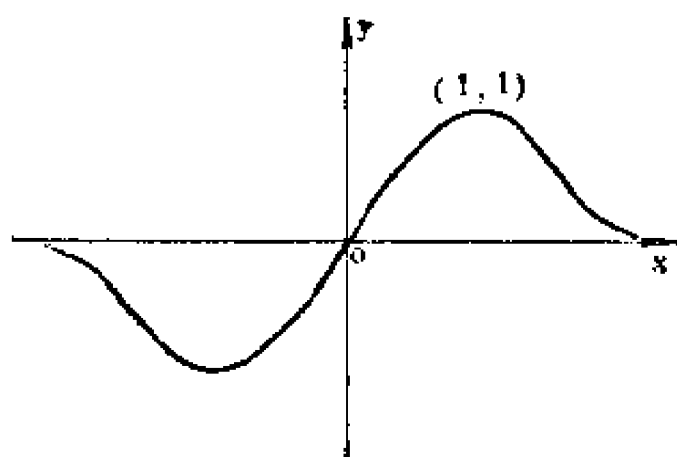


图 1.40

258. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 且经过点 $(0, 1)$.

当 $0 < x < 1$ 及 $x > 1$ 时, 曲线上升, 但当 $x = \pm 1$

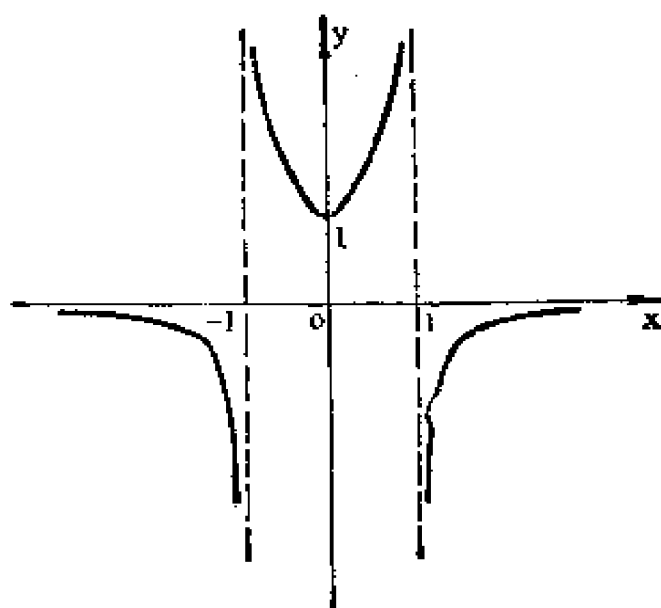


图 1.41

时, y 无意义. $x = \pm 1$ 为曲线的渐近线. 如图 1.41 所示.

$$259. y = \frac{x}{1-x^2}.$$

解 图形关于原点对称, 且经过原点. $x = \pm 1$ 为渐近线. 在 $(0, 1)$ 及 $(1, +\infty)$ 内曲线上升. 如图 1.42 所示.

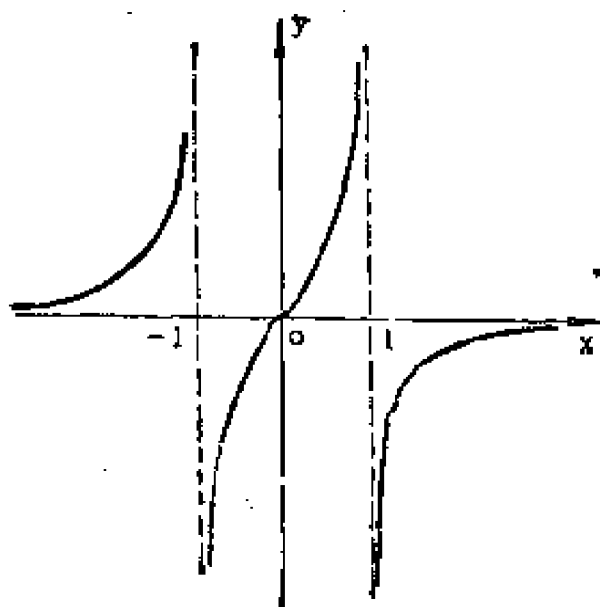


图 1.42

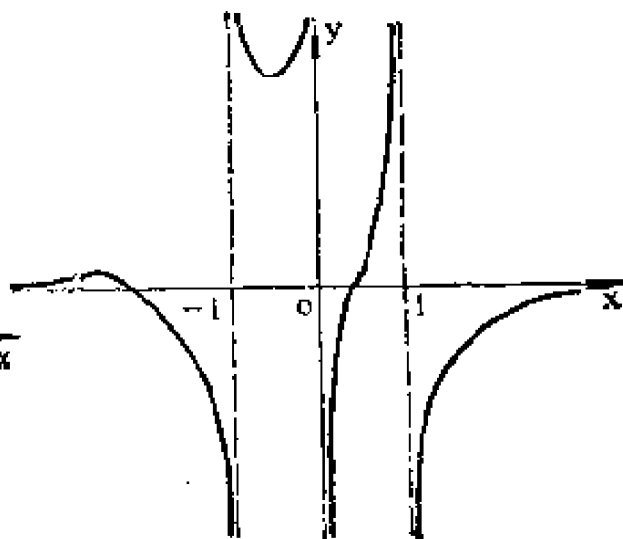


图 1.43

$$260. y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

解 将 $y = \frac{1}{1+x}$, $y = -\frac{2}{x}$ 及 $y = \frac{1}{1-x}$ 的图形叠加即得, 渐近线: $x = -1, x = 0, x = 1$ 及 $y = 0$, 如图 1.43 所示.

$$261. y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

解 图形关于 Oy 轴对称, 渐近线: $x = -1$, $x = 1$, $x = 0$ 及 $y = 0$. 如图1·44所示.

$$262. y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}.$$

$$\text{解 } y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} = 1 - \frac{2x}{x^2 + x - 2}.$$

将 $y = 1$ 及 $y = -\frac{2x}{(x+2)(x-1)}$ 的图形叠加即得. 如图1·45所示.

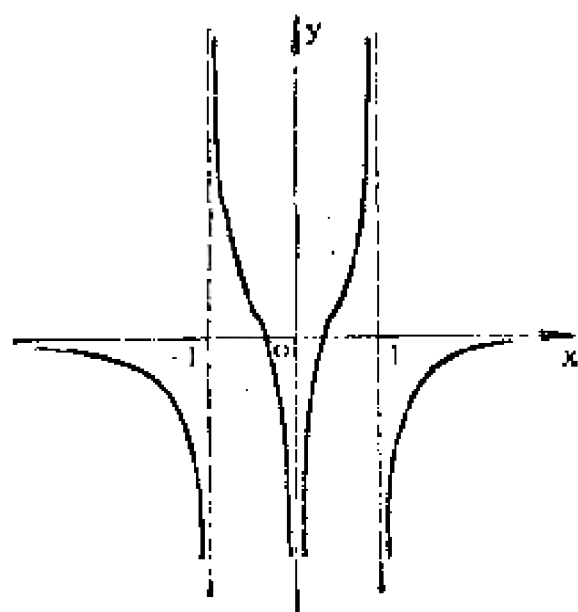


图 1·44

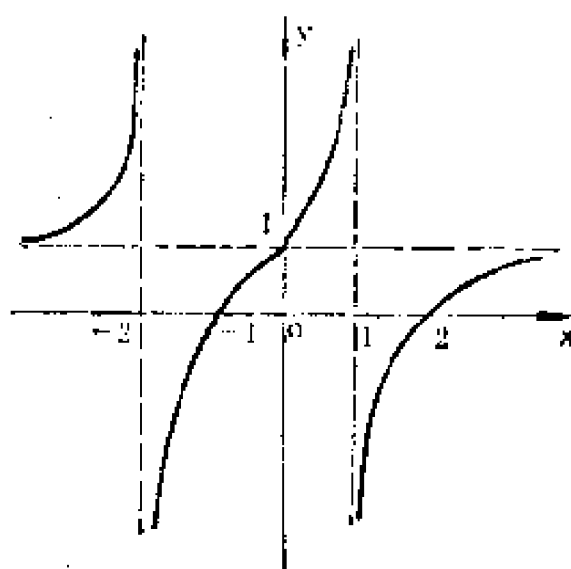


图 1·45

263. 把函数

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

化为下面的形状

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0},$$

然后作出它的略图. 研究例子

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{a}{a_1} x + \frac{a_1 b - a b_1}{a_1^2} + \frac{\frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} (a_1 b - a b_1)}{x - \left(-\frac{b_1}{a_1}\right)} \\ &= kx + m + \frac{n}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } k = \frac{a}{a_1}, \quad m = \frac{a_1 b - a b_1}{a_1^2},$$

$$x_0 = -\frac{b_1}{a_1},$$

$$n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} (a_1 b - a b_1).$$

如图1·46中黑粗线所示.

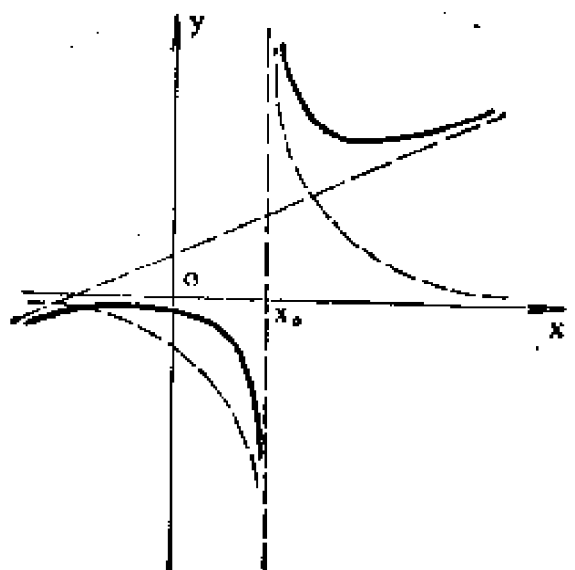


图 1·46

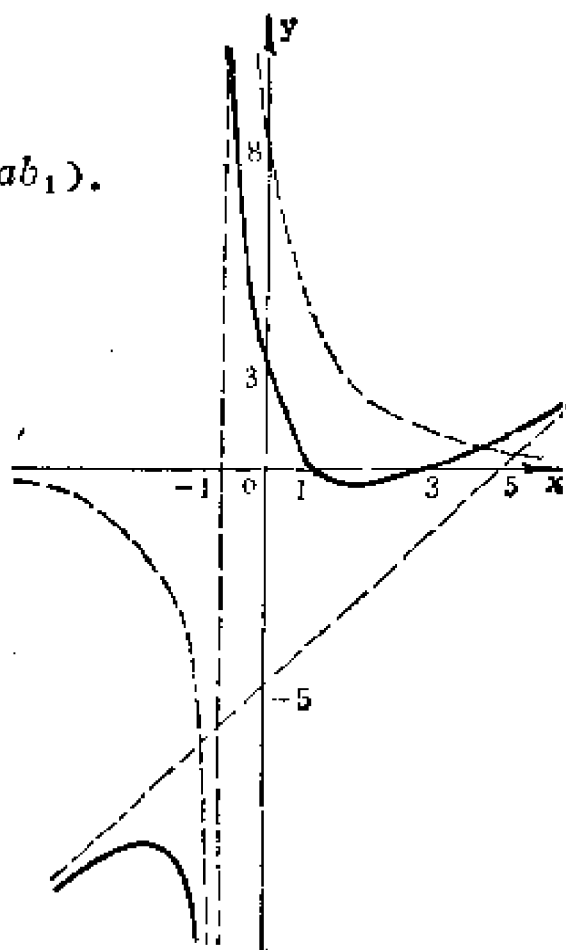


图 1·47

$$\text{对于 } y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} = x - 5 + \frac{8}{x + 1},$$

如图1·47中黑粗线所示。

264. 一质点与引力中心相距 x 。设当 $x=1$ 米时引力 $F=10$ 千克，作出质点的引力 F 的绝对值的图形（牛顿定律）。

解 由万有引力定律知

$$F = \frac{k}{x^2},$$

其中 k 为常数。

当 $x=1$ 时, $F=10$,

从而 $k=10$, 于是,

$$F = \frac{10}{x^2},$$

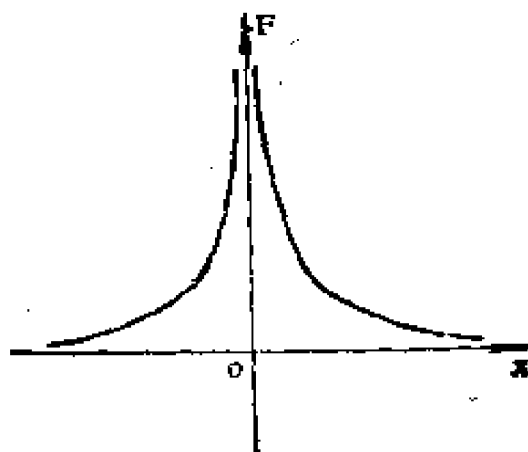


图 1·48

如图1·48所示。

265. 根据梵德耳瓦斯定律 (Закон Ван-дер-Ваальса), 当温度不变时, 真实气体的体积 v 和它的压力 p 以关系式

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c$$

相连系。

设 $a=2$, $b=0.1$ 及 $c=10$, 作出函数 $p=p(v)$ 的图形。

解 由于

$$p = \frac{10}{v - 0.1} - \frac{2}{v^2},$$

将 $p = \frac{10}{v-0.1}$ 及 $p = \frac{2}{v^2}$ 的图形叠加即得。如图

1·49所示。

作下列无理函数的图形：

266. $y = \pm \sqrt{-x-2}$ (抛物线)。

解 $y^2 = -(x+2)$, 如图1·50所示。

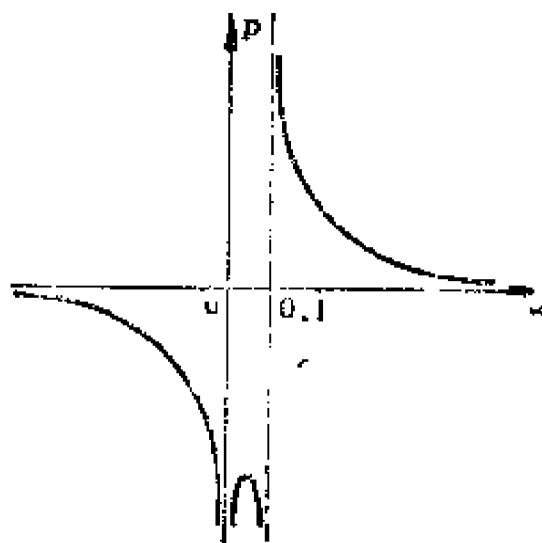


图 1·49

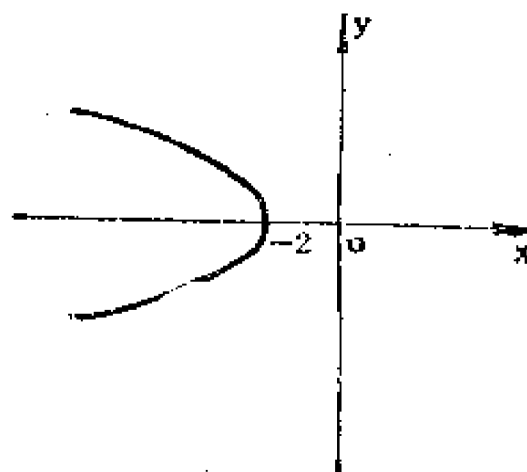


图 1·50

267. $y = \pm x\sqrt{x}$ (半立方抛物线)。

解 $y^2 = x^3$, 如图1·51所示。

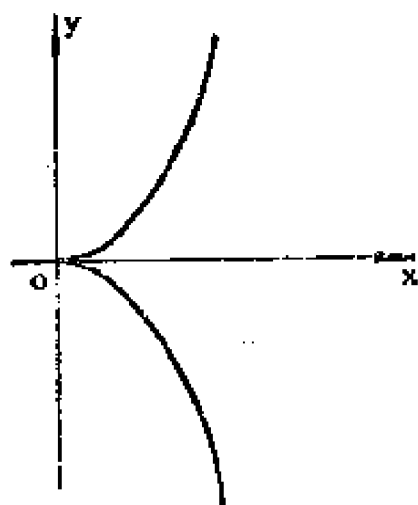


图 1·51

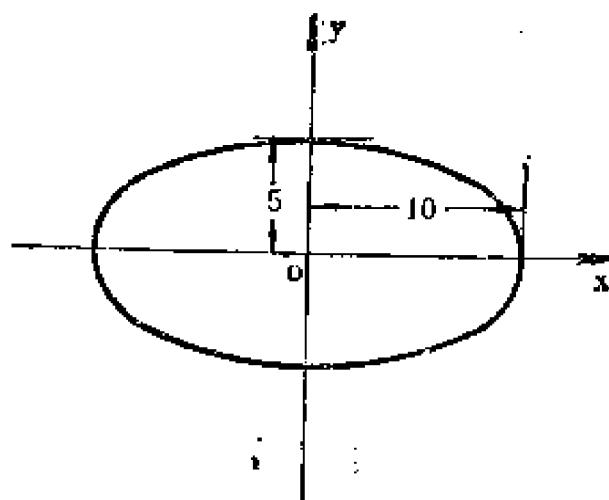


图 1·52

268. $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{100 - x^2}$ (椭圆) .

解 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, 如图1.52所示.

269. $y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$ (双曲线) .

解 $x^2 - y^2 = 1$, 如图1.53所示.

270. $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

解 $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$, $x = -1 + \frac{2}{1+y^2}$,

将 $x = -1$ 及 $x = \frac{2}{1+y^2}$ 的图形叠加即得, 如图1.54所示 ($-1 < x \leq +1$).

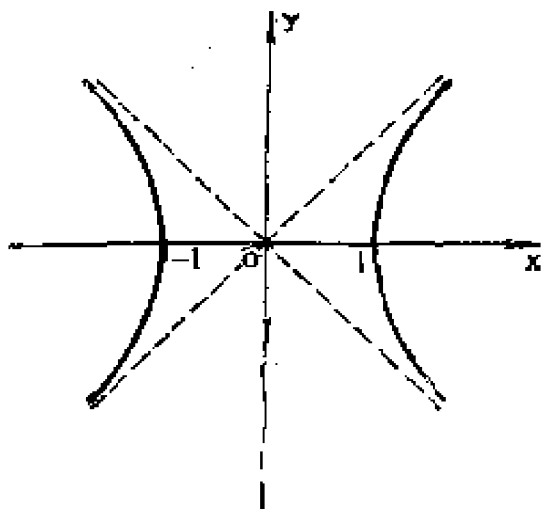


图 1.53

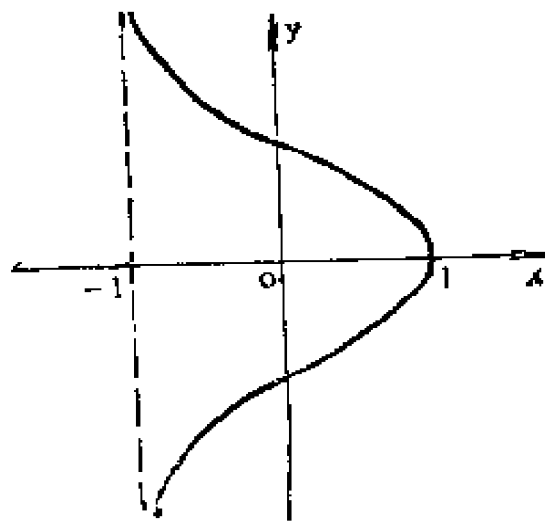


图 1.54

271. $y = \pm x \sqrt{100 - x^2}$.

解 当 $x = 0$, ± 10 时, $y = 0$.

将 $y=x$ 和 $y=\sqrt{100-x^2}$ 的图形上点的纵坐标相乘，即可描出图形，如图1·55所示。

272. $y = \pm x \sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (蔓叶线)。

解 $y^2(10-x)=x^3$ ，如图1·56所示。

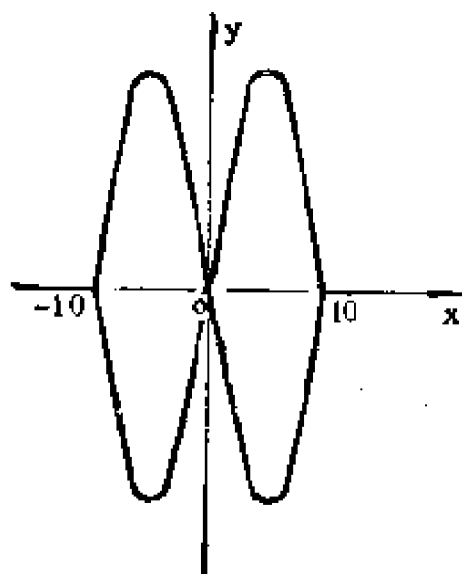


图 1·55

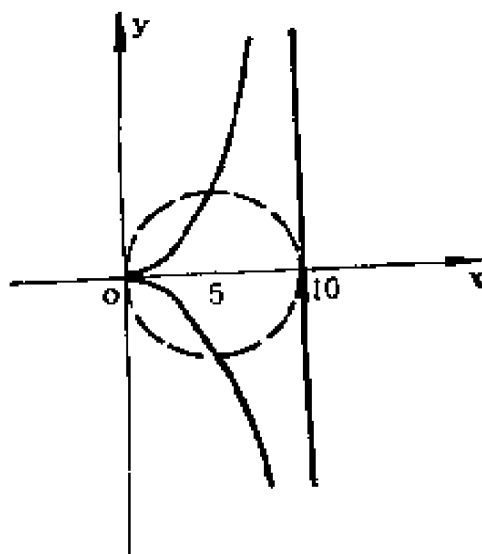


图 1·56

273. $y = \pm \sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$ 。

解 $y = \pm \sqrt{16-(x^2-5)^2}$ 。如图1·57所示。

274. 作幂函数

$$y = x^n$$

当：(a) $n=1, 3, 5$; (b) $n=2, 4, 6$ 时的图形。

解 如图1·58所示。

275. 作幂函数

$$y = x^n$$

当：(a) $n=-1, -3$; (b) $n=-2, -4$ 时的图形。

解 如图1·59所示。

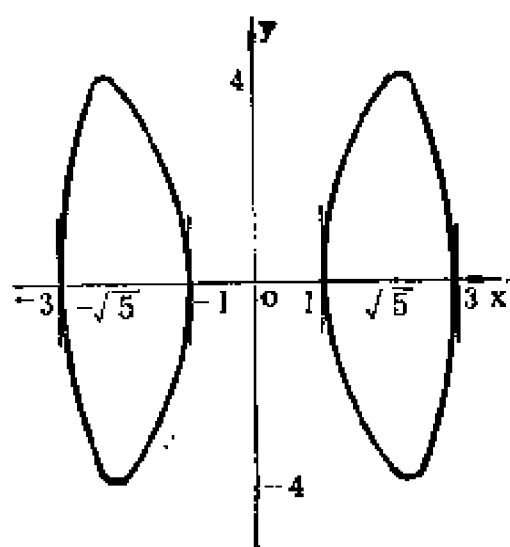


图 1.57

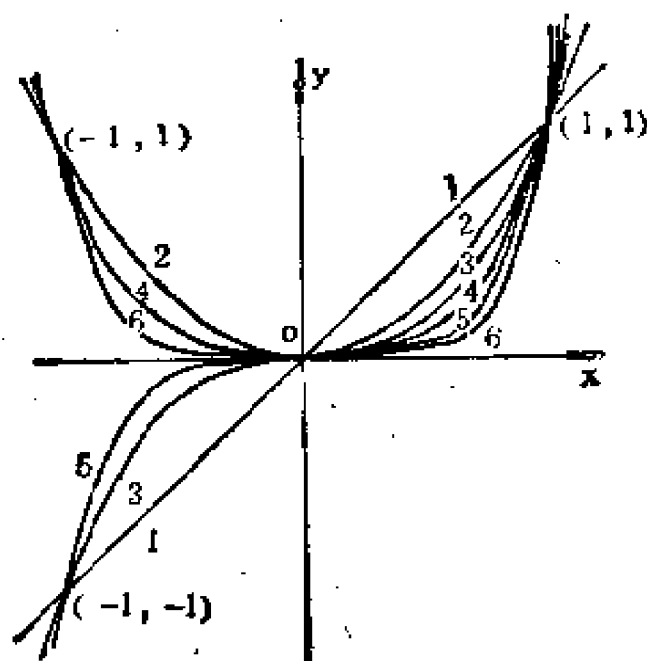


图 1.58

1. $y = \frac{1}{x},$

2. $y = \frac{1}{x^2},$

3. $y = \frac{1}{x^3},$

4. $y = \frac{1}{x^4}.$

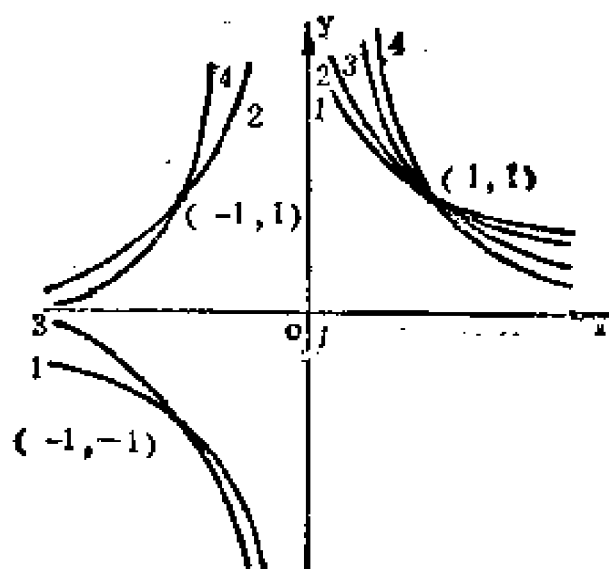


图 1.59

276. 作根式

$$y = \sqrt[m]{x}$$

当: (a) $m=2, 4;$

(b) $m=3, 5$ 时的图形.

解 如图1.60所示.

277. 设:

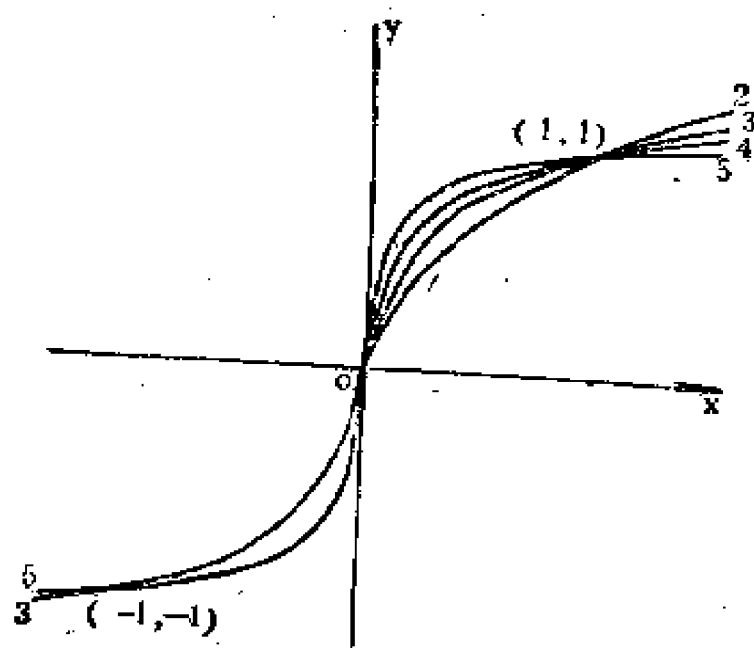


图 1.60

- (a) $m=2, k=1$; (б) $m=2, k=3$;
 (B) $m=3, k=1$; (Г) $m=3, k=2$;
 (A) $m=3, k=4$; (e) $m=4, k=2$;
 (ж) $m=4, k=3$.

作根式的图形

$$y = \sqrt[m]{x^k}.$$

解 将所给数据代入 $y = \sqrt[m]{x^k}$, 可知:

- (a) 即 $y = \sqrt{x}$ 的图形, 见图1.60.
 (б) $y = x\sqrt{x}$, 如图1.61所示: 1;
 (B) 即 $y = \sqrt[3]{x}$ 的图形, 见图1.60;
 (Г) $y = \sqrt[3]{x^2}$, 如图1.61所示: 2;
 (A) $y = x\sqrt[3]{x}$, 如图1.61所示: 3;
 (e) 即 $y = \sqrt{x}$ 的图形;

(ж) $y = \sqrt[3]{x^3}$, 如图1·61所示: 4.

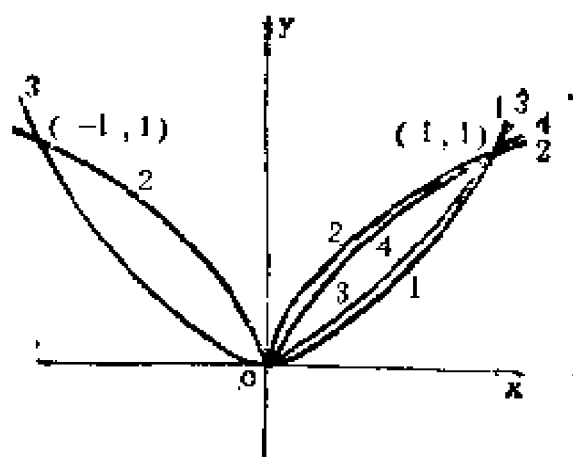


图 1·61

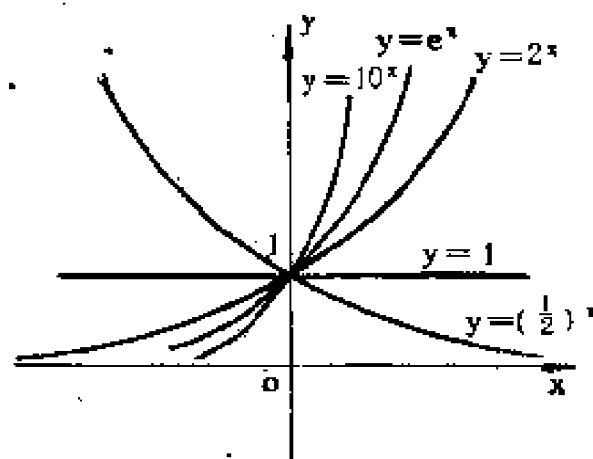


图 1·62

278. 作指数函数

$$y = a^x$$

当 $a = \frac{1}{2}, 1, 2, e, 10$ 时的图形.

解 如图1·62所示.

279. 作复合指数函数

$$y = e^{y_1}$$

的图形, 设:

(a) $y_1 = x^2$; (б) $y_1 = -x^2$; (в) $y_1 = \frac{1}{x}$;

(г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; (д) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; (е) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

解 (a) 如图1·63所示; (б) 如图1·64所示;

(в) 如图1·65所示; (г) 如图1·66所示;

(д) 如图1·67所示; (е) 如图1·68所示.

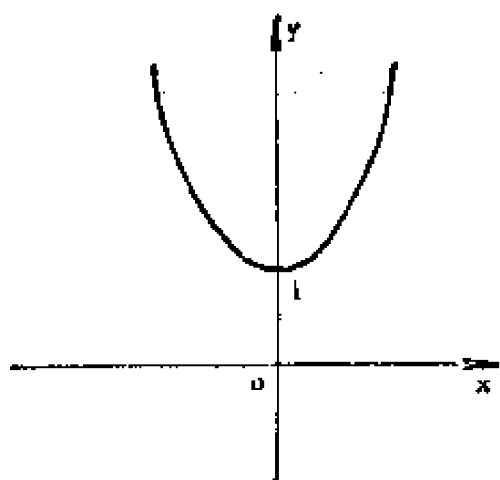


图 1·63

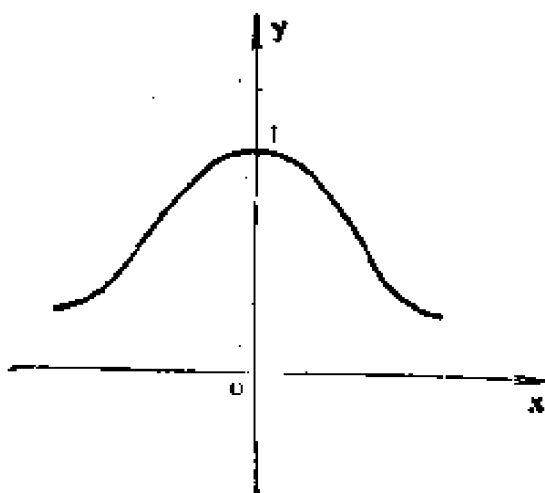


图 1·64

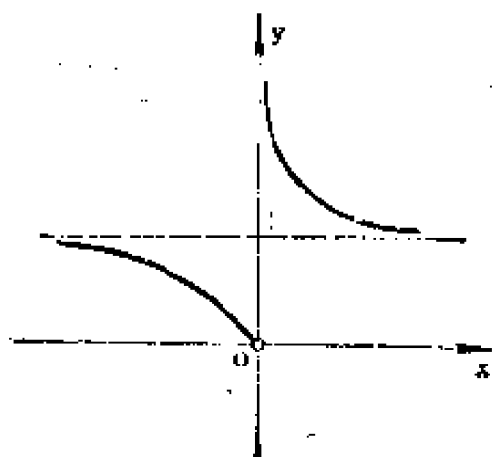


图 1·65

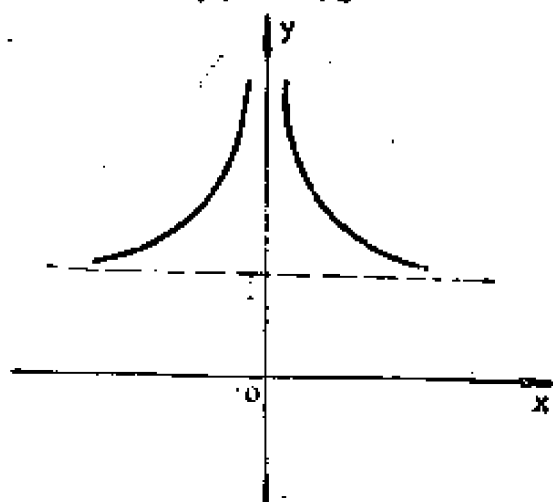


图 1·66

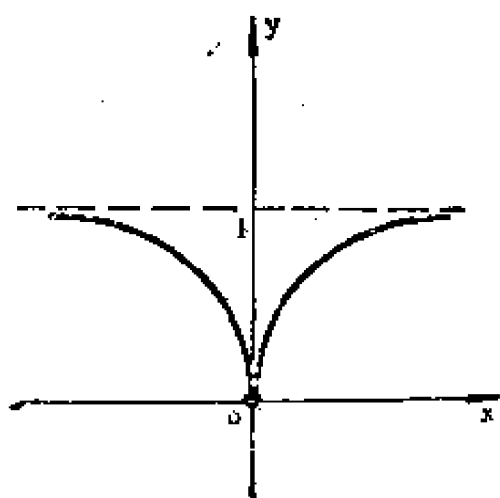


图 1·67

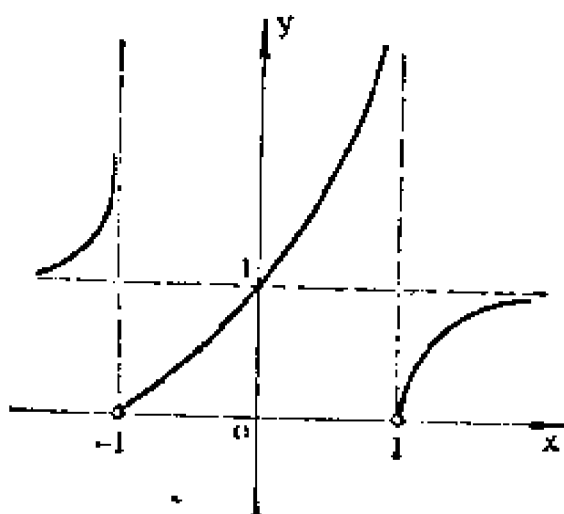


图 1·68

280. 作对数函数 $y = \log_a x$ 当 $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$ 时的图形。

解 如图1.69所示。

281. 作下列函数的图形：

(a) $y = \ln(-x)$; (b) $y = -\ln x$ 。

解 如图1.70所示。

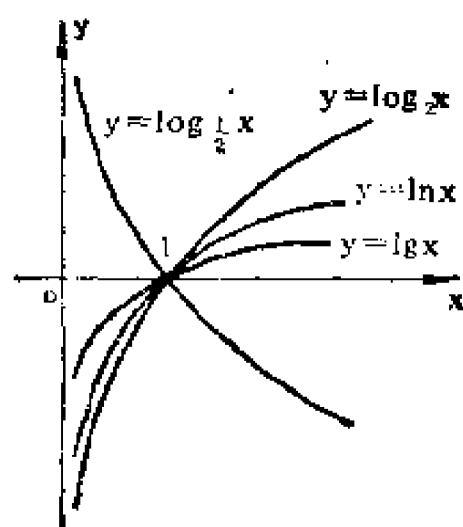


图 1.69

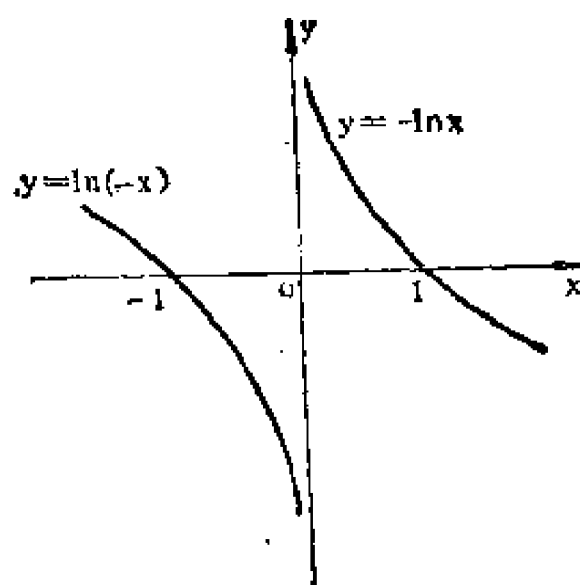


图 1.70

282. 设：

(a) $y_1 = 1 + x^2$; (b) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

(B) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; (Γ) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; (A) $y_1 = 1 + e^x$ 。

作出对数复合函数 $y = \ln y_1$ 的图形。

解 (a) 如图1.71所示；

(b) 存在域: $x > 3$ 或 $x < 1$ 。

$y = \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + 3\ln|x-3|$, 将此

三个函数的图形叠加即得，如图1·72所示；

(B) $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$ ，将 $y = \ln(1-x)$ 及 $y = -\ln(1+x)$ 的图形叠加即得，如图1·73所示 ($-1 < x < 1$)；

(C) $y = \ln \frac{1}{x^2}$ ，如图1·74所示，图形关于 Oy 轴对称；

(D) 如图1·75所示。

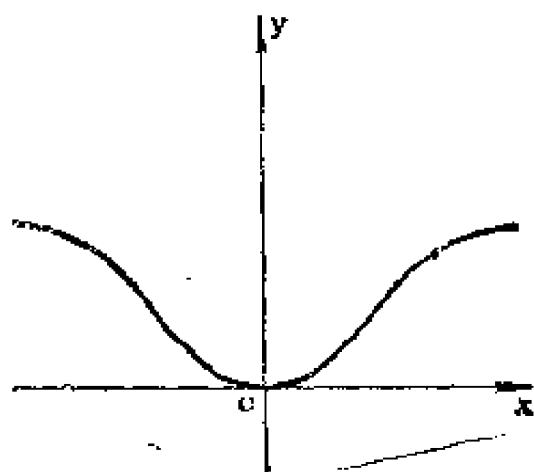


图 1·71

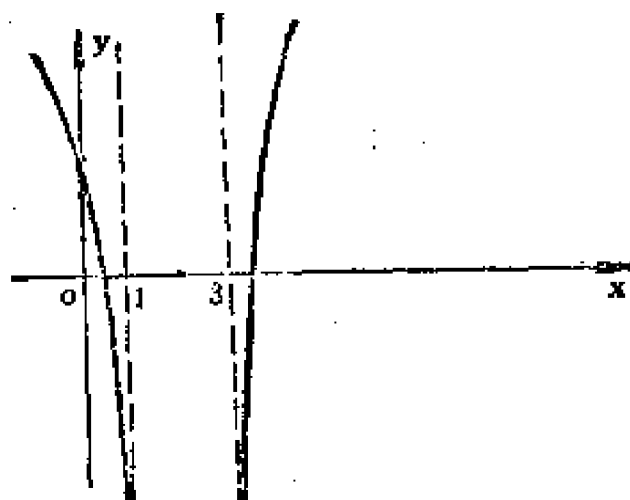


图 1·72

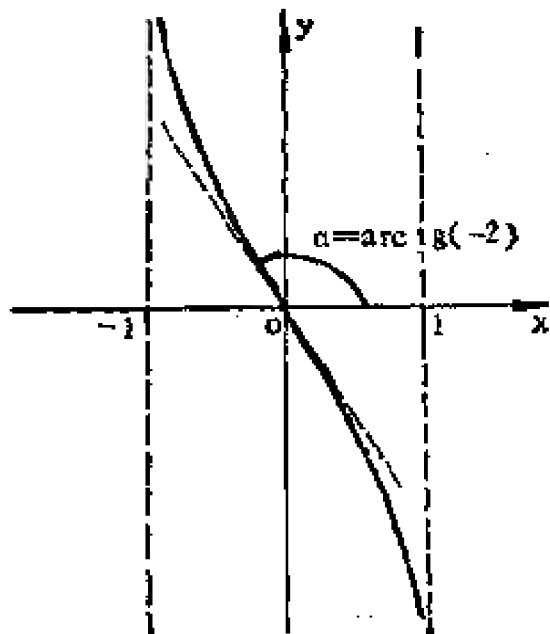


图 1·73

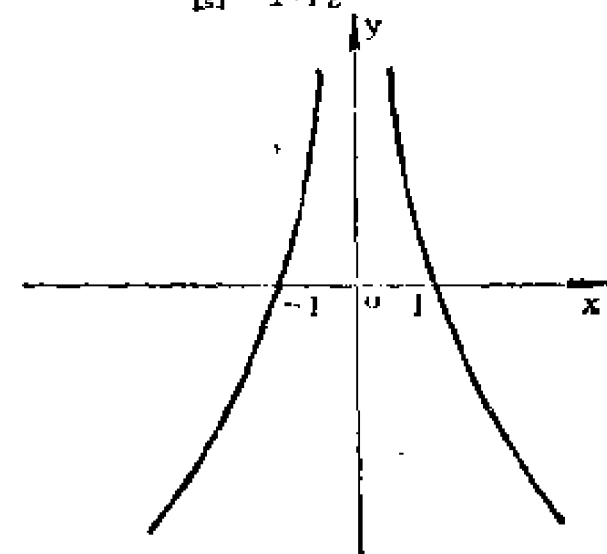


图 1·74

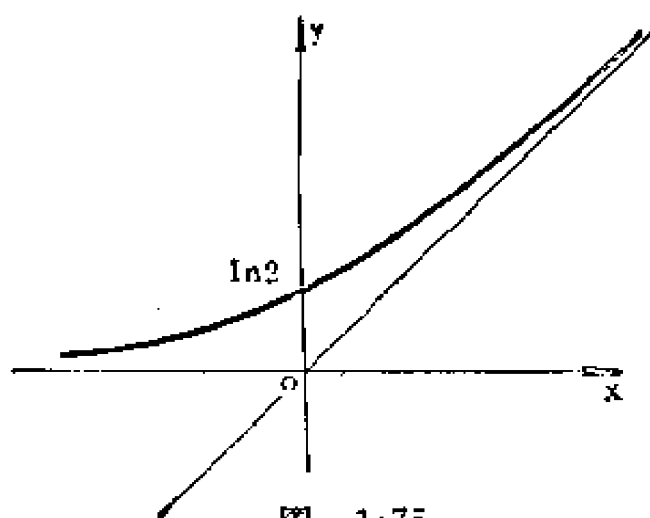


图 1.75

283. 作函数

$$y = \log_2 x$$

的图形

解 如图1.76所示.

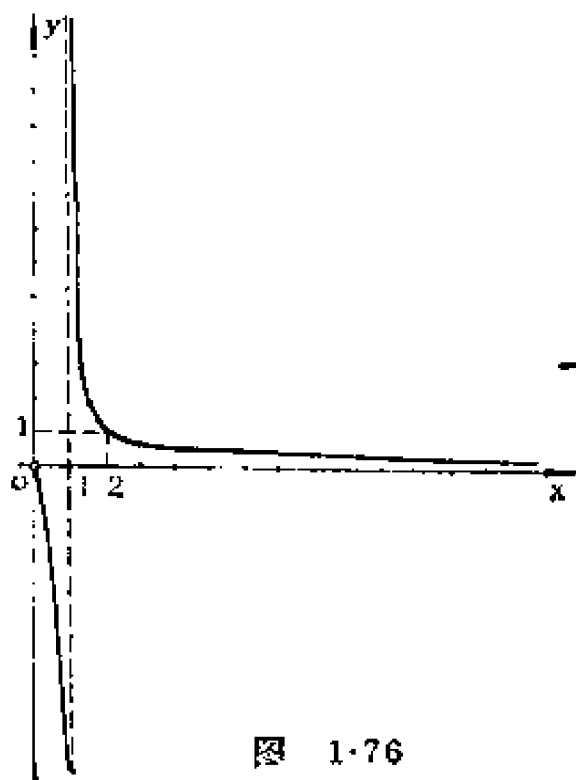


图 1.76

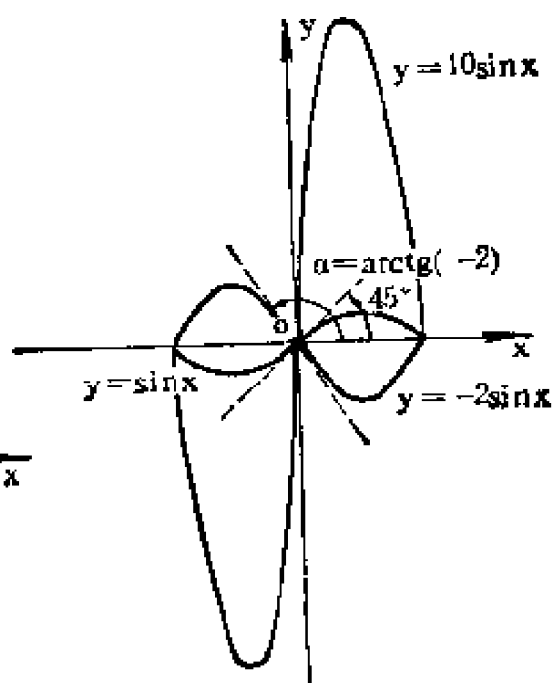


图 1.77

234. 作函数

$$y = A \sin x$$

当 $A=1, 10, -2$ 时的图形.

解 如图1.77所示.

235. 作函数

$$y = \sin(x - x_0)$$

当 $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 时的图形.

解 只要将 $y = \sin x$ 的图形向右平移距离 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 即得, 如图1.78所示.

$$1. y = \sin x; \quad 2. y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$3. y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right); \quad 4. y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$5. y = \sin(x - \pi).$$

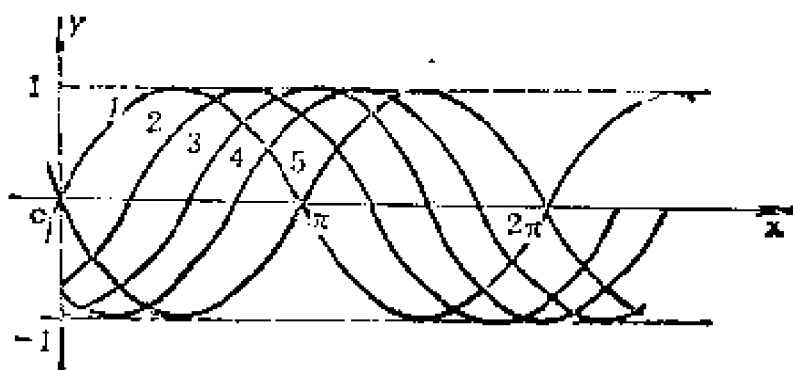


图 1.78

236. 作函数

$$y = \sin nx$$

的图形. 设 $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

解 如图1.79所示.

$$1. y = \sin x; \quad 2. y = \sin 2x;$$

$$3. y = \sin 3x; \quad 4. y = \sin \frac{1}{2}x;$$

$$5. y = \sin \frac{1}{3}x.$$

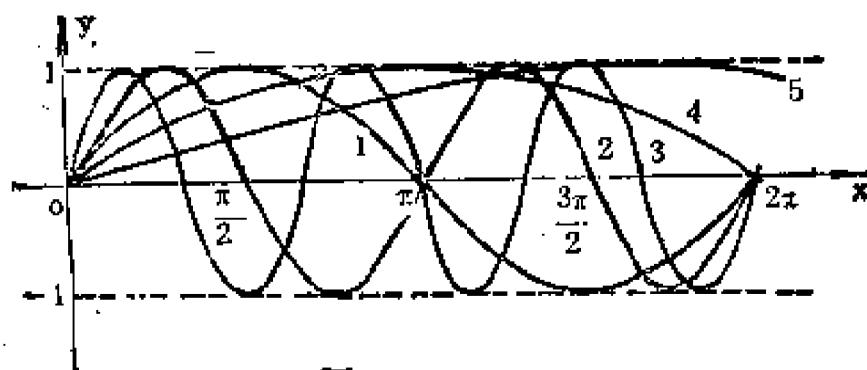


图 1.79

287. 把函数

$$y = a \cos x + b \sin x$$

化为下面的形状

$$y = A \sin(x - x_0),$$

再作它的图形.

研究例子

$$y = 6 \cos x + 8 \sin x.$$

解 $y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right),$

由于

$$\left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \text{ 及}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

故可令

$$\sin x_0 = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos x_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (1)$$

于是

$$y = A \sin(x - x_0) \quad (2)$$

其中

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \quad (a^2+b^2 \neq 0), x_0 \text{ 适合(1)式}.$$

(2)式图形是这样作的：先把正弦曲线 $y = \sin x$ 沿 Ox 轴平移距离 $|x_0|$ (若 $x_0 > 0$ 时, 则向右移; 若 $x_0 < 0$ 时向左移.), 然后再从纵轴“伸长” A 倍 (当 $A < 1$ 时为压缩 $\frac{1}{A}$ 倍)。

对于例子

$$y = 6 \cos x + 8 \sin x,$$

$$A = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\sin x_0 = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos x_0 = \frac{-4}{5},$$

$$x_0 = -\arctg \frac{3}{4}, \text{ 如图}$$

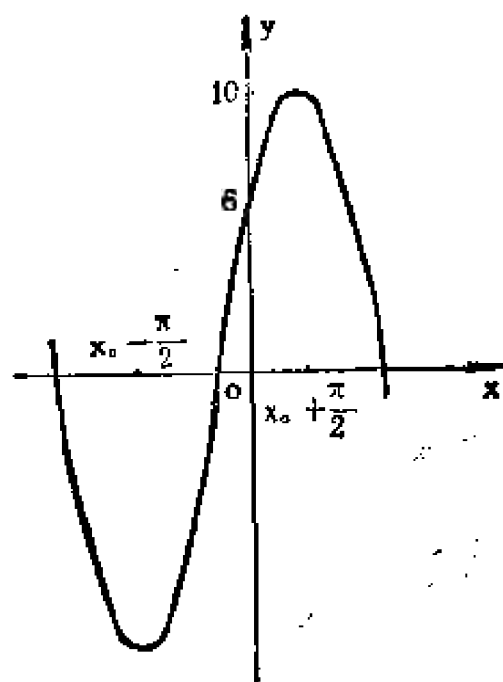


图 1-80

1-80所示。

作下列三角函数的图形：

288. $y = \cos x.$

解 如图1·81所示.

289. $y = \operatorname{tg} x$.

解 如图1·82所示.

290. $y = \operatorname{ctg} x$.

解 如图1·83所示.

291. $y = \sec x$.

解 如图1·84所示.

292. $y = \csc x$.

解 如图1·85所示.

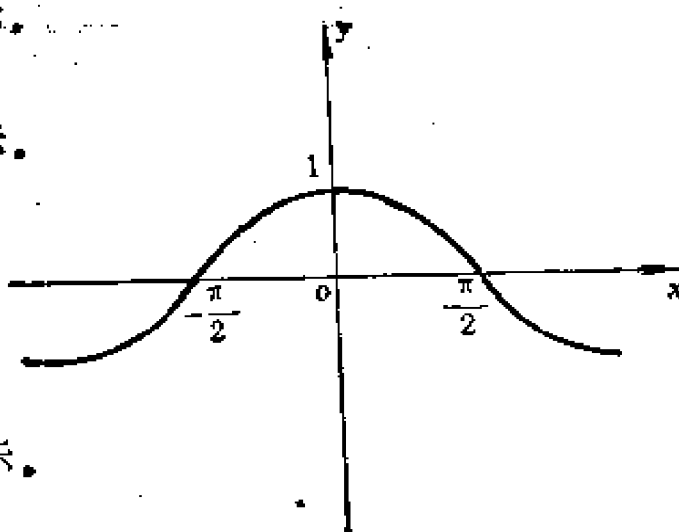


图 1·81

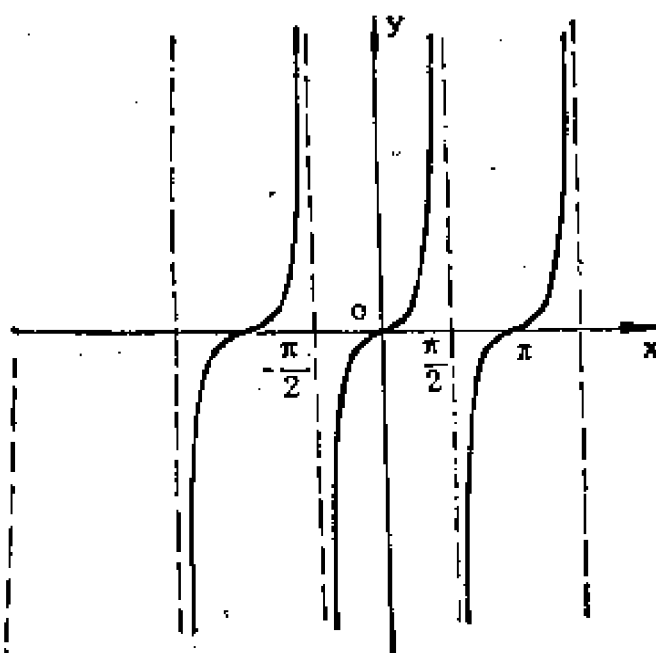


图 1·82

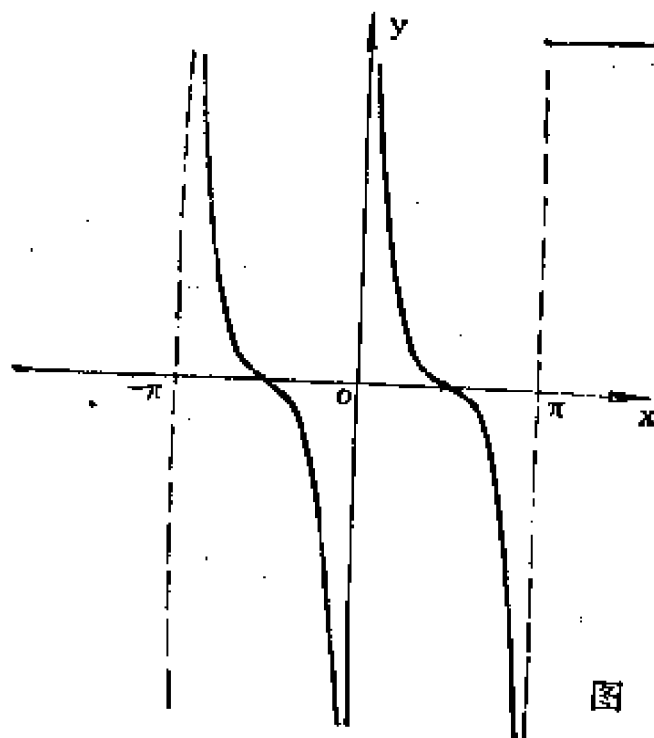


图 1·83

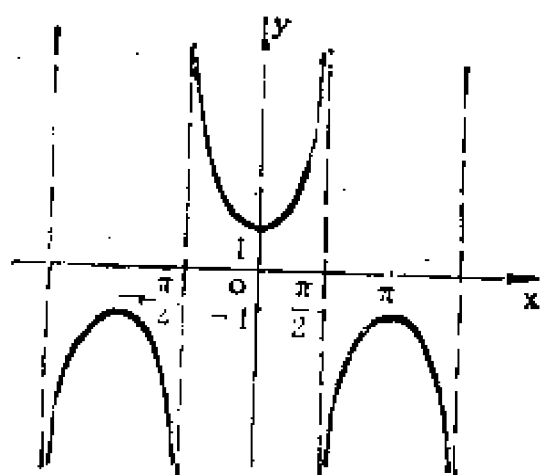


图 1-84

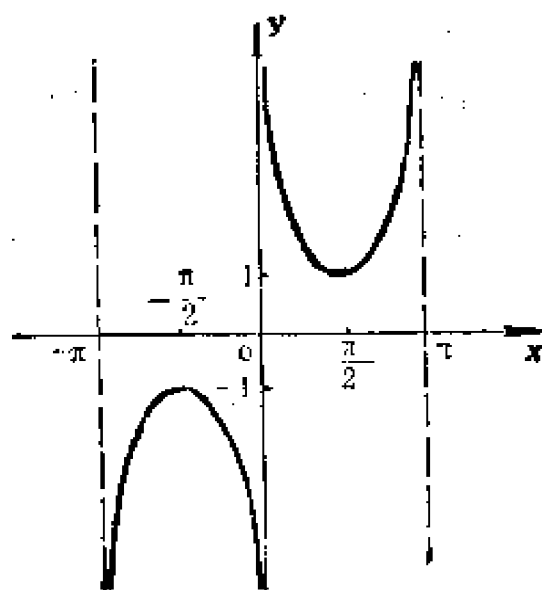


图 1-85

293. $y = \sin^2 x$.

解 如图1-86所示.

294. $y = \sin^3 x$.

解 如图1-87所示.

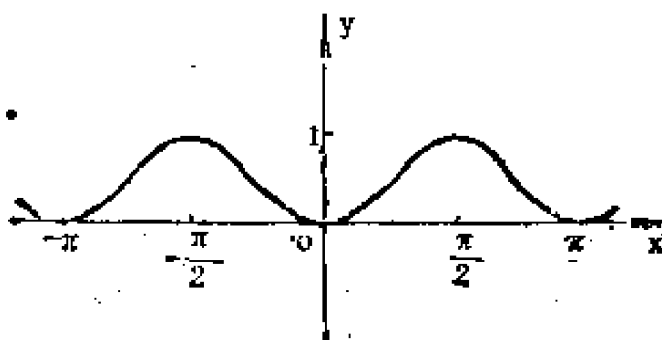


图 1-86

295. $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

解 如图1-88所示.

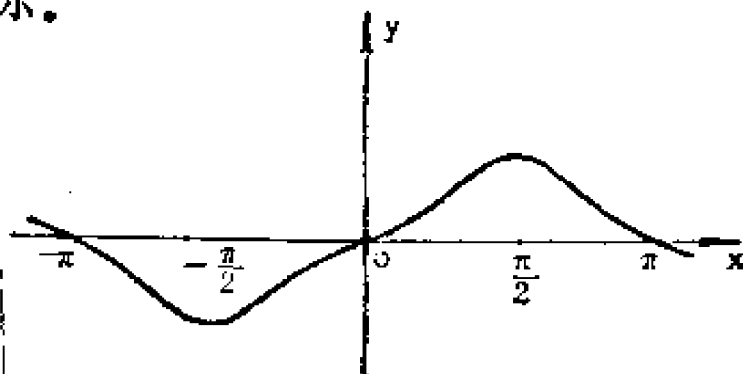


图 1-87

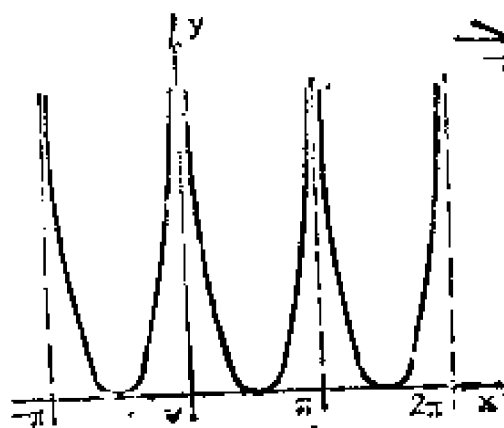


图 1-88

296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 周期为 π . 将 $y = \frac{1}{2} \cos 2x$ 及 $y = -\frac{1}{2} \cos 4x$ 的图形叠加即得. 如图 1.89 所示.

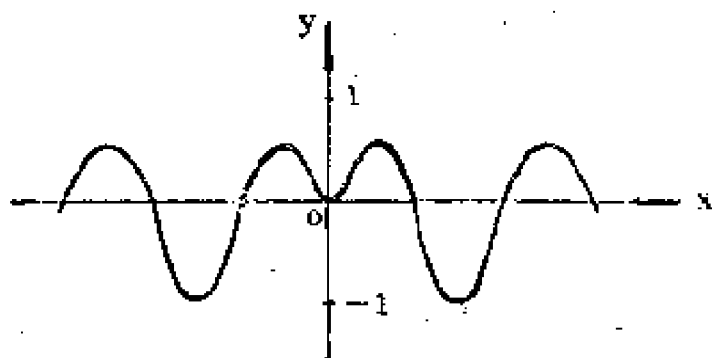


图 1.89

297. $y = \pm \sqrt{\cos x}$.

解 图形关于 Ox 轴及 Oy 轴均对称, 是以 2π 为周期的周期函数, 如图 1.90 所示.

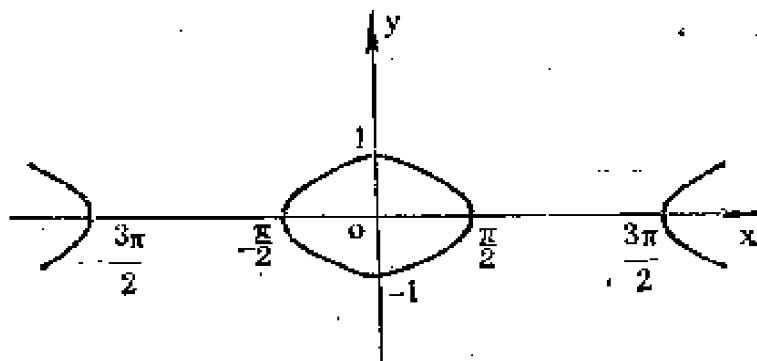


图 1.90

作下列函数的图形:

298. $y = \sin x^2$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 因为

$$f(\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{2\pi}) = \cdots = f(\sqrt{n\pi}) = 0.$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}) = 0$, 所以曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成的叙列的极限为零.

由不等式 $\sin x^2 \leq x^2$, 我们知道这条曲线位于抛物线 $y = x^2$ 的下方. 如图1.91所示.

299. $y = \sin \frac{1}{x}$.

解 $-1 \leq y \leq 1$. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $y = 0$ 为渐近线.

当 x 由 $+\infty$ 减小到 $\frac{2}{\pi}$ 时, 则 $\frac{1}{x}$ 由 0 增大到 $\frac{\pi}{2}$, 而 y 由 0 增到 1; 但当 x 由 $\frac{2}{\pi}$ 减小到 $\frac{2}{3\pi}$, 则 $\frac{1}{x}$ 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$, 而 y 由 1 减小到 -1. 当 $x = \frac{1}{\pi}$ 时, $y = 0$ 等. 因为 y 是奇函数, 故图形关于原点对称. 当 x 无限接近 0 时, 函数在 -1 与 1 之间摆动, 并且凝聚于 0 点, 而在点 $x = 0$ 处, 函数 y 没有定义. 如图1.92所示.

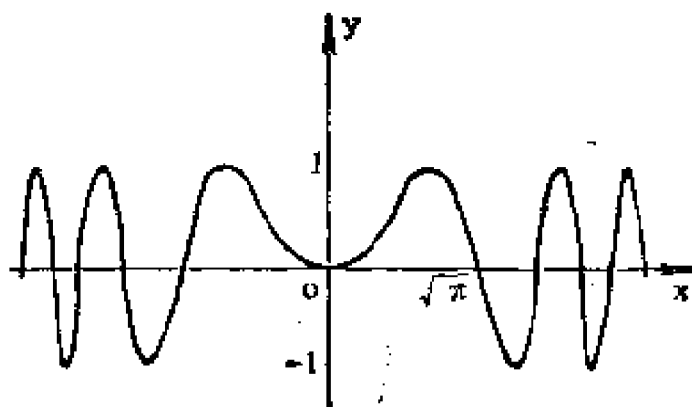


图 1.91

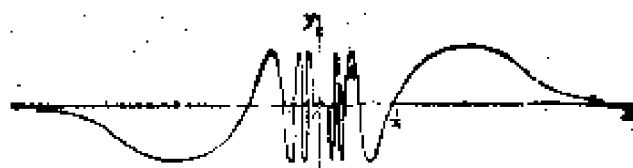


图 1.92

300. $y = x \cos \frac{\pi}{x}$.

解 $-x \leq y \leq x$. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$.

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

当 $x > 2$ 时, y 单调增加。因为 y 是奇函数, 故图形关于原点对称。而在点 $x = 0$, 函数 y 没有定义。

当 x 无限接近 0 时, 函数作无限次衰减摆动, 并凝聚于 O 点。如图 1.93 所示。

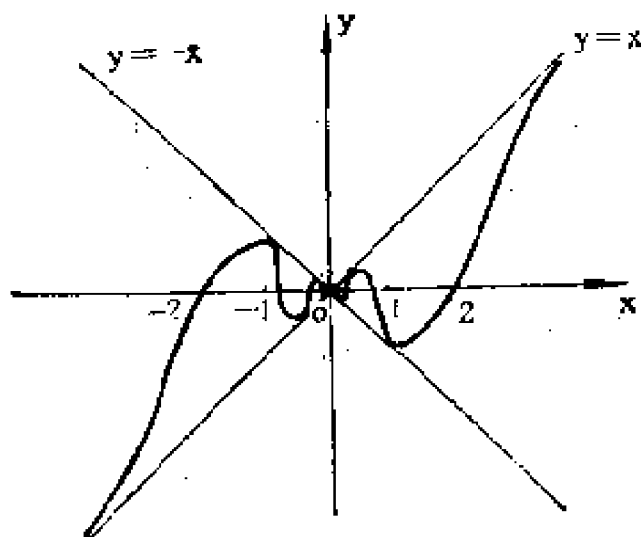


图 1.93

301. $y = \lg \frac{\pi}{x}$.

解 当 $x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$.

当 $x \rightarrow \frac{2}{2k+1} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y \rightarrow \infty$.

当 $x > 2$ 时, $y > 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

因为 y 为奇函数, 故图形关于原点对称.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 图形凝聚于 O 点, 而在点 $x = \frac{2}{2k+1}$ 及 0 , 函数 y 是没有定义的.

如图 1.94 所示.

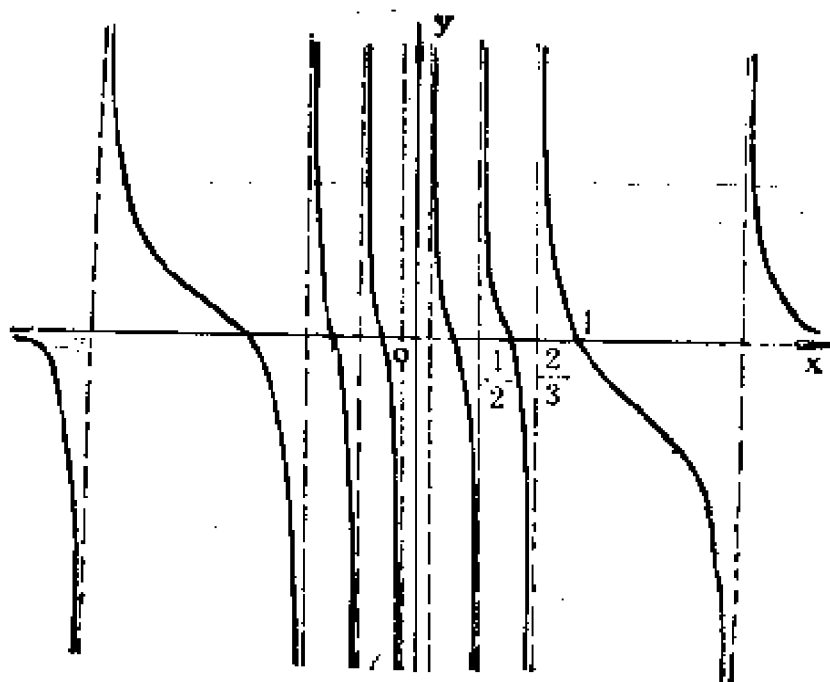


图 1.94

302. $y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$.

解 先作 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的图形。因为 y 为偶函数，故图形关于 Oy 轴对称。

当 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = \pm x$ 。

当 $x = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$ 。

当 $x > \frac{2}{\pi}$ 时, y 单调增加, 且有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \quad (*)$$

如图1.95所示 (在点 $x=0$ 无定义)。

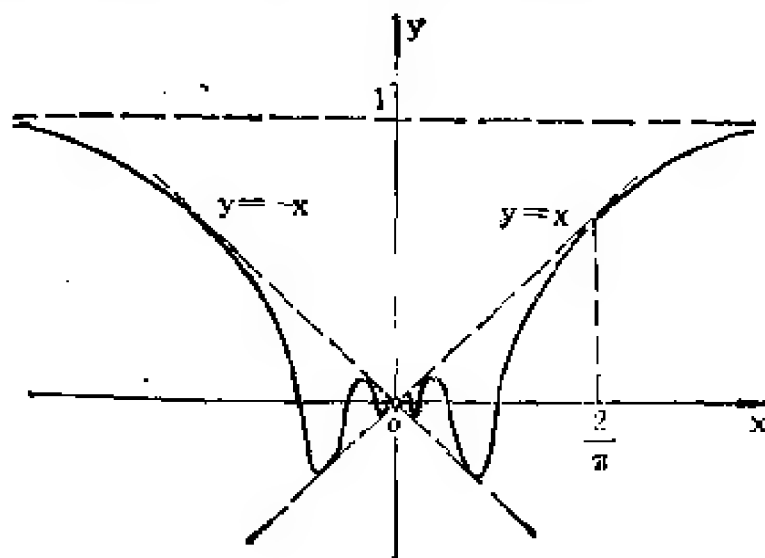


图 1.95

其次, 再将函数 $y = 2x$ 及 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的图形“叠加”, 即得

$$y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$$

的图形, 如图 1.96 所示.

*) 此结果参看本章 §5.

303. $y = \pm \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\pi}{x}.$

解 图形关于原点及 Oy 轴, Ox 轴均对称. 由于

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y$$

$$\leq \sqrt{1-x^2}$$

$$(|x| \leq 1),$$

故图形位于圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内.

将函数 $y = \pm \sqrt{1-x^2}$

与 $y = \sin \frac{\pi}{x}$ 的纵

坐标对应相乘,

即可描出所求的图形.

如图 1.97 所示.

304. $y = \frac{\sin x}{x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1.$

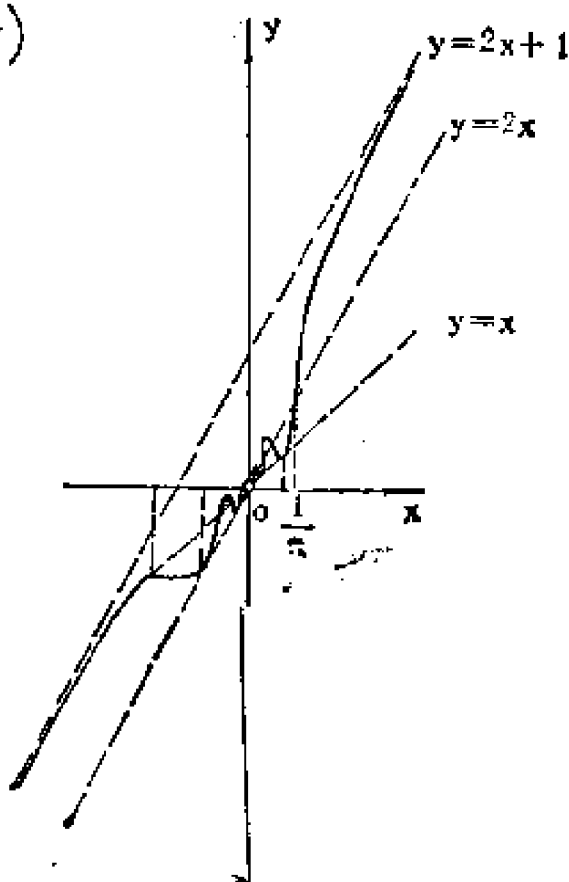


图 1.96

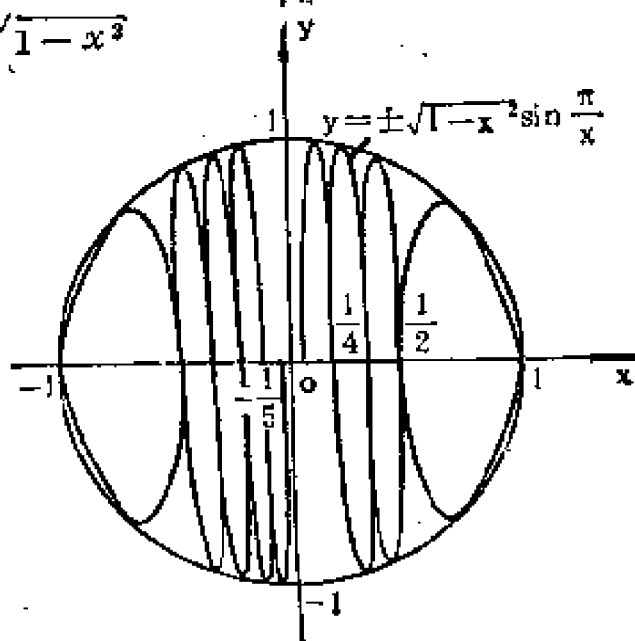


图 1.97

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, 由于 $|y| \leq \frac{1}{|x|}$, 故图形在 $y = -\frac{1}{x}$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 之间. 又图形关于 Oy 轴对称. 当 $x = k\pi$ 时, $y = 0$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

如图1.98所示.

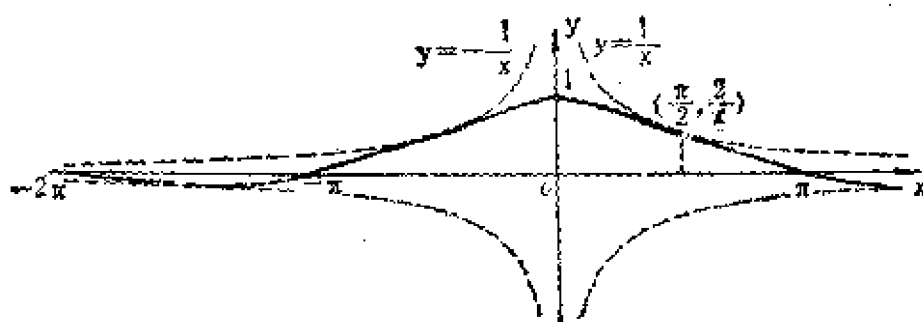


图 1.98

305. $y = e^x \cos x$.

解 由于 $-e^x \leq y \leq e^x$, 故图形在 $y = e^x$ 及 $y = -e^x$ 之间.

当 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cos x$ 却不存在.

如图1.99所示.

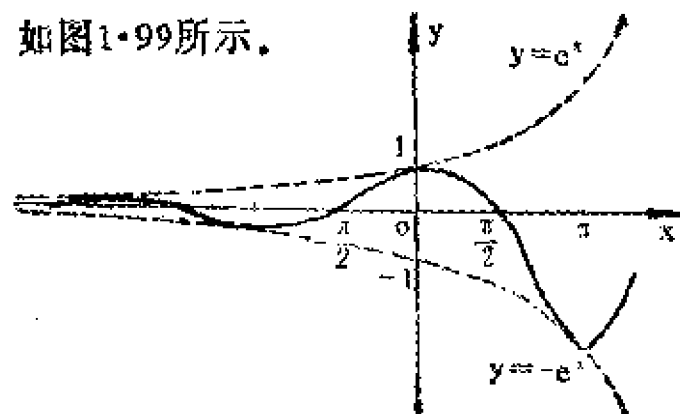


图 1.99

306. $y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$.

解 当 $2k \leq x \leq (2k+1)$ ($k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$) 时, y 值才确定. 当 $k=2k+\frac{1}{2}$ 时, $y = \pm 2^{-x}$.

图形关于 Ox 轴对称. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ 不存在.

如图 1.100 所示.

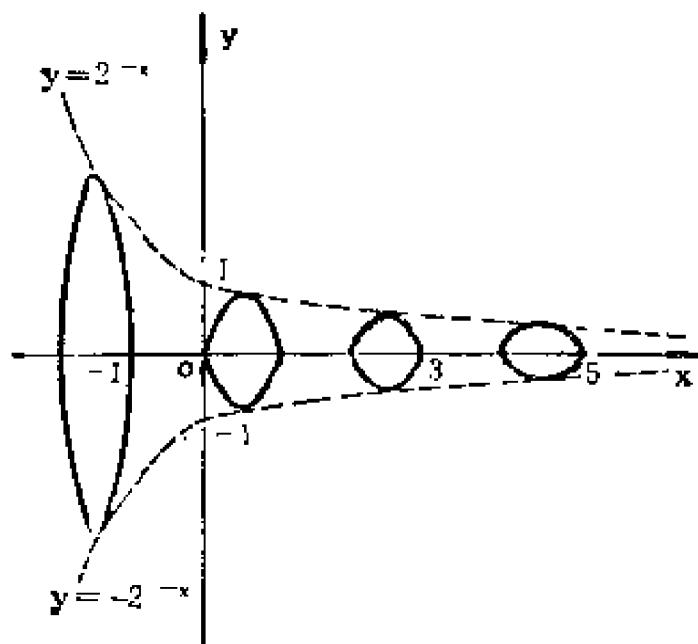


图 1.100

307. $y = \frac{\cos x}{1+x^2}$.

解 $-\frac{1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}$,

图形在 $y = -\frac{1}{1+x^2}$ 及 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 之间, 且关于 Oy 轴对称.

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.

如图 1.101 所示.

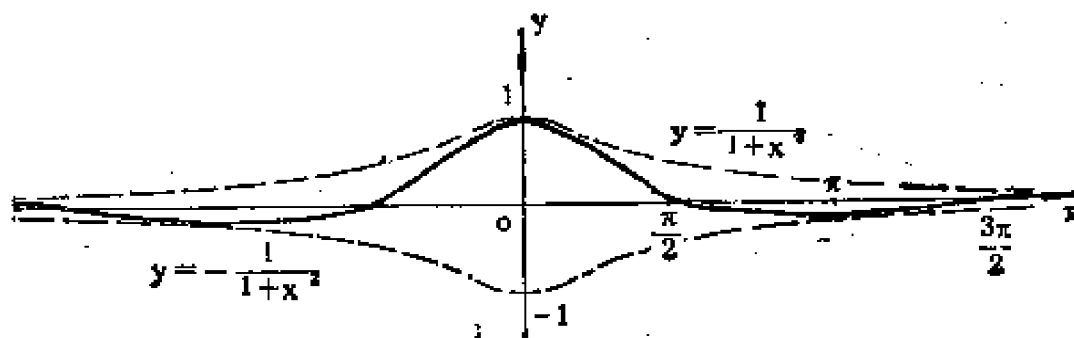


图 1 101

308. $y = \ln(\cos x)$.

解 存在域是使 $\cos x > 0$ 的开区间

$$\left((4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2} \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的全体. 函数 y 是以 2π 为周期的周期函数. 在区间

$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 内, y 单调增加, 且 $y < 0$. 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内,

y 单调减小, $y < 0$. 最大值是 $y = \ln \cos 0 = 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y = -\infty$. 如图 1.102 所示.

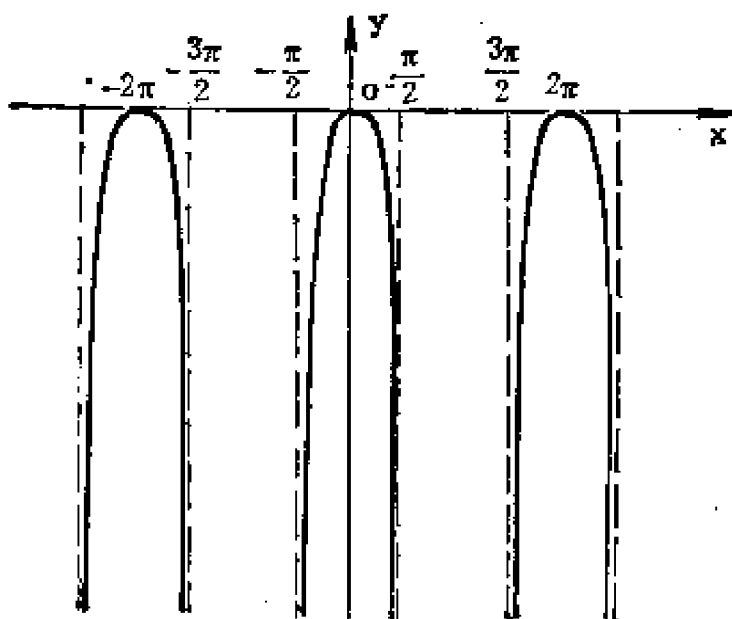


图 1 102

309. $y = \cos(\ln x)$.

解 存在域为数 $x > 0$ 的全体.

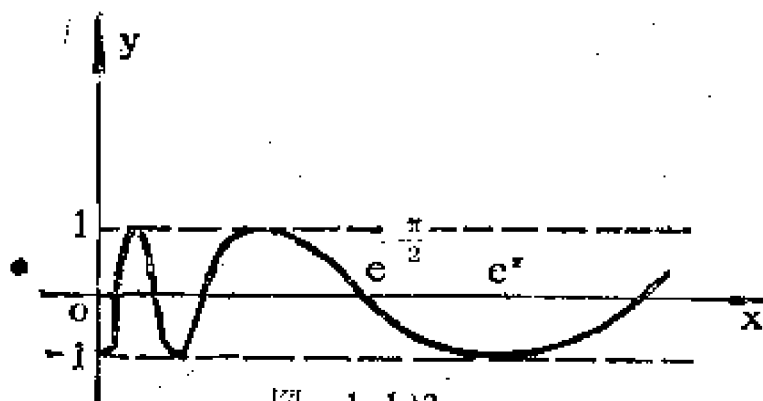
当 $x = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y=0$.

当 $x = e^{2k\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y=1$;

而当 $x = e^{(2k+1)\pi}$ 时, $y=-1$.

图形始终在直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 之间摆动, 而且越靠近原点时, 摆动越密.

如图 1.103 所示. (两轴所取的单位不一致).



310. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $y > 0$.

函数 y 是以 2π 为周期的周期函数.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, y 单调减少;

当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, y 单调增加. 又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow \pi-0} y = +\infty.$$

$y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 为区间 $(0, \pi)$ 内, 函数 y 的最小值.

同理, x 由 π 到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, y 由 0 增到 $\frac{1}{e}$; 而 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π

时, y 由 $\frac{1}{e}$ 减到 0. $\lim_{x \rightarrow \pi+0} y = \lim_{x \rightarrow 2\pi-0} y = 0$.

如图 1.104 所示.

作下列反三角函数的图形:

311. $y = \arcsin x$.

解 如图 1.105 所示的 AB 段曲线.

312. $y = \arccos x$.

解 如图 1.106 所示的 AB 段曲线.

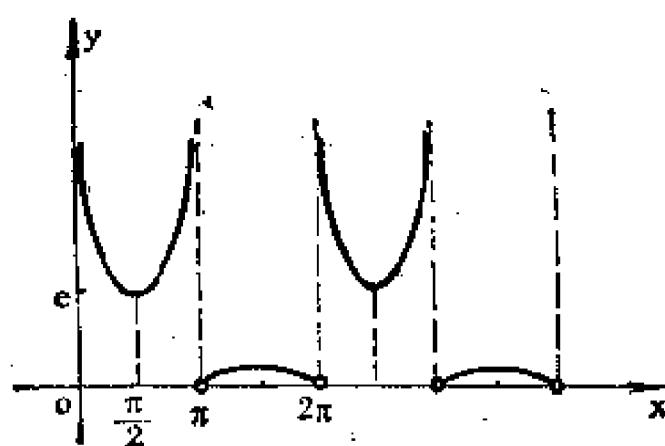


图 1.104

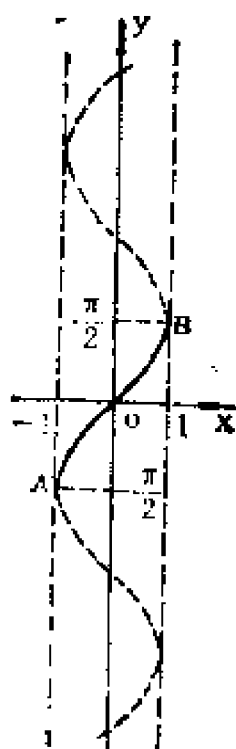


图 1.105

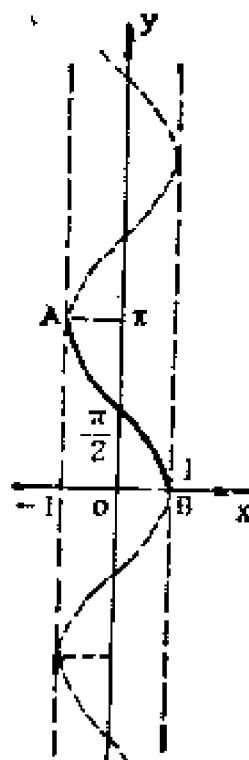


图 1.106

313. $y = \operatorname{arctg} x$.

解 如图1·107所示的AB段曲线.

314. $y = \operatorname{arccotg} x$.

解 如图1·108所示的AB段曲线.

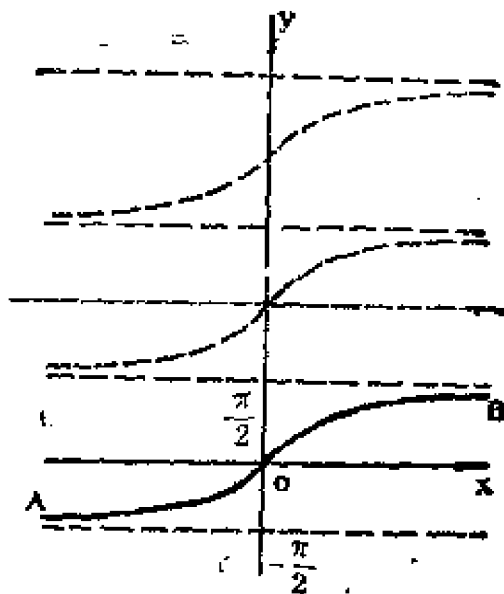


图 1·107

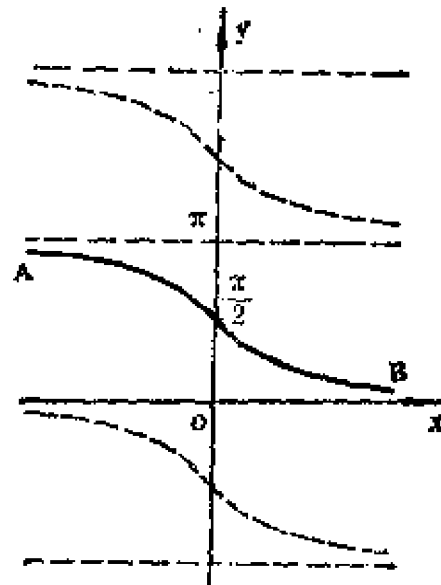


图 1·108

315. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

解 图形关于原点对称.

存在域是区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$.

当 $1 \leq x < +\infty$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以, y 也是减函数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \frac{\pi}{2}$$

$$= y|_{x=1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} y$$

$$= 0.$$

如图1·109所示.

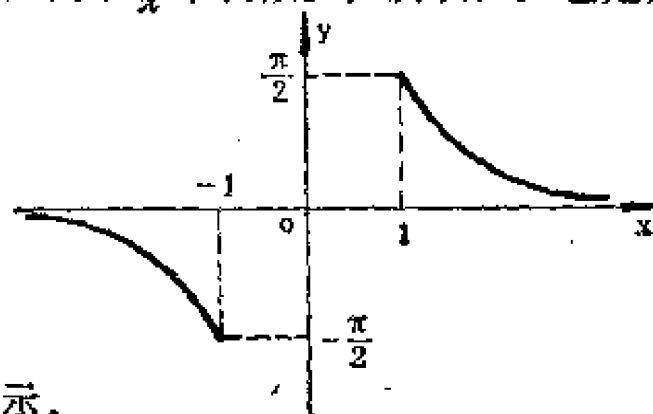


图 1·109

316. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

解 存在域是区间 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$.

当 $1 \leq x < +\infty$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以, y 是增函数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\pi}{2}.$$

同理, 当 $-\infty < x \leq -1$ 时, y 单调增加; 且有

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{\pi}{2}.$$

如图1.110所示.

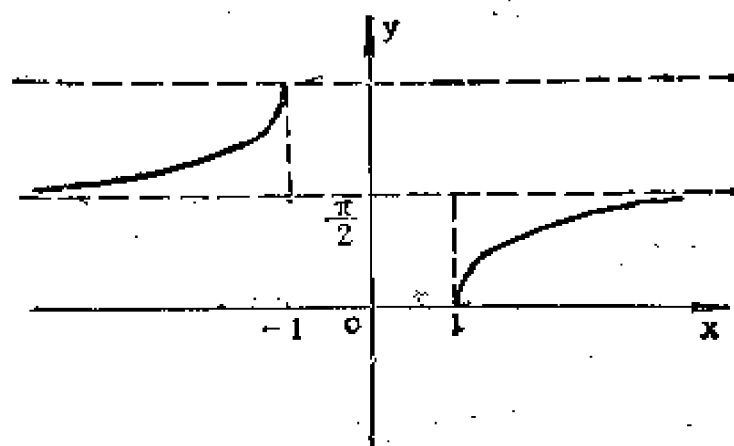


图 1.110

317. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

解 图形关于原点对称.

当 $x > 0$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以, y 是减函数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0.$$

如图1.111所示,

318. $y = \arcsin(\sin x)$.

解 $\sin y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$

因此, 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x$;

当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = \pi - x$;

当 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ 时, $y = x - 2\pi.$

一般地,

当 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = x - 2k\pi$;

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

而当 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = (\pi - x) + 2k\pi.$

如图1.112所示.

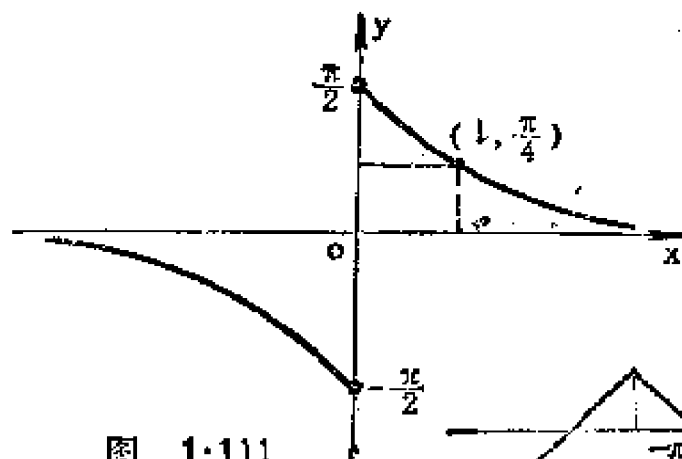


图 1.111

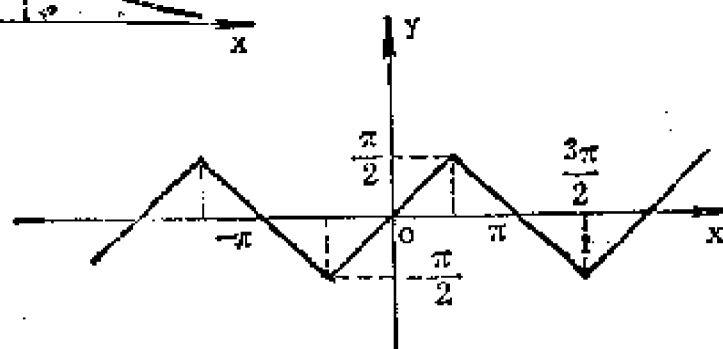


图 1.112

319. $y = \arcsin(\cos x)$.

解 $\sin y = \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$

因此, 当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, $y = \frac{\pi}{2} + x$;

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $y = \frac{\pi}{2} - x.$

一般地,

当 $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ 时, $y = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2k\pi$
 ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

而当 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ 时, $y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi.$

如图1.113所示.

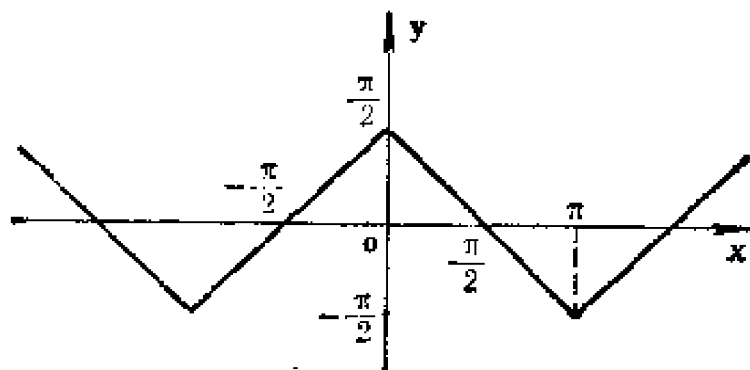


图 1.113

320. $y = \arccos(\cos x)$.

解 $\cos y = \cos x, \quad 0 \leq y \leq \pi.$

因此, 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $y = x$;

当 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 时, $y = 2\pi - x$;

当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, $y = -x.$

一般地,

当 $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ 时, $y = -x + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

而当 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ 时, $y = x - 2k\pi$.

如图1.114所示.

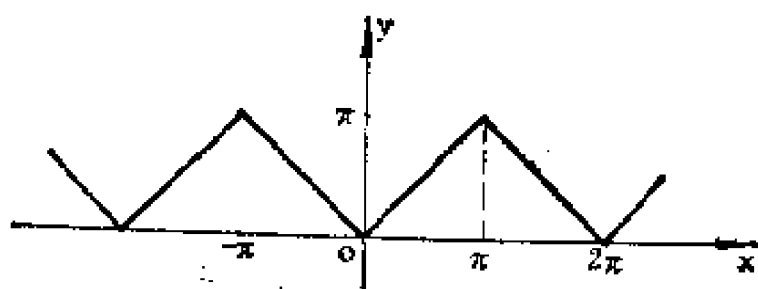


图 1.114

321. $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$.

解 $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$

因此, 当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x$;

当 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = x - \pi$;

当 $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$ 时, $y = \pi + x$.

一般地,

当 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时, $y = x - k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

如图1.115所示.

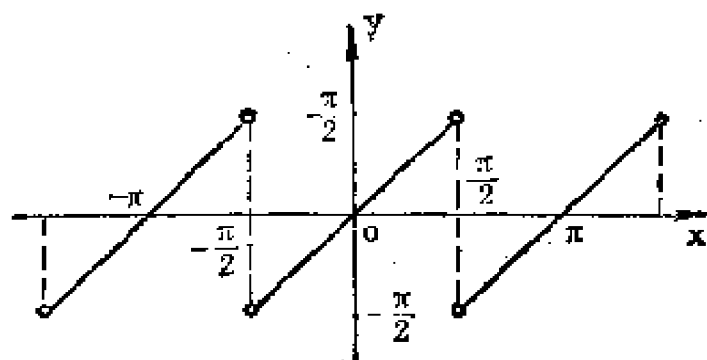


图 1.115

322. $y = \arcsin(2\sin x)$.

解 $\sin y = 2\sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

存在域为区间:

$$\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right], \dots$$

的全体, 即 $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的全体.

利用复合函数作图法得其图形, 如图1.116所示, 它关于原点对称.

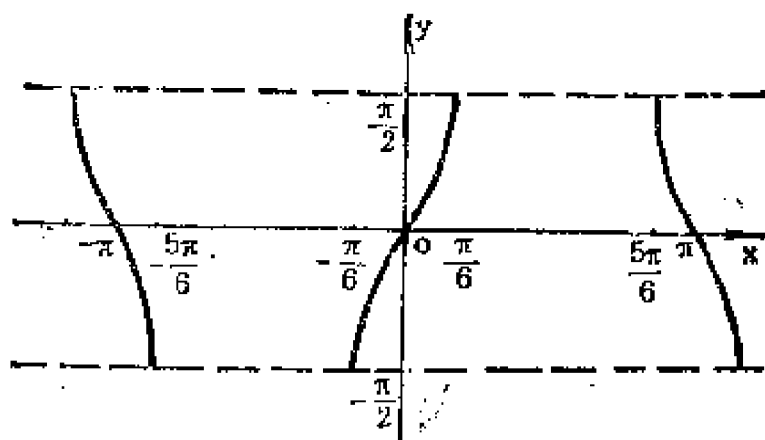


图 1.116

323. 设

$$(a) y_1 = 1 - \frac{x}{2};$$

$$(b) y_1 = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$(B) y_1 = \frac{1-x}{1+x};$$

$$(r) y_1 = e^x.$$

作函数

$$y = \arcsin y_1$$

的图形.

解 (a) 存在域
为满足不等式

$$0 \leq x \leq 4$$

的数 x 的集合.

当 $0 \leq x \leq 2$ 时, y

由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0;

而当 $2 \leq x \leq 4$ 时,

y 由 0 减少到

$-\frac{\pi}{2}$. 如图 1.117 所示.

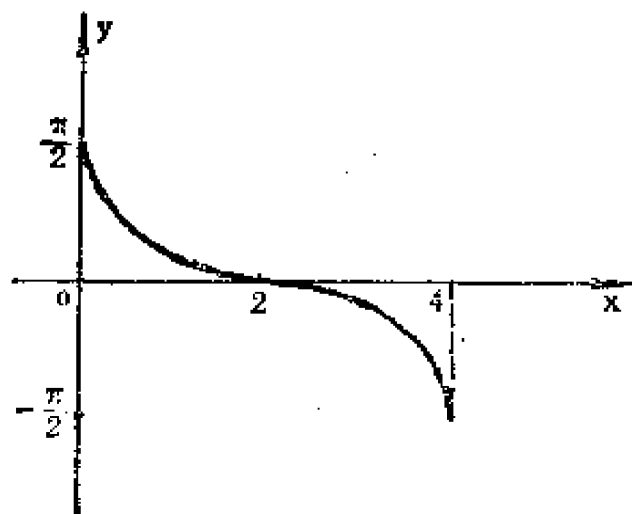


图 1.117

(6) 图形关于原点对称. 存在域为全体实数. 当 x 由 0 增到 1

时, 由于 $\frac{2x}{1+x^2}$

为增函数, 故 y 由

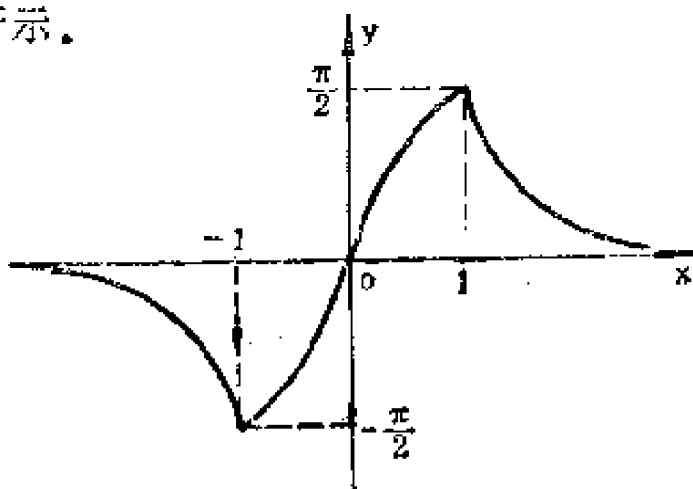


图 1.113

0 增到 $\frac{\pi}{2}$ ，而当 $x \geq 1$ 时， $\frac{2x}{1+x^2}$ 为减函数，故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0，且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ ，如图 1.118 所示。

(B) 要 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| \leq 1$ ，只要 $x \geq 0$ ，故存在域为 $x \geq 0$

的数 x 的集合，当 x 由 0 增到 1 时， $\frac{1-x}{1+x}$ 由 1 减少到 0，

而 y 则由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0；而当 x 由 1 增到 $+\infty$ 时， $\frac{1-x}{1+x}$

由 0 减少到 -1，而 y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$ ，且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\frac{\pi}{2}$ ，

如图 1.119 所示。

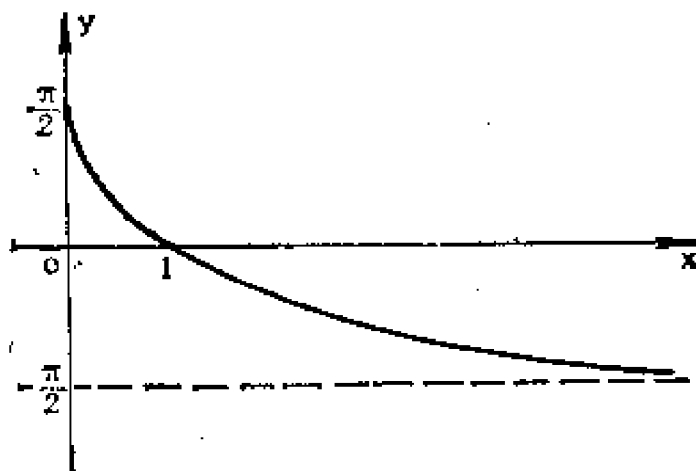


图 1.119

(C) 存在域为 $-\infty < x \leq 0$ 的数 x 的集合，当 x 由 $-\infty$ 增到 0 时， e^x 由 0 增到 1，

而 y 则由 0 增到 $\frac{\pi}{2}$ 。如

图 1.120 所示。

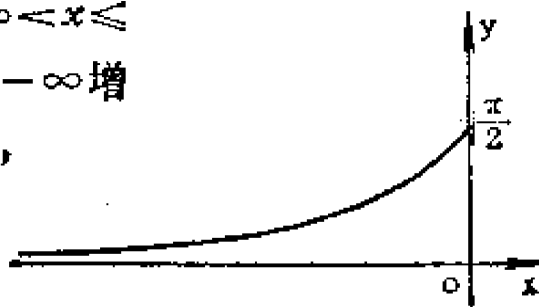


图 1.120

324. 设

$$(a) y_1 = x^2; \quad (b) y_1 = \frac{1}{x^2};$$

$$(c) y_1 = \ln x; \quad (d) y_1 = \frac{1}{\sin x}.$$

作函数

$$y = \operatorname{arctg} y_1$$

的图形.

解 (a) 如图1·121所示的 AB 曲线.

(b) 如图1·122所示.

(c) 如图1·123所示的 OA 曲线.

(d) 以 2π 为周期. 当 x 由 0 增到 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{1}{\sin x}$ 由 $+\infty$ 减到 1, 而 y 则由 $\frac{\pi}{2}$ 减到 $\frac{\pi}{4}$. 余类推. 如图

1·124所示.

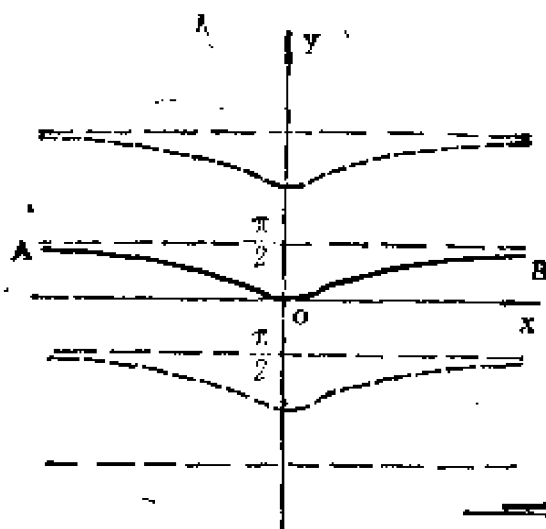


图 1·121

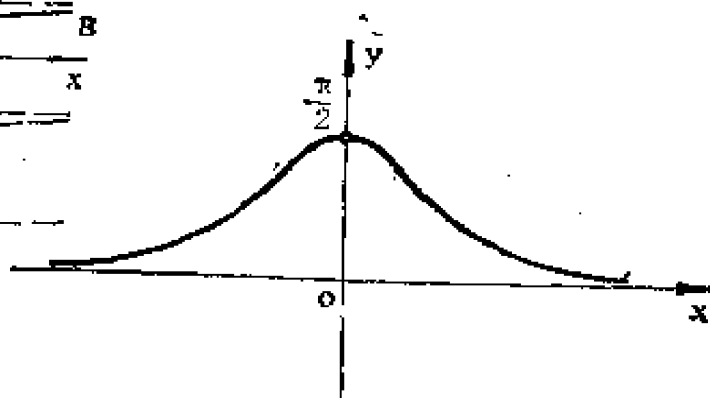


图 1·122

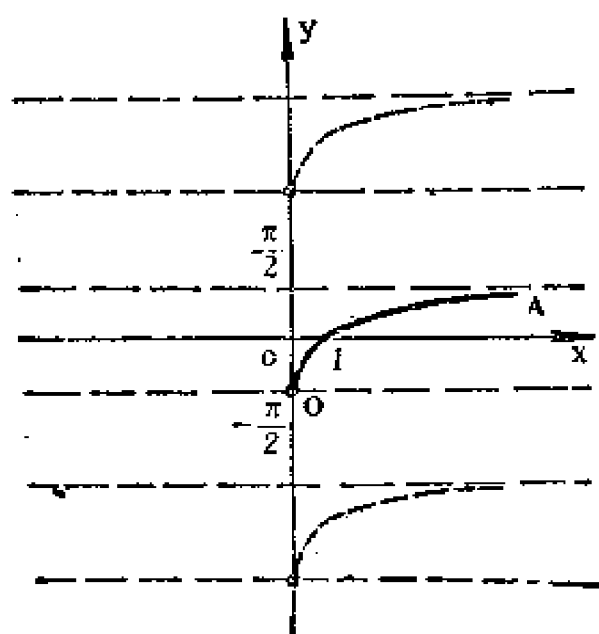


图 1.123

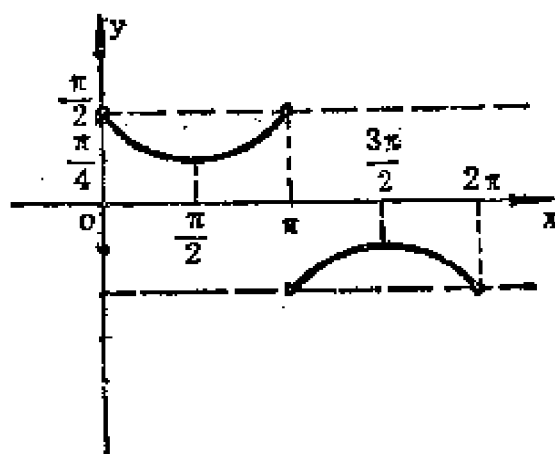


图 1.124

325. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形,
作下列各函数的图形

(a) $y=-f(x)$;

(b) $y=f(-x)$;

(B) $y=-f(-x)$.

解 (a) 函数 $y=-f(x)$
的图形和函数 $y=f(x)$
的图形关于 Ox 轴
对称, 如图1.125
所示.

(b) 函数 $y=f(-x)$ 的图形和
函数 $y=f(x)$ 的

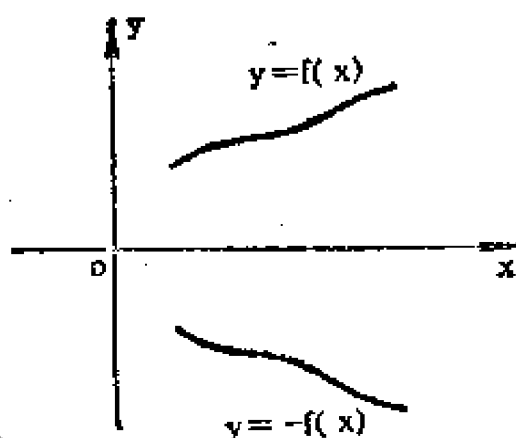


图 1.125

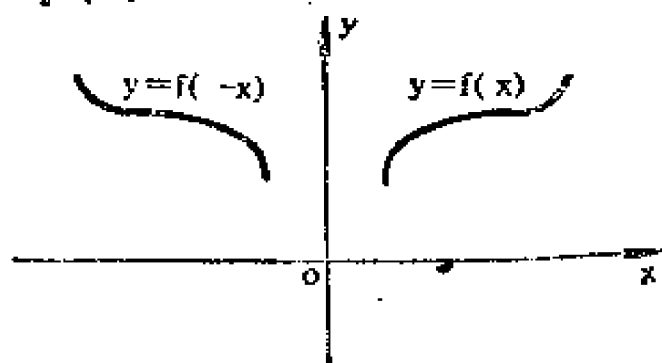


图 1.126

图形关于 Oy 轴对称。如图1·126所示。

(B) 函数 $y = -f(-x)$ 的图形和函数 $y = f(x)$ 的图形关于原点对称。如图1·127所示。

326. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列各函数的图形:

(a) $y = f(x - x_0)$;

(b) $y = y_0 + f(x - x_0)$;

(B) $y = f(2x)$;

(r) $y = f(kx + b)$

($k \neq 0$)。

解 (a) 函数 $y = f(x - x_0)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形平移距离 $|x_0|$ 得出。

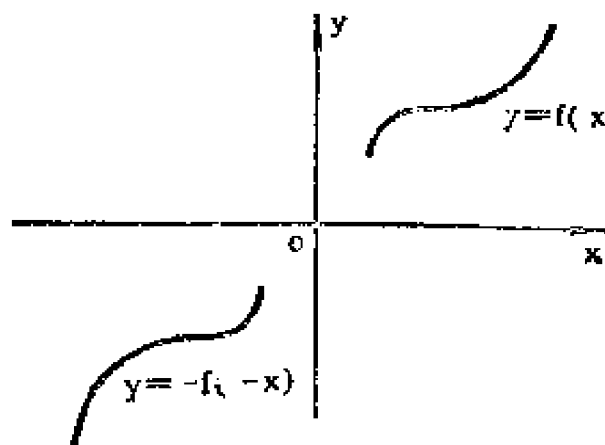


图 1·127

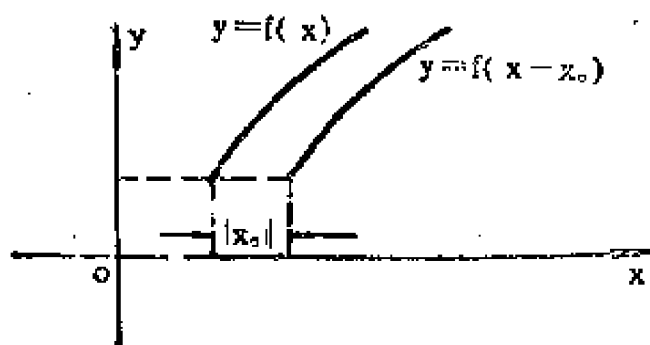


图 1·128

当 $x_0 > 0$ 时, 向右平移;

当 $x_0 < 0$ 时, 向左平移。

如图1·128所示。

(b) 函数 $y = y_0 + f(x - x_0)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形先平移距离 $|x_0|$, 再上下平移距离 $|y_0|$ 得出, 其中

当 $y_0 > 0$ 时, 向上平移;

当 $y_0 < 0$ 时, 向下平移。

事实上，只要先将坐标原点平移到点 (x_0, y_0) ，坐标轴的方向均不变。再在新坐标系中作 $y' = f(x')$ 的图形，其中 $y' = y - y_0$ ， $x' = x - x_0$ 。

图形如图1·129所示。

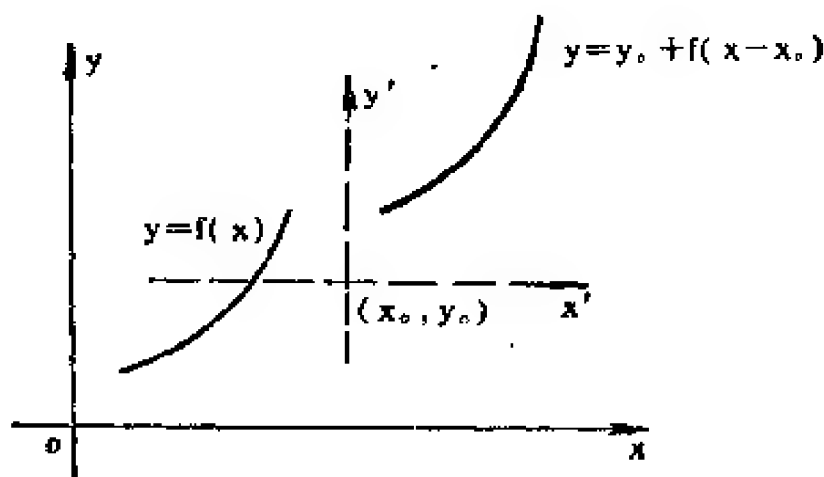


图 1·129

(B) $y = f(2x)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形沿 Ox 轴方向缩小二倍得出。

图形如图1·130所示。

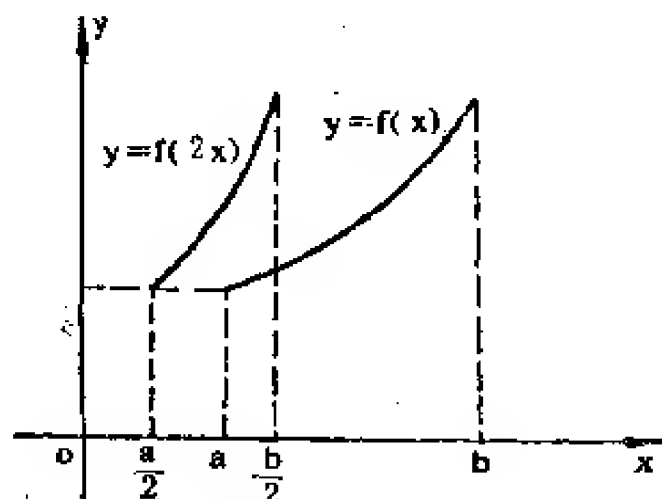


图 1·130

(r) $y=f(kx+b)$
 的图形可由 $y=f(x)$
 的图形先沿 Ox 轴方向
 “压缩” k 倍 ($0 < k < 1$
 时, 理解为“放大”).
 然后再将所得图形平
 移距离 $|b|$.

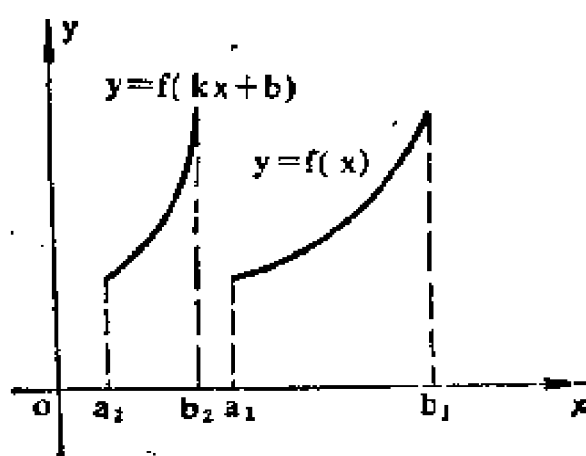


图 1.131

327. 作函数的图形

(a) $y=2+\sqrt{1-x}$; (б) $y=1-e^{-x}$;

(в) $y=\ln(1+x)$, (r) $y=-\frac{\pi}{2}\arcsin(1+x)$;

(д) $y=3+2\cos 3x$.

解 (a) 如图1.132所示,

(б) 如图1.133所示,

(в) 如图1.134所

示.

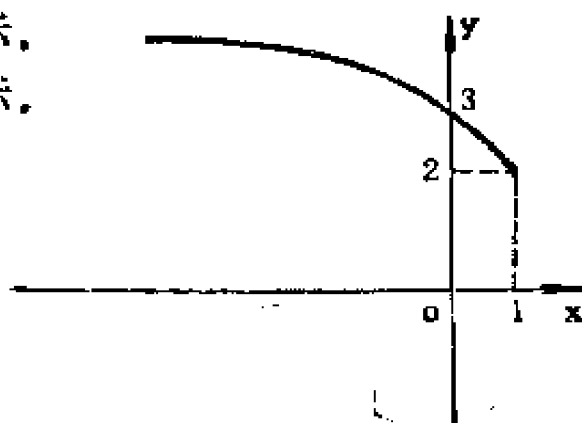


图 1.132

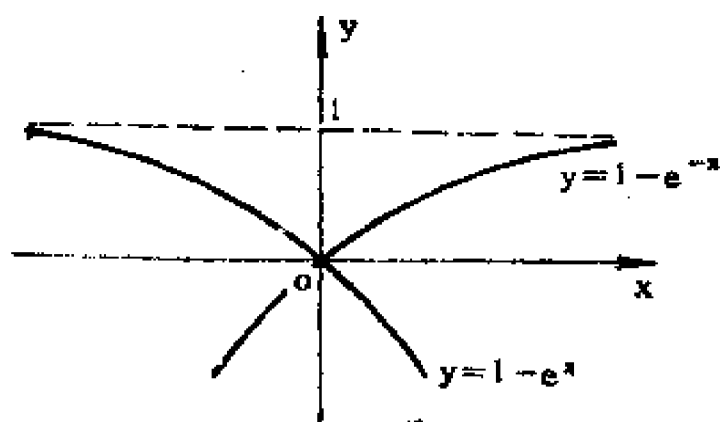


图 1.133

(r) 如图1·135所示的 AB 曲线.

(A) 如图1·136所示.

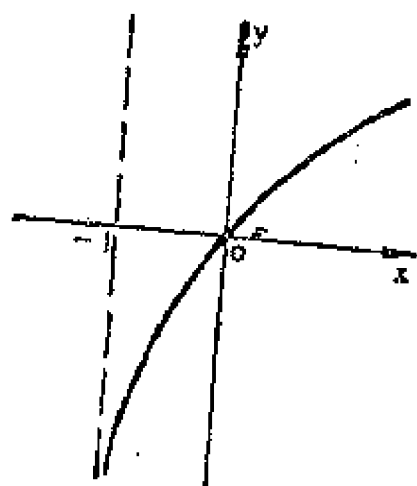


图 1·134

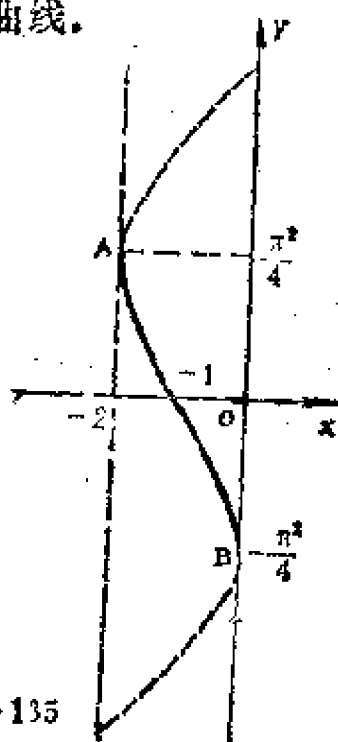


图 1·135

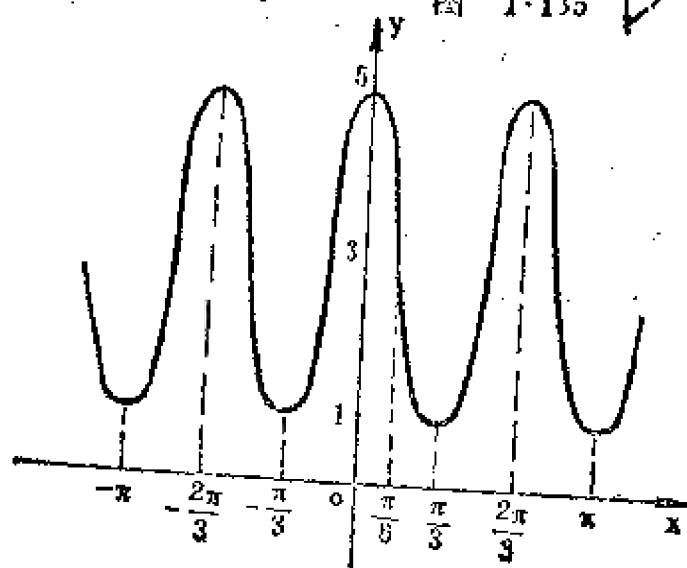


图 1·136

328. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

(a) $y=|f(x)|$; (b) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$;

$$(n) y = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)).$$

解 (a) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = f(x)$;

当 $f(x) < 0$ 时,
 $y = -f(x)$;

如图 1.137 黑粗线所示.

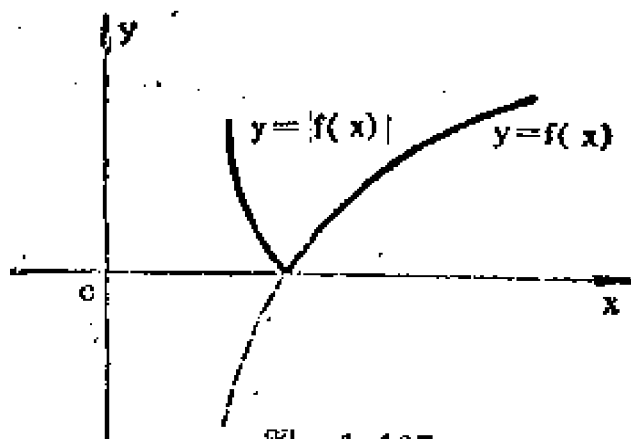


图 1.137

(6) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = f(x)$;

当 $f(x) < 0$ 时,
 $y = 0$.

如图 1.138 黑粗线所示.

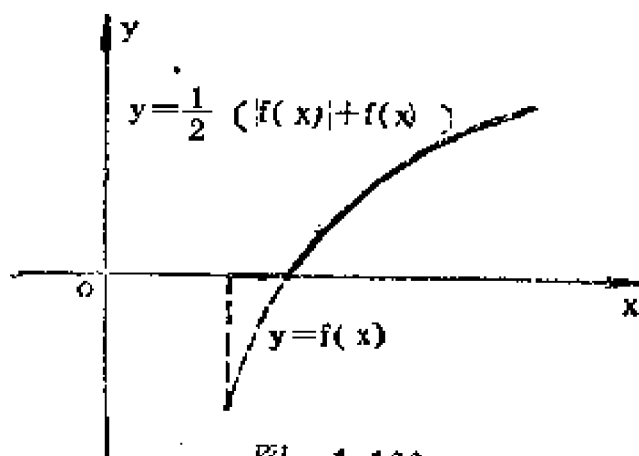


图 1.138

(B) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = 0$;

当 $f(x) < 0$ 时,
 $y = -f(x)$.

如图 1.139 黑粗线所示.

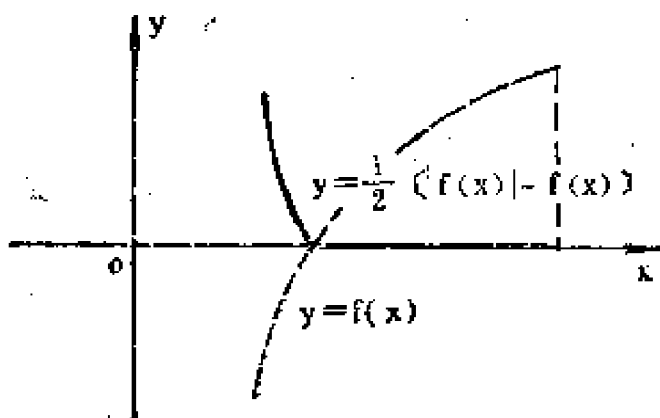


图 1.139

329. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

(a) $y = f^2(x)$; (6) $y = \sqrt{f(x)}$;

(B) $y = \ln f(x)$; (r) $y = f[f(x)]$;

(A) $y = \operatorname{sgn} f(x)$; (e) $y = [f(x)]$.

解 (a) 以 $y=1$ 为图形的分界线.

如图1.140所示, 1: $y=f(x)$; 2: $y=f^2(x)$.

(6) 当 $f(x) > 1$ 时, $\sqrt{f(x)} < f(x)$; 而当 $0 \leq f(x) \leq 1$ 时, $\sqrt{f(x)} \geq f(x)$.

如图1.141所示, 1: $y=f(x)$; 2: $y=\sqrt{f(x)}$.

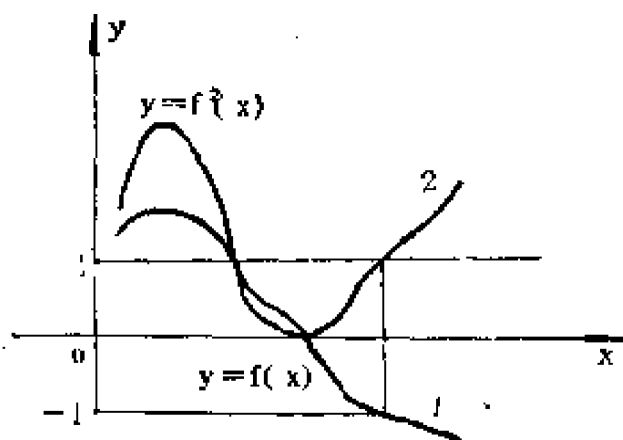


图 1.140

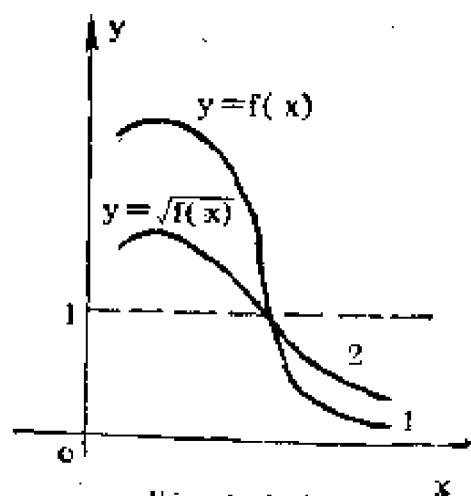


图 1.141

(B) 当 $f(x) \geq 1$ 时, $\ln f(x) < f(x)$; 而当 $0 < f(x) < 1$ 时, $\ln f(x) < f(x)$, 故 $y = \ln f(x)$ 的图形始终在 $y = f(x)$ 之下.

如图1.142所示.

(r) 若 $f(x)$ 的存在域为 $[a, b]$, 则仅当 $f(x)$ 之值在 a 与 b 之间, 才能使 $f[f(x)]$ 有意义. 其详细作图法见330题(B).

如图1.143所示, 1: $y=f(x)$; 2: $y=f[f(x)]$.

(A) 当 $f(x) > 0$ 时, $y=1$; 当 $f(x)=0$ 时, $y=0$; 当 $f(x) < 0$ 时, $y=-1$.

如图1.144所示.

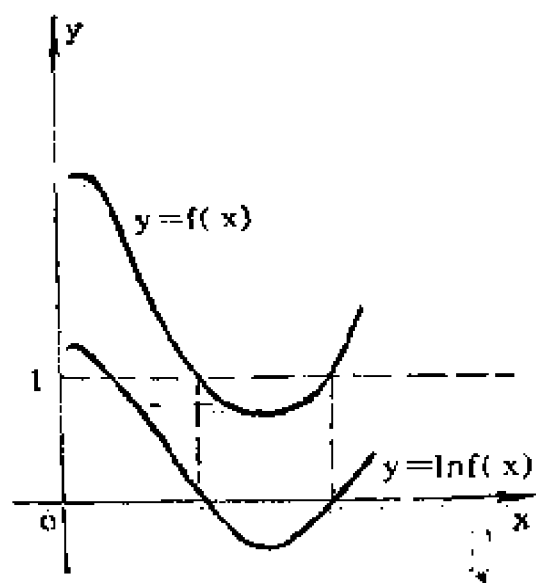


图 1.142

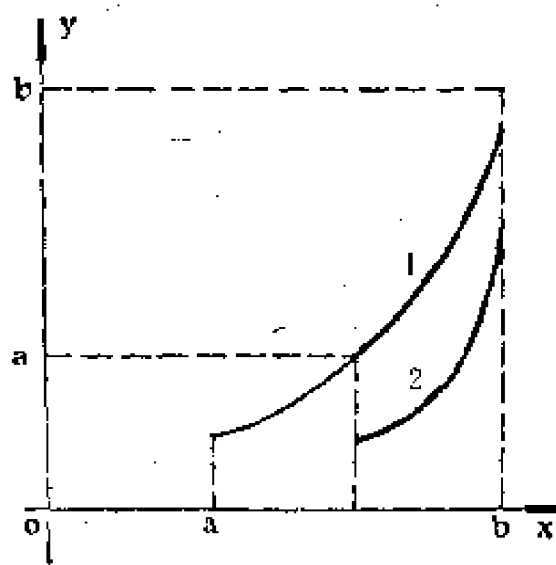


图 1.143

(e) 当 $n \leq f(x) < n+1$ 时, $y=n$ (n 为自然数)。
如图 1.145 所示。

其中图 1.144 及 1.145 均为黑粗线所示的图形。

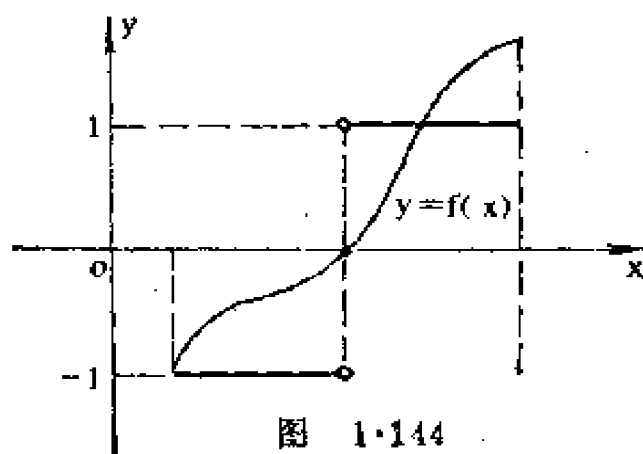


图 1.144

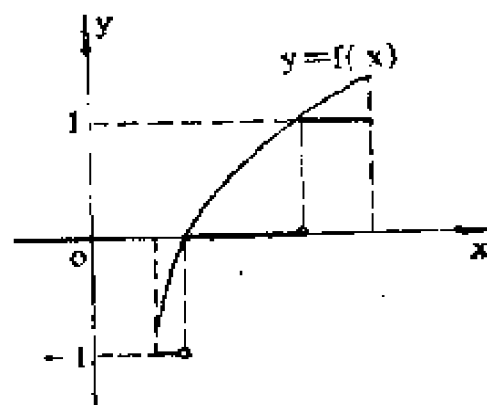


图 1.145

330. 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

(a) $y=f(x)+g(x)$; (b) $y=f(x)g(x)$;

(B) $y=f[g(x)]$.

解 (a) 利用图形相加法即得.

如图 1.146 所示.

(6) 利用图形相乘法即得.

如图 1.147 所示.

(B) 如图 1.148 所示. 设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点. 通过 P 点引铅直线, 它和 $y = g(x)$ 的图形相交得 Q 点 (当然假定值 PQ 在 $f(x)$ 的存在域内). $PQ = g(x)$. 过 Q 点引水平线, 它与 $y = x$ 交于 R 点, 过 R 作铅直线与 Ox 轴及 $y = f(x)$ 分别交于 T 点及 S 点, 则 $OT = TR = PQ = g(x)$, 因而 $TS = f(g(x))$. 最后, 把 S 点向通过 P 点的铅直线投影得 M 点, 此即函

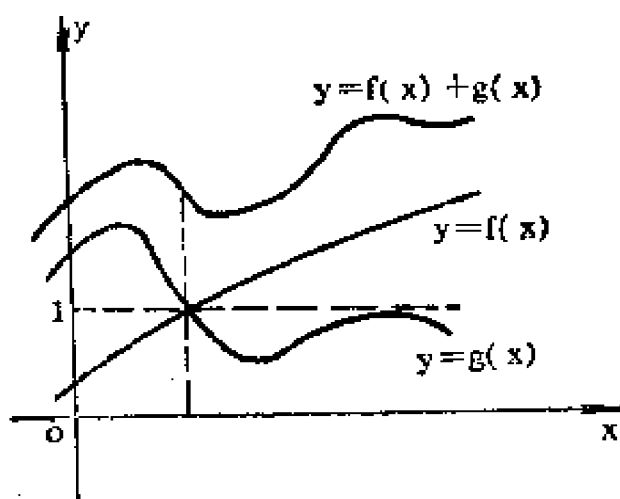


图 1.146

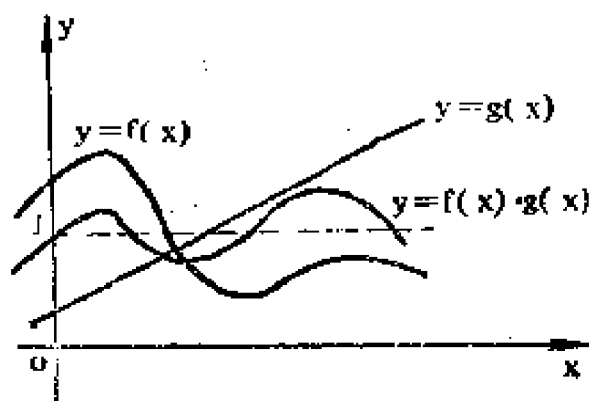


图 1.147

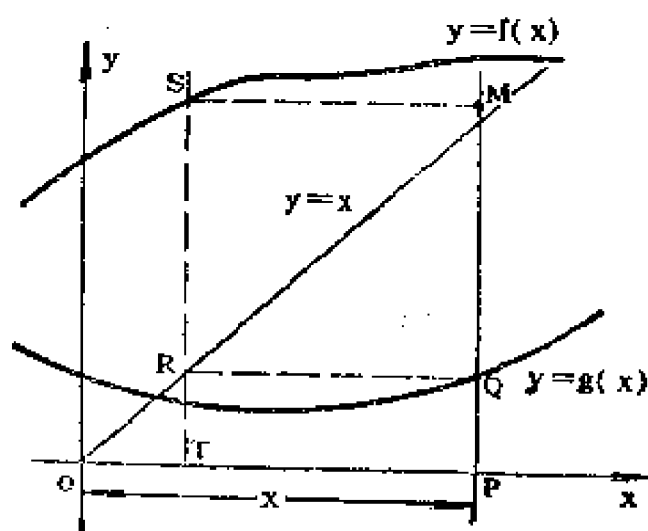


图 1.148

数 $y=f[g(x)]$ 图形上的一点. 至于该图形上的其它点, 同法求得. 但要注意, 函数 $y=f[g(x)]$ 的存在域是满足不等式

$$a \leq g(x) \leq b$$

的数 x 的集合, 式中 $[a, b]$ 是 $f(x)$ 的存在域.

利用图形的相加法, 作下列函数的图形:

331. $y=1+x+e^x$.

解 如图1·149所示.

332. $y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}$

解 图形关于 Oy 轴对称.

如图1·150所示.

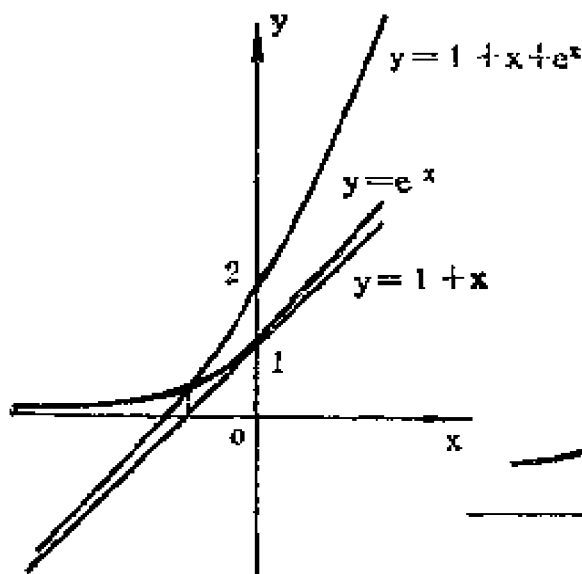


图 1·149

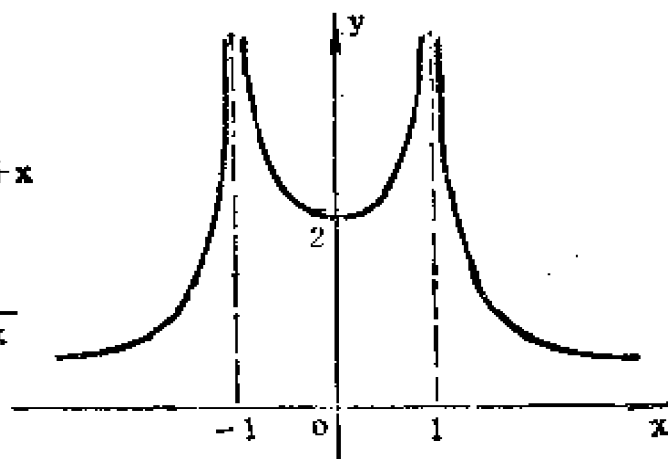


图 1·150

333. $y=x+\sin x$.

解 如图1·151所示.

$$P_1Q_1=P_2Q_2=\dots=1.$$

334. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

解 如图 1·152 所示, 图中仅画了主值的一支, 一般地, 在平行线 $y = x + (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 及 $y = x + (2k-1)\frac{\pi}{2}$ 之间 ($k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$), 有类似的一支.

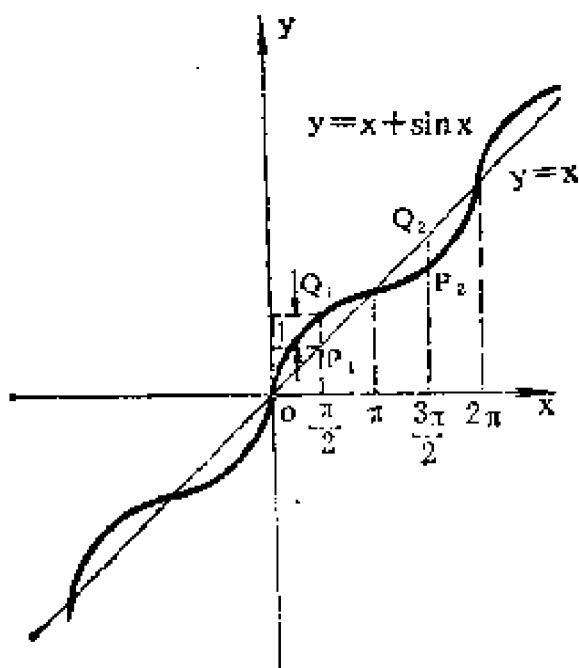


图 1·151

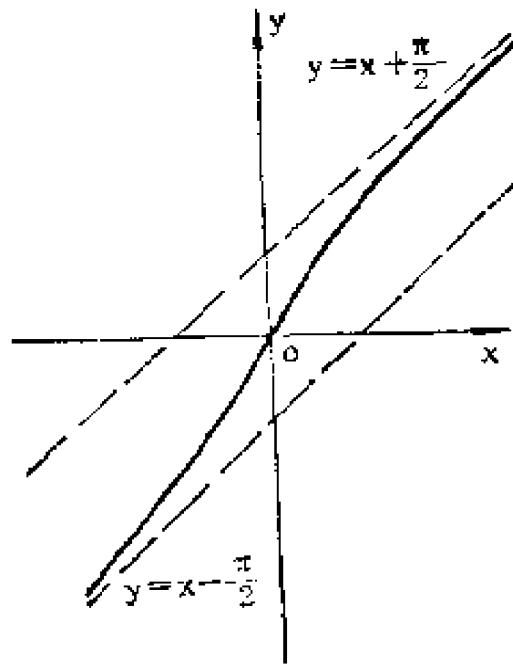


图 1·152

335. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x.$

解 图形关于 Oy 轴对称, 且关于直线 $x = k\pi$ 对称. 周期为 2π . 如图 1·153 所示.

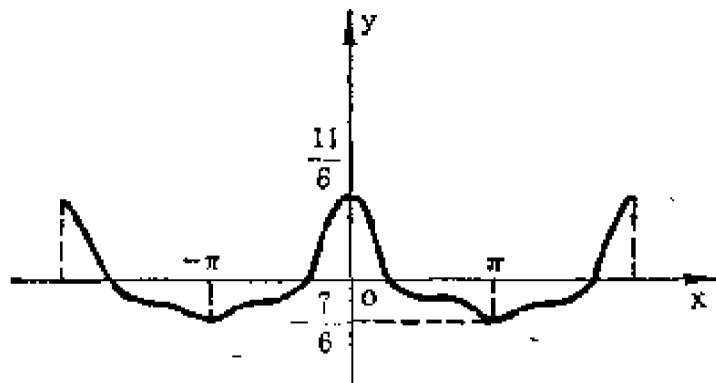


图 1·153

336. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x.$

解 图形关于原点对称, 周期为 2π , 且有 $f(x+\pi) = -f(x)$, 故在 $[0, 2\pi]$ 内图形关于直线 $x=\pi$ 反对称*. 因此, 我们只需做出 $[0, \pi]$ 内的图形即可.

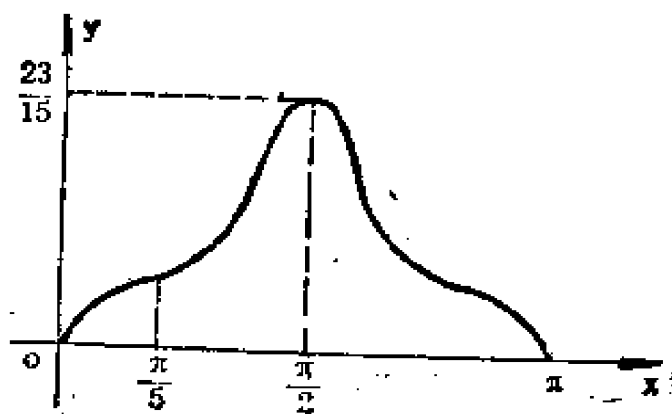


图 1.154

如图1.154所示.

*) 即关于点 π 对称, 也称之为以 π 为周期的反周期函数.

337. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

解 图形关于 Oy 轴对称, 周期为 $\frac{\pi}{2}$.

如图1.155所示.

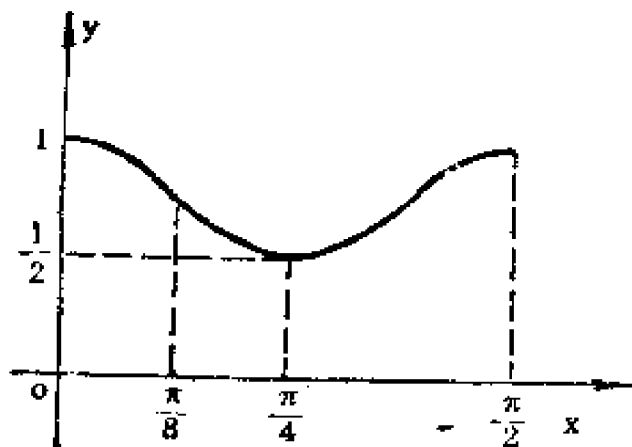


图 1.155

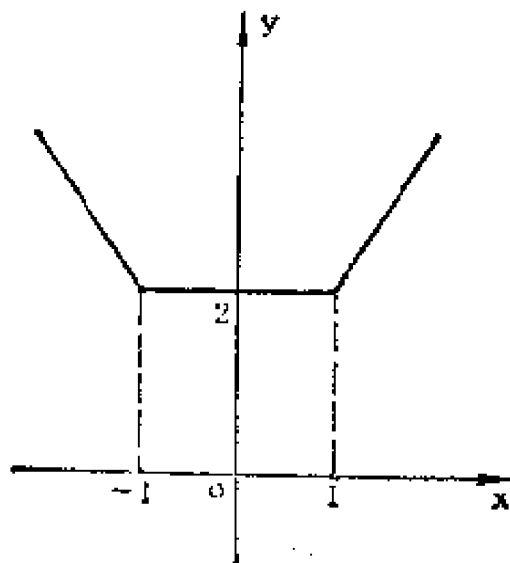


图 1.156

338. $y = |1-x| + |1+x|$.

解 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $y = 2$;

当 $x < -1$ 时, $y = -2x$;

当 $x > 1$ 时, $y = 2x$.

如图1.156所示.

339. $y = |1-x| - |1+x|$.

解 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $y = -2x$;

当 $x < -1$ 时, $y = 2$;

当 $x > 1$ 时, $y = -2$.

如图1.157所示.

340. 作双曲线函数的图形:

(a) $y = \operatorname{ch} x$, 式中 $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;

(b) $y = \operatorname{sh} x$, 式中 $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;

(B) $y = \operatorname{th} x$, 式中 $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

解 如图1.158所示.

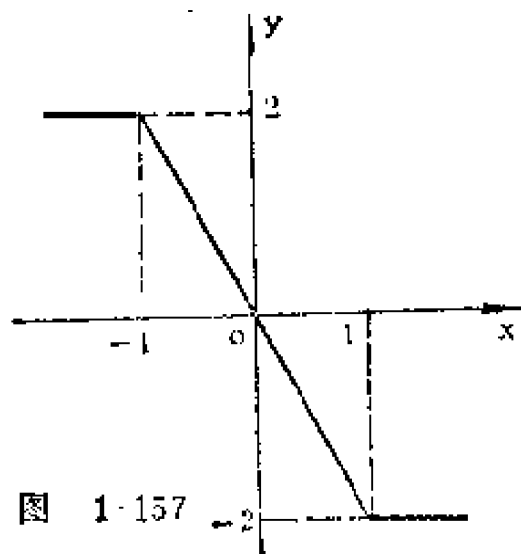


图 1.157

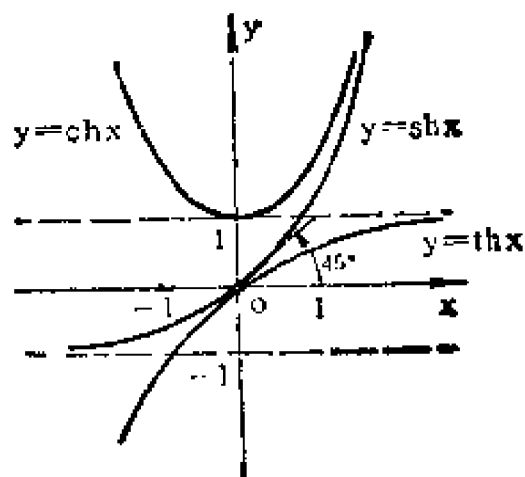


图 1.158

利用图形的相乘法，作下列函数的图形：

341. $y = x \sin x$.

解 当 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

时, $y = 0$.

图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

时, $y = x$,

又当 $x = \frac{3\pi}{2} +$

$2k\pi$ 时, $y = -x$.

如图 1.159 所示.

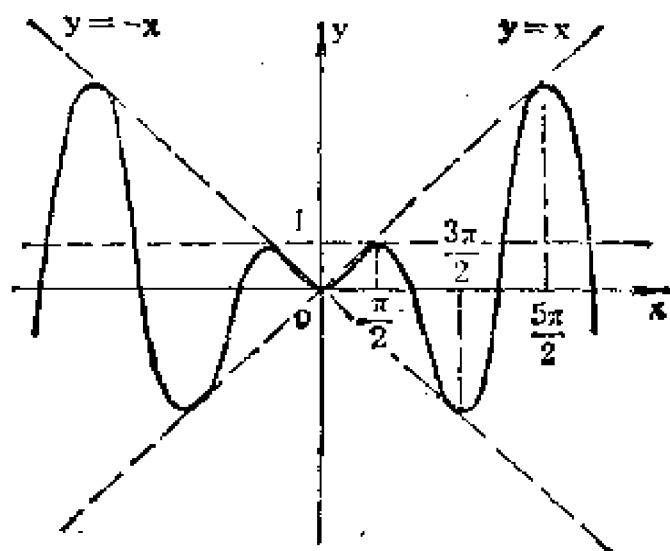


图 1.159

342. $y = x \cos x$.

解 图形关于原点对称.

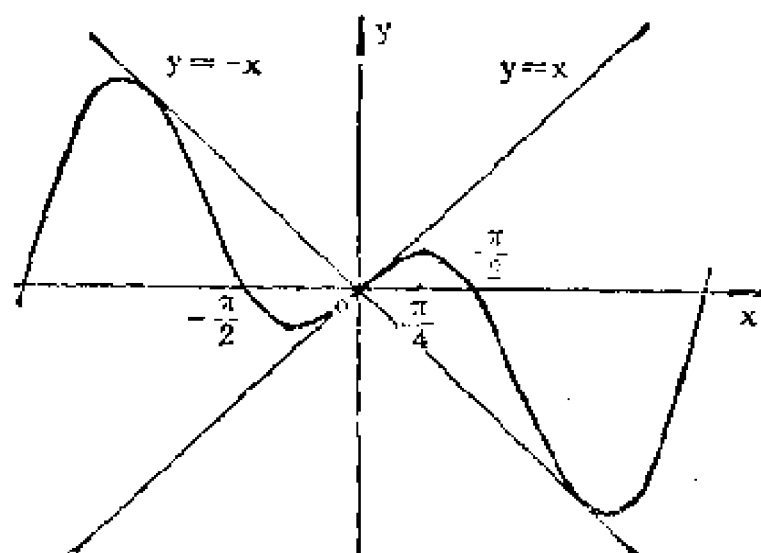


图 1.160

当 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y=0$;

当 $x = 2k\pi$ 时, $y=x$; 当 $x = (2k+1)\pi$ 时, $y=-x$.

如图1·160所示.

343. $y = x^2 \sin^2 x$.

解 只要将图形 $y = x \sin x$ 作出后, 再按 329 题(a) 的作法画出, 如图1·161所示.

其实, 我们也可由下列几点画出该函数的图形:

$$0 \leq y \leq x^2;$$

当 $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时
 $y=0$;

当 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
时, $y = x^2$.

图形关于 Oy 轴对称.

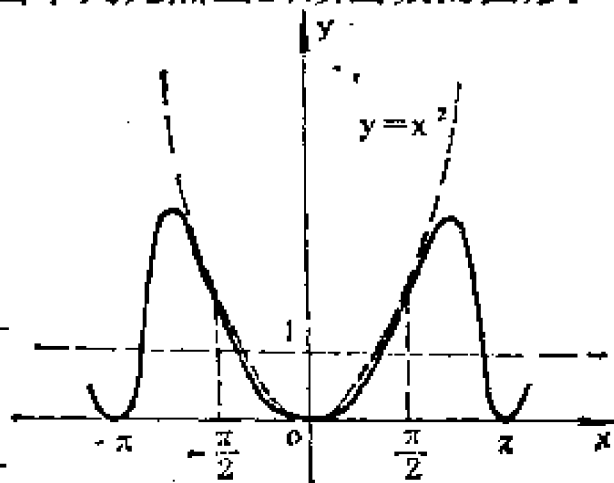


图 1·161

344. $y = \frac{\sin x}{1+x^2}$.

解 图形关于原点对称.

当 $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y=0$;

当 $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = -\frac{1}{1+x^2}$;

当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = \frac{1}{1+x^2}$.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

如图1·162所示.

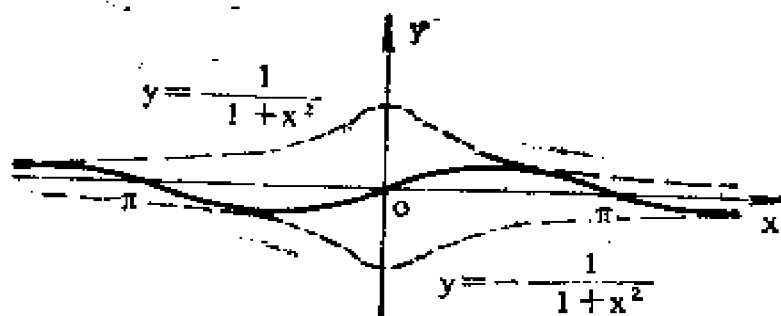


图 1·162

345. $y = e^{-x^2} \cos 2x$.

解 因 $-e^{-x^2} \leq y \leq e^{-x^2}$, 故图形在图形 $y = e^{-x^2}$ 及 $y = -e^{-x^2}$ 之间.

如图1·163所示.

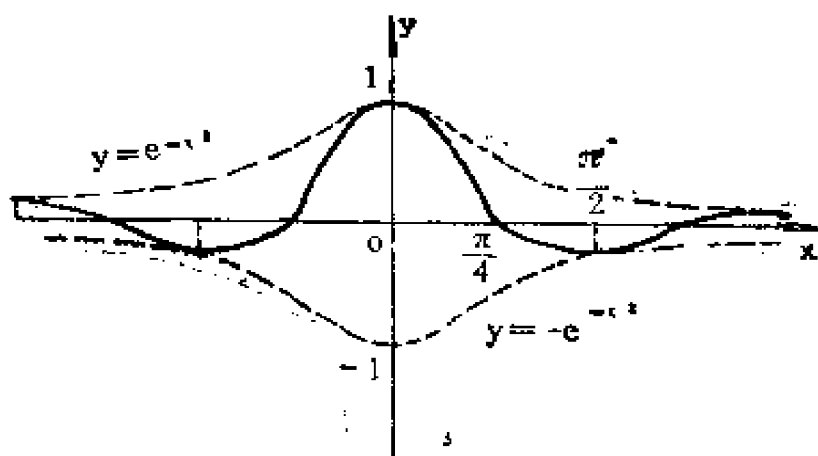


图 1·163

346. $y = x \operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$,

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y = x$;

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y = -x$.

如图1.164所示。

347. $y = [x] \cdot |\sin \pi x|$.

解 当 $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$.

当 $n < x < n+1 (n \text{ 为自然数})$ 时, $y = n |\sin \pi x|$.

如图1.165所示。

图 1.164

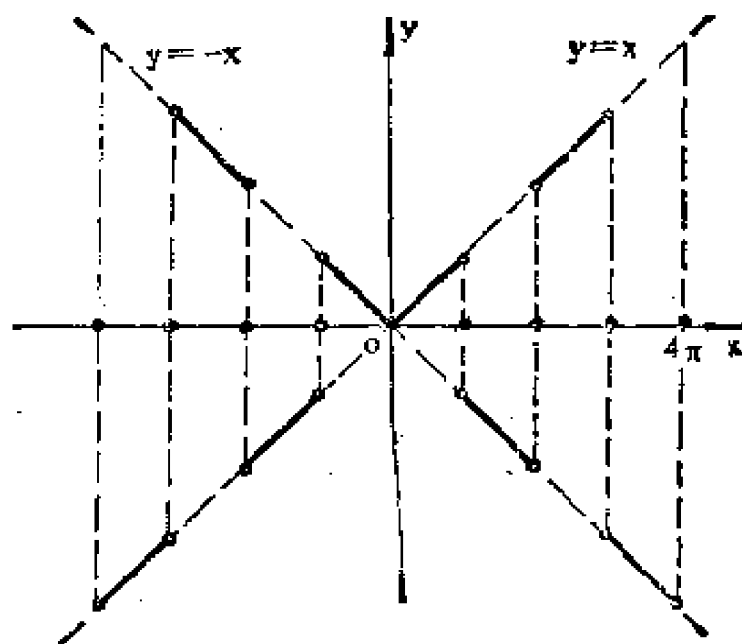
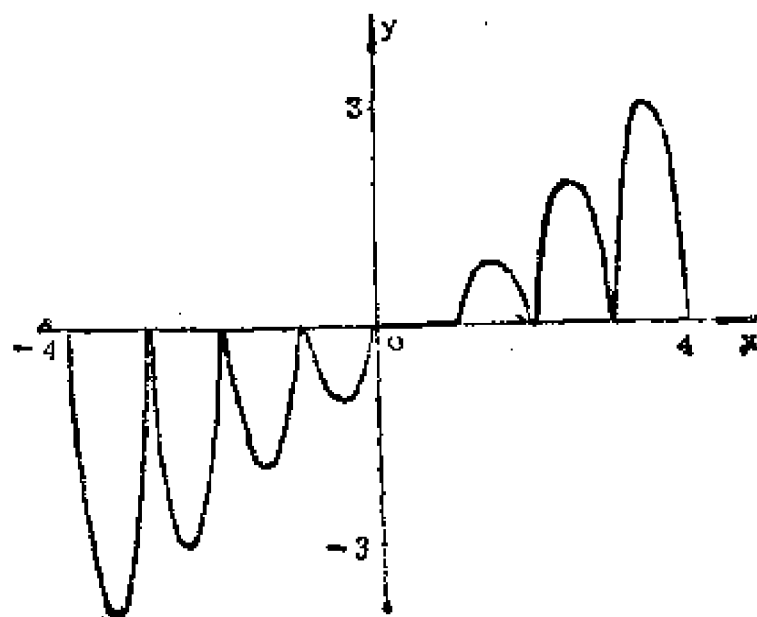


图 1.165



348. $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 图形关于原点对称. 周期为 π .

当 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y=0$;

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y = \cos x$;

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y = -\cos x$.

如图1.166所示.

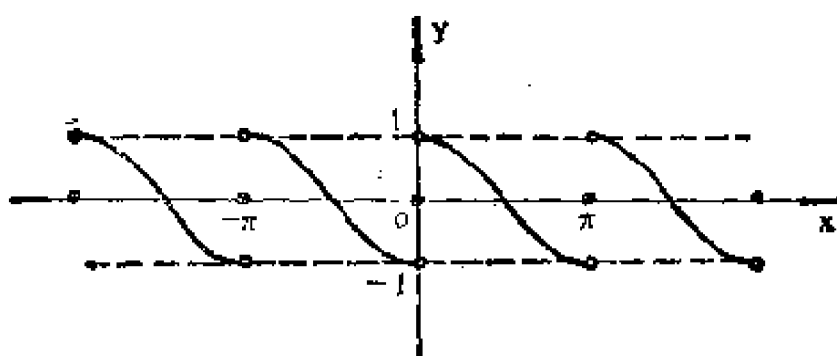


图 1.166

349. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{若 } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

作函数

$$y = f(x)f(a-x),$$

当 (a) $a=0$, (b) $a=1$,

(c) $a=2$ 时的图形.

解 (a) $y = f(x)f(-x)$.

因为 $f(x)$ 为偶函数,

所以, $y = f^2(x)$.

由函数 $f(x)$ 的定义易

得

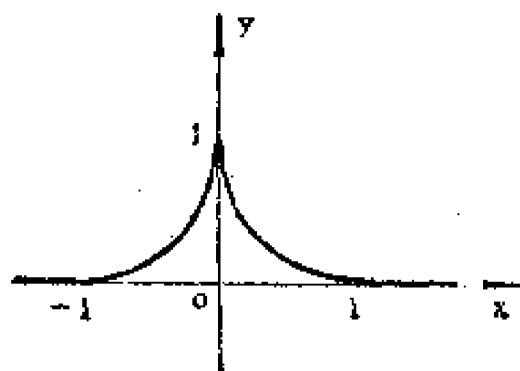


图 1.167

$$y = \begin{cases} (1+x)^2, & \text{若 } -1 \leq x < 0, \\ (1-x)^2, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

如图1·167所示.

$$(6) \quad y = f(x) \cdot f(1-x).$$

由函数 $f(x)$ 的定义易得

$$y = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \leq 0, \\ x - x^2, & \text{若 } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{若 } x \geq 1. \end{cases}$$

如图1·168所示.

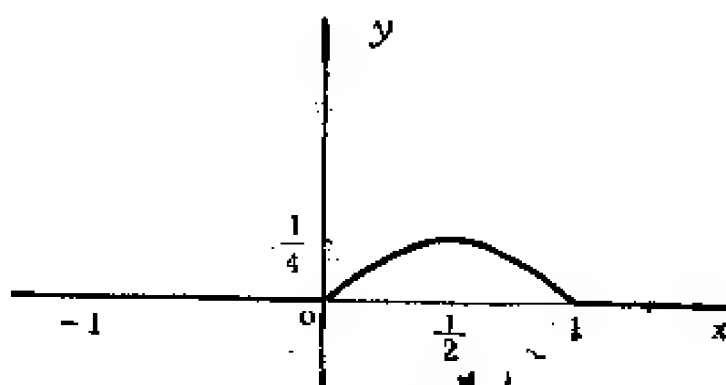


图 1·168

$$(B) \quad y = f(x) \cdot f(2-x).$$

由函数 $f(x)$ 的定义易得

$$y = 0.$$

如图1·169所示.

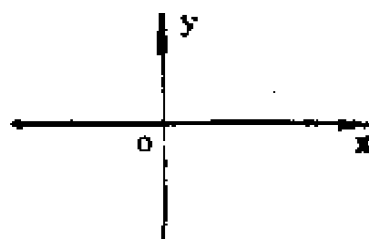


图 1·169

350. 作函数 $y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$

的图形.

解 当 $2k \leq x < 2k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$) 时,

$$\sin \pi x > 0, \quad \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = 1,$$

因而, $y = x + \sqrt{x}$.

而当 $2k+1 \leq x \leq 2k+2$ 时,

$$y = x - \sqrt{x}.$$

图 1.170 中系函数

$$y = \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$$

的图形(黑粗线所示).

其中在 $y = x$ 上的一支系 $y = \sqrt{x} + x$ 的一段.

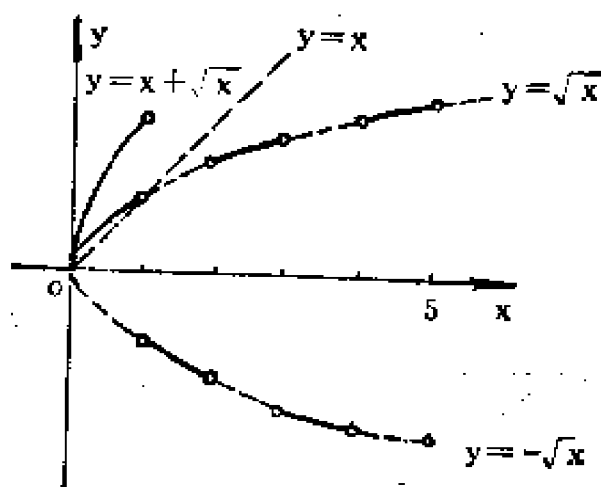


图 1.170

至于函数

$$y = x + \sqrt{x}$$

$$\cdot \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$$

的图形如图 1.171

所示.

作函数

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

的图形, 设:

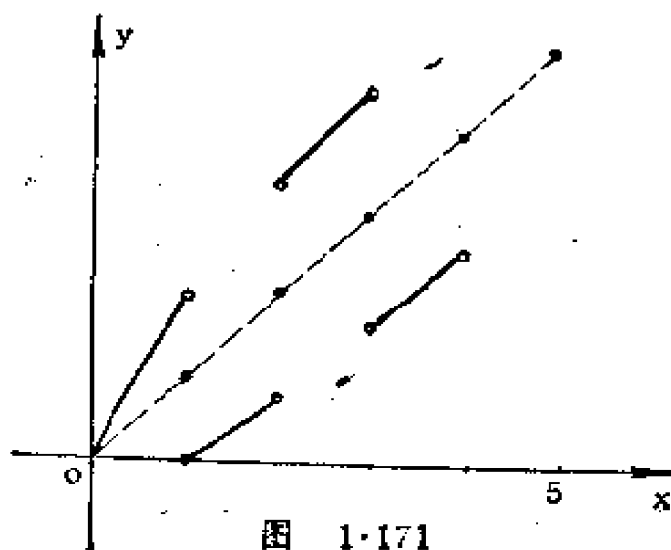


图 1.171

351. $f(x) = x^2(1-x^2).$

解 $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}.$

利用图形的相加法, 将函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 及 $y = \frac{1}{1-x^2}$

的图形相加即得. 如图 1.172 所示.

352. $f(x) = x(1-x)^2.$

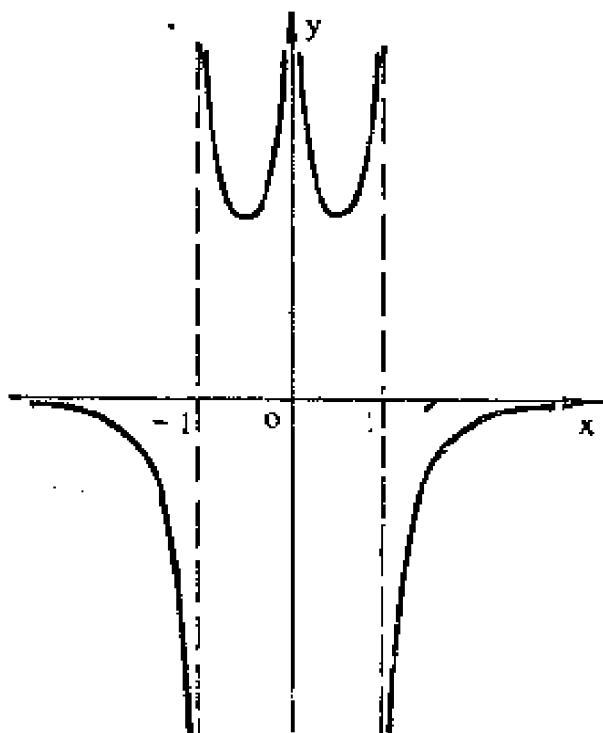


图 1·172

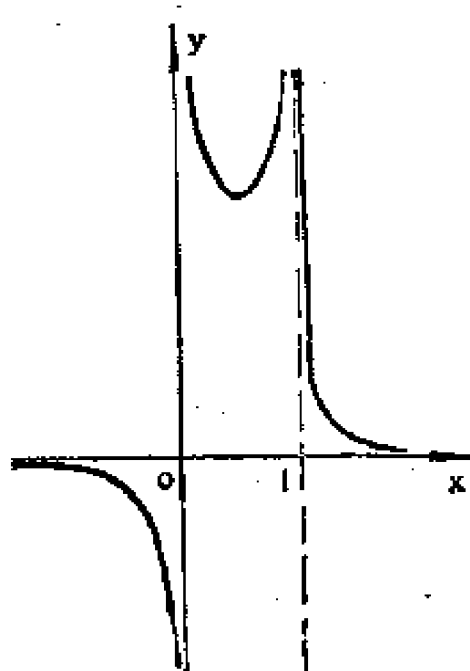


图 1·173

解
$$y = \frac{1}{x(1-x)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

当 $x > 0$ 时, $y > 0$;

当 $x < 0$ 时, $y < 0$.

利用图形的相加法即得, 如图1·173所示.

353. $f(x) = \sin^2 x$.

解 $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ 是

一周期为 π 的周期函数.

图形关于 Oy 轴对称. 如图1·174所示.

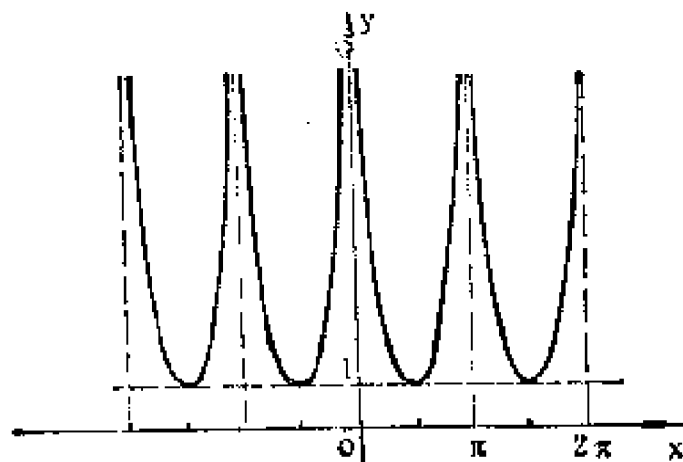


图 1·174

354. $f(x) = \ln x$.

解 $y = \frac{1}{\ln x}$.

当 $0 < x < 1$ 时,

y 由 0 下降到 $-\infty$;

当 $1 < x < +\infty$ 时, y 由 $+\infty$ 下降到 0. 如图 1.175 所示.

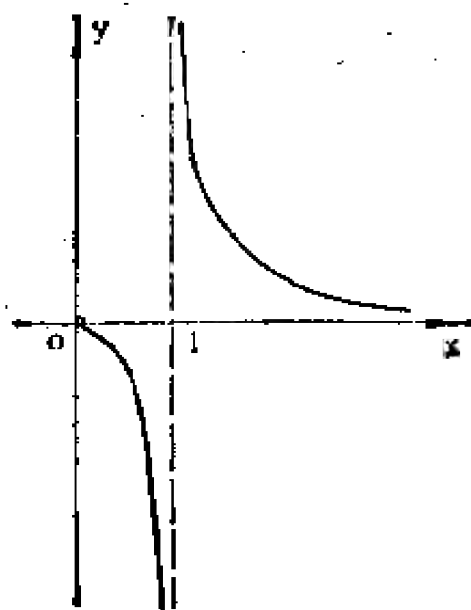


图 1.175

355. $f(x) = e^x \sin x$.

解 $y = e^{-x} \csc x$.

因为 $|\csc x| \geq 1$, 所以

$$|y| \geq e^{-x}.$$

利用图形的相乘法即得. 如图 1.176 所示.

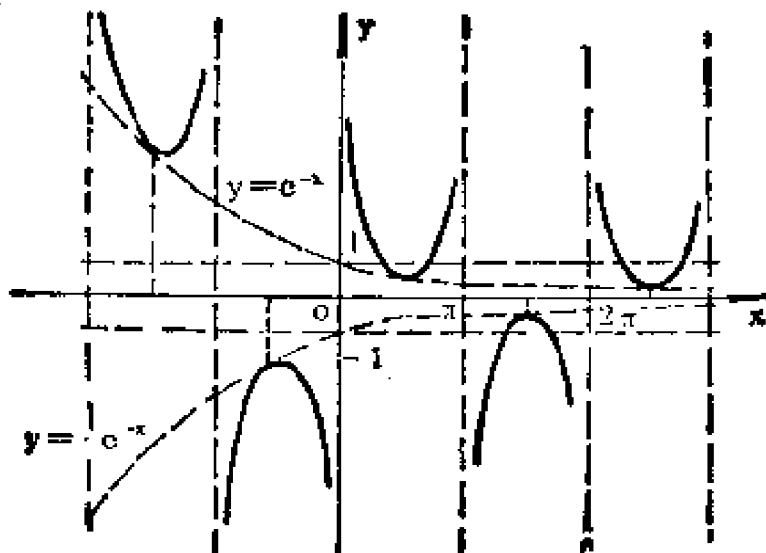


图 1.176

356. 设:

$$f(u) = \begin{cases} -1, & \text{若 } -\infty < u < -1; \\ u, & \text{若 } -1 \leq u \leq 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

作复合函数

$$y=f(u)$$

的图形, 其中 $u=2\sin x$.

解 如图 1.177 所示.

当 $|x-k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$ 时,

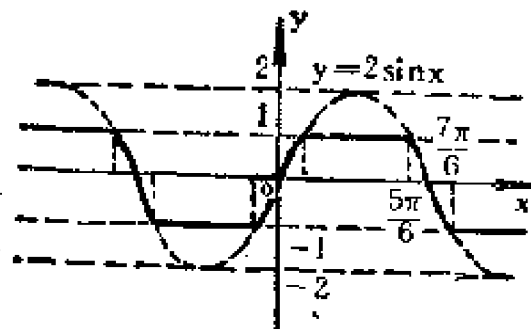


图 1.177

$y=2\sin x$; 当 $\frac{\pi}{6} < |x-k\pi| < \frac{5\pi}{6}$, $y=(-1)^k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

357. 设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ 和 } \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0; \\ x^2, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

作下列函数的图形:

(a) $y = \varphi[\varphi(x)]$; (b) $y = \varphi[\psi(x)]$;

(B) $y = \psi[\varphi(x)]$; (r) $y = \psi[\psi(x)]$.

解 (a) $\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0; \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$

$\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$. 如图 1.178 所示.

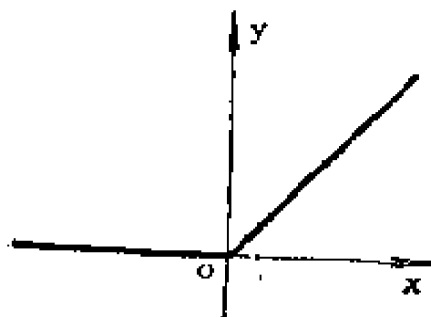


图 1.178

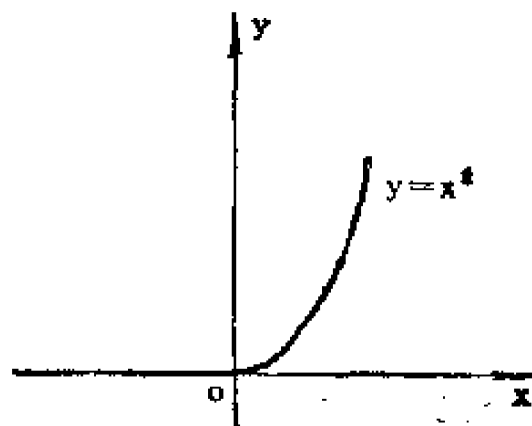


图 1.179

$$(6) \varphi(\psi(x)) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \geq 0; \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

如图1·179所示.

$$(B) \psi(\varphi(x)) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \geq 0; \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

如图1·179所示.

$$(r) \psi[\psi(x)] = \begin{cases} x^4, & \text{若 } x \geq 0; \\ x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

如图1·180所示.

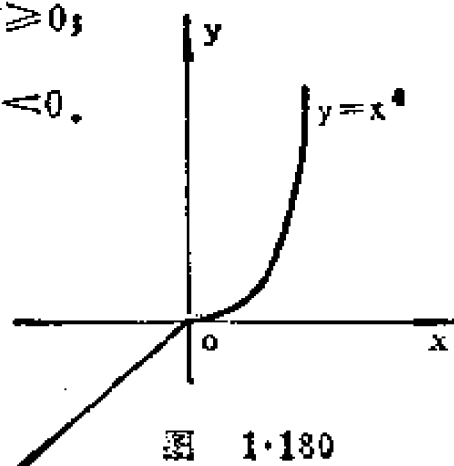


图 1·180

358. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

及

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{若 } |x| \leq 2; \\ 2, & \text{若 } |x| > 2. \end{cases}$$

作函数:

$$(a) y = \varphi[\varphi(x)];$$

$$(6) y = \varphi[\psi(x)];$$

$$(B) y = \psi[\varphi(x)];$$

$$(r) y = \psi[\psi(x)]$$

的图形.

解 (a) $\varphi[\varphi(x)] = 1,$

如图1·181所示.

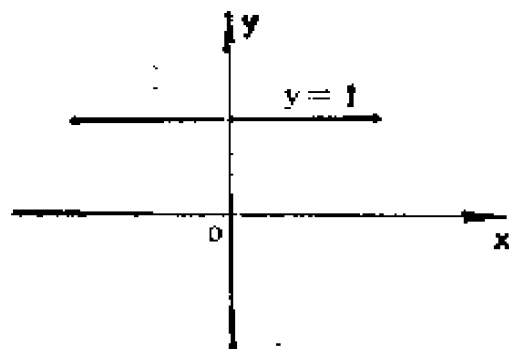


图 1·181

(6) $\varphi[\psi(x)] = \varphi[\psi(-x)]$, 故图形关于 Oy 轴对称.

当 $0 \leq x < 1$ 时, $\psi(x) = 2 - x^2$,

由于

$$1 < 2 - x^2 \leq 2,$$

所以, $\varphi[\psi(x)] = 0$.

当 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ 时, $\psi(x) = 2 - x^2$, 由于

$$-1 \leq 2 - x^2 \leq 1,$$

所以, $\varphi[\psi(x)] = 1$.

当 $\sqrt{3} < x \leq 2$ 时, $\psi(x) = 2 - x^2$, 由于

$$-2 \leq 2 - x^2 < -1,$$

所以, $\varphi[\psi(x)]$

$= 0$.

当 $x > 2$ 时,

$\psi(x) = 2$, 所以,

$\varphi[\psi(x)] = 0$. 如

图 1.182 所示.

(B) $\psi[\varphi(x)]$

$$= \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 2, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

如图 1.183 所示.

(C) $\psi[\psi(x)]$

$$= \begin{cases} 2 - (2 - x^2)^2, & \text{若 } |x| \leq 2; \\ -2, & \text{若 } |x| > 2. \end{cases}$$

如图 1.184 所示.

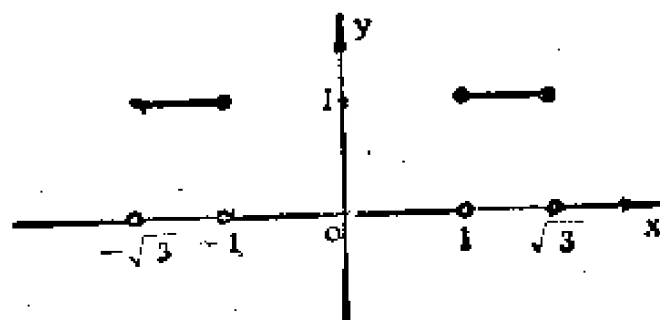


图 1.182

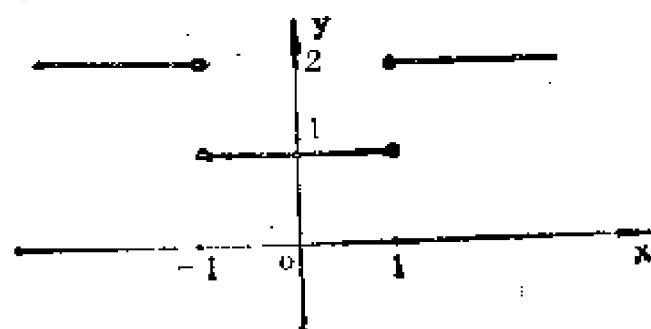


图 1.183

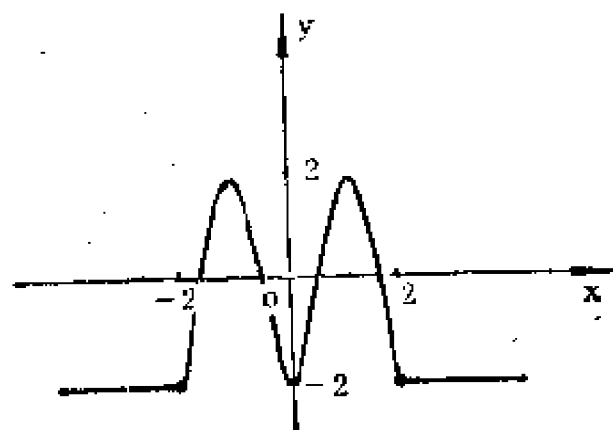


图 1·134

359. 由函数 $f(x)$ 定义于正数域 $x > 0$ 内, 把 $f(x)$ 延拓到负数域 $x < 0$ 内, 使所得的函数为: (1) 偶函数; (2) 奇函数, 设

(a) $f(x) = 1 - x$; (б) $f(x) = 2x - x^2$;

(B) $f(x) = \sqrt{x}$; (Г) $f(x) = \sin x$;

(Д) $f(x) = e^x$; (0) $f(x) = \ln x$.

作出对应的函数的图形.

解 (a)(1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = 1 + x$, 则 $f(x)$ 在整个数轴上为偶函数.

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -(1 + x)$, 则 $f(x)$ 在整个数轴上为奇函数.

如图1·135所示.

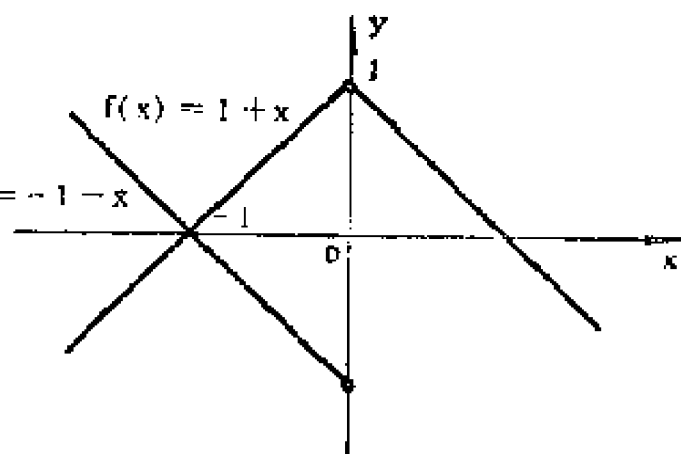
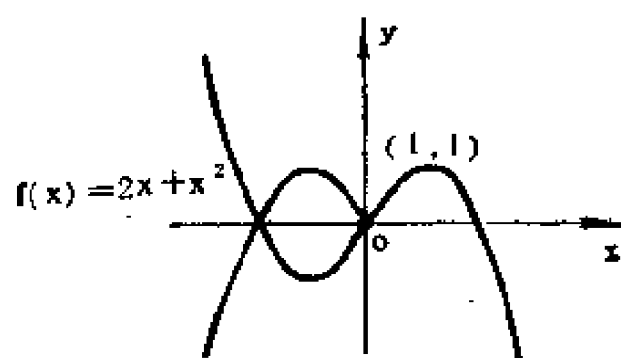


图 1·135

(6) (1) 当 $x \leq 0$ 时, 定义 $f(x) = -2x - x^2$ 即行;

(2) 当 $x > 0$ 时, 定义 $f(x) = 2x + x^2$ 即行.



如图 1.186 所示.

图 1.186

(B) (1) 当 $x \leq 0$ 时, 定义 $f(x) = \sqrt{-x}$ 即行;

(2) 当 $x > 0$ 时, 定义 $f(x) = -\sqrt{-x}$ 即行.

如图 1.187 所示.

(C) (1) 当 $x \leq 0$ 时, 定义 $f(x) = -\sin x = |\sin x|$ 即行;

(2) 当 $x > 0$ 时, 定义 $f(x) = \sin x$ 即行.

如图 1.188 所示.

(D) (1) 当 $x \leq 0$ 时, 定义 $f(x) = e^{-x}$ 即行;

(2) 当 $x > 0$ 时, 定义 $f(x) = -e^{-x}$ 即行.

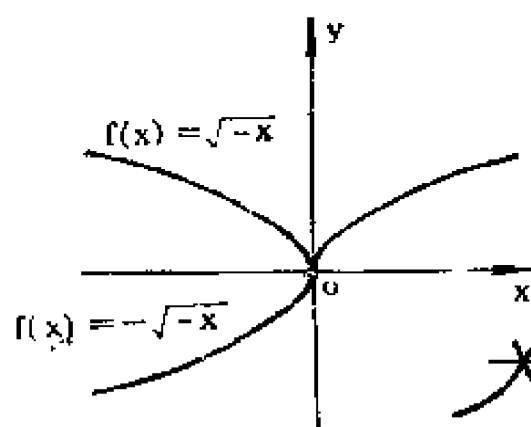


图 1.187

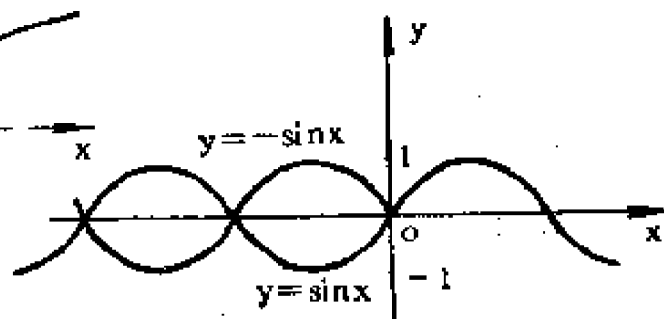


图 1.188

如图1·189所示。

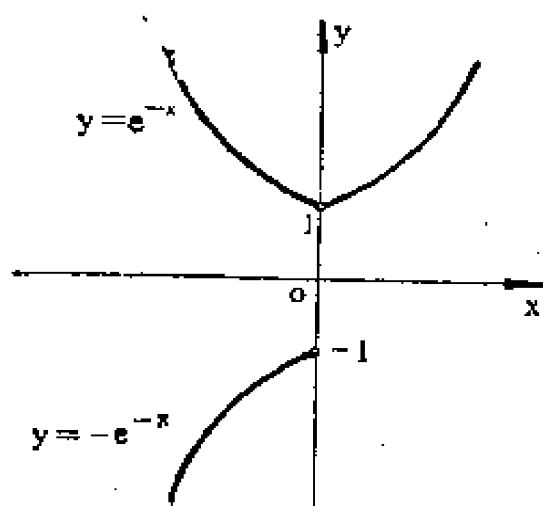


图 1·189

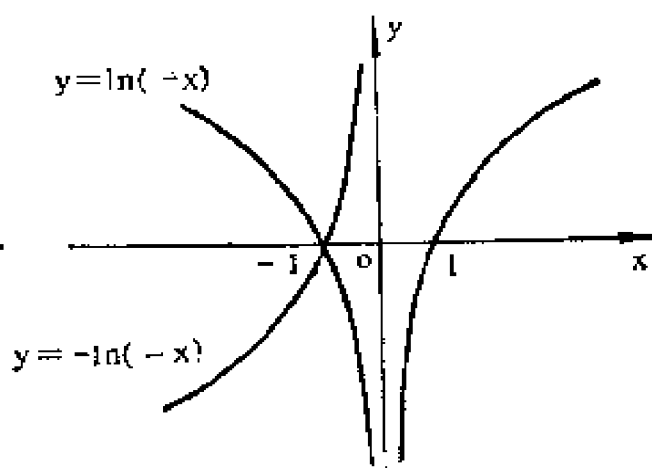


图 1·190

(e) (1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = \ln(-x)$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -\ln(-x)$ 即行。

如图1·190所示。

360. 确定下列函数的图形对于什么垂直轴对称:

(a) $y = ax^2 + bx + c$; (b) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$;

(B) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}$ ($0 \leq a \leq b$);

(r) $y = a + b \cos x$.

解 (a) $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$. 它关于直线

$x = -\frac{b}{2a}$ 对称. (b) 显然图形对于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称.

(B) 显然图形对于直线 $x = \frac{b-a}{2}$ 对称.

(r) 对于直线 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 对称.

361. 确定下列函数的图形的对称中心:

$$(a) y = ax + b; \quad (b) y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

$$(B) y = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

$$(r) y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3};$$

$$(A) y = 1 + \sqrt[3]{x-2}.$$

解 (a) 显然对称中心为 $(x_0, ax_0 + b)$, x_0 任意.

(b) 设对称中心为 (x_0, y_0) , 则对充分大的 x , 有 y 使 $y + y_0 = \frac{a(x - x_0) + b}{c(x + x_0) + d}$, $-y + y_0 = \frac{a(-x + x_0) + b}{c(-x + x_0) + d}$,

由此易得 $x_0 = -\frac{d}{c}$, $y_0 = \frac{a}{c}$.

(B) 用类似于(b)的方法, 可得对称中心为 $(x_0,$

$y)$, 其中 $x_0 = -\frac{b}{3a}$, $y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0$

$+ d$.

(r) 类似于(b), 可得对称中心为 $(2, 0)$.

(A) 类似于(b), 可得对称中心为 $(2, 1)$.

362. 作周期函数的图形:

$$(a) y = |\sin x|, \quad (b) y = \operatorname{sgn} \cos x,$$

(B) $y = f(x)$, 其中 $f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l}\right)$, 假设 $0 \leq x \leq 2l$ 和 $f(x + 2l) \equiv f(x)$,

$$(r) y = [x] - 2 \left[\frac{x}{2} \right];$$

(A) $y = (x)$, 此处 (x) 为从数 x 至与它最近的整数间

的距离.

解 (a) 如图1·191所示, 周期 π .

(b) 如图1·192所示, 周期 2π .

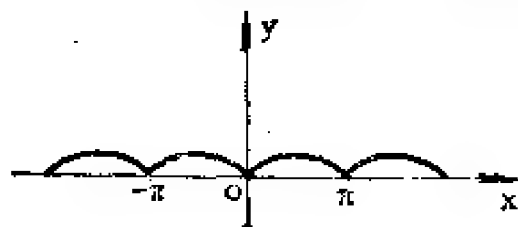


图 1·191

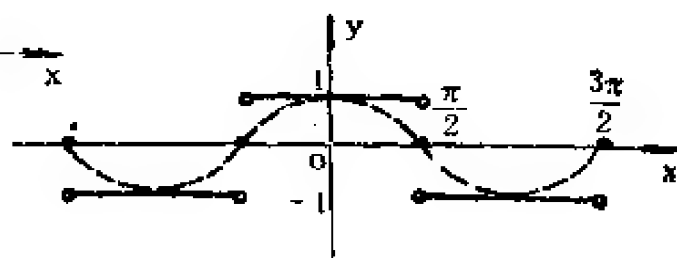


图 1·192

(B) 当 $0 \leq x \leq 2l$ 时,

由 $f(x)$ 的定义易得

$$f(x+2kl) = f(x) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

故知所给函数为以 $2l$ 为周期的周期函数, 它在 $[0, 2l]$ 内的图形为一抛物线, 顶点为 (l, A) , 如图1·193所示.

(T) 周期为 2^* , 如图1·194所示.

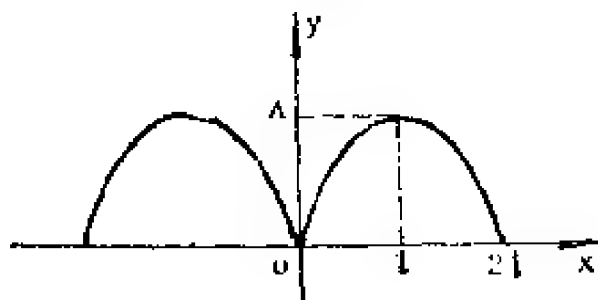


图 1·193

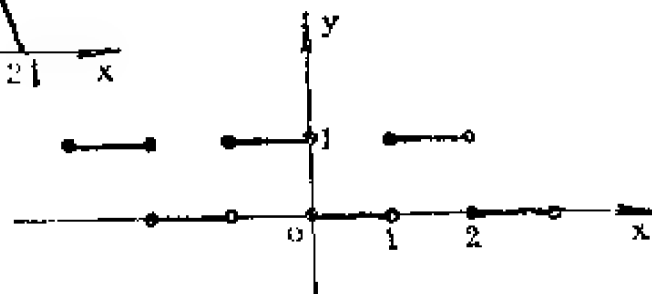


图 1·194

*) 原本该题为 $y = |x| - 2\left[\frac{x}{2}\right]$, 当 $x \geq 0$ 时, 它是以 2 为周期函数.

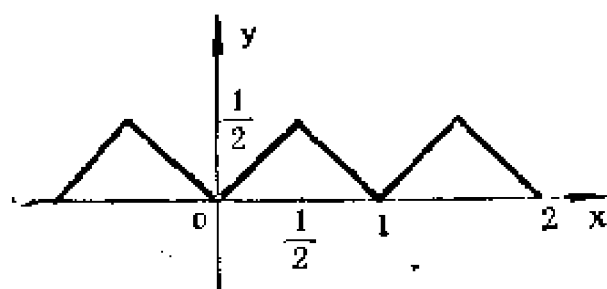


图 1.195

(A) 周期为 1, 如图 1.195 所示.

363. 证明: 若函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形对于二垂直轴 $x = a$ 和 $x = b$ ($b > a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证 设 x 为任一实数, 则按假设有

$$f(a+x) = f(a-x) \text{ 及 } f(b+x) = f(b-x).$$

在 $f(a+x) = f(a-x)$ 中将 x 换成 $x + (b-a)$, 则得

$$f(x+b) = f(a-x-b+a) = f(2a-b-x);$$

而 $f(x+b) = f(b-x)$, 所以

$$f(b-x) = f(2a-b-x).$$

将 $b-x$ 换成 x , 则得 $f(x) = f(2a-2b+x)$.

再将 x 换成 $2(b-a) + x$, 即得

$$\begin{aligned} f(x + 2(b-a)) \\ = f(x), \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 为一以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 如图 1.196 所示.

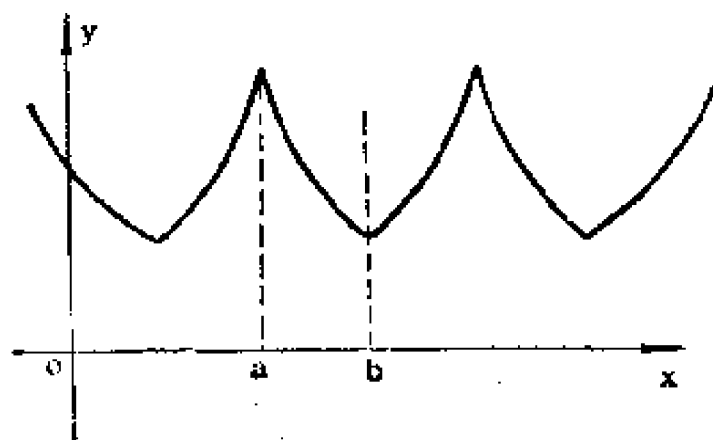


图 1.196

364. 证明: 若函数 $y =$

$f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形对于两点 $A(a, y_0)$ 和 $B(b, y_1)$ ($b > a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和. 特别是, 若 $y_0 = y_1$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 设 x 是任一实数, 按假设有:

$$f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x), \quad (1)$$

$$f(b+x) - y_1 = y_1 - f(b-x). \quad (2)$$

在(1)中, 将 x 换成 $x + (b-a)$ 则得

$$f(b+x) - y_0 = y_0 - f(2a-b-x) \quad (3)$$

将(3)代入(2)得

$$2y_1 - f(b-x) = 2y_0 - f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x) = 2(y_1 - y_0) + f(2a-b-x) \quad (4)$$

在(4)中, 将 $b-x$ 换成 x , 则得

$$f(x) = 2(y_1 - y_0) + f(2a-2b+x) \quad (5)$$

再在(5)中将 x 换成 $2(b-a)+x$, 则得

$$f(x) = 2(y_0 - y_1) + f[2(b-a)+x].$$

令

$$f(x) = -\frac{y_0 - y_1}{b-a}x + \varphi(x) \quad (6)$$

下面证明 $\varphi(x)$ 一定是周期函数. 事实上, 我们有

$$f(x+2(b-a)) = -\frac{y_0 - y_1}{b-a}[x+2(b-a)]$$

$$+ \varphi[x+2(b-a)],$$

$$f(x) - f[x+2(b-a)] = 2(y_0 - y_1) + \varphi(x)$$

$$- \varphi[x+2(b-a)].$$

因此由(5)式可得

$$\varphi(x) = \varphi[x + 2(b-a)]. \quad (7)$$

由(6)式和(7)式可知, $f(x)$ 是一个线性函数与一个周期函数的和.

若 $y_0 = y_1$, 则由(6)式和(7)式可知, $f(x)$ 是一个周期函数.

365. 证明: 若函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形关于点 $A(a, y_0)$ 及直线 $x = b$ ($b \neq a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 设 x 为任一实数, 按假设则有

$$f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x), \quad (1)$$

$$f(b+x) = f(b-x).$$

在(1)中, 将 x 换成 $x + (b-a)$, 则得

$$f(b+x) = 2y_0 - f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x) = 2y_0 - f(2a-b-x). \quad (2)$$

在(2)中, 将 $b-x$ 换成 x , 则得

$$f(x) = 2y_0 - f(2a-2b+x). \quad (3)$$

在(3)中, 将 x 换成 $2b-2a+x$, 则得

$$f(2b-2a+x) = 2y_0 - f(x). \quad (4)$$

由(3)(4)得 $f(2a-2b+x) = f(2b-2a+x)$, 再将 x 换成 $2b-2a+x$, 即得

$$f(x) = f(4(b-a)+x).$$

此即证明 $f(x)$ 为一以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

366. 设 $f(x+1) = 2f(x)$ 及当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x(1-x)$, 作函数

$$y = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 图形为一抛物线, 顶点为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 只要将纵标放大 2 倍, 余类推.

如图 1.197 所示.

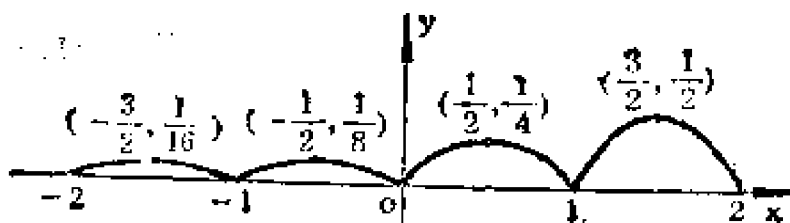


图 1.197

当 $x = \frac{2n+1}{2}$ 时, $y = \frac{2^n}{4} = 2^{n-2}$, 因而当 $n \rightarrow +\infty$

时, $y \rightarrow +\infty$; 当 $n \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

357. 设 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$; 且当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $f(x) = 0$.

作函数

$$y = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形.

解 由题设知

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $f(x) = 0$;

当 $\pi < x \leq 2\pi$ 时, 设 $0 < x_1 \leq \pi$, 则有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 + \pi) = f(x_1) + \sin x_1 \\ &= \sin x_1; \end{aligned}$$

当 $2\pi < x \leq 3\pi$ 时, 设 $\pi < x_2 \leq 2\pi$, 则有

$$f(x) = f(x_2 + \pi) = f(x_2) + \sin x_2 = 0;$$

余类推. 周期为 2π . 如图 1.198 所示.

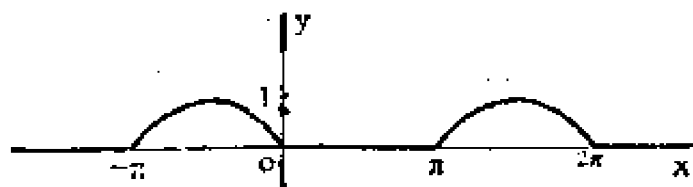


图 1.198

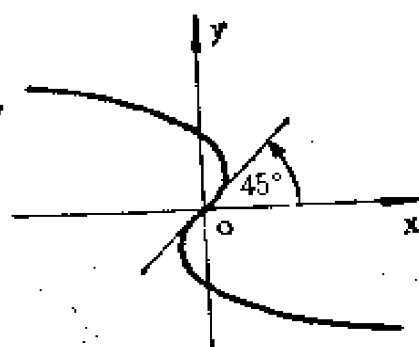


图 1.199

368. 作函数 $y = y(x)$ 的图形, 设:

(a) $x = y - y^3$; (б) $x = \frac{1-y}{1+y^2}$;

(в) $x = y - \ln y$; (г) $x^2 = \sin y$.

解 (a) 如图1.199所示.

(б) 如图1.200所示.

(в) 如图1.201所示.

(г) 如图1.202所示.

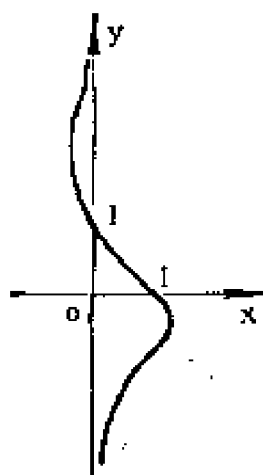


图 1.200

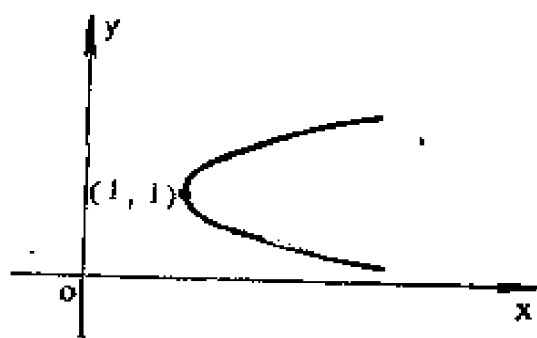


图 1.201

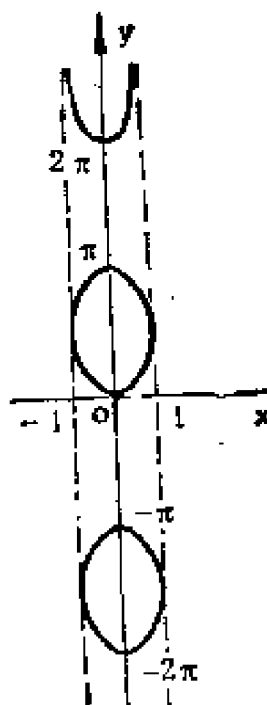


图 1.202

369. 作出下列用参数表示的各函数的图形, 设:

(a) $x=1-t, y=1-t^2$;

(б) $x=t+\frac{1}{t}, y=t+\frac{1}{t^2}$;

(в) $x=10\cos t, y=\sin t$

(椭圆);

(г) $x=\operatorname{ch} t, y=\operatorname{sh} t$

(双曲线);

(д) $x=5\cos^2 t, y=3\sin^2 t$;

(e) $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$ (摆线);

(ж) $x=\sqrt[3]{t}, y=\sqrt[3]{t+1} \quad (t \geq 0)$.

解 (a) $y-1=-(x-1)^2$. 如图1·203所示.

(б) 如图1·204所示.

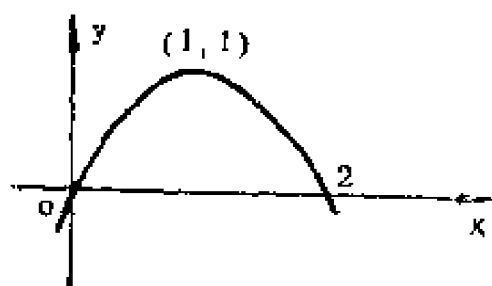


图 1·203

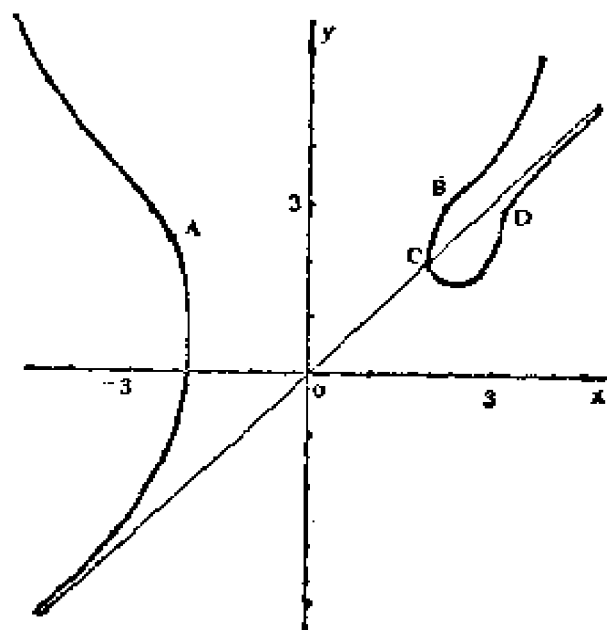


图 1·204

(в) $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$. 如图1·205所示.

(r) $x^2 - y^2 = 1$. 如图1·206所示.

(A) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, 如图1·207所示.

(e) 如图1·208所示.

(ж) 如图1·209所示.

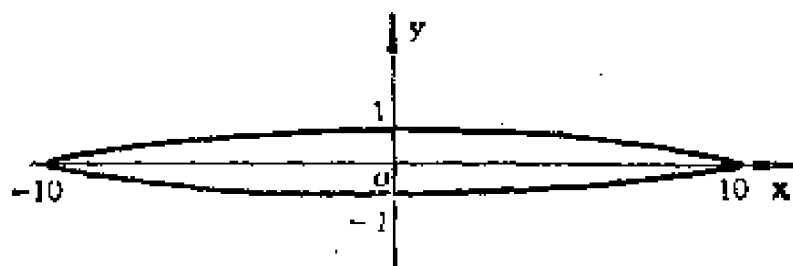


图 1·205

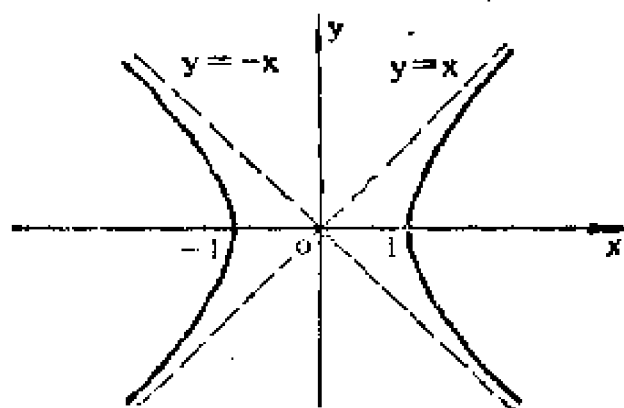


图 1·206

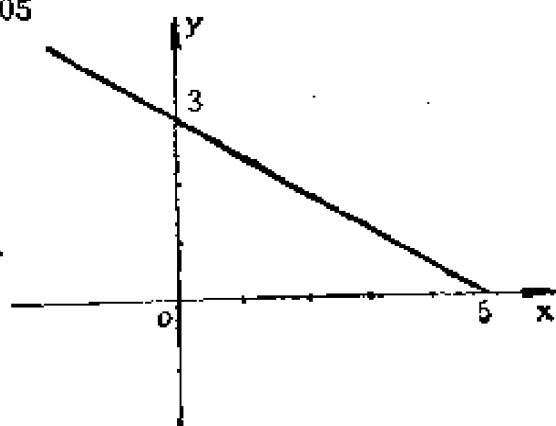


图 1·207

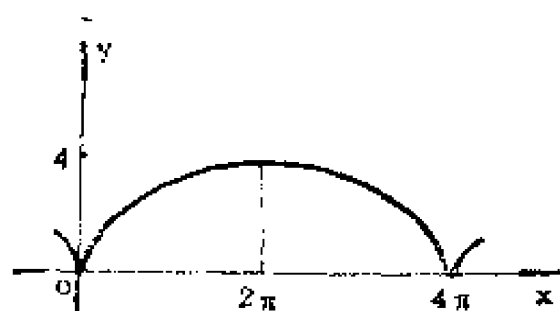


图 1·208

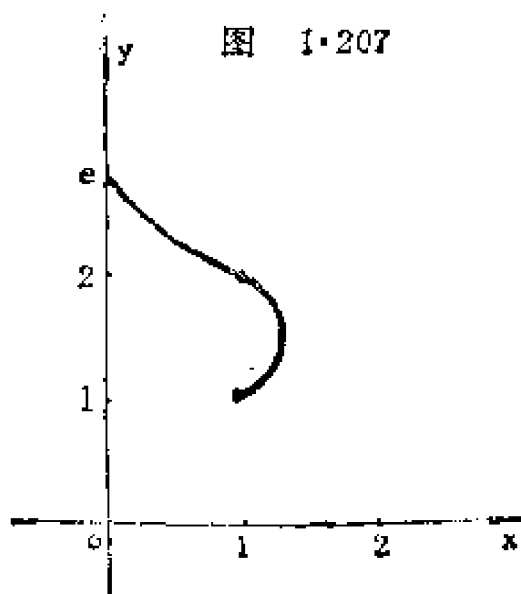


图 1·209

370. 作下列隐函数的图形:

(a) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (椭圆);

(b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (笛卡尔叶形线);

(v) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (抛物线);

(r) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (内摆线);

(A) $\sin x = \sin y$;

(B) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;

(K) $x^x = y^y$ ($x > 0, y > 0$);

(3) $x - |x| = y - |y|$.

解 (a) 将坐标轴按正向绕原点旋转 45° , 得新坐标系 $Ox'y'$, 则由旋转公式得

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

代入原式得

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} = 1.$$

如图1·210所示.

(6) 渐近线为 $x + y + 1 = 0$.

如图1·211所示.

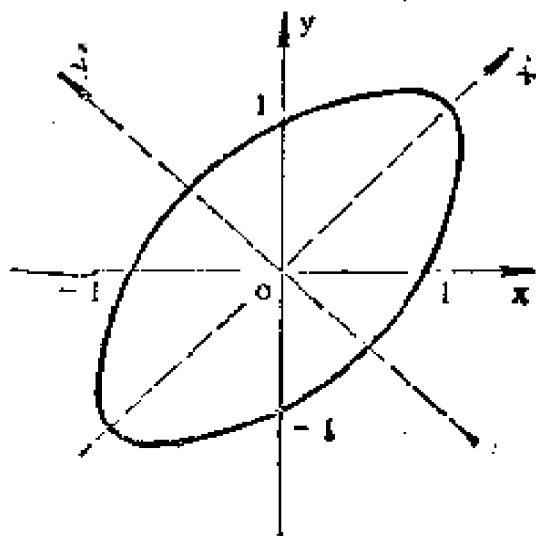


图 1·210

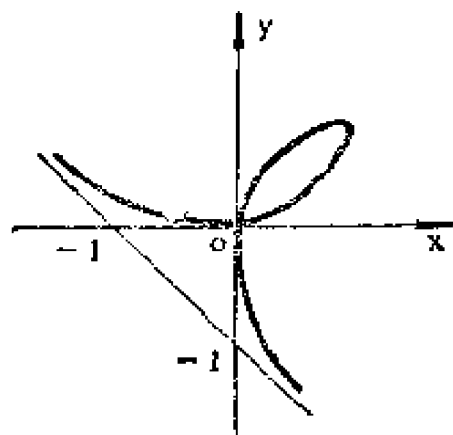


图 1·211

(B) 如图 1·212 所示。

(T) 如图 1·213 所示。

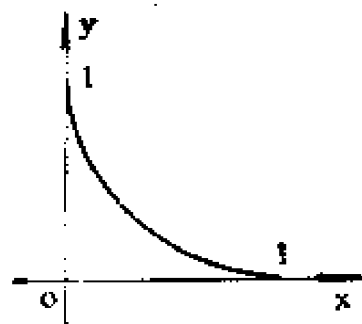


图 1·212

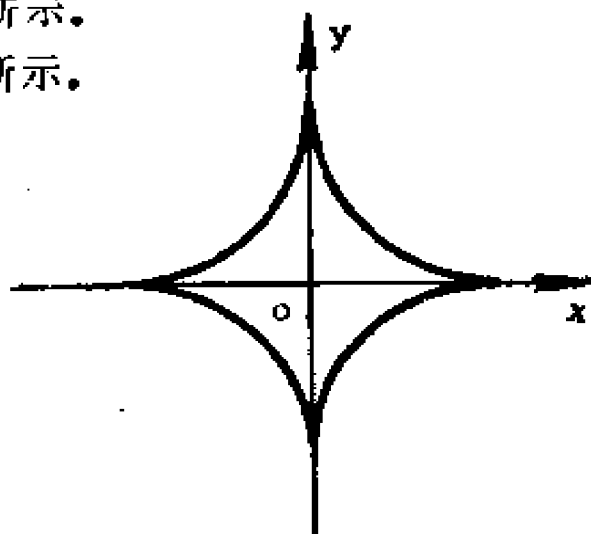


图 1·213

(A) $y = x + 2k\pi$ 或 $y = (2k+1)\pi - x$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 如图 1·214 所示。

(B) $y = x^2 + 2k$ 或 $y = 2k - x^2$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

如图 1·215 所示。

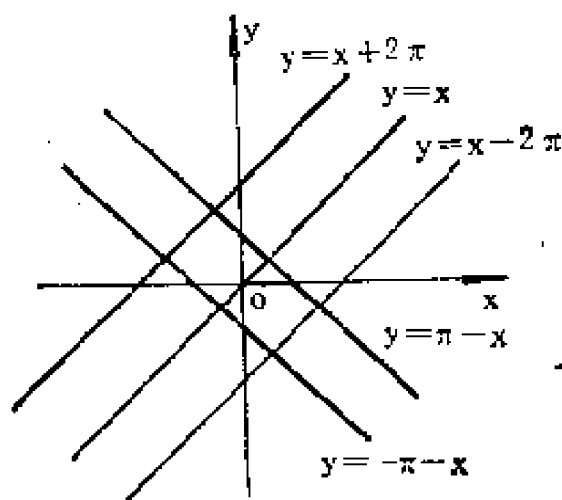


图 1·214

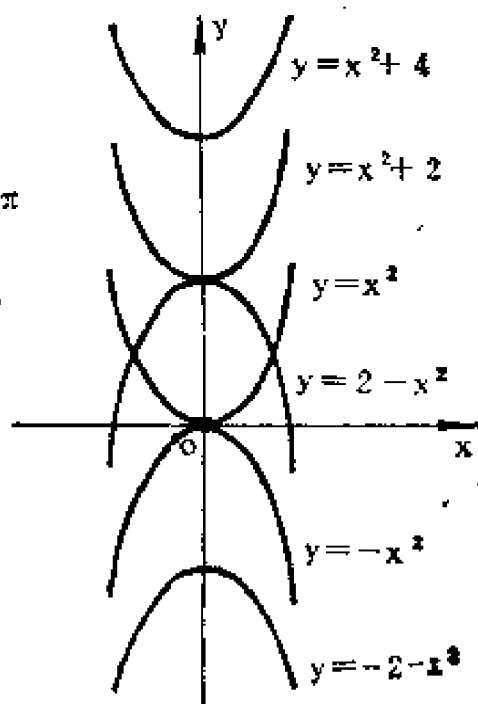


图 1·215

(ж) 如图1·216所示, 参看1544题的作图法.

(з) 如图1·217所示, 图形包括第一象限阴影部分 (连同边界): $x \geq 0, y \geq 0$ 以及第三象限的黑粗线部分: $y = x, x < 0, y < 0$.

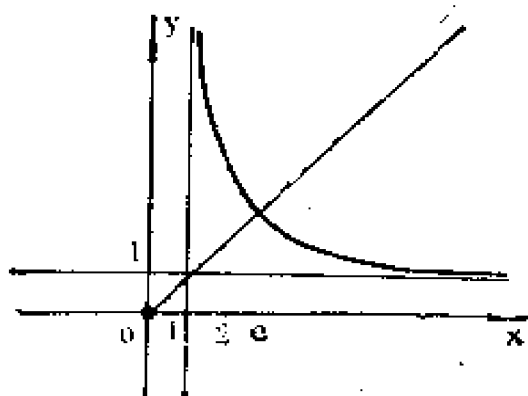


图 1·216

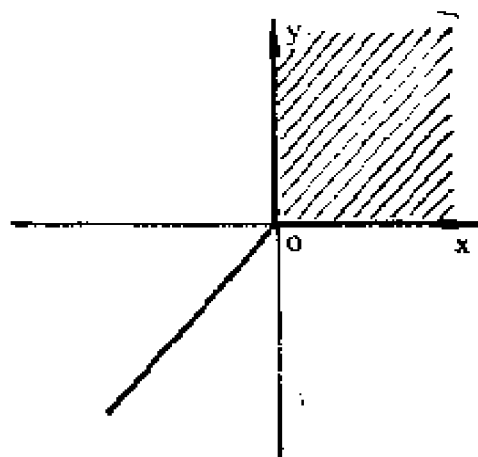


图 1·217

371. 在极坐标 (r, φ) 系中作出函数 $r = r(\varphi)$ 的图形, 设:

(a) $r = \varphi$ (阿基米得螺旋线); (б) $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (双曲螺旋线);

(в) $r = \frac{\varphi}{\varphi + 1} (0 \leq \varphi < +\infty)$;

(г) $r = 2^{-\frac{\varphi}{2\pi}}$ (对数螺旋线);

(д) $r = 2(1 + \cos \varphi)$ (心脏形线); (е) $r = 10 \sin 3\varphi$ (三瓣玫瑰线);

(ж) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (贝努里双纽线);

(з) $\varphi = \frac{r}{r-1} (r > 1)$; (и) $\varphi = 2\pi \sin r$.

解 (а) 如图1·218所示, $M_1 M_2 = M_2 M_3 = \dots = 2\pi$.

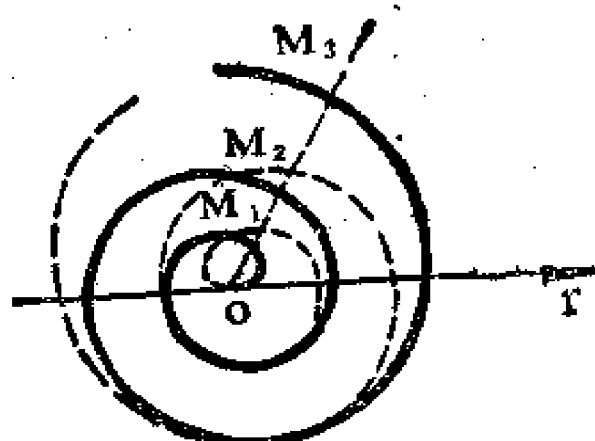


图 1.213

(6) 如图1.219所示.

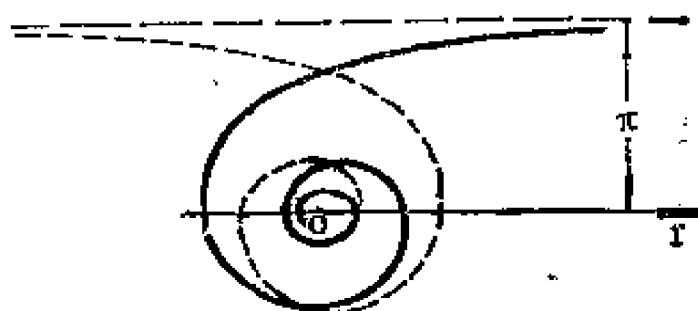


图 1.219

(B) 如图1.220所示.

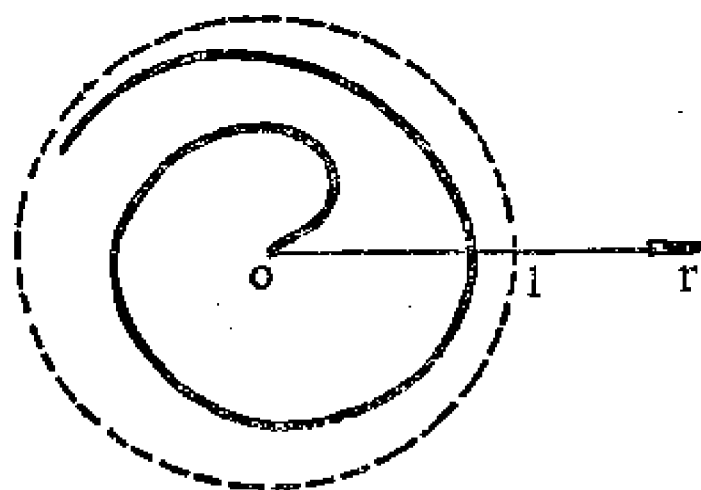


图 1.220

(r) 如图1·221所示.

(r) 如图1·222所示.

(e) 如图1·223所示.

(ж) 如图1·224所示.

(3) 如图1·225所示.

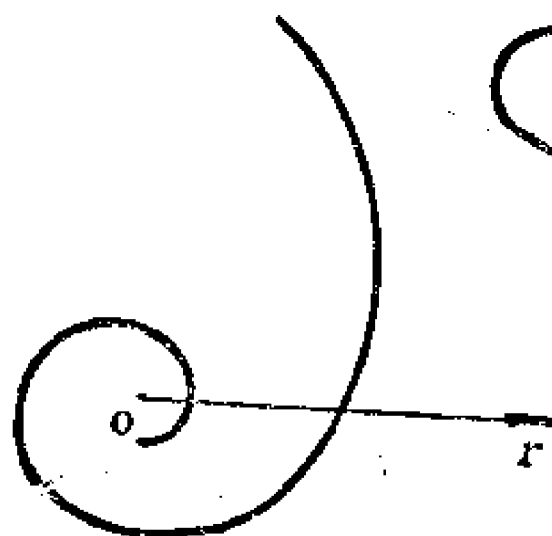


图 1·221

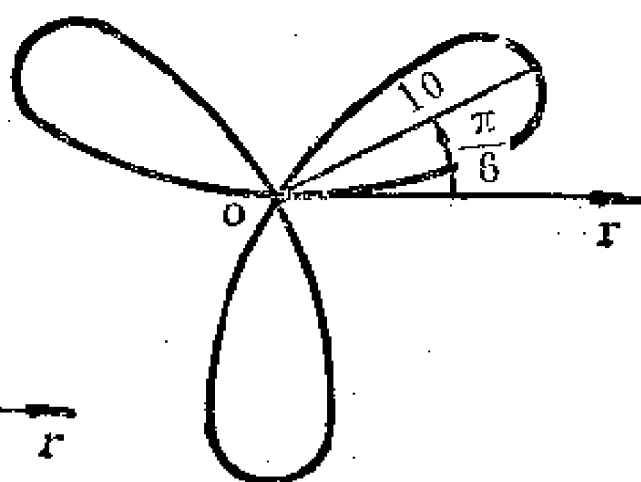


图 1·223

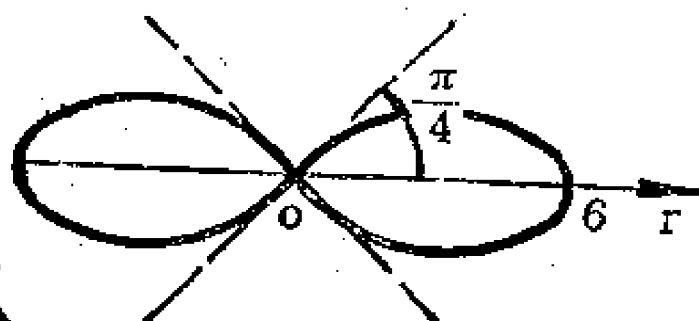


图 1·224

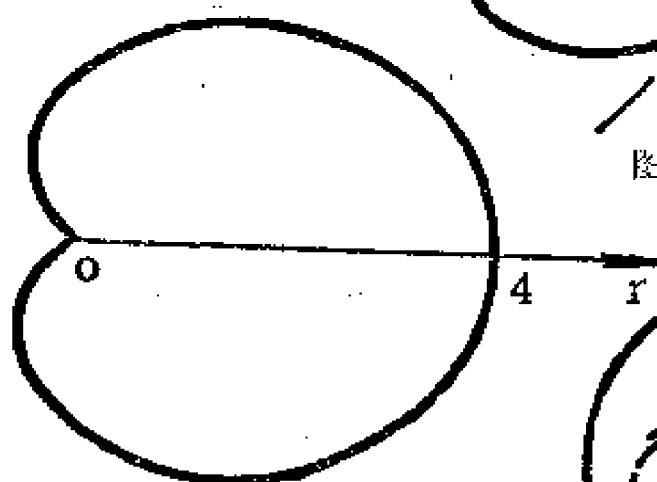


图 1·222

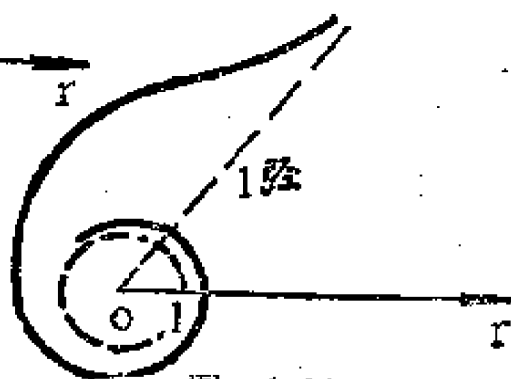


图 1·225

(H) 如图1·226所示。

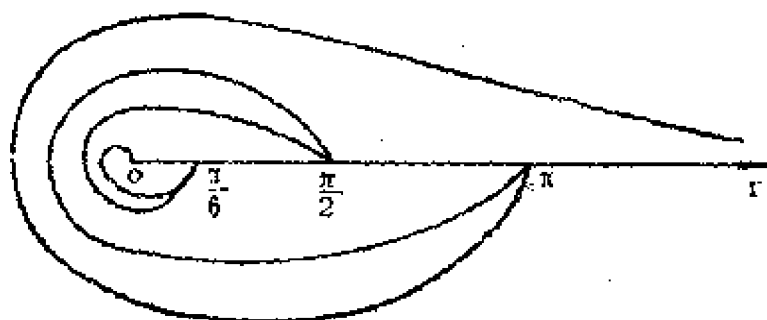


图 1·226

372. 作函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图形，以求方程式

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

的近似解。

解 如图1·227所示。

因 $y|_{x=0} = 1 > 0$,

$$y|_{x=0.4} = -0.136,$$

所以，在0与0.4之间有一实根，约为0.35。

同法可求得其它二根为1.53及-1.88。

用图解法解下列方程式：

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$ 。

解 作函数 $y = x^3$ 及 $y = 4x + 1$ 的图形，它们的交点的横坐标即所求之根（图1·228）。

在图示的根 x_0 邻近研究函数 $f(x) = x^3 - 4x - 1$ ，若 $f(x_0$

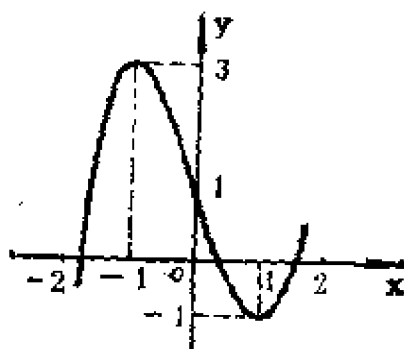


图 1·227

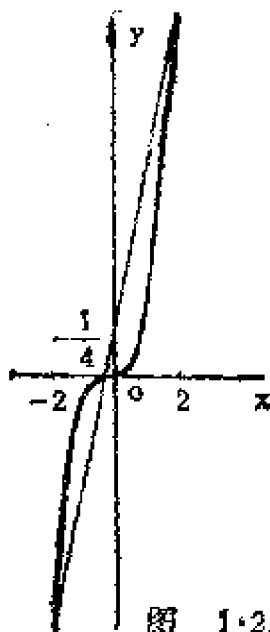


图 1·228

$-\delta) \cdot f(x_0 + \delta) < 0$, 则根 x_0 界于 $x_0 - \delta$ 及 $x_0 + \delta$ 之间, 其中 δ 为很小的某个正数, 下列各题同.

经判别, 根的近似解为 $-1.86; -0.25; 2.11$.

374. $x^4 - 4x + 1 = 0$.

解 作函数 $y = x^4$ 及 $y = 4x - 1$ 的图形, 如图 1.229 所示, 交点的横坐标即所求之根, 其近似值为 $0.25; 1.49$.

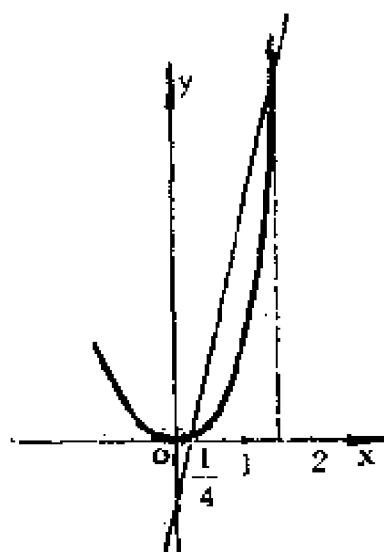


图 1.229

375. $x = 2^{-x}$.

解 作函数 $y = 2^{-x}$ 及 $y = x$ 的图形, 如图 1.230 所示, 交点的横坐标为 0.64 , 此即所求之根的近似值.

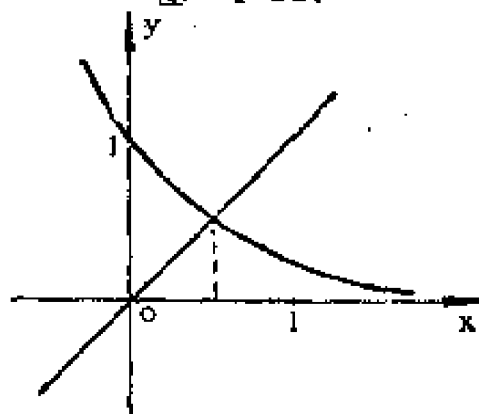


图 1.230

376. $\lg x = 0.1x$.

解 作函数 $y = \lg x$ 及 $y = 0.1x$ 的图形, 如图 1.231 所示,

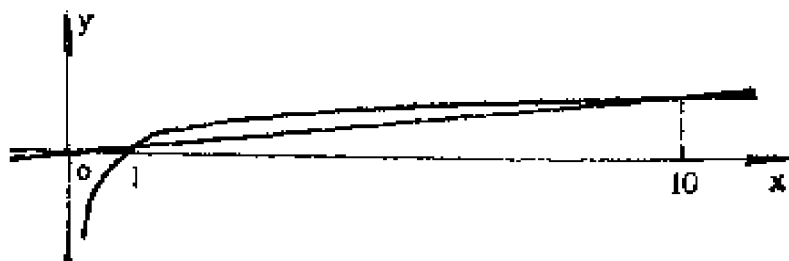


图 1.231

交点的横坐标为 1.37 及 10 , 此即所求之根, 前者为近似值, 后者为精确值.

377. $10^x = x^2$.

解 作函数 $y=10^x$ 及 $y=x^2$ 的图形, 如图 1.232 所示. 交点的横坐标为 -0.54 , 此即所求之根的近似值.

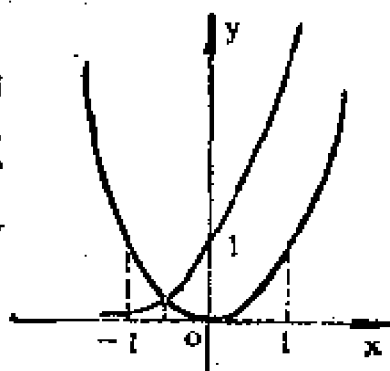


图 1.232

378. $\operatorname{tg} x = x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$).

解 作函数

$$y = \operatorname{tg} x \text{ 及 } y = x$$

的图形, 如图 1.233 所示.

交点的横坐标为 0 及 4.49, 此即所求之根, 前者为精确值, 后者为近似值.

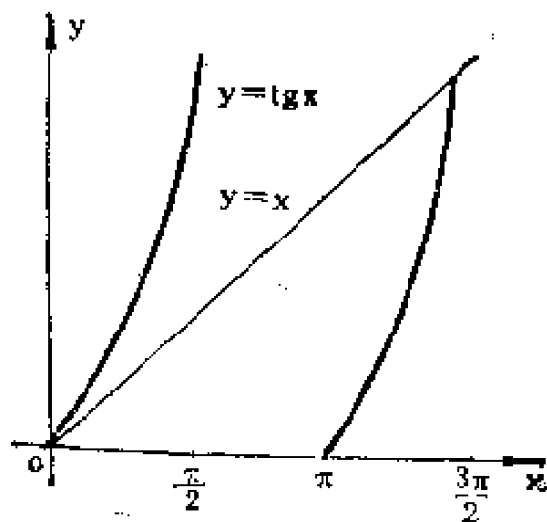


图 1.233

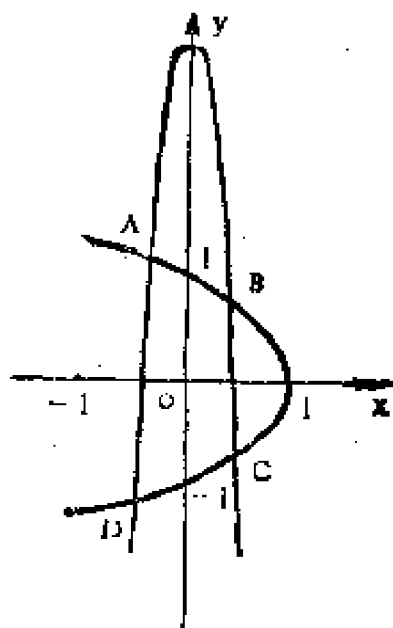


图 1.234

用图解法以解下列方程组:

379. $x + y^2 = 1$, $16x^2 + y = 4$.

解 作函数

$$y^2 = 1 - x \text{ 及 } -y + 4 = 16x^2$$

的图形, 如图 1.234 所示.

交点为点 A , B , C 及 D , 它们的一对坐标即所求之解 (近似值):

$$x_1 = -0.42, \quad y_1 = 1.19 \text{ (A点)};$$

$$x_2 = 0.45, \quad y_2 = 0.74 \text{ (B点)};$$

$$x_3 = 0.54, \quad y_3 = -0.68 \text{ (C点)};$$

$$x_4 = -0.57, \quad y_4 = -1.25 \text{ (D点)}.$$

380. $x^2 + y^2 = 100, \quad y = 10(x^2 - x - 2).$

解 作函数

$$x^2 + y^2 = 100$$

及 $y = 10(x^2 - x - 2)$

的图形, 如图1·235所示.

交点为点 A , B , C 及 D , 它们的一对坐标即所求之解 (近似值):

$$x_1 = -1.30,$$

$$y_1 = 9.92 \text{ (A点)};$$

$$x_2 = 2.30,$$

$$y_2 = 9.73 \text{ (B点)};$$

$$x_3 = 1.62,$$

$$y_3 = -9.87 \text{ (C点)};$$

$$x_4 = -0.62, \quad y_4 = -9.98 \text{ (D点)}.$$

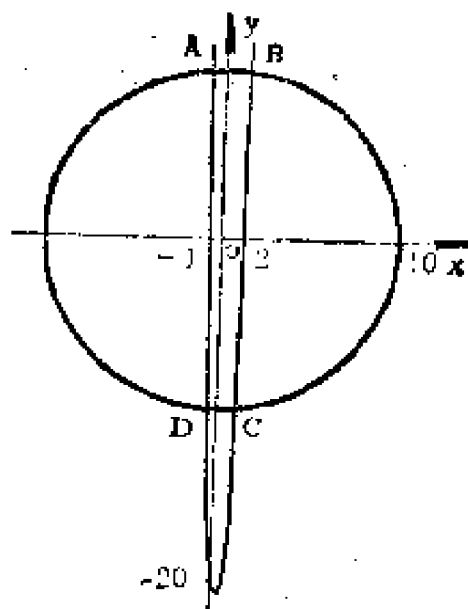


图 1·235

§ 5. 函数的极限

1° 函数的有界性 设存在有某两数 m 和 M , 使得

当 $x \in (a, b)$ 时, $m < f(x) < M$,

则称函数 $f(x)$ 在这区间 (a, b) 上为有界的.

数 $m_0 = \inf_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a, b) 上的下确界, 而数 $M_0 = \sup_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a, b) 上的上确界.

差 $M_0 - m_0$ 称为函数在区间 (a, b) 上的振幅.

2° 函数在某一点的极限 符号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

表示对于任一个数 $\varepsilon > 0$, 都存在有数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对于满足条件式 $0 < |x - a| < \delta$, 并使 $f(x)$ 有意义的一切 x , 有下列不等式成立:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

函数的极限 (1) 存在的必要而且充分的条件是: 对于每一个叙列 $x_n \rightarrow a (n = 1, 2, \dots)$, 下面的等式都成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

有两个著名的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

哥西判别法. 函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在, 当而且仅当, 对于每一个 $\varepsilon > 0$, 都能找得着 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得, 只

要是

$$0 < |x' - a| < \delta \text{ 和 } 0 < |x'' - a| < \delta,$$

就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

式中 x' 和 x'' 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内的.

3° 单侧的极限 若

当 $0 < a - x < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $|A' - f(x)| < \varepsilon$,

则称数 A' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限:

$$A' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0).$$

同样, 若 当 $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $|A'' - f(x)| < \varepsilon$,

则称数 A'' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限:

$$A'' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$$

函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的必要而且充分的条件为:

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4° 无穷极限 符号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 只要是

$$0 < |x - a| < \delta(E), \text{ 则有 } |f(x)| > E.$$

5° 子列极限 若对于某叙列 $x_n \rightarrow a$ 有等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B,$$

则称数 (或符号 ∞) B 为函数 $f(x)$ 在 a 点的子列极限 (有穷的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\varliminf_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 和 } \varlimsup_{x \rightarrow a} f(x)$$

来表示, 分别称为函数 $f(x)$ 在 a 点的下极限和上极限.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限（有穷的或无穷的）的必要而且充分的条件。

381. 函数 $f(x)$ 由下面的条件所定义：

若 $x = \frac{m}{n}$ ，则 $f(x) = n$ ，

式中 m 和 n 为互质的整数，且 $n > 0$ ；

若 x 为无理数，则

$$f(x) = 0.$$

证明此函数在每一点 x 为有穷的，但并非有界的（即在这点的任何邻域中是无界的）。

证 任给 $x_0 > 0$ ，当 x_0 固定时， $f(x_0)$ 值确定。由于有理数在数轴上处处稠密，故在 x_0 的任何邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内总有无限多个有理数。下面证明对于任给的 $\delta > 0$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内是无界的。若不然，存在 $M > 0$ ，使当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时，

$$|f(x)| \leq M.$$

于是，在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数只能表示成

$$\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \dots, \frac{k}{[M]},$$

其中 k 是与分母互质的整数， $[M]$ 为 M 的整数部分。

由于这些有理数都在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中，故有

$$(x_0 - \delta)[M] \leq k \leq (x_0 + \delta)[M],$$

上式表明在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数仅为有限个，这与有理数在数轴上的处处稠密性相矛盾。

于是, 本题所定义的函数 $f(x)$ 在每一点 x (有穷) 的任何邻域中是无界的.

382. 若函数 $f(x)$ 在: (a) 开区间, (b) 闭区间内的每一点确定而有界, 则此函数在这给定的区间内或对应的闭区间内是否为有界的?

举出适当的例子.

解 (a) 一般地说, 不一定. 例如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在

$(0, 1)$ 内每一点确定而有界, 但它在 $(0, 1)$ 内无界.

(b) 是有界的. 事实上, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界, 则存在 $x_n \in [a, b]$ 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. 取子列 $x_{n_k} \rightarrow x_0$

$\in [a, b]$. 显然, $f(x)$ 在 x_0 无界 (即在 x_0 的任何邻域中无界), 矛盾.

383. 证明函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$

在间隔 $-\infty < x < +\infty$ 中是有界的.

证 当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq \frac{1+1}{1} = 2$.

当 $|x| > 1$ 时, $|f(x)| < \frac{1+x^2}{1+x^4} < 1$.

因而, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, $|f(x)| < 2$. 即函数 $f(x)$ 是有界的.

384. 证明函数

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的, 但当 $x \rightarrow 0$ 时不成为无穷大.

证 当 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ 时, $f(x) = 0$; 而当 $x = \frac{1}{k\pi}$

时, $f(x) = (-1)^k k\pi$. 于是当 $k \rightarrow \infty$ 时, 点 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$

及 $\frac{1}{k\pi}$ 均在点 $x=0$ 的任何邻域内. 由于 $|(-1)^k \cdot k\pi|$

$\rightarrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$, 故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的. 然而当 $k \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 不断地与 Ox 轴相交, 即 $f(x) = 0$ (这样的数 x 的集合是无限的). 因而, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 又不成为无穷大.

385. 研究函数 $f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$ 在区间 $0 < x < e$ 内的有界性.

解 上方有界, 它小于 $|\ln e|$.

下方无界.

386. 证明函数

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

在域 $0 \leq x < +\infty$ 内有下确界 $m_0 = 0$ 和上确界 $M_0 = 1$.

证 $1 > f(x) \geq 0$, 且 $f(x)$ 单调上升趋近于 1, 所以,

$$m_0 = 0, M_0 = 1.$$

387. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调上升, 则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么?

解 $m_0 = f(a)$, $M_0 = f(b)$, 其中 m_0 及 M_0 代表下确界

及上确界，以下各题均采用此符号。

求函数的下确界和上确界：

388. $f(x) = x^2$ 在 $(-2, 5)$ 内。

解 $m_0 = 0, M_0 = 25.$

389. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内。

解 $m_0 = 0, M_0 = 1.$

390. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内。

解 由于 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内为增函数，而在 $(1, +\infty)$ 内为减函数，且 $f(1)$ 存在，所以，

$$m_0 = 0, M_0 = f(1) = 1.$$

391. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内。

解 由 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 知 $m_0 = f(1) = 2, M_0 = +\infty.$

392. $f(x) = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内。

解 $m_0 = -1, M_0 = 1.$

393. $f(x) = \sin x + \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内。

解 由 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 知 $m_0 = -\sqrt{2}, M_0 = \sqrt{2}.$

394. $f(x) = 2^x$ 在 $(-1, 2)$ 内。

解 $m_0 = f(-1) = \frac{1}{2}, M_0 = f(2) = 4.$

395. $f(x) = [x]$: (a) 在 $(0, 2)$ 内, (b) 在 $[0, 2]$ 内。

解 (a) $m_0 = 0, M_0 = 1;$

(b) $m_0 = 0, M_0 = 2.$

396. $f(x) = x - [x]$ 在 $[0, 1]$ 内.

解 $m_0 = 0, M_0 = 1$.

397. 求函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间内的振幅:

(a) $(1, 3)$; (б) $(1.9, 2.1)$;

(в) $(1.99, 2.01)$; (г) $(1.999, 2.001)$.

解 (a) 振幅以 ω 表示之. $\omega = M_0 - m_0$

因为 $m_0 = 1, M_0 = 9$, 所以

$$\omega = 8.$$

(б) $m_0 = (1.9)^2, M_0 = (2.1)^2$,

$$\omega = (2.1)^2 - (1.9)^2 = 0.8.$$

(в) $\omega = (2.01)^2 - (1.99)^2 = 0.08$.

(г) $\omega = (2.001)^2 - (1.999)^2 = 0.008$.

398. 求函数

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

在下列区间内的振幅:

(a) $(-1, +1)$; (б) $(-0.1, 0.1)$;

(в) $(-0.01, 0.01)$; (г) $(-0.001, 0.001)$.

解 (a) $\omega = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$;

(б) $\omega = \pi$;

(в) $\omega = \pi$;

(г) $\omega = \pi$.

399. 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的下确界和上确界。

证明若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于 (a, b) 内的函数, 则

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2]$$

及

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子, 使它们在最后的二关系式中是: (a) 等式的情形, (b) 不等式的情形.

证 因为

$$m[f_1] \leq f_1 \leq M[f_1]$$

及

$$m[f_2] \leq f_2 \leq M[f_2],$$

所以,

$$m[f_1] + m[f_2] \leq f_1 + f_2,$$

从而有

$$m[f_1] + m[f_2] \leq m[f_1 + f_2].$$

又因

$$f_1 + f_2 \leq M[f_1] + M[f_2],$$

所以,

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

(a) 当 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 在 (a, b) 内具有相同的单调性, 且 m 及 M 均为有限时, 取等式.

(b) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x^2$ 在区间 $(-1, 1)$ 内

$$m[f_1] = 0, M[f_1] = 1;$$

$$m[f_2] = -1, M[f_2] = 0.$$

又因为 $f_1 + f_2 = 0$, 所以

$$m[f_1 + f_2] = M[f_1 + f_2] = 0.$$

此时

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2],$$

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

取不等式的符号.

400. 设函数 $f(x)$ 定义于域 $[a, +\infty)$ 内, 并且在每一个闭区间 $[a, b]$ 上是有界的. 假定

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$$

及
$$M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} f(\xi).$$

作函数 $y = m(x)$ 和 $y = M(x)$ 的图形, 设

$$(a) f(x) = \sin x, \quad (b) f(x) = \cos x.$$

解 (a) 如图 1.236 所示. (b) 如图 1.236 所示

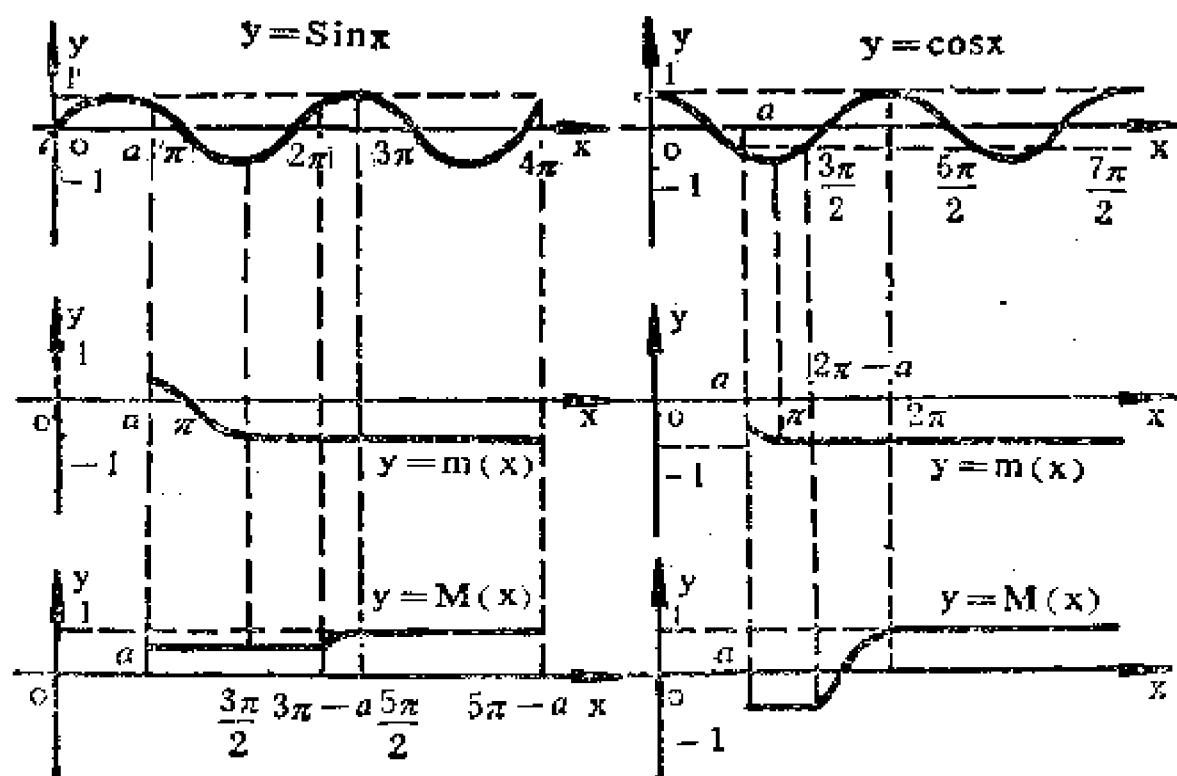


图 1.236

401. 利用《 ε — δ 》论证法, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
δ					

证 $|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2|$.

先限制 $|x - 2| < 1$, 即 $1 < x < 3$, 则

$$|x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| < 5|x - 2|,$$

取 $\delta = \min \{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$. 于是, 当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时,

$$|x^2 - 4| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
δ	0.02	0.002	0.0002	0.0000

402. 以《 $E - \delta$ 》的说法, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

填下表:

E	10	100	1000	10000
δ				

证 任给 $E > 0$,

要使 $\frac{1}{|1-x|^2} > E,$

只要 $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{E}},$

又只要 $0 < |x-1| < \frac{1}{E} (E > 1)$,

取 $\delta = \min \left\{ 1, \frac{1}{E} \right\}$,

则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时,

$$\left| \frac{1}{(1-x)^2} \right| > E,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

E	10	100	1000	10000
δ	0.1	0.01	0.001	0.0001

403. 利用不等式表示下列各式:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$; (6) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$;

(B) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$.

举出适当的例子.

解 (a) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

例如, $f(x) = x + 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$;

(6) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a-x < \delta$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$.

例如,

$$\text{若 } f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{当 } x \leq 1; \\ 2, & \text{当 } x > 1, \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$

(B) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$

例如本题(6)之例, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2.$$

利用不等式表示下列各式, 并举出适当的例子:

404. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b;$ (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b;$

(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$

解 (a) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$

(6) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$

(B) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$

例如, 对于函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

405. (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; (б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$;
 (B) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$; (Г) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$;
 (Д) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$; (e) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$;
 (Ж) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$; (g) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$;
 (И) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

解 (a) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty.$$

(б) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty.$$

(B) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$f(x) > E.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$

例如, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

(c) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$|f(x)| > E.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$

例如, $f(x) = \frac{(-1)^{[\frac{1}{1-x}]}}{1-x}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty.$$

(d) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty.$

例如, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty.$$

(e) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty.$

例如, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty.$$

(ж) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$|f(x)| > E.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = \frac{(-1)^{[\frac{1}{x-1}]}}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty.$$

(з) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = -\frac{1}{1-x}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty.$$

(и) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty.$$

$$406. \quad (\text{a}) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty; \quad (\text{б}) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty;$$

$$(\text{B}) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty; \quad (\text{r}) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty;$$

$$(\text{д}) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad (\text{e}) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty;$$

$$(\text{ж}) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty; \quad (\text{з}) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty;$$

$$(\text{и}) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

解 (a) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = x^3$, 则有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(6) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = -x^2$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

(B) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = x^2$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

(r) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = (-1)^{[x^2]} x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

(A) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x)=x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

(e) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = -x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

(ж) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = (-1)^{[x]}x^2$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty.$$

(з) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = -x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

(и) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

407. 命 $y=f(x)$. 利用不等式表示下列各情况:

- (a) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b - 0$;
- (б) 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $y \rightarrow b - 0$;
- (B) 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b - 0$;
- (Г) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b + 0$;
- (Д) 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$;
- (e) 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$;
- (Ж) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$;
- (з) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$;
- (И) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$;
- (K) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$;
- (Л) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$;
- (M) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

举出适当的例子.

解 (a) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b - 0$,

或

$$\text{当 } x \rightarrow a \text{ 时, } y \rightarrow b - 0.$$

例如, $y = -|x|$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(б) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b - 0$.

例如, $y = x$, 即有

当 $x \rightarrow 0 - 0$ 时, $y \rightarrow 0 - 0$.

(B) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = -x$, 即有

当 $x \rightarrow 0 + 0$ 时, $y \rightarrow 0 - 0$.

(Г) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b + 0$,

例如, $y = |x|$, 即有

当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0 + 0$.

(Д) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = -x$, 即有

当 $x \rightarrow 0 - 0$ 时, $y \rightarrow 0 + 0$.

(e) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = x$, 即有

当 $x \rightarrow 0 + 0$ 时, $y \rightarrow 0 + 0$.

(ж) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = -\frac{1}{|x|}$, 即有

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0 - 0$.

(з) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = \frac{1}{x}$, 即有

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0 - 0$.

(и) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = -\frac{1}{x}$, 即有

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0 - 0$.

(и) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = \frac{1}{|x|}$, 即有

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0 + 0$.

(л) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = -\frac{1}{x}$, 即有

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0 + 0$.

(м) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = \frac{1}{x}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 + 0.$$

408. 设

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

式中 a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 为实数.

证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = +\infty$.

证 不妨设 $a_0 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} |p(x)| &\geq |a_0| \cdot |x|^n \cdot \left| 1 - \left(\frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \dots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right|, \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 故存在 $E_1 > 0$,

使当 $|x| > E_1$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} &\left| 1 - \left(\frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \dots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right| \\ &> \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

从而有

$$|p(x)| > \frac{1}{2} |a_0| \cdot |x|^n.$$

任给 $M > 0$, 设

$$E_2 = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}.$$

取

$$E = \max(E_1, E_2),$$

则当 $|x| > E$ 时, 恒有

$$|p(x)| > M,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = +\infty.$$

409. 设:

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m},$$

式中 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{若 } n > m; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } n = m; \\ 0, & \text{若 } n < m. \end{cases}$$

证: 分子分母同除以 x^m , 得

$$R(x) = \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \dots + a_n x^{-m}}{b_0 + b_1 x^{-1} + \dots + b_m x^{-m}}.$$

当 $n > m$ 时, 分子趋于无穷, 分母趋于 b_0 ,
所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \infty.$$

当 $n = m$ 时, 分子趋于 a_0 , 分母趋于 b_0 , 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0}.$$

当 $n < m$ 时, 分子趋于 0, 分母趋于 b_0 , 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0.$$

410. 设:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式, 且

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

下式有什么可能的值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}?$$

解 若 a 仅为 $P(x) = 0$ 及 $Q(x) = 0$ 的一重根, 则极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

为一确定值 (不等于零)。

若 a 为 $P(x) = 0$ 的 n 重根, 而为 $Q(x) = 0$ 的 m 重根, 则当 $n > m$ (n, m 均大于 1) 时, 此极限为 0; 当 $n < m$ 时, 此极限为 ∞ ; 当 $n = m$ 时, 此极限为一不等于零的值。

总之, 极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

为零, 或为 ∞ , 或为不等于零的值。

求下列各式之值:

$$411. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$

(B) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$

412. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$

解 $(1+x)(1+2x)(1+3x) = 1 + 6x + 11x^2 + 6x^3,$
 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (6 + 11x + 6x^2) = 6.$$

413. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2}{x^2 + x^5}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 10}{x^3 + 1}$
 $= 10.$

414. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^n}{x^2} \quad (m \text{ 与 } n \text{ 为自然数}).$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \\
&= \frac{[1 + nm x + \frac{1}{2!} n(n-1)m^2 x^2 + \dots + m^n x^n]}{x^2} \\
&+ \frac{-[1 + mn x + \frac{1}{2!} m(m-1)n^2 x^2 + \dots + n^m x^m]}{x^2} \\
&= \frac{n}{2}(n-1)m^2 - \frac{m}{2}(m-1)n^2 + o(x)^{*}) \\
&= \frac{1}{2}mn(n-m) + o(x),
\end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m).$$

*) $o(x)$ 表示当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量.

$$415. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$$

解 分子的最高次方为 5 次, 分母的最高次方也为 5 次, 因而当 $x \rightarrow \infty$ 时, 此分式的极限为分子与分母的最高次方系数之比, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} = \frac{1}{5^5}.$$

$$416. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

解 分子与分母的最高次方相同, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

$$417. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

解 分子的最高次方为

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

它与分母的最高次方相同, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

$$418. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$419. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$420. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1. \end{aligned}$$

*) 原书419题与420题相同。

$$421. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$422. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$423. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} \\ &= \frac{3^{20}}{6^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \end{aligned}$$

$$424. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad x + x^2 + \cdots + x^n - n \\ = (x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-1)[1 + (x+1) + \cdots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots \\
&\quad + 1)] \\
&= (x-1)(n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots + x^{n-1}).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} [n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots + x^{n-1}] \\
&= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

425. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ (m 和 n 为自然数) .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} \\
&= \frac{m}{n}.
\end{aligned}$$

426. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n 表自然数) .

解 设 $x = a + y$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow 0$.

代入, 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a+y)^n - a^n - na^{n-1}y}{y^2} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{n}{2}(n-1)a^{n-2} + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}y + \cdots \right. \\
&\quad \left. + y^{n-2} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}.$$

$$427. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \quad (n \text{ 表自然数}).$$

解 设 $x=1+y$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时, $y \rightarrow 0$. 代入, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{n+1} - (n+1)(1+y) + n}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)y + \cdots + y^{n-1} \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

$$428. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为自然数}).$$

解 当 $m=n$ 时, 此极限显然为零.

当 $m \neq n$ 时, 不失一般性, 假设 $m < n$, 且

$$m+l=n.$$

此时

$$\begin{aligned} & \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \\ &= \frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1}) - n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})} \\ &= \frac{-l - lx - \cdots - lx^{m-1} + mx^m + mx^{m+1} + \cdots + mx^{m+l-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^{m+l+1})} \end{aligned}$$

$$= - \frac{mx^{m+l-2} + 2mx^{m+l-3} + \dots + mlx^{m-1}}{(1+x+\dots+x^{m-1})(1+x+\dots+x^{m+l-1})} \\ - \frac{l(m-1)x^{m-2} + l(m-2)x^{m-3} + \dots + l}{(1+x+\dots+x^{m-1})(1+x+\dots+x^{m+l-1})}.$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \\ = - \frac{m[1+2+\dots+(l-1)] + l(m+(m-1)+\dots+1)}{mn} \\ = - \frac{\frac{ml(l-1)}{2} + \frac{ml(m+1)}{2}}{mn} = - \frac{ml(m+1)}{2mn} \\ = \frac{m-n}{2}.$$

当 $m=n$ 时, 上述结果就等于零. 即上述结果对 $m=n$ 的情况仍然适用.

总之, 不论 m 及 n 为任何的自然数, 均有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{m-n}{2}.$$

$$429. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right].$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x + \frac{a}{n} [1+2+\dots+(n-1)] \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \left(x + \frac{a}{2} \right)$$

$$= x + \frac{a}{2}.$$

$$430. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right].$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x^2 + \frac{2ax}{n} [1 + 2 + \dots + (n-1)] \right. \\ \left. + \frac{a^2}{n^2} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x^2 + \frac{n-1}{1} ax + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} a^2 \right\}$$

$$= x^2 + ax + \frac{a^2}{3}.$$

$$431. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}.$$

$$\text{解} \quad 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3}(4n^2 - 1),$$

$$2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2(n+1)} = 1$$

$$432. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3} - \frac{n}{4} \right]^{*}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*) 利用 3 题及 1 题的结果。

$$433. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}.$$

解 令

$$1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3 = x_n,$$

$$[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2 = y_n,$$

则 $y_{n+1} > y_n$, 且 $y_n \rightarrow +\infty$, 由于

$$\begin{aligned} & \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \\ &= \frac{(3n+1)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n+1)]^2 - [1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2} \\ &= \frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(1+n)(3n+2)}{2} + \frac{n(3n-1)}{2} \right] (3n+1)} \rightarrow 3 \\ & \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

利用143题的结果即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3}{(1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2))^2} = 3.$$

434. 把由抛物线 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, Ox 轴及直线 $x = a$ 所围成的曲

边三角形 OAM (图1·237)

的面积, 当作以 $\frac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和当 $n \rightarrow \infty$ 的极限值, 求此面积.

解 底的 n 个分点为

$$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a;$$

它们所对应的高为

$$0, b\left(\frac{1}{n}\right)^2, b\left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots,$$

$$b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

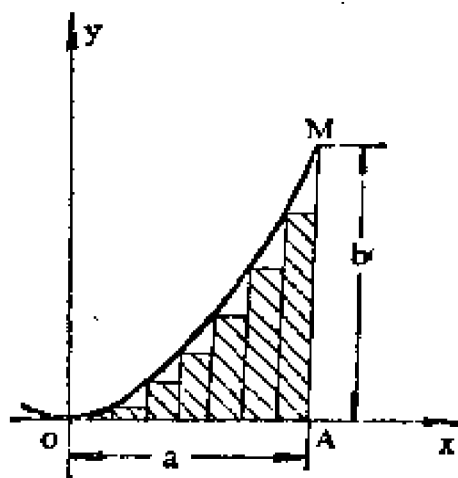


图 1·237

于是, 得内接的 n 个矩形面积之和为

$$ab \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{ab(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它趋向于 $\frac{ab}{3}$, 即

$$\text{面积 } OAM = \frac{ab}{3}.$$

求极限:

$$435. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

解 分子分母同除以 \sqrt{x} , 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$436. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}.$$

解 分子分母同除以 \sqrt{x} , 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$437. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

解 分子分母同乘以它们的共轭因式, 得

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x} - 3)(\sqrt{1+2x} + 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{1+2x} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x} + 2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{1+2x} + 3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$438. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x} - 3)(\sqrt{1-x} + 3)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{(2 + \sqrt[3]{x})(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(8+x)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{(8+x)(\sqrt{1-x} + 3)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow -8} \frac{4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x} + 3} \\ &= -2. \end{aligned}$$

$$439. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x^2 - a^2}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x-a} \cdot \sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad (a > 0). \end{aligned}$$

$$440. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-3(x-3)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

$$441. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{x-6} + 2)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)}{(x^3 + 8)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)} \\
 &= \frac{1}{144}.
 \end{aligned}$$

$$442. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$443. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{9+2x}+5)} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5} = \frac{12}{5}.
 \end{aligned}$$

$$444. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n \text{ 为整数}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+\sqrt[n]{1+x}+1} \\
 &= \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

$$445. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-2x-x^2}-1-x)(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x)}{x(\sqrt{1-2x-x^2}+1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(2+x)}{\sqrt{1-2x-x^2}+1+x} \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

$$446. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2)}{(x+x^2)} \\ &\quad \cdot \frac{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)}{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+3x-x^2}+4)} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$447. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x})}{(x+2\sqrt[3]{x^4})} \\ &\quad \cdot \frac{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})}{(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1+2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2}+\sqrt[3]{27^2-x^2}+\sqrt[3]{(27-x)^2})} \\ &= \frac{2}{27}. \end{aligned}$$

$$448. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
&\quad \cdot \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

$$449. \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3} - \sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(\sqrt[4]{x+9} - 2)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)} \\
&\quad \cdot \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{[(x+2)^3 - (x+20)^2](\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}
\end{aligned}$$

$$= \frac{189 \cdot 4 \cdot 8}{3^5 + 3^4 \cdot 3 + 3^3 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3^5} = \frac{6048}{1458}$$

$$= 4 \frac{4}{27}$$

$$450. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^4} - \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^3} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right)}{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right)}$$

$$\cdot \frac{\left(\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{44}} + \dots + \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{33}} \right)}{\left(\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{44}} + \dots + \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{33}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{7}{12} + \frac{23x}{48} + \frac{7x^2}{54} + \frac{x^3}{81} \right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right)}{\frac{x}{2} \left(\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{44}} + \dots + \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{33}} \right)}$$

$$= \frac{7}{36}.$$

$$451. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1 + 5x} - (1 + x)}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x} - (1+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3(1+x)} + \dots + (1+x)^4)}{(1+5x) - (1+x)^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+5x)^4} + \sqrt[5]{(1+5x)^3(1+x)} + \dots + (1+x)^4}{-10 - 10x - 5x^2 - x^3} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$452. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$$

解 如果 m 及 n 为正整数, 则

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{n}} - (1+\beta x)^{\frac{1}{n}}}{x(\sqrt[n]{(1+\alpha x)^{n(n-1)}} + \dots + \sqrt[n]{(1+\beta x)^{n(n-1)}})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(n\alpha - m\beta) + (C_n^2 \alpha^2 x + \dots + \alpha^n x^{n-1} - C_n^2 \beta^2 - \dots - \beta^n x^{n-1})}{\sqrt[n]{(1+\alpha x)^{n(n-1)}} + \dots + \sqrt[n]{(1+\beta x)^{n(n-1)}}} \\
&= \frac{n\alpha - m\beta}{mn} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}.
\end{aligned}$$

如果 m 及 n 为负整数, 设 $m = -m'$, $n = -n'$, 其中 m' 及 n' 为正整数, 则

$$\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x} = \frac{\sqrt[n]{1+\beta x} - \sqrt[n]{1+\alpha x}}{\sqrt[n]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x}}.$$

上式的分母趋于1,于是利用本题前半段的结果,得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n']{1+\beta x} - \sqrt[n']{1+\alpha x}}{x} = \frac{\beta}{n'} - \frac{\alpha}{m'} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 中有一个为负整数,另一个为正整数,则同法可证上述结论仍然成立.因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).$$

453. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$

解 与452题相同,先设 m 及 n 为正整数,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}}(1+\beta x)^{\frac{1}{n}} - 1}{x(\sqrt[m]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}} \cdot (1+\beta)^{\frac{1}{n}(mn-1)} + \dots + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n\alpha + m\beta + o(x)}{\sqrt[m]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}} (1+\beta)^{\frac{1}{n}(mn-1)} + \dots + 1} \\ &= \frac{n\alpha + m\beta}{mn} \\ &= \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}. \end{aligned}$$

若 m 及 n 为负整数,则此结果仍然成立.事实上,只须设 $m = -m'$, $n = -n'$,其中 m' 及 n' 为正整数.于是,

$$\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1 = \frac{1 - \sqrt[m']{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}$$

再利用前半段结果,即得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}{x(\sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x})} = -\frac{a}{m'} - \frac{\beta}{n'} = -\frac{a}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

若 m 及 n 中只有一个为负整数, 则同法可证上述结论仍然成立. 因而, 当 m 及 n 为整数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} = \frac{a}{m} + \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).$$

454. 设 $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 又 m 表整数, 求证:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x(\sqrt[m]{(1+P(x))^{m-1}} + \cdots + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}}{(1+P(x))^{\frac{m-1}{m}} + \cdots + 1}$$

$$= \frac{a_1}{m}.$$

求下列的极限:

455. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ (m 及 n 表整数).

解 当 m 及 n 为正整数时, 我们有

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + 1}{x^{\frac{m-1}{m}} + x^{\frac{m-2}{m}} + \cdots + 1} \rightarrow \frac{n}{m} (x \rightarrow 1).$$

若 m 及 n 为负整数时, 设 $m = -m'$, $n = -n'$,

其中 m' 及 n' 为正整数, 于是

$$\frac{\sqrt[n']{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{1 - \sqrt[n']{x}}{1 - \sqrt[n]{x}} \cdot \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n']{x}} \longrightarrow \frac{n'}{m'} = \frac{n}{m} \quad (x \rightarrow 1).$$

当 m 及 n 中只有一个为负整数仍然成立, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} = \frac{n}{m} \quad (m \neq 0).$$

$$456. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}$$

解 设 $x = t^{n!}$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}} \\ &= \frac{(1 - t^{n!/2})(1 - t^{n!/3}) \cdots (1 - t^{n!/n})}{(1 - t^{n!})^{n-1}} \\ &= \frac{(1 + t + t^2 + \cdots + t^{\frac{n!}{2}-1})(1 + t + \cdots + t^{\frac{n!}{3}-1}) \cdots (1 + t + \cdots + t^{\frac{n!}{n}-1})}{(1 + t + \cdots + t^{n!-1})^{n-1}} \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 1$, 于是上式趋向于

$$\frac{\frac{n!}{2} \cdot \frac{n!}{3} \cdots \frac{n!}{n}}{(n!)^{n-1}} = \frac{1}{n!},$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}} = \frac{1}{n!}.$$

$$457. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x].$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)(x+b) - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a+b + \frac{ab}{x}}{1 + \sqrt{\left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{b}{x}\right)}} = \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

458. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}) - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

459. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$$

$$= \frac{\sqrt{1+2t} - 2\sqrt{1+t} + 1}{t^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+2t} + 1)^2 - 4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t} + 1 + 2\sqrt{1+t})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})} \\
&= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)(1+\sqrt{1+2t})^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2} \\
&= \frac{-4}{(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}.
\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 于是上式趋向于 $-\frac{1}{4}$,

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x) = -\frac{1}{4}.$$

460. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right).$

$$\begin{aligned}
&\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) - \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x+x\sqrt{x}}} + \sqrt{1-\sqrt{x+x\sqrt{x}}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$461. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)(x^3 - x^2 + 1)} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2 + 1)^2}}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

$$462. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2)^2 - (x^2 - 2x)^3}{\sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^{10}} + \sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^8(x^2 - 2x)^3} + \dots + \sqrt[6]{(x^2 - 2x)^{15}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left(12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2} \right)}{\sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^{10}} + \dots + \sqrt[6]{(x^2 - 2x)^{15}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}}{\sqrt[6]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{10}} + \dots + \sqrt[6]{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{15}}}$$

$$= 2.$$

$$463. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}] \cdot [(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x^2-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}]}{(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x^2-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{4}{3}.$$

464. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^2+2x-x-1})(\sqrt{x^2+2x+x+1})}{(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x+x+1})}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

465. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)} - x]$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)} - x]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a_1)\cdots(x+a_n) - x^n}{\sum_{j=1}^n \left[\prod_{i=1}^n (x+a_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] x^{j-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)x^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^n a_i}{\sum_{j=1}^n \left[\prod_{i=1}^n (x+a_i)^{\frac{n-j}{n}}\right] x^{j-1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum_{j=1}^n \left[\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{a_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}}\right]} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.
\end{aligned}$$

466. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n} \quad (n \text{ 表自然数}).$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n \right] \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

467. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} \quad (n \text{ 表自然数}).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} \{ (x + \sqrt{1+x^2})^{n-1} + (x + \sqrt{1+x^2})^{n-2} \\
&\quad (\sqrt{1+x^2} - x) + \dots + (\sqrt{1+x^2} - x)^{n-1} \}
\end{aligned}$$

$$=2n.$$

468. 设二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的系数 a 趋于零, 系数 b 与 c 为常数, 且 $b \neq 0$, 试研究此二次方程式之二根 x_1 及 x_2 的性质。

$$\text{解 } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

不失一般性, 假设 $b > 0$, 于是, 有

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_2 = \infty$$

及

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

$$= -2c \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$= -\frac{c}{b}.$$

469. 从条件:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$$

求常数 a 和 b .

$$\text{解 } \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b = \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + (1-b)}{x+1}.$$

按假设, 上式的极限为零的必要条件是

$$1-a=0 \quad \text{及} \quad a+b=0,$$

解之, 得

$$a=1, \quad b=-1.$$

470. 从条件:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1) = 0$$

$$\text{和 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2 x - b_2) = 0$$

求常数 a_i 和 b_i ($i = 1, 2$).

解 $\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1$

$$= \frac{(1 - a_1^2)x^2 - (1 + 2a_1 b_1)x + (1 - b_1^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + a_1 x + b_1},$$

上式极限为零的必要条件是

$$1 - a_1^2 = 0 \text{ 及 } 1 + 2a_1 b_1 = 0,$$

解之, 得

$$a_1 = \pm 1, \quad b_1 = \mp \frac{1}{2}.$$

同理可得

$$a_2 = \pm 1, \quad b_2 = \mp \frac{1}{2}.$$

求下列的极限:

$$471. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

$$472. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}.$$

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 为无穷小量, 而 $|\sin x| \leq 1$,

故 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷小量, 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

473. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m 及 n 为整数).

解 设 $x = \pi + y$, 则当 $x \rightarrow \pi$ 时, $y \rightarrow 0$. 于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-1)^n \sin my}{(-1)^n \sin ny} \\ &= (-1)^{n-n} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin my}{my} \cdot \frac{ny}{\sin ny} \cdot \frac{m}{n} \\ &= (-1)^{n-n} \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

474. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$
 $= \frac{1}{2}.$

475. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2} \cos x} = \frac{1}{2}.$$

476. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x \sin x}{\sin x}$
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 2.$

477. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2}$
 $= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cos x = 4.$

478. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x}{2 \sin^2 \frac{px}{2} + \sin px}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{px}{2} \left(\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{px}{2}}{\sin \frac{px}{2}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2}} \\
&= \frac{1}{p} \quad (p \neq 0).
\end{aligned}$$

479. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\cos 2x \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2y \sin y}{\sin 2y \cos y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2y}{2 \cos^2 y} = \frac{1}{2},$$

其中 $x = \frac{\pi}{4} + y$.

480. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$

解 设 $x = 1 - y$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin \frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi y}{2} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

481. 证明等式:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a; \quad (b) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a;$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \quad (a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\text{证 (a)} \quad |\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+a}{2} \right|$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon,$$

只须 $|x-a| < \varepsilon$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x-a| < \delta$

时,

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \lim_{x \rightarrow a} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \sin x}{\lim_{x \rightarrow a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a.$$

其中 $a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

求下列的极限:

$$482. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a. \end{aligned}$$

$$483. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\sin \frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \sin \frac{x-a}{2} \\ &= -\sin a. \end{aligned}$$

$$484. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a) \cos x \cos a} \\ &= \frac{1}{\cos^2 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2} \pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$485. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a} &= -\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 a} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$486. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{(x - a) \cos x \cos a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos x \cos a} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$= \frac{\sin a}{\cos^2 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$487. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a} = - \frac{\cos a}{\sin^2 a} *$$

$$(a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

*) 利用482题的结果。

$$488. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(a+2x) - \sin(a+x)] - [\sin(a+x) - \sin a]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(a + \frac{3x}{2}\right) \sin \frac{x}{2} - 2\cos\left(a + \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \left[\cos \left(a + \frac{3x}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{x}{2} \right) \right]}{x^2}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \sin \left(a + \frac{x}{2} \right)$$

$$= - \sin a.$$

$$489. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos(a+2x) - \cos(a+x)] - [\cos(a+x) - \cos a]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} + 2\sin\left(a + \frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin\frac{x}{2} \left[\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{x}{2}\right) \right]}{x^2}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cos \left(a + \frac{x}{2} \right)$$

$$= - \cos a.$$

$$490. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg} a}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg} a}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}(a+x)] - [\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg} a]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{\sin(a+2x)\cos(a+x) - \cos(a+2x)\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)}}{x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{\cos a \sin(a+x) - \cos(a+x)\sin a}{\cos(a+x)\cos a}}{x^2} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\cos(a+x)\cos a - \cos(a+x)\cos(a+2x)]}{x^2 \cos a \cos(a+2x) \cos^2(a+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{2\sin(a+x)}{\cos a \cos(a+2x) \cos(a+x)} \\
&= \frac{2\sin a}{\cos^3 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$491. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctg} a}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctg} a}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \sin(a+x) [\sin a - \sin(a+2x)]}{x^2 \sin a \sin^2(a+x) \sin(a+2x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{2\cos(a+x)}{\sin a \cdot \sin(a+x) \sin(a+2x)} \\
&= \frac{2\cos a}{\sin^3 a} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$492. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}[\cos x - \cos(2a+3x)] - \sin^2 a}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(2a+3x) - (1 - \cos 2a)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{3 \sin\left(2a + \frac{3x}{2}\right)}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \sin 2a.$$

$$493. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.$$

$$494. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$$

解 因为

$$1 - \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) \cos 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cos 4x \cos 2x - \frac{1}{2} \cos^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 2x) - \frac{1}{4}(1 + \cos 4x)$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x).$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sin 3x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4}(4 + 16 + 36) = 14.$$

$$495. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}.$$

解 设 $x = \frac{\pi}{3} + y$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{1 - \cos y + \sqrt{3} \sin y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \sin \frac{y}{2} + \sqrt{3} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$496. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x (\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{-\frac{1}{2} \cos^2 x} = -24. \end{aligned}$$

$$497. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} x}\right) \left(\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} x}\right) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^4 a - 1)}{x^2 (1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x)} = \operatorname{tg}^4 a - 1 = \frac{-\cos 2a}{\cos^4 a} \\ &\quad (a \neq \frac{2k+1}{2} \pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$498. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{2 \sin^3 x - \sin^2 x \cos x - \cos^3 x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x}{2 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x} = \frac{3}{4}.$$

$$499. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos x (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

$$500. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1 + x \sin x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = \frac{4}{3}.$$

$$501. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt[3]{\cos x}(1 - \sqrt[3]{\cos x})}{\sin^2 x} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1 + \sqrt[3]{\cos x} + \cdots + \sqrt[3]{\cos^5 x}} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1 + \sqrt[3]{\cos x} + \cdots + \sqrt[3]{\cos^5 x}} \\
 &= -\frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

$$502. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$503. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2\sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} (1 + \sqrt{\cos x})} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}} \right)^2 \cdot \frac{x}{1 + \sqrt{\cos x}} = 0.
 \end{aligned}$$

$$504. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$$

解 不妨令 $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x (1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x} (1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 (1 + \sqrt{\cos 2x})} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2 (1 + \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[3]{\cos^2 3x})} = 3. \end{aligned}$$

$$505. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

解 $\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}$

$$= 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}.$$

$$\text{因为 } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \rightarrow 0$$

($x \rightarrow +\infty$), 所以

$$\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

$$\text{又因 } \left| \cos \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.$$

$$506. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$$

$$\text{解 } (a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \frac{1}{2};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = 1^0 = 1.$$

$$507. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = 0.$$

$$508. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$$

解 因为当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$\text{及 } \frac{x^3}{1-x} = \frac{x^2}{\frac{1}{x} - 1} \rightarrow -\infty,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{1-x}} = 0.$$

509. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} \right).$

解 因为 $\left| \sin \frac{2\pi n}{3n+1} \right| \leq 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} = 0.$$

510. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x}.$

解 因为当 $x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0$ 时,

$$1 < \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) < +\infty$$

及 $\operatorname{tg} 2x \rightarrow -\infty$,

所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x} = 0.$$

511. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 1.$

512. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}.$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-1}{2}} \right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot 2+1} = e^2.$$

$$513. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 1.$$

$$514. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1-2x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-2x)]^{\frac{1}{-2x} \cdot (-2)} = e^{-2}.$$

$$515. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-a}{2a}} \right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot 2a+a} = e^{2a}.$$

$$516. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} \right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} \right)^x &= \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \cdot \left(\frac{x+\frac{b_1}{a_1}}{x+\frac{b_2}{a_2}} \right)^x \\ &= \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{x+\frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}} \right)^{\frac{x+\frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}} \cdot \left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2} \right) - \frac{b_2}{a_2}} \\ &= \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{x+\frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}}} \right)^{\frac{x+\frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2}} \cdot \left(\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_2} \right) - \frac{b_2}{a_2}} \end{aligned}$$

(1) 当 $a_1 = a_2 = a$ 时,

$$\left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = \left(1 + \frac{1}{\frac{x + \frac{b_2}{a}}{\frac{b_1 - b_2}{a}}} \right)^{\frac{x + \frac{b_2}{a}}{\frac{b_1 - b_2}{a}}}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = e^{\frac{b_1 - b_2}{a_1}}.$$

(2) 当 $a_1 < a_2$ 时, $0 < \frac{a_1}{a_2} < 1$,

于是,

$$\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

而 $\left(\frac{x + \frac{b_1}{a_1}}{x + \frac{b_2}{a_2}} \right)^x \rightarrow e^{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}},$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = 0.$$

(3) 当 $a_1 > a_2$ 时, $\frac{a_1}{a_2} > 1$,

于是,

$$\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x \rightarrow +\infty,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x = +\infty.$$

517. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \cos 2x} = e.$$

518. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\frac{1}{\sin \pi x} \cdot \cos \pi x} = e^{-1}.$$

519. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1 + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}} \right)^{\frac{1 + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x (1 + \sin x)}} = e^0 = 1.$$

520. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\frac{\sin x - \sin a}{\sin a}} \right)^{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin a}}$$

$$= e^{\operatorname{ctg} a} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

*) 利用482题的结果。

$$521. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x}} \right)^{\frac{\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x}}{\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x}}}.$$

因为

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{\cos x + 1 - 2\cos^2 x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{x^2} (1 + 2\cos x) = \frac{1 + 2\cos x}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{3}{2}$$

($x \rightarrow 0$),

所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

$$522. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \operatorname{tg} x - 1)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} \cdot \frac{-2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}} = e^{-1}.$$

$$523. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{-\frac{\operatorname{tg} x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x)^{\frac{1}{\cot^2 x} \cdot \frac{-2 \cot x}{2}} = e^0 = 1.$$

524. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right]^{\cot x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right]^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right)^{\cot x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{-2 \operatorname{tg} x}} \right)^{-\frac{1 + \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{-2}{1 + \operatorname{tg} x} \right)} = e^{-2}.$$

525. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$

解 $\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$

$$= \left[1 + \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} \cdot x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)}.$$

因为

$$x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{2 \sin \frac{1}{2x} \sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x} \cdot 2}$$

$$\longrightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

526. $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} \quad *).$

解 $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln \cos \sqrt{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(\cos \sqrt{x} - 1 + 1)}{\cos \sqrt{x} - 1} (\cos \sqrt{x} - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x} \cdot 2 \ln \frac{2\sqrt{x}}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

*) 原题应为 $x \rightarrow 0$, 应改为 $x \rightarrow +0$.

**) 利用529题的结果.

$$527. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n.$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{x+1} \cdot (x+1) + 1} = e^{x+1}.$$

$$528. \lim_{x \rightarrow \infty} \cos^x \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \cos^x \frac{x}{\sqrt{n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{\frac{1}{\tan^2 \frac{x}{\sqrt{n}}} \cdot \left(\frac{\tan \frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}} \right)^2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} \right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$529. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$$530. \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x].$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln e = 1.$$

$$531. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{x-a}} \right)^{\frac{x}{x-a} \cdot \frac{1}{a}} \\
 &= \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}.
 \end{aligned}$$

$$532. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x].$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad &\sin \ln(x+1) - \sin \ln x \\
 &= 2 \cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2}.
 \end{aligned}$$

因为

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

所以

$$\sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2} \rightarrow 0;$$

又因 $\cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2}$ 为有界函数, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x] = 0.$$

$$533. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \ln \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{10 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)}{10 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}} \right)} = \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

$$534. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{100+x^2}{1+100x^2} \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{100+x^2}{1+100x^2} \right) = \lg \frac{1}{100} = -2.$$

$$535. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(2e^{-3x} + 1)}{2x + \ln(3e^{-2x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x} \ln(2e^{-3x} + 1)}{2 + \frac{1}{x} \ln(3e^{-2x} + 1)} = \frac{3}{2}.$$

$$536. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln x + \ln(x^{-\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{6}})}{\frac{1}{3} \ln x + \ln(x^{-\frac{1}{3}} + 1 + x^{-\frac{1}{12}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x^{-\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{6}})}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x^{-\frac{1}{3}} + 1 + x^{-\frac{1}{12}})} = \frac{3}{2}.$$

$$537. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2\log x}{h^2} \quad (x > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2\log x}{h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 - h^2) - \log x^2}{h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x^2} \log \left(1 - \frac{h^2}{x^2} \right) \right] = -\frac{1}{x^2} \log e.$$

$$538. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sin bx}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sin bx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + ax \right) - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\sin bx}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + ax \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)} \right]^{\frac{1}{\sin bx}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{\sqrt{2} \sin ax}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)} \right]^{\frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sqrt{2} \sin ax} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)} \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{a}{b}}$$

$$= \ln e^{\frac{2a}{b}} = \frac{2a}{b}.$$

$$539. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \cos ax}{\cos ax - 1} \cdot \frac{\cos bx - 1}{\ln \cos bx} \cdot \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

$$540^+. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{nx + \sqrt{1-n^2x^2}}{x + \sqrt{1-x^2}} \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{nx + \sqrt{1-n^2x^2}}{x + \sqrt{1-x^2}} \right) = \ln 1 = 0.$$

$$541. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0).$$

解 设 $a^x - 1 = y$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$= \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

$$542. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \frac{a^x - x^a}{x - a} = \frac{a^a \left[a^{x-a} - \left(\frac{x}{a} \right)^a \right]}{x - a}$$

$$= a^a \cdot \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - a^a \frac{\left(\frac{x}{a} \right)^a - 1}{x - a}$$

$$= a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - a^a \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{a \ln \left(1 + \frac{x-a}{a} \right)}{x - a},$$

当 $x \rightarrow a$ 时, 等式第一项趋向 $a^a \ln a$, 而第二项趋

向 $a^a \cdot 1 \cdot 1 = a^a$, 所以,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = a^a \ln a - a^a = a^a \ln \frac{a}{e}.$$

543. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0).$

解 $\frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \cdot \frac{e^{x \ln x - a \ln a} - 1}{x \ln x - a \ln a} \cdot \frac{x \ln x - a \ln a}{x - a}.$

而当 $x \rightarrow a$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{x \ln x - a \ln a}{x - a} &= \frac{x \ln x - x \ln a}{x - a} + \ln a \\ &= \frac{x}{a} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{x - a}{a} \right)}{\frac{x - a}{a}} + \ln a \rightarrow 1 + \ln a = \ln ea. \end{aligned}$$

又 $\frac{e^{x \ln x - a \ln a} - 1}{x \ln x - a \ln a} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow a),$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \ln ea.$$

544. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e \left(1 + \frac{x}{e^x} \right)^{\frac{e^x}{x}} \cdot e^{-x} = e \cdot e = e^2.$

545. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 $\left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{1}{1 + x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1 + x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)} \cdot \frac{2^x - 3^x}{x(1 + x \cdot 3^x)}}.$

因为

$$\frac{2^x - 3^x}{x(1+x \cdot 3^x)} = \frac{1}{1+x \cdot 3^x} \cdot \left(\frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} \right) \rightarrow$$

$$\ln 2 - \ln 3 \quad *) = \ln \frac{2}{3} \quad (x \rightarrow 0),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x \cdot 2^x}{1+x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\ln \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

*) 利用541题的结果.

$$546. \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \right)^n.$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \right)^{\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{1}} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}} = e^2.$$

$$547. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} [e^{(\alpha-\beta)x} - 1]}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} x \sin \frac{\alpha-\beta}{2} x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(\alpha-\beta)x} - 1}{(\alpha-\beta)x} \cdot \frac{\frac{\alpha-\beta}{2} x}{\sin \frac{\alpha-\beta}{2} x} \cdot \frac{e^{\beta x}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} x} = \ln e^{*}) = 1.$$

*) 利用541题的结果。

$$548. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} &= a^{\alpha-\beta} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta - 1} \\ &= a^{\alpha-\beta} \cdot \frac{e^{\alpha \ln \frac{x}{a}} - 1}{\alpha \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{\beta \ln \frac{x}{a}}{e^{\beta \ln \frac{x}{a}} - 1} \cdot \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow a$ 时, $\ln \frac{x}{a} \rightarrow 0$, 于是上式趋向 $\frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}$,

即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta} \quad (\beta \neq 0).$$

$$549. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} a^b \cdot \frac{a^{x-b} - 1}{x - b} = a^b \ln a \quad *).$$

*) 利用541题的结果。

$$550. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{1+h} + a^{1-h} - 2a^1}{h^2} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{1+h} + a^{1-h} - 2a^1}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} a^1 \cdot \frac{a^h + a^{-h} - 2}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a^1 \left(\frac{a^h - 1}{h} \right)^2 = a^1 \ln^2 a \quad *). \end{aligned}$$

*) 利用541题的结果。

$$551. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a} \cdot a + a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b} \cdot b + b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b} \cdot [2(a+b) + (a+b)]}}$$

$$= \frac{e^a \cdot e^b}{e^{2(a+b)}} = e^{-(a+b)}.$$

$$552. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x *).$$

*) 利用541题的结果.

$$553. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \quad (x > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n+1}} [x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1]}{\frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + n}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+n} \right)} = \ln x.$$

554. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}} - 1}} \right)^{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{a} \ln b}$$

$$= \sqrt[n]{b}.$$

555. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0).$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right)^{\left(\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1} \right) \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right)^n}$$

$$= e^{\frac{1}{2} (\ln a + \ln b)^*} = \sqrt{ab} \quad (a > 0, b > 0).$$

*) 利用541题的结果。

556. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

解 利用555题的方法;

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1} \cdot \frac{a^x - 1 + b^x - 1 + c^x - 1}{3x}} \\
&= \sqrt[3]{abc}.
\end{aligned}$$

557. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$

解 利用541题的结果, 得

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1} - a - b - c}{x(a + b + c)} \\
&= \frac{1}{a + b + c} \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \cdot \frac{a^x - 1}{x} + b \cdot \frac{b^x - 1}{x} + c \cdot \frac{c^x - 1}{x} \right) \\
&= \ln (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}},
\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 \right)^{\left(\frac{1}{\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1} \right)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 \right) = (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.
\end{aligned}$$

558. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{a^x + b^x}{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}} \right)^{\frac{a^x + b^x}{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}} \\
&\quad \cdot \left[x \left(\frac{a^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) - \frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right] \cdot \frac{1}{a^x + b^x} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.
\end{aligned}$$

559. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \quad (a > 0, b > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right)^2} \\
&= (\ln a - \ln b) \cdot \frac{1}{(\ln a - \ln b)^2} = \frac{1}{\ln a - \ln b} \\
&= \left(\ln \frac{a}{b} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

560. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} = \lim_{x \rightarrow a} a^{x^a} \cdot \frac{a^{a^x - x^a} - 1}{a^x - x^a} = a^{a^a} \ln a.$

561. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)};$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}.$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{3^x} \cdot \frac{2^x}{\ln(1+2^x)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0^* = 0.$$

*) 利用529题的结果.

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x \ln 2 + \ln(1+2^{-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+3^{-x})}{\ln 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

562. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} \cdot \frac{x \ln 2 + \ln(2^{-x}+1)}{\frac{x}{3}} = 3 \ln 2 = \ln 8.$$

563. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg_x 2.$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg_x 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x} \cdot \ln 2$

$$= -\ln 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln[1+(x-1)]} = -\ln 2. *)$$

*) 利用529题的结果.

564. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0).$$

证 当 $x \geq 1$ 时, 存在唯一的正整数 k , 使

$$k \leq x < k+1.$$

于是当 $n \geq 0$ 时, 我们有

$$\frac{x^n}{a^x} < \frac{(k+1)^n}{a^k}$$

及

$$\frac{x^n}{a^x} > \frac{k^n}{a^{k+1}} = \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a}.$$

因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $k \rightarrow +\infty$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^{k+1}} \cdot a = 0 \cdot a^{**}) = 0$$

及

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{a^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a} = 0 \cdot \frac{1}{a}^{**}) = 0.$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

*) 利用60题的结果.

565. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0 \quad (a > 1, \varepsilon > 0).$$

证 设 $\log_a x = y$, 则 $x = a^y$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{(a^y)^\varepsilon} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y^{\frac{1}{\varepsilon}}}{a^y} \right)^\varepsilon = 0^{**}),$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0.$$

*) 利用564题的结果.

求下列的极限:

$$566. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}.$$

$$\text{解 } (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1 + x^2 e^{-x})}{2x + \ln(1 + x^4 e^{-2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{x^2 e^{-x}} \cdot x e^{-x}}{2 + \frac{\ln(1 + x^4 e^{-2x})}{x^4 e^{-2x}} \cdot x^3 e^{-2x}} = \frac{1}{2};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{x}}{2 + \frac{\ln(1 + x^4 e^{-2x})}{x}} = \frac{1}{2},$$

其中利用了结果

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n a^{-x} = 0 \quad (n > 0, a > 1),$$

因而

$$x^2 e^{-x} \rightarrow 0 \text{ 及 } x^4 e^{-2x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

$$567. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + x e^x)}{x e^x} \cdot x e^x}{\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \sqrt{1+x^2} = 1.$$

568. $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x].$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)\ln(x+2) - 2(x+1)\ln(x+1) + x\ln x]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x+2)^{x+2} \cdot x^x}{(x+1)^{2x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2 + 2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+2}}$$

$$= \ln \frac{e^2}{e^2} = 0.$$

569. $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln a x}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \quad (a > 1).$

解 $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln a x}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(\frac{\ln a + \ln x}{\ln x - \ln a} \right)^{\ln x + \ln(\ln a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(1 + \frac{2 \ln a}{\ln x - \ln a} \right)^{\frac{\ln x - \ln a}{2 \ln a} \cdot 2 \ln a + \frac{\ln x + \ln(\ln a)}{\ln x - \ln a}}$$

$$= \ln e^{\ln a^2} = \ln a^2.$$

570. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}, \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}, \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1} \right)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}}\right)}{\ln^2\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left\{ \ln\left[1 + \frac{2}{(x + \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}\right] \right\} \frac{(x + \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{2}}{\ln^2\left[\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right] \cdot \frac{2}{(x + \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}} \\
&\quad \cdot \frac{2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{2(x + \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}{2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

571. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sin x}{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1+x\sin x} + 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} (1 + \sqrt{1+x\sin x})} = \frac{1}{2}.$$

$$572. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2} \sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2}}{x^3}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x + e^{-x})}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x - e^{-x})}{2}} \cdot \frac{x^2(e^{4x} - 1)}{4x^3 e^{2x}} \right]$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \cdot \frac{1}{e^{2x}} = -2.$$

$$573. \lim_{x \rightarrow 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left[1 + 2 \left(e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2(e^{\frac{x}{x+1}} - 1)}} \cdot \frac{2(x^2+1)}{x+1} \cdot \frac{e^{\frac{x}{x+1}} - 1}{\frac{x}{x+1}} \right\}$$

$$= e^2.$$

$$574. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 + (-x+1) \right]^{\frac{1}{1-x} \cdot \frac{\frac{\pi(x-1)}{2}}{\sin \frac{\pi(x-1)}{2}} \cdot \frac{2}{\pi}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

$$575. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}}{\sqrt{(1 - e^{\alpha \cdot \ln \sin x})(1 - e^{\beta \cdot \ln \sin x})}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - e^{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}}{(\alpha+\beta) \ln \sin x} \right) \cdot \left(\frac{\alpha \cdot \ln \sin x}{1 - e^{\alpha \cdot \ln \sin x}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\beta \cdot \ln \sin x}{1 - e^{\beta \cdot \ln \sin x}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}{\sqrt{\alpha\beta} \cdot \ln \sin x} \right) = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

注 其中, x 在 $\frac{\pi}{2}$ 的附近变化, 故 $\sin x > 0$.

$$576^{\dagger} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh^2 x}{\ln(ch 3x)} \quad (\text{参阅 340 题}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh^2 x}{\ln(ch 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(e^{2x} - 1)^2}{4e^{2x}}}{\ln \left[1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \cdot e^x}{\ln \left[1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]} \\ &\quad \cdot \left(\frac{3x}{e^{\frac{3}{2}x} - 1} \right)^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$577. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{sh \sqrt{x^2 + x} - sh \sqrt{x^2 - x}}{ch x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } sh\sqrt{x^2+x} - sh\sqrt{x^2-x} &= 2sh \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}}{2} \\ &\quad \cdot ch \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{2}, \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}} \longrightarrow 1 \\ &\quad (x \rightarrow +\infty), \\ \frac{ch \frac{1}{2} (\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})}{chx} \\ &= \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{2}} + e^{\frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{2}}}{e^x + e^{-x}} \longrightarrow 1, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{sh\sqrt{x^2+x} - sh\sqrt{x^2-x}}{chx} = 2sh \frac{1}{2}.$$

578. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln chx).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln chx)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \ln \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + \ln 2 - \ln(1 + e^{2x})] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln 2 - \ln(e^{-2x} + 1)] = \ln 2. \end{aligned}$$

579. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{thx}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\tanh x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin 2x} - e^{\sin x})(e^{2x} + 1)}{e^{2x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2} \right) (e^{2x} + 1)}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} \\
 &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) 2}{1} = 1.
 \end{aligned}$$

$$580. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{ch \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \left(\frac{ch \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2} &= \left(\frac{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}}}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \right)^{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2 \cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{n^2 \left(e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2 \cos \frac{\pi}{n} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{n}}, \\
 &\quad \frac{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2 \cos \frac{\pi}{n}}{n}
 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
 &n^2 \left(e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2 \cos \frac{\pi}{n} \right) \\
 &= n^2 \left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}} \right)^2 + 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n^2 \left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}} \right)^2 + 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \right] \\
&= \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2n}} - 1}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2n}} - 1}{-\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2 + \pi^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 \\
&\longrightarrow 2\pi^2 \quad (n \rightarrow \infty),
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2n}} - 1}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 = e^{\pi^2}.$$

581. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcsin} \frac{1-x}{1+x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcsin} \frac{1-x}{1+x} = \operatorname{arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$

582. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccos}(\sqrt{x^2+x}-x).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccos}(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

583. $\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2} = -\frac{\pi}{2}.$

584. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctg (-1) = \frac{3}{4}\pi.$$

$$585. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctg(x+h) - \arctg x}{h}.$$

$$\text{解 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctg(x+h) - \arctg x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\arctg \frac{h}{1+x(x+h)}}{\frac{h}{1+x(x+h)}} \cdot \frac{1}{1+x(x+h)} \right]$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \cdot *)$$

$$*) \text{ 其中利用了结果: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1.$$

$$586. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\arctg(1+x) - \arctg(1-x)}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\arctg(1+x) - \arctg(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)}{\frac{2x}{1-x}} \cdot \frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\arctg \frac{2x}{2-x^2}} \cdot \frac{2-x^2}{1-x} \right] = 2.$$

$$587. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \arctg \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right].$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left[n \arctg \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\arctg \frac{1}{n(x^2+1)+x}}{\frac{1}{n(x^2+1)+x}} \cdot \frac{n}{n(x^2+1)+x} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n}} \right)^{\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2n}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}} \cdot \frac{x}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n}}} \right] = \frac{e^x}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

$$588. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{x}{x+1} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \arctg \frac{1}{2x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}} \cdot \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$589. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = 1^*).$$

*) 其中利用了结果: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

590. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^n} \cdot \frac{(-1)^n}{n \sin(\pi\sqrt{1+n^2})}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^n} \cdot \frac{-1}{n \sin(n\pi - \pi\sqrt{1+n^2})}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^n} \cdot \frac{n\pi - \pi\sqrt{1+n^2}}{\sin(n\pi - \pi\sqrt{1+n^2})}}$$

$$\cdot \frac{1}{n(\pi\sqrt{1+n^2} - n\pi)}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\pi n(n^2+1 - n^2)}}$$

$$= e^{\frac{2}{\pi}} \quad (n\pi - \pi\sqrt{1+n^2} \rightarrow 0).$$

591. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}.$

解 设 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{100}}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y^2)^{50}}{e^{y^2}} = 0^*).$$

*) 利用564题的结果.

592. $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x.$

解 设 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0^*).$$

*) 利用565题的结果.

593. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$; (б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = +\infty$;

$$(б) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}.$$

594. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$

(б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}).$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}} = -1;^*)$$

*) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $x = -\sqrt{x^2}.$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}} = 1.$$

*) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $x = \sqrt{x^2}$.

$$595. (a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}.$$

$$\text{解 } (a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$596. (a) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

$$\text{解 } (a) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

$$597. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$$

$$\text{解 } (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \cdot \frac{e^x}{x} \right] = 0;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x} \right] = 1.$$

598. 证明:

(a) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2 + 0$;

(6) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2 - 0$.

证 (a) 当 $x < 0$ 及当 $|x|$ 充分大以后,

$$\frac{2x}{1+x} > 2.$$

于是,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2 + 0$;

(6) 当 $x > 0$ 时,

$$0 < \frac{2x}{1+x} < 2.$$

于是,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2 - 0$.

599. 证明:

(a) 当 $x \rightarrow -0$ 时, $2^x \rightarrow 1 - 0$;

(6) 当 $x \rightarrow +0$ 时, $2^x \rightarrow 1 + 0$.

证 (a) 当 $x < 0$ 时,

$$0 < 2^x < 1.$$

于是,

当 $x \rightarrow -0$ 时, $2^x \rightarrow 1 - 0$;

(6) 当 $x > 0$ 时,

$$2^x > 1.$$

于是,

当 $x \rightarrow +0$ 时, $2^x \rightarrow 1+0$.

600. 设 $f(x) = x + [x^2]$, 求 $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$.

解 $f(1) = 2$;

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + [x^2]) = 1 + 0 = 1;$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + [x^2]) = 1 + 1 = 2.$$

601. 设 $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$, 求 $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ ($n = 0, \pm 1, \dots$).

解 $f(n) = 0$;

$$f(n-0) = \lim_{x \rightarrow n-0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^{n-1};$$

$$f(n+0) = \lim_{x \rightarrow n+0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^n.$$

求:

$$602. \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}.$$

解 因为 $\sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ 为有界函数, 所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = 0.$$

$$603. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

解 因为

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

当 $x > 0$ 时,

$$1-x \leq x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1,$$

当 $x < 0$ 时,

$$1-x \geq x \left[\frac{1}{x} \right] \geq 1,$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

$$604. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\pi \sqrt{n^2 + 1} + n\pi} = 0.$$

$$605. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}).$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi \sqrt{n^2 + n})]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 - \cos[2\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)]\} = 1.$$

$$606. \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_{n \uparrow}.$$

解 先设 $0 \leq x \leq \pi$, 这时, $0 \leq \sin x \leq x$,

$$0 \leq \sin(\sin x) \leq \sin x,$$

依次类推。用数学归纳法，即可证得

$$0 \leq \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 个}} \leq \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n-1 \text{ 个}},$$

这说明 $\overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 个}}$ 随着 n 的增大而单调减少，于是由其有界性知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 个}} = \mu$$

存在有限，且 $0 \leq \mu \leq 1$ ，因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 个}} = \sin(\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n-1 \text{ 个}})$$

即

$$\sin \mu = \mu,$$

故

$$\mu = 0.$$

同法可证，当 $\pi < x \leq 2\pi$ 时，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 个}} = 0.$$

再利用 $\sin x$ 的周期性(周期为 2π)，得知对任一 x 值，均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \text{ 个}} = 0.$$

607. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = A$ 及 $\lim_{x \rightarrow A} \psi(x) = B$ ，由此是否可推出

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x)) = B \neq$$

研究这个例子：当 $x = \frac{p}{q}$ （其中 p 和 q 是互质的

整数）时， $\varphi(x) = \frac{1}{q}$ ；当 x 为无理数时， $\varphi(x) = 0$ ；

当 $x \neq 0$ 时， $\psi(x) = 1$ ；当 $x = 0$ 时， $\psi(x) = 0$ ；并且 $x \rightarrow 0$ 。

解 不一定。例如对于函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} \text{ (其中 } p \text{ 和 } q \text{ 互质) 时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

及

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0 (=A)$$

及

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 1,$$

但是，极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x))$$

却不存在。事实上，当 x 以一串无理数列 x_n 趋近于零时，有 $\varphi(x_n) = 0$ ，因此 $\psi(\varphi(x_n)) = 0 (n = 1, 2, \dots)$ ；而当 x 以一串有理数列 x_n' 趋近于零时， $\varphi(x_n') \neq 0$ ，因此， $\psi(\varphi(x_n')) = 1 (n = 1, 2, \dots)$ 。由此可知，当 $x \rightarrow 0$ 时，极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x))$$

不存在。

608. 证明哥西定理：若函数 $f(x)$ 定义于区间 $(a, +\infty)$ 上，且在每一个有穷的区间 (a, b) 内是有界的，则

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)],$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq c > 0),$$

假定在等式右端的极限都存在。

证 (a) 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$ ，任给 $\varepsilon > 0$ ，必存在正数 $X_0 > a$ ，使当 $x \geq X_0$ 时，恒有

$$|f(x+1) - f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $x > X_0 + 1$ ，于是，恰有一个正整数 n （依赖于 x ），满足 $n \leq x - X_0 < n + 1$ 。令 $\tau = x - X_0 - n$ ，则 $0 \leq \tau < 1$ ， $x = X_0 + \tau + n$ 。我们有

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} - A &= \frac{n}{x} \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] + \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \\ &\quad - \frac{(X_0 + \tau)A}{x}. \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{x} \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] \right| &\leq \left| \frac{f(X_0 + \tau + n) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n [f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A] \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A| < \frac{1}{n} \cdot \frac{n\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

由假定, $f(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故存在正数 X_1 , 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (0 \leq \tau < 1);$$

另外, 显然存在正数 X_2 , 使当 $x > X_2$ 时, 恒有

$$\left| \frac{(X_0 + 1)A}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1, X_2\}$. 于是, 当 $x > X$ 时, 必有

$$\left| \frac{f(x)}{x} - A \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

故(a)获证.

(6) 由假定, $f(x) \geq c > 0$. 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = A'$. 显然 $A' \geq 0$. 下证 $A' > 0$. 事实上, 若 $A' = 0$, 则存在正数 X_0 , 使当 $x \geq X_0$ 时, 必 $0 < \frac{f(x+1)}{f(x)} < \frac{1}{2}$. 于是

$$0 < \frac{f(X_0 + n)}{f(X_0)} = \frac{f(X_0 + n)}{f(X_0 + n - 1)} \cdot \frac{f(X_0 + n - 1)}{f(X_0 + n - 2)} \cdots$$

$$\cdot \frac{f(X_0 + 1)}{f(X_0)} < \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_0 + n) = 0$, 此显然与 $f(x) \geq c > 0$ 矛盾. 因此, 有 $A' > 0$.

由于 $f(x) \geq c > 0$ 且 $f(x)$ 在每个有穷区间 (a, b) 内有界, 故函数 $\ln f(x)$ 在每个有穷区间 (a, b) 内也有界, 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln f(x+1) - \ln f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{f(x+1)}{f(x)} = \ln A'.$$

于是, 将(a)的结果用于函数 $\ln f(x)$, 即知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{x} = \ln A'.$$

故有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{\ln f(x)}]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln f(x)}{x}} \\ &= e^{\ln A'} = A'. \end{aligned}$$

证毕.

609. 证明若: (1) 函数 $f(x)$ 定义于域 $x > a$ 内; (2) 在每一个有限的域 $a < x < b$ 内是有界的; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$ (或 $-\infty$), *) 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ (或 } -\infty \text{)}.$$

证 只要证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$ 的情形,

这时要证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (对于 $-\infty$ 的情形, 只要

考虑函数 $-f(x)$ 即可归结为 $+\infty$ 的情形), 任给 $G > 0$, 必存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$f(x+1) - f(x) > 4G.$$

现设 $x > 2(X_0 + 1)$. 仿608题(a)之证, 恰有一个正整数 n (依赖于 x), 满足 $n \leq x - X_0 < n + 1$. 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$. 由于 $n + 1 > x - X_0 > X_0 + 2$, 故 $n > X_0 + 1 > X_0 + \tau$, 从而 $2n > x$, 即

$$\frac{n}{x} > \frac{1}{2}.$$

又, 我们有

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} + \frac{f(X_0 + \tau)}{x},$$

显然

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)] \\ &\geq \frac{1}{n} \cdot 4nG = 4G, \end{aligned}$$

故

$$\frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} \geq 2G.$$

由假定, $f(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故存在正数 X_1 , 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < G.$$

令 $X = \max \{2(X_0 + 1), X_1\}$, 则当 $x > X$ 时, 恒有

$$\frac{f(x)}{x} \geq G.$$

由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

证毕.

*) 原题条件(3)误写为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$,

结论误写为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$. 例如, 按下式定义 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2n, & \text{当 } 2n \leq x < 2n+1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } 2n+1 \leq x < 2n+2 \text{ 时.} \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

则显然 $f(x)$ 满足原题的条件(1)和(2) (这时 $a=0$),

并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$; 但显然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \infty$

(实际 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$).

610. 证明, 若: (1) 函数 $f(x)$ 定义于域 $x > a$ 内; (2) 在每一个有限的域 $a < x < b$ 内是有界的; (3) 存在着有限的或无穷的 (带确定符号的无穷, 即 $+\infty$ 或 $-\infty$)*) 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

证 先证一条一般性的定理 (Stolz 定理在函数情形的

推广) : 若(1)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义于域 $x \geq a$ 内;
 (2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在每一个有限域 $a < x < b$ 内有界,
 并且 $g(x)$ 当 $x \geq a$ 时满足 $g(x+1) > g(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;
 (3) 存在极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} = l \quad (l \text{ 为有限数 或为 } +\infty \text{ 或为 } -\infty);$$

则必

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

证如下:

先设 l 为有限数, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $x \geq X_0 + 1$. 于是, 恰有一个正整数 n (依赖于 x), 使 $n \leq x - X_0 < n + 1$. 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$. 我们有

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l &= \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ &\cdot \left[\frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right], \end{aligned}$$

而

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

又由于

$$\begin{aligned} g(x) &= g(X_0 + \tau + n) > g(X_0 + \tau + n - 1) \\ &> g(X_0 + \tau + n - 2) > \dots > g(X_0 + \tau), \end{aligned}$$

从而

$$\frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} > 0 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

由此可知

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

容易直接验证等式

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - l &= \left[1 - \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right] \cdot \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right] \\ &\quad + \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $X_0 \leq x$

$\leq X_0 + 1$ 上有界, 故必有正数 $X_1 > a$ 存在, 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1\}$. 于是, 当 $x > X$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. l 为有限数时获证.

下设 $l = +\infty$ (若 $l = -\infty$, 则考虑函数 $-f(x)$ 即可化为 $l = +\infty$ 的情形). 任给 $G > 0$. 存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} > 4G.$$

当 $x \geq X_0 + 1$ 时, 仿前一段之证, 有

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} &= \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ &\quad \cdot \frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} &> 4G \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ &= 4G. \end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left[1 - \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right] \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ &\quad + \frac{f(X_0 + \tau)}{g(x)}. \end{aligned}$$

根据 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 以及 $f(x)$, $g(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0$

$+1$ 上的有界性, 可取正数 $X_1 > a$, 使当 $x \geq X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{f(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < G.$$

令 $X = \max \{X_0 + 1, X_1\}$. 于是, 当 $x \geq X$ 时, 恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} \cdot 4G - G = G.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. 所述一般性定理获证.

现在我们应用此一般性定理来证明本题. 在一般性定理中取 $g(x) = x^{n+1}$. 显然此 $g(x)$ 满足一般性定理的条件, 并且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(n+1)x^n + \frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1} + \cdots + (n+1)x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)nx^{-1} + \cdots + (n+1)x^{-n+1} + x^{-n}} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

由此, 根据此一般性定理, 即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{n+1}.$$

证毕。

*) 原题所说的无穷，必须是带确定符号的无穷，即 $+\infty$ 或 $-\infty$ ；参看609题末尾加的注。

注. 608题的(a)和609题可直接从上述一般性定理推出，实际上，只需令 $g(x)=x$ ，由

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1)-f(x)]\end{aligned}$$

即知。

611. 证明: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$;

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

证 (a) 当 $x=0$ 时是显然的; 当 $x \neq 0$ 时, 令 $y_n = \frac{n}{x}$, 由71题的结果, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n \cdot x} = e^x;$$

(6) 当 $x=0$ 时是显然的。我们先讨论 $x > 0$ 的情形。由牛顿二项式定理知

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

另一方面, 当 $m=n$ 时有

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^n &\geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right), \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow \infty$ (n 保持不变), 得

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x \quad (x \geq 0).$$

由于

$$\begin{aligned} &\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= 1 + (-1)^n \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2, \end{aligned}$$

而由61题知, 对固定的 x 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. 于是, 对于 $x < 0$, 仍然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x \quad (x < 0).$$

612. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi e n!) = 2\pi$.

证 由72题

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{\theta_k}{k!k},$$

其中 $0 < \theta_k < 1$, 因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi e n!)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left[2\pi n \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left[2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \right]}{2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right)} \cdot 2\pi n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

作下列函数的图形:

613. (a) $y = 1 - x^{100}$;

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2^n})$ ($-1 \leq x \leq 1$).

解 (a) 如图1·238所示, 它关于 y 轴对称.

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2^n}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| < 1; \\ 0, & \text{若 } |x| = 1. \end{cases}$ 如图

1·239所示

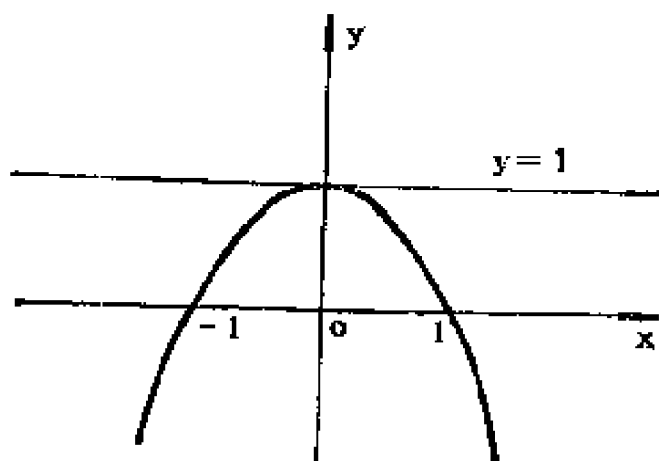


图 1·238

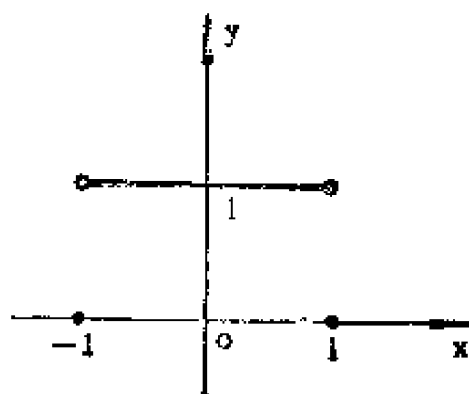


图 1·239

614. (a) $y = \frac{x^{100}}{1+x^{100}} \quad (x \geq 0);$

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} \quad (x \geq 0).$

解 (a) 如图 1·240 所示.

$$(b) y = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

如图 1·241 所示.

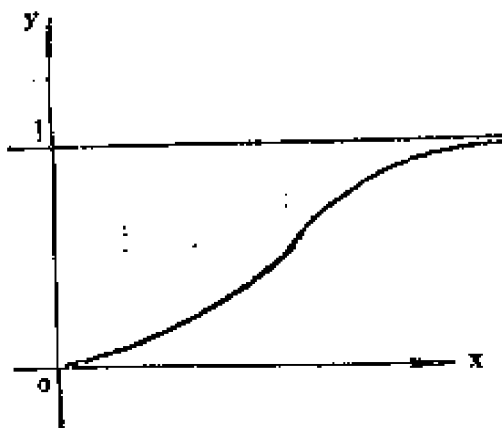


图 1·240

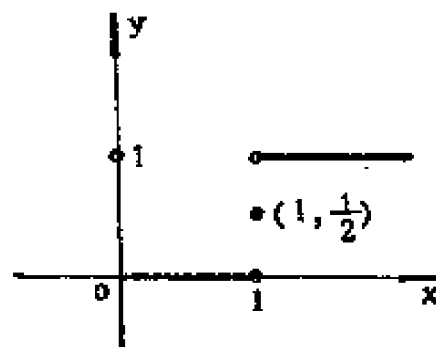


图 1·241

615. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0).$

解 因为 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$, 所以,

$$y = \begin{cases} -1, & \text{若 } |x| < 1, x \neq 0; \\ 0, & \text{若 } |x| = 1; \\ 1, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

如图 1·242 所示.

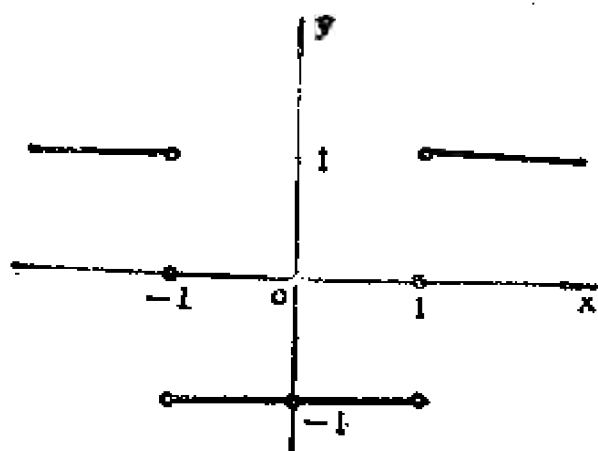


图 1.242

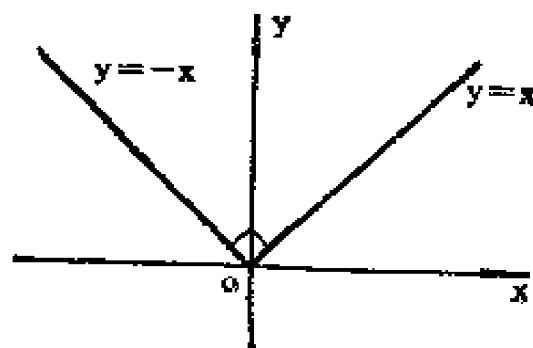


图 1.243

616. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$

解 $y = \sqrt{x^2} = |x|.$

如图1.243所示.

617. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} \ (x \geqslant 0).$

解 $y = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x, & \text{若 } x > 1. \end{cases}$

如图1.244所示.

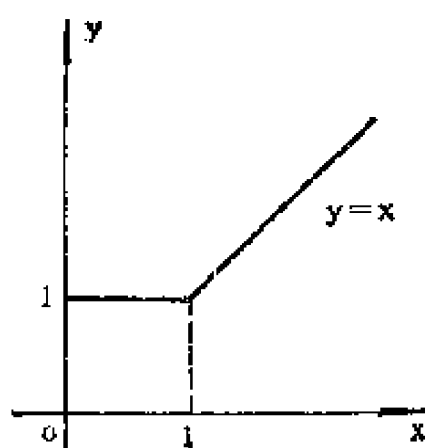


图 1.244

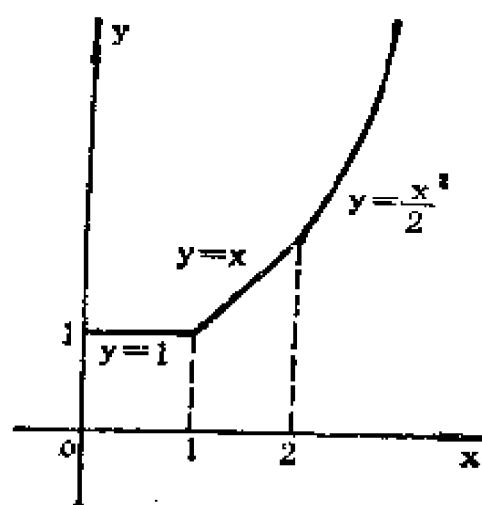


图 1.245

$$618. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0).$$

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ x & \text{若 } 1 < x < 2; \\ \frac{x^2}{2} & \text{若 } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

如图1·245所示.

$$619. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} \quad (x \geq 0).$$

解

$$y = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x < 2; \\ 2\sqrt{2}, & \text{若 } x = 2; \\ x^2, & \text{若 } x > 2. \end{cases}$$

如图1·246所示.

$$620. (a) y = \sin^{1/2^n} x;$$

$$(b) y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2^n} x.$$

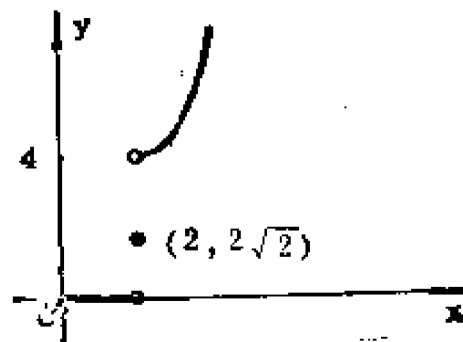


图 1·246

解 (a) 如图1·247所示,其图形始终在 Ox 轴上方.

$$(b) y = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{若 } x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

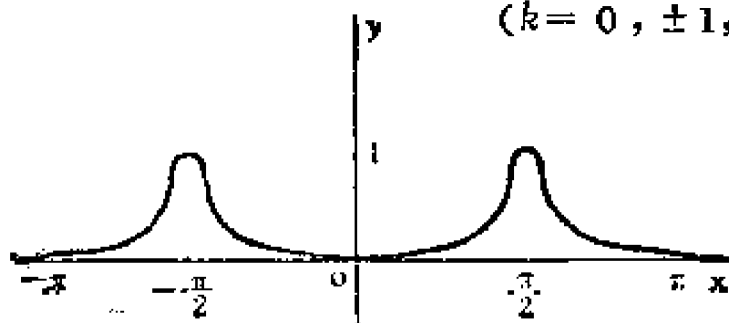


图 1·247

如图1·248所示。

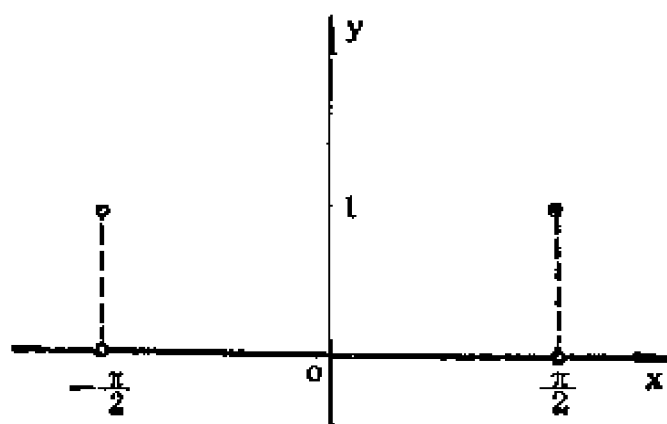


图 1·248

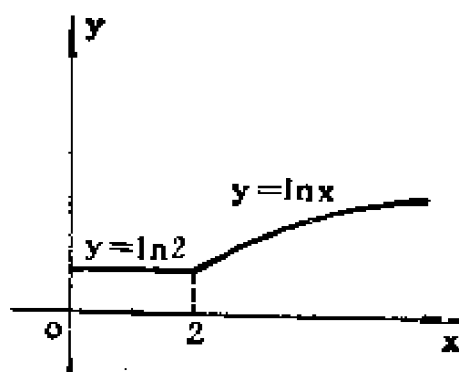


图 1·249

$$621. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} \quad (x \geqslant 0).$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} \ln 2, & \text{若 } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ \ln x, & \text{若 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

如图1·249所示。

$$622. y = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) \arctan x^n.$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} 0, & \text{若 } |x| \leqslant 1; \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & \text{若 } x > 1. \end{cases}$$

如图1·250所示。

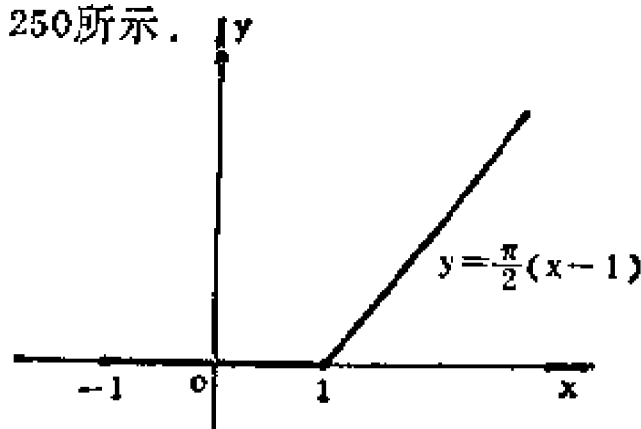


图 1·250

$$623. y = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + e^{x(x+1)}}.$$

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \leq -1; \\ e^{x+1}, & \text{若 } x > -1. \end{cases}$$

如图1.251所示.

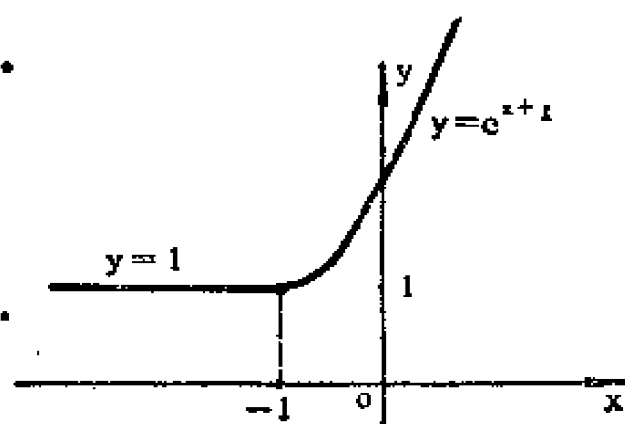


图 1.251

$$624. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}.$$

解

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 0; \\ 1, & \text{若 } x > 0. \end{cases}$$

如图1.252所示.

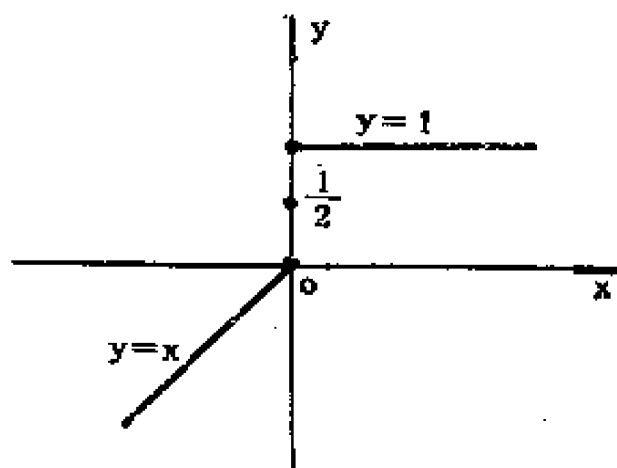


图 1.252

$$625. y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x}$$

($x > 0$).

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{t-x}{x}\right)}{\frac{t-x}{x}} \\ &= \frac{1}{x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

如图1.253所示.

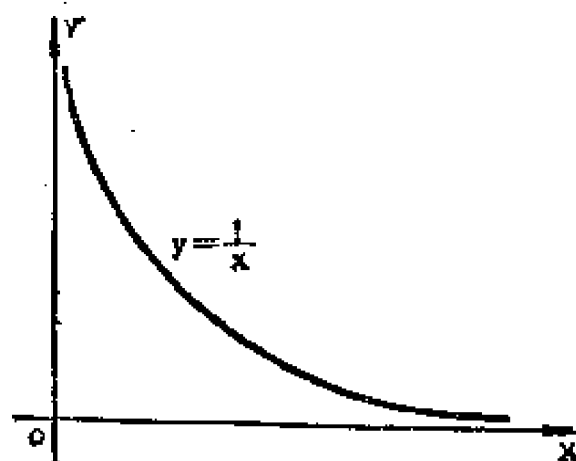


图 1.253

626. 若有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则直线 $y=kx+b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的(斜)渐近线。利用这方程式推出渐近线存在的必要而且充分的条件。

解 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0. \quad (1)$$

而在 $x \gg 0$ 时,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (kx+b)}{x} + k + \frac{b}{x},$$

可见

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \quad (2)$$

又由 (1) 式得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b, \quad (3)$$

即常数 k, b 可由 (2)、(3) 式确定。反之，若极限

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 存在，且为有限数 k ，极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$

存在且有限，等于 b ，则 (1) 式成立，即

$$y = kx + b$$

是一条渐近线。用完全类似的方法可以讨论 $x \rightarrow -\infty$ 的情形。

627. 求下列曲线的渐近线并作其图形：

$$(a) \ y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}; \quad (b) \ y = \sqrt{x^2 + x};$$

$$(B) \ y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}; \quad (r) \ y = \frac{xe^x}{e^x - 1};$$

$$(n) y = \ln(1+e^x); \quad (o) y = x + \arccos \frac{1}{x};$$

$$(p) y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^{x^2}}$$

解 (a) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ 及 $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$, 所以, 直线 $x=1$ 及 $x=-2$ 为曲线的垂直渐近线. 其次, 因为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x^2+x-2)} = 0,$$

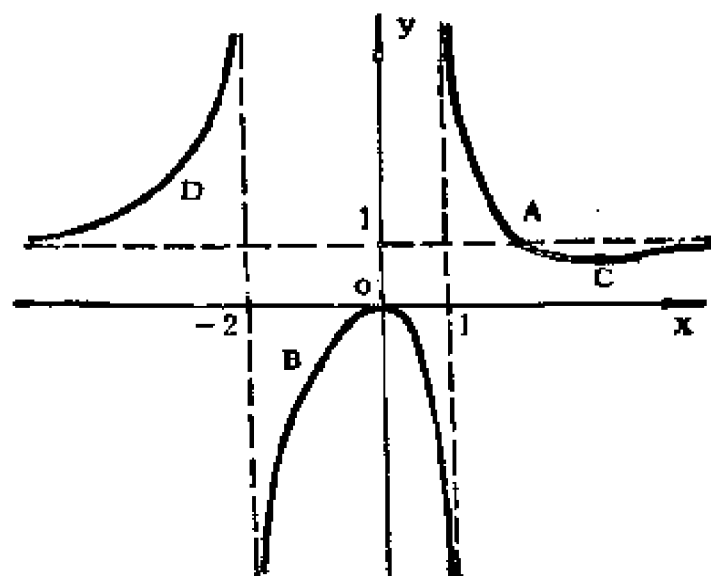


图 1-254

而

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = 1,$$

所以, $y=1$ 为曲线的水平渐近线.

曲线通过原点.

当 $-2 < x < 1$ 时, $y < 0$, 故曲线在 Ox 轴的下方;

当 $x > 1$ 或 $x < -2$ 时, $y > 0$, 故曲线在 Ox 轴的上方.

适当描若干点；

$$A(2, 1), B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), C(4, \frac{8}{9}),$$

$$D(-3, \frac{9}{4}), \dots,$$

并用光滑曲线联接，即得图形（图1·254）。

$$(6) k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2},$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = -\frac{1}{2},$$

于是，直线 $y = x + \frac{1}{2}$ 及

$y = -x - \frac{1}{2}$ 为曲线的

（斜）渐近线。

曲线 $y = \sqrt{x^2 + x}$
为双曲线

$$\frac{(x + \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1,$$

在 Ox 轴上方的部分。

如图1·255所示。

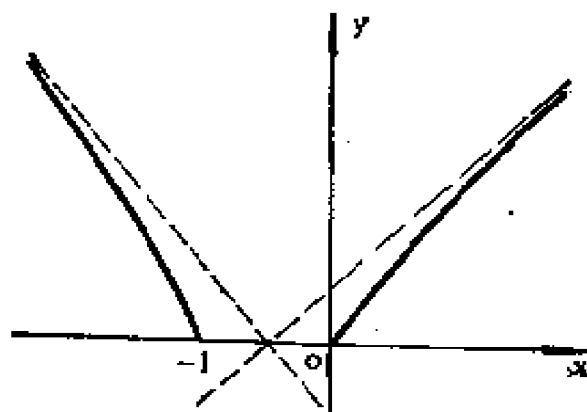


图 1·255

$$(B) \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^3} + x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - x^3)^2 - x} \sqrt[3]{x^3 - x^3} + x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

斜渐近线为

$$y = -x + \frac{1}{3}.$$

曲线通过原点及
点 $A(1, 0)$ 。

当 $-\infty < x < 1$ 时,
 $y > 0$; 而当 $x > 1$ 时,
 $y < 0$ 。

如图 1.256 所示。

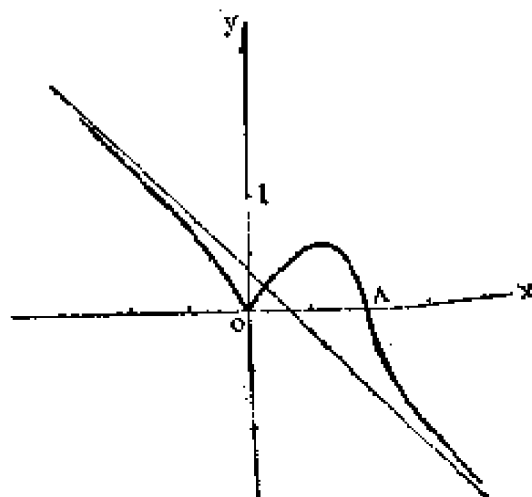


图 1.256

(r) 当 $x > 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x(e^x - 1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x}{e^x - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = 0,$$

故渐近线为

$$y = x,$$

当 $x < 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x(e^x - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0,$$

故另一渐近线为

$$y = 0.$$

曲线在 $x=0$ 处无定义（以后可以说明它是“可去的间断”）。

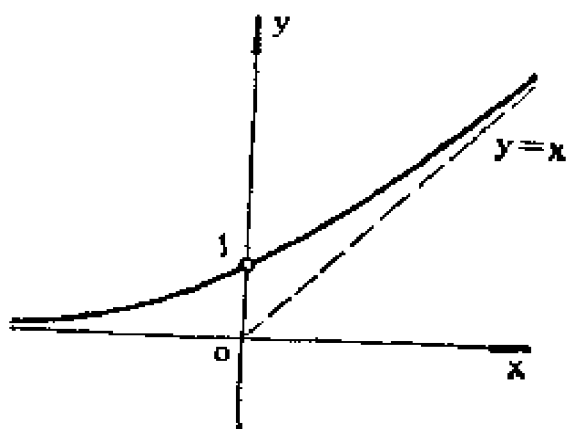


图 1·257

因为 $y > 0$ ，故图形始终在 Ox 轴的上方。

如图1·257所示。

(A) 当 $x > 0$ 时，

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x + \ln(e^{-x} + 1)}{x} \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1+e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0,$$

故渐近线为

$$y = x$$

同法可求，当 $x \leq 0$ 时的渐近线为

$$y = 0.$$

曲线通过点 $A(0, \ln 2)$ 。

如图1·258所示。

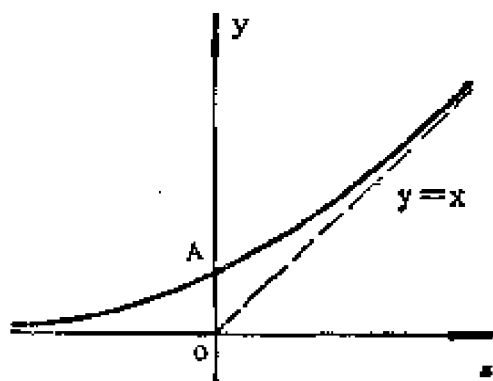


图 1·258

$$(e) \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \arccos \frac{1}{x}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x + \arccos \frac{1}{x}) - x \right] = \frac{\pi}{2},$$

故渐近线为

$$y = x + \frac{\pi}{2}.$$

将函数 $y=x$ 及 $y=\arccos \frac{1}{x}$ (见316题) 的图形按相加法即得, 如图1·259所示。

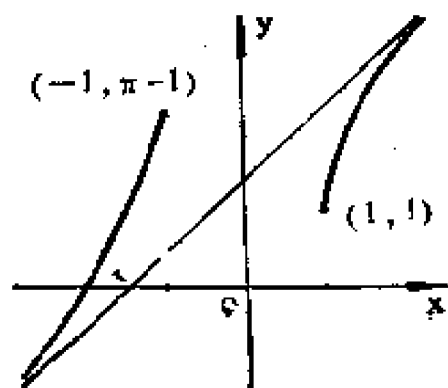


图 1·259

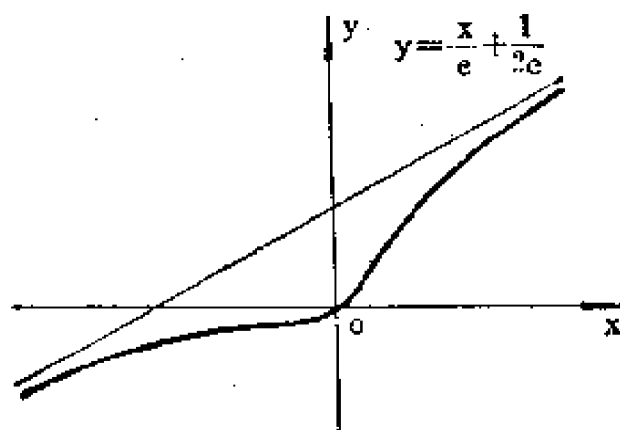


图 1·260

$$(x) \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right] = \frac{1}{2e},$$

故渐近线为

$$y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}.$$

曲线通过原点。

如图1·260所示。

求下列极限:

$$628. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right].$$

解 由于

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} (1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1}). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 上式右端为 $\frac{n}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$,

$$\begin{aligned} \text{当 } |x| \neq 1 \text{ 时, 此式为 } &\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - |x|^n}{1 - |x|} \\ &= \frac{1}{1 - |x|} \cdot \left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{|x|}{n+1} \cdot \frac{(|x|^2)^n}{n!} \right]. \end{aligned}$$

由61题的结果知: $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \frac{(|x|^2)^n}{n!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$,

故当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - |x|^n}{1 - |x|} \rightarrow 0$.

于是, 对于任意实数 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] = 0.$$

$$629. \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})], \text{ 若 } |x| < 1.$$

解 因为

$$1+x = \frac{1-x^2}{1-x},$$

$$1+x^2 = \frac{1-x^4}{1-x^2},$$

.....

$$1+x^{2^n} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}.$$

所以,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

又因 $|x| < 1$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x^{2^{n+1}} \rightarrow 0$.

最后, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})] = \frac{1}{1-x}.$$

630. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right).$

解 因为

$$\sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2^2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4}$$

$$= \cdots = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0).$$

631. 令 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$

其中 $\psi(x) > 0$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\alpha_{mn} \rightarrow 0$ ($m=1, 2, \cdots, n$),

换言之, 当 $m=1, 2, \cdots, n$ 且 $n > N(\epsilon)$ 时 $|\alpha_{mn}| < \epsilon$. 再

假定 $\alpha_{nn} \neq 0$. *)

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \cdots + \varphi(\alpha_{nn})] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \cdots + \psi(\alpha_{nn})], \quad (1)$$

此处假定等式(1)右端的极限存在。

证 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x| < \delta$ 时, 恒有

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

从而 (注意到 $\psi(x) \neq 0$),

$$(1 - \varepsilon) \psi(x) < \varphi(x) < (1 + \varepsilon) \psi(x). \quad (2)$$

由 $\alpha_{mn} \neq 0$ 以及 $\alpha_{mn} \rightarrow 0$ ($m = 1, 2, \dots, n$) 知, 必有正整数 $N = N(\varepsilon)$ 存在, 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$0 < |\alpha_{mn}| < \delta \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

于是

$$(1 - \varepsilon) \psi(\alpha_{mn}) < \varphi(\alpha_{mn}) < (1 + \varepsilon) \psi(\alpha_{mn}) \\ (n > N, m = 1, 2, \dots, n).$$

将这 n 个不等式相加, 得

$$(1 - \varepsilon) \sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn}) < \sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_{mn}) < (1 + \varepsilon) \sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn}) \\ (n > N).$$

即

$$1 - \varepsilon < \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn})} < 1 + \varepsilon \quad (n > N).$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(\alpha_{mn})} = 1.$$

由假定, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})$ 存在, 故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn}) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn}). \end{aligned}$$

证毕.

*) 编者注: 此题应加上条件 $a_{mn} \neq 0$ (原书没有), 因为 $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 都可能在 $x=0$ 处无定义. 另外, $m=1, 2, \dots$ 应改为 $m=1, 2, \dots, n$.

利用上边的定理, 求

632. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$

解 设 $x = \frac{k}{n^2}$, 我们将首先说明它满足631题的条件.

首先,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\frac{x}{3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}}{\frac{x}{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} = 1. \end{aligned}$$

其次, $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$; $k=1, 2, \dots, n$).

最后,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3n^2} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{6}.$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{6}.$$

633. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right).$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 而且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{ka}{n^2} \rightarrow 0$

($k=1, 2, \dots, n$).

又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{ka}{n^2} = \frac{a}{2},$

故利用631题的结果, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right) = \frac{a}{2}.$$

634. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{\frac{k}{n^2}} - 1) \quad (a > 0).$

解 我们有 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \right) = 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{k}{n^2} \cdot \ln a \rightarrow 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln a = \frac{1}{2} \ln a,$$

因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \ln a.$$

635. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$

解 设 $y = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$, $\ln y = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$

我们考虑下列极限,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

又 $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ 时, $k=1, 2, \dots, n$), 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = \frac{1}{2},$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$

636. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}.$

解 设 $y = \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$, 当 n 充分大时, $\cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} \geq 0$,

此时,

$$\ln y = \sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{ka}{n\sqrt{n}} \right).$$

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{x^2} = 1$, 又 $\frac{ka}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ 时,

$k=1, 2, \dots, n$), 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{6n^3} = \frac{a^2}{3},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = -\frac{a^2}{6},$$

即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

637. 叙列 x_n 由以下的等式所给定:

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$$

($a > 0$).

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 首先, 我们注意到此叙列显然是单调上升的. 其次, 由 $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$, 得 $x_n^2 = a + x_{n-1}$,

即

$$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n}. \quad (1)$$

因为 $0 < x_{n-1} < x_n$, 即在(1)式右端第二项小于1, 所以,

$$x_n < \frac{a}{x_n} + 1. \quad (2)$$

$$\text{又显然有 } x_n > \sqrt{a} \quad (n=2, 3, \dots). \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式右端, 即得

$$x_n < \sqrt{a} + 1,$$

故数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

根据极限存在的准则可知, 数列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设其值为 l .

利用等式 $x_n^2 = a + x_{n-1}$, 两端取极限, 得

$$l^2 = a + l,$$

解之, 得

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \quad (a > 0),$$

负根不适合 (因为 $x_n > 0$), 只取其正根, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

638. 函数数列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

用以下的方法来确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2 - 1}{2} \quad (n=2, 3, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

解 当 $x=0$ 时, $y_n=0$, $n=1, 2, \dots$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

当 $0 < x \leq 1$ 时, 用归纳法可证 $y_n > 0$, $n=1, 2, \dots$; $y_1 > 0$. 若 $y_k > 0$, 由 $x > y_{k-1}^2$, 可得

$$y_{k+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_k^2}{2} = \frac{4x - (x - y_{k-1}^2)^2}{8} \geq \frac{3x}{8} > 0.$$

因而有

$$y_1 - y_3 = \frac{y_2^2}{2} > 0,$$

$$y_2 - y_4 = \frac{y_3^2 - y_1^2}{2} < 0,$$

.....

用归纳法可证

$$y_{2n} - y_{2n+2} < 0,$$

$$y_{2n-1} - y_{2n+1} > 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\text{即 } \frac{x}{2} = y_1 > y_3 > \dots > 0,$$

$$0 < y_2 < y_4 < \dots < \frac{x}{2}.$$

可见数列 y_1, y_3, \dots 及数列 y_2, y_4, \dots 都是收敛的. 设极限分别为 A_1, A_2 , 由

$$y_{2n} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n-1}^2}{2}$$

$$\text{及 } y_{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n}^2}{2},$$

求极限得 $A_2 = \frac{x}{2} - \frac{A_1^2}{2}$, $A_3 = \frac{x}{2} - \frac{A_2^2}{2}$, 相减得

$$A_1 - A_2 = (A_1 - A_2) \frac{(A_1 + A_2)}{2}.$$

而 $0 \leq A_1 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq A_2 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$, 故

$$A_1 = A_2 = A.$$

用极限定义直接可以证明: 若 $\{y_n\}$ 的两个子数列 $\{y_{2n}\}$ 及 $\{y_{2n-1}\}$ ($n=1, 2, \dots$) 收敛于同一个极限, 则 $\{y_n\}$ 也收敛于这个极限, 由

$$A = \frac{x}{2} - \frac{A^2}{2}$$

解得

$$A = \sqrt{1+x} - 1,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1.$$

639. 函数数列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

用下面的方法来确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2 - 1}{2} \quad (n=2, 3, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

解 显然, $y_2 \geq y_1$. 假设 $y_n \geq y_{n-1}$, 则由

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$$

便可推出 $y_{n+1} \geq y_n$.

由数学归纳法便得知数列 $\{y_n\}$ 单调上升.

现在我们证明这个数列有界。显然

$$0 \leq y_1 < 1.$$

设 $0 \leq y_k < 1$, 则 $0 \leq y_k^2 < 1$, 且 $0 \leq y_{k+1} < 1$.

由数学归纳法便得知数列 $\{y_n\}$ 有界。

这样, 我们就证明了此数列的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在。设其值为 l (显然 $0 \leq l \leq 1$), 即得

$$l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2},$$

解之, 得 $l = 1 \pm \sqrt{1-x}$. 由于 $0 \leq l \leq 1$, 故必

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l = 1 - \sqrt{1-x}.$$

640. 为了求克卜勒方程式 (Уравнение Кеплера)

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (1)$$

的近似解, 假设

$$x_0 = m, x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \dots, x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1},$$

... (逐次逼近法)。

证明有 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 且数 ξ 为方程式 (1) 的唯一

的根。

证 首先考虑 $|x_n - x_m|$. 由于

$$x_2 - x_1 = \varepsilon (\sin x_1 - \sin x_0) = 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2},$$

所以

$$|x_2 - x_1| \leq 2\varepsilon \left| \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \right| \leq 2\varepsilon \cdot \frac{|x_1 - x_0|}{2} = \varepsilon |x_1 - x_0|.$$

同理可证

$$|x_3 - x_2| \leq \varepsilon^2 |x_1 - x_0|.$$

设

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon^{n-1} |x_1 - x_0|,$$

则有

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= 2\varepsilon \left| \sin \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right| \\ &\leq \varepsilon |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon^n |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

由数学归纳法得知对于任意的自然数 n , 均有 $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon^{n-1} |x_1 - x_0|$. 于是, 当 $m > n$ 时, 有

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots \\ &\quad + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{m-2} + \dots + \varepsilon^n) |x_1 - x_0| \\ &= \varepsilon^n \cdot \frac{1 - \varepsilon^{m-n}}{1 - \varepsilon} \cdot |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

而

$$|x_1 - x_0| = \varepsilon |\sin x_0| \leq \varepsilon,$$

所以,

$$|x_m - x_n| \leq \varepsilon^{n+1} \cdot \frac{1 - \varepsilon^{m-n}}{1 - \varepsilon} < \frac{\varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon}.$$

由此知

$$|x_m - x_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

按哥西判别法得知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

存在. 设其值为 ξ . 由等式

$$x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}$$

取极限即得

$$\xi = m + e \sin \xi.$$

这就是说, 变量 x_n 的极限 ξ 是方程 (1) 的根.

最后, 证明此根的唯一性. 设 ξ_1 是另一根, 则

$$\xi_1 - \xi = e(\sin \xi_1 - \sin \xi),$$

由此得

$$|\xi_1 - \xi| \leq e |\xi_1 - \xi|.$$

因为 $0 < e < 1$, 故 $\xi_1 = \xi$.

于是, 我们就证明了 ξ 是方程 (1) 的唯一的根.

641. 若 $\omega_k(f)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $|x - \xi| \leq k$ ($k > 0$) 上的振幅, 则数

$$\omega_0(f) = \lim_{k \rightarrow 0} \omega_k(f)$$

称为函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振幅.

求下列函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的振幅:

$$(a) f(x) = \sin \frac{1}{x}; \quad (b) f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$(B) f(x) = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right); \quad (r) f(x) = \frac{1}{x} \arctg \frac{1}{x};$$

$$(A) f(x) = \frac{|\sin x|}{x}; \quad (e) f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

$$(\kappa) f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}.$$

解 (a) $\omega_k(f) = 2$, $\omega_0(f) = 2$;

(b) $\omega_k(f) = +\infty$, $\omega_0(f) = +\infty$;

(B) $\omega_k(f) = 3k - k = 2k$, $\omega_0(f) = 0$;

$$(F) \quad \omega_1(f) = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{k} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{(-k)} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{k},$$

$$\omega_0(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$(H) \quad \omega_1(f) = 2, \quad \omega_0(f) = 2;$$

$$(O) \quad \omega_1(f) = \left| \frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}} - \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{k}}} \right|, \quad \omega_0(f) = 1;$$

$$(M) \quad \omega_1(f) = (1+k)^{\frac{1}{k}} - (1+k)^{-\frac{1}{k}}, \quad \omega_0(f) = e - e^{-1} \\ = 2sh1.$$

642. 命

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

证明: 对于满足条件 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 的任何数 α , 可以选出数列 $x_n \rightarrow 0$ ($n=1, 2, \dots$) 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

证 对于确定的 α : $|\alpha| \leq 1$, 总存在 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

使

$$\sin x_0 = \alpha.$$

令 $x_n = \frac{1}{2n\pi + x_0}$, 则显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

又因 $f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + x_0) = \alpha,$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a.$$

643. 设: (a) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

(b) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$;

(c) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2 \frac{1}{x}}.$

求

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 和 } L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x).$$

解 由 l 及 L 的定义, 容易求得

(a) $l = -1, L = 2$;

(b) $l = -2, L = 2$;

(c) $l = 2, L = e.$

644. 设:

(a) $f(x) = \sin x$; (b) $f(x) = x^2 \cos^2 x$;

(c) $f(x) = 2 \sin x^2$;

(d) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x} \quad (x \geq 0).$

求

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ 和 } L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

解 由 l 及 L 的定义, 容易求得

(a) $l = -1, L = 1$;

(b) $l = 0, L = +\infty$;

$$(n) \quad l = \frac{1}{2}, \quad L = 2;$$

$$(r) \quad l = 0, \quad L = +\infty.$$

§6. 函数无穷小和无穷大的阶

1° 符号

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x))$$

表示函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $x \rightarrow a$ 的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大, 就是说

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (0 < |k| < +\infty).$$

特别是, 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷小 x 是 n 阶无穷小.

仿此, 若当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷大 x 是 n 阶无穷大.

2° 符号

$$\varphi(x) = o(\psi(x))$$

表示当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小, 或函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大, 就是说

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3° 若当 $x \rightarrow a$ 时, 无穷小函数 $\varphi(x)$ 的阶 (在广义的

意义上) 不低于某一正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶 (或无穷大函数 $\varphi(x)$ 的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶), 即

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} = k \quad (0 \leq k < +\infty),$$

则约定写为:

$$\varphi(x) = O(\psi(x)).$$

4° 若

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

则称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时为等价的 ($\varphi(x) \sim \psi(x)$).

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:

$$\sin x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x;$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0);$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}; \quad \ln(1+x) \sim x.$$

一般地说来, $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$.

当求两个函数比的极限时, 已知函数可用其等价的函数来代换.

645. 把圆心角 $AOB = x$ (图 1.261)

当作 1 阶无穷小, 求下列各量
无穷小的阶:

(a) 弦 AB ;

(б) 矢 CD ;

(в) 扇形 AOB 的面积;

(г) 三角形 ABC 的面积;

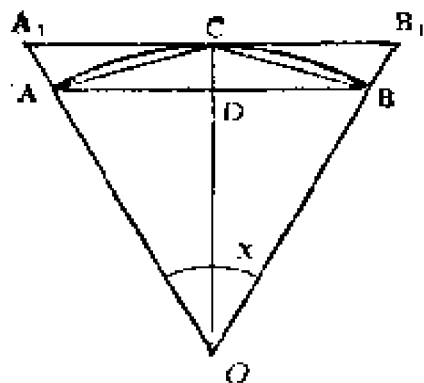


图 1.261

(A) 梯形 ABB_1A_1 的面积; (B) 弓形 ABC 的面积.

解 (a) $AB = 2R \sin \frac{x}{2}$, 式中 R 为圆的半径.

因为 $\frac{AB}{x} = \frac{2R \sin \frac{x}{2}}{x} \rightarrow R \ (x \rightarrow 0)$, 故弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

$$(b) \ CD = R - R \cos \frac{x}{2} = 2R \sin^2 \frac{x}{4}.$$

因为 $\frac{CD}{x^2} \rightarrow \frac{R}{8}$, 所以, 矢 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

$$(B) \text{ 扇形 } AOB \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} R^2 x.$$

因为 $\frac{S}{x} = \frac{1}{2} R^2$, 所以, S 是关于 x 的一阶无穷小.

$$(r) \ \triangle ABC = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = 2R^2 \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4}.$$

因为 $\frac{\triangle ABC}{x^3} \rightarrow \frac{R^2}{16}$, 所以, $\triangle ABC$ 的面积是关于 x 的三阶无穷小.

$$(A) \ A_1C = R \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

于是, 梯形 ABB_1A_1 的面积

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin^2 \frac{x}{2} \left(2R \sin \frac{x}{2} + 2R \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \\ &= 2R^2 \sin^3 \frac{x}{2} + 2R^2 \sin^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

因为 $\frac{A_0}{x^3} \rightarrow \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{2}$, 所以, 面积 A_0 是关于 x 的三阶无穷小.

(e) 弓形 ABC 的面积

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} R^2 x - \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \frac{x}{2} \cdot R \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{R^2}{2} (x - \sin x). \end{aligned}$$

由于 $x - \sin x$ 是奇函数, 故只需考虑 $x \rightarrow +0$ 时的情形. 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 有

$$\begin{aligned} x - \sin x &\leq \tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} (1 - \cos x) \\ &= \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} = O^+(x^3); \end{aligned}$$

而由 $x \geq 2 \sin \frac{x}{2}$, 又有

$$\begin{aligned} x - \sin x &\geq 2 \sin \frac{x}{2} - \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \\ &= 4 \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4} = O^+(x^3). \end{aligned}$$

于是, 当 x 大于 0 而充分小时, 存在两常数 $A > 0$, $B > 0$, 使

$$Ax^3 \leq x - \sin x \leq Bx^3,$$

即弓形面积 p 基本上是关于 x 的三阶无穷小, 实际上, 尔后将会看到, 有 $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ (但要用到导数的

概念)。

646. 命 $o(f(x))$ 为当 $x \rightarrow a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数, 且 $O(f(x))$ 为 $x \rightarrow a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶 (在广义的意义上) 的任意无穷大函数, 其中 $f(x) > 0$ 。

证明: (a) $o\{o(f(x))\} = o[f(x)]$;

(б) $O\{o(f(x))\} = o[f(x)]$;

(в) $o\{O(f(x))\} = o[f(x)]$;

(г) $O\{O(f(x))\} = O[f(x)]$;

(д) $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)]$;

(е) $O[f(x)] \cdot O[g(x)] = O[f(x)g(x)]$ 。

证 (a) 因为

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{o(f(x))\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{o(f(x))\}}{o\{f(x)\}} \cdot \frac{o\{f(x)\}}{f(x)} = 0,$$

故 $o\{o(f(x))\} = o[f(x)]$ 。

(б) 由133题(6)的结果, 有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{o(f(x))\}|}{f(x)} &= \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{o(f(x))\}|}{o\{f(x)\}} \\ &\quad \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{f(x)\}}{f(x)} = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o(f(x))\}}{f(x)}$ 存在且等于 0。因此

$$O\{o(f(x))\} = o[f(x)].$$

(в) 仍由133题(6)的结果, 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|o\{O(f(x))\}|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{o\{O(f(x))\}}{O\{f(x)\}} \right|$$

$$\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} = 0,$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)} = 0$, 即

$$o\{O[f(x)]\} = o[f(x)].$$

(v) 由132题(6)的结果, 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}|}{O[f(x)]}$$

$$\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{O[f(x)]}{f(x)} < +\infty,$$

故 $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)]$.

(vi) 由131题(6), 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)] + o[f(x)]|}{f(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)}$$

$$+ \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|o[f(x)]|}{f(x)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} < +\infty,$$

故 $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)]$.

(vii) 由132题(6), 有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]O[g(x)]|}{f(x)g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)}$$

$$\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[g(x)]|}{g(x)} < +\infty,$$

故

$$O[f(x)]O[g(x)] = O[f(x)g(x)].$$

647. 设 $x \rightarrow +0$ 和 $n > 0$. 证明

(a) $CO(x^n) = O(x^n)$ (C 为常数);

(b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n < m$);

(B) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

证 (a) 由

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|CO(x^n)|}{x^n} = |C| \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty,$$

故

$$CO(x^n) = O(x^n).$$

(b) 由

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} \\ &+ \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \left(\frac{|O(x^m)|}{x^m} \cdot x^{m-n} \right) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n < m).$$

(B) 由

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)O(x^m)|}{x^{n+m}} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} \\ &\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^m)|}{x^m} < +\infty, \end{aligned}$$

得知

$$O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

648. 设 $x \rightarrow +\infty$ 和 $n > 0$. 证明

(a) $CO(x^n) = O(x^n)$;

(b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n > m$).

(B) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

证 (a) 与 (b) 同 647 题 (a) 与 (b) 之证 (只要将 $x \rightarrow +0$ 换为 $x \rightarrow +\infty$)。下证 (6): 由于

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n} \\ & \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} + \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{|O(x^m)|}{x^m} \cdot \frac{1}{x^{n-m}} \right) \\ & = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n > m).$$

649. 证明符号 \sim 具有下列性质: (1) 反射性: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$;
(2) 对称性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则 $\psi(x) \sim \varphi(x)$;
(3) 传递性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$ 及 $\psi(x) \sim \chi(x)$, 则 $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

证 (1) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} \equiv 1 \rightarrow 1$, 所以, $\varphi(x) \sim \varphi(x)$.

(2) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1$, 所以, $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 1$.

即: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则 $\psi(x) \sim \varphi(x)$.

(3) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1$, $\frac{\psi(x)}{\chi(x)} \rightarrow 1$, 所以,

$$\frac{\varphi(x)}{\chi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{\chi(x)} \rightarrow 1,$$

即: $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. 设 $x \rightarrow +0$, 证明下列等式:

$$(a) \quad 2x - x^2 = O^*(x); \quad (b) \quad x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}});$$

$$(B) x \sin \frac{1}{x} = O(|x|); \quad (F) \ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right) \quad (\varepsilon > 0);$$

$$(I) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[3]{x};$$

$$(e) \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1); \quad (K) (1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

证 由题设 $x \rightarrow +0$, 于是

$$(a) \text{ 因为 } \frac{2x - x^2}{x} \rightarrow 2, \text{ 所以, } 2x - x^2 = O^*(x).$$

$$(b) \text{ 因为 } \frac{x \sin \sqrt{x}}{x \sqrt{x}} \rightarrow 1, \text{ 所以, } x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}}).$$

$$(B) \text{ 因为 } \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \quad (x \neq 0), \text{ 所以,}$$

$$x \sin \frac{1}{x} = O(|x|).$$

$$(F) \text{ 因为 } \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\varepsilon}} = x^\varepsilon \ln x \rightarrow 0, \text{ 所以, } \ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right).$$

$$(I) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + 1}} = 1,$$

$$\text{故 } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim x^{\frac{1}{3}}.$$

$$(e) \text{ 因为 } \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\pi}{2} \quad (x \neq 0), \text{ 所以, } \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1).$$

$$(x) \quad \text{因为} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \frac{1}{2} n(n-1)x + \cdots \\ \rightarrow 0,$$

所以 $(1+x)^n - 1 - nx = o(x)$, 即

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

651. 设 $x \rightarrow +\infty$. 证明下列等式:

$$(a) \quad 2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3);$$

$$(b) \quad \frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$(B) \quad x + x^2 \sin x = O(x^2);$$

$$(r) \quad \frac{\arctg x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(A) \quad \ln x = o(x^\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0);$$

$$(e) \quad x^2 e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(K) \quad \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x};$$

$$(3) \quad x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2;$$

证 由题设 $x \rightarrow +\infty$, 于是

$$(a) \quad \text{因为} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} \rightarrow 2, \text{ 所以,}$$

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3).$$

$$(b) \quad \text{因为} \frac{\frac{x+1}{x^2+1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x(x+1)}{x^2+1} \rightarrow 1, \text{ 所以,}$$

$$\frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(B) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x + x^2 \sin x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} + \sin x \right| \\ = 1 < +\infty, \text{ 所以, } x + x^2 \sin x = O(x^2).$$

$$(C) \text{ 因为 } \frac{\frac{\arctg x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 \arctg x}{1+x^2} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ 所以,}$$

$$\frac{\arctg x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$(D) \text{ 因为 } \frac{\ln x}{x^e} \rightarrow 0, \text{ 所以,}$$

$$\ln x = o(x^e).$$

$$(E) \text{ 因为 } \frac{x^t e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{t+2}}{e^x} \rightarrow 0, \text{ 所以,}$$

$$x^t e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$(K) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}} \\ \rightarrow 1, \text{ 所以, } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}.$$

$$(3) \text{ 因为 } \frac{x^2 + x \ln^{100} x}{x^2} = 1 + \frac{\ln^{100} x}{x} \rightarrow 1, \text{ 所以}$$

$$x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2.$$

652. 证明当 x 充分大时, 下边的不等式成立:

$$(a) \quad x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3;$$

$$(b) \quad \ln^{1000} x < \sqrt{x}; \quad (B) \quad x^{10} e^x < e^{2x}.$$

证 (a) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^2+10x+100}{0.001x^3} \rightarrow 0$,

所以, 当 x 充分大以后, 有 $\frac{x^2+10x+100}{0.001x^3} < 1$, 即

$$x^2+10x+100 < 0.001x^3.$$

(b) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\ln^{1000}x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$, 所以, 当 x 充

分大以后, 有 $\frac{\ln^{1000}x}{\sqrt{x}} < 1$, 即

$$\ln^{1000}x < \sqrt{x}.$$

(B) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^{10}e^x}{e^{2x}} = \frac{x^{10}}{e^x} \rightarrow 0$, 所以,

当 x 充分大后, 有 $\frac{x^{10}e^x}{e^{2x}} < 1$, 即

$$x^{10}e^x < e^{2x}.$$

653. 设 $x \rightarrow 0$. 选出下列函数的形如 Cx^n (C 为常数) 的主部, 并求其对于无穷小变数 x 的阶:

(a) $2x-3x^3+x^5$; (b) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

(B) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$; (r) $\operatorname{tg} x - \sin x$.

解 所谓函数 $f(x)$ 的主部 $g(x)$, 即满足

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \text{ 或 } f(x) = g(x) + o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

(a) 因为 $\frac{2x-3x^3+x^5}{2x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0),$

故其主部为 $2x$, 它对于无穷小 x 是一阶的.

$$(6) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$\rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0),$

故其主部为 x , 它对于 x 是一阶的.

$$(B) \text{ 因为 } \sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$$

$$= \frac{3x^2-8x^3}{\sqrt[5]{(1-2x)^{15}}+\sqrt[5]{(1-2x)^{12}(1-3x)^2}+\cdots+\sqrt[5]{(1-3x)^{10}}},$$

于是, $\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{\frac{x^2}{2}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0),$ 故其主部为

$\frac{x^2}{2}$, 它对于 x 是二阶的.

$$(r) \text{ 因为 } \operatorname{tg} x - \sin x = \frac{2}{\cos x} \sin x \sin^2 \frac{x}{2}, \text{ 于是,}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\frac{x^3}{2}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0), \text{ 故其主部为 } \frac{x^3}{2}, \text{ 它对于 } x \text{ 是}$$

三阶的.

654. 设 $x \rightarrow +0$, 证明无穷小

$$(a) f(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad (6) f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

无论对任何的 n , 也不能与无穷小 x^n ($n > 0$) 相比较.

即: 对于如此的 n , 不能有等式 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x^n} = k$, 式中 k

为异于零的有限量.

证 (a) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x = 0 \quad (n > 0)$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\frac{\ln x}{x^n}} = \infty,$$

即 $\frac{1}{\ln x}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 ($x \rightarrow +0$).

(6) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0^{**}) (n > 0)$, 所以, $e^{-\frac{1}{x^2}}$

不能与无穷小 x^n 相比较 ($x \rightarrow 0$).

*) 参看592题.

***) 参看591题.

655. 设 $x \rightarrow 1$. 选出下列函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部, 并求其对于无穷小 $(x-1)$ 的阶:

(a) $x^3 - 3x + 2$; (б) $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$; (в) $\ln x$;

(г) $e^x - e$; (д) $x^x - 1$.

解 (a) 因为 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$, 又

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{3(x-1)^2} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $3(x-1)^2$, 对于 $(x-1)$ 是二阶无穷小.

(б) 因为 $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = -\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}$, 又

$$\frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{2}}$, 对于 $(x-1)$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小.

$$(B) \text{ 因为 } \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \longrightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $x-1$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

$$(T) \text{ 因为 } e^x - e = e(e^{x-1} - 1), \text{ 又}$$

$$\frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \longrightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1).$$

故其主部为 $e(x-1)$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

$$(A) \text{ 因为 } x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1, \text{ 又}$$

$$\frac{e^{x \ln x} - 1}{x-1} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot \frac{x \ln[1+(x-1)]}{x-1} \longrightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $x-1$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

656. 设 $x \rightarrow +\infty$. 选出下列函数的形如 Cx^s 的主部, 并求其对于无穷大 x 的阶:

$$(a) \ x^2 + 100x + 10000; \quad (b) \ \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1};$$

$$(B) \ \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}; \quad (T) \ \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

解 (a) 因为 $x^2 + 100x + 10000 \sim x^2 \quad (x \rightarrow +\infty)$, 故主部为 x^2 , 它对于无穷大 x 是二阶的.

$$(b) \text{ 因为 } \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1} = \frac{2x^5}{2x^2} = \frac{2x^5}{2x^5 - 6x^3 + 2x^2} \longrightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $2x^2$, 它对于无穷大 x 是二阶的.

$$(B) \ \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x} = x^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[6]{\frac{1}{x}} \right), \text{ 于是,}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[6]{\frac{1}{x}} \longrightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $x^{\frac{2}{3}}$ ，它对于无穷大 x 是 $\frac{2}{3}$ 阶的。

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{x}} \rightarrow 1 \ (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\sqrt[3]{x}$ ，它对于无穷大 x 是 $\frac{1}{3}$ 阶的。

657. 设 $x \rightarrow +\infty$ ，选出下列函数的形如 $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 的主部，并求其对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 的阶：

$$(a) \frac{x+1}{x^4+1};$$

$$(b) \sqrt{x+1} - \sqrt{x};$$

$$(B) \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}; \quad (r) \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

$$\text{解 } (a) \text{ 因为 } \frac{\frac{x+1}{x^4+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{x^3(x+1)}{x^4} \rightarrow 1 \ (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^3$ ，它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 3 阶的。

$$(b) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \rightarrow 1 \ (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ ，它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶的。

$$(B) \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$$

$$= \frac{2\sqrt{x(x+2)} - 2(x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x(x+2)} + x + 1)}.$$

于是, 由此得

$$\frac{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{8}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + 2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right)} \\ \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{3}{2}$ 阶的.

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^2$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 为 2 阶的.

658. 设 $x \rightarrow 1$. 选出下列函数的形如 $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ 的主部,

并求其对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 的阶:

$$(a) \frac{x^2}{x^2-1}; \quad (6) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; \quad (B) \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}};$$

$$(r) \frac{1}{\sin \pi x}; \quad (II) \frac{\ln x}{(1-x)^2}.$$

解 (a) $\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$, 于是,

$$\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{1}{2(x-1)}} = \frac{2x^2}{x+1} \longrightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{2(x-1)}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

$$(6) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}} \longrightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\sqrt{2} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{1-x}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶的.

(B) 因为 $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}$, 于是,

$$\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{1-x}}} \longrightarrow 1 \quad (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}}$, 它对于无穷大 $-\frac{1}{x-1}$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶的.

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\frac{1}{\sin \pi x}}{\frac{1}{\pi(1-x)}} = \frac{\pi(1-x)}{\sin \pi(1-x)} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{1-x} \right)$, 它对于无穷大 $-\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

$$(x) \text{ 因为 } \frac{\frac{\ln x}{(1-x)^2}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \\ \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{x-1}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

659. 设 $x \rightarrow +\infty$ 和 $f_n(x) = x^n$ ($n=1, 2, \dots$). 证明:

(1) $f_n(x)$ 中的每一个函数都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加较快;

(2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 中的每一个都增加得较快.

证 (1) 因为 $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x \rightarrow +\infty$, 所以, $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加较快.

(2) 因为 $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$, n 为任一固定的自然数), 所以 e^x 比 $f_n(x)$ 中的每一个都增加得较快.

660. 设 $x \rightarrow +\infty$ 和 $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ ($n=1, 2, \dots$), 证明:

(1) 函数 $f_n(x)$ 中的每一个都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢;

(2) 函数 $f(x) = \ln x$ 比函数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 中的每一个都增加得较慢.

证 (1) 因为 $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x^{-\frac{1}{n(n-1)}}$
 $\rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$),

所以, $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢.

(2) 因为 $\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \rightarrow 0$ *) ($x \rightarrow +\infty$),

所以, $\ln x$ 比 $f_n(x)$ 中的每一个增加得较慢.

*) 利用565题的结果.

661. 证明对于任意的函数叙列

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ ($x_0 < x < +\infty$).

可举出一函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时它比函数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 中的每一个都增加得较快.

证 取正整数 $N > x_0$, 定义 $x_0 < x < +\infty$ 上的函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} n \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)| + 1 \right), & \text{当 } n \leq x < n+1 \text{ 时,} \\ & (n = N, N+1, \dots); \\ 0, & \text{当 } x_0 < x < N \text{ 时.} \end{cases}$$

于是, 对任何正整数 n , 当 $x > \max\{N, n\}$ 时, 有

$$\left| \frac{f_n(x)}{f(x)} \right| = \frac{|f_n(x)|}{[x] \left(\sum_{k=1}^{[x]} |f_k(x)| + 1 \right)} < \frac{1}{[x]},$$

其中 $[x]$ 表 x 的整数部分,由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{f(x)} = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 比 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$)中的每一个都增加得较快.

§7. 函数的连续性

1° 函数的连续性 设

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1)$$

即,若对于每一个 $\varepsilon > 0$, 都有 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 对于 $f(x)$ 的有意义的一切值, 不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

都成立, 则称函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时(或在点 x_0)是连续的.

若函数 $f(x)$ 在集合 X 上的每一点都是连续的, 则称函数 $f(x)$ 在已知集合 $X = \{x\}$ (区间, 线段等等) 上是连续的.

若某值 $x = x_0$ 属于函数 $f(x)$ 的定义域 $X = \{x\}$ 或为此集合的聚点, 而当 $x = x_0$ 时, 等式(1)不成立〔即, (a) 数 $f(x_0)$ 不存在, 换言之, 函数在点 $x = x_0$ 没有定义; 或

(b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在; 或(b)公式(1)的两端虽有意义,

但它们不相等), 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点.

分为：(1) 第一类的不连续点 x_0 ，对于这些点存在有单侧有限的极限：

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ 和 } f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

(2) 第二类的不连续点——其余的一切不连续点。
差

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

称为函数在点 x_0 的跳跃。

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

成立，则不连续点 x_0 称为无变化的。若极限 $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 中至少有一个等于符号 ∞ ，则称 x_0 为无穷型不连续点。

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \text{ [或 } f(x_0 + 0) = f(x_0)]$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是左侧（或右侧）连续。函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分而且必要的条件为下面三个数相等：

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2° 初等函数的连续性 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续，则函数

$$(a) f(x) \pm g(x); \quad (b) f(x)g(x);$$

$$(c) \frac{f(x)}{g(x)} \text{ [} g(x_0) \neq 0 \text{]}$$

也在 $x = x_0$ 连续。

特殊情形：(a) 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

对任何的 x 值都是连续的: (6) 有理分式函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值, 都是连续的.

一般地说, 基本初等函数: x^n , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x , $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ... 在一切使它们有意义的点都连续.

较普遍的结果如下: 若函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续, 及函数 $g(y)$ 当 $y=f(x_0)$ 时连续, 则函数 $g(f(x))$ 当 $x=x_0$ 时连续.

3° 关于连续函数的基本定理 若函数 $f(x)$ 在有限的闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则: (1) 函数 $f(x)$ 在此闭区间内是有界的; (2) 达到其下确界 m 和上确界 M (外尔什特拉斯定理); (3) 在每一个区间 $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ 中, 函数具有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 间的一切中介值 (哥西定理). 特例, 若 $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, 则可找到一个数值 γ ($\alpha < \gamma < \beta$), 使得 $f(\gamma) = 0$.

652. 已给连续函数 $y=f(x)$

的图形, 对于给定点 a 与给定数 $\varepsilon > 0$, 用几何方法表示出这样的数 $\delta > 0$, 使当 $|x-a| < \delta$ 时, $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

解 如图 1.262 所示,

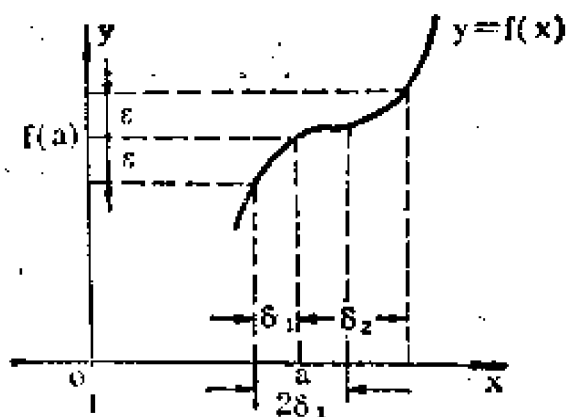


图 1.262

如果 $\delta_1 < \delta_2$, 我们只要取

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2),$$

即有

$$\delta = \delta_1.$$

于是, 当 $|x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

663. 要做一个金属的边长 $x_0 = 10$ 厘米的正方形薄片, 若要其面积 $y = x^2$ 与预计的 $y_0 = 100$ 平方厘米的差不超过 (a) ± 1 平方厘米; (b) ± 0.1 平方厘米; (B) ± 0.01 平方厘米; (r) $\pm \varepsilon$ 平方厘米, 问其边 x 可以在什么范围内变更?

解 (a) 要 $|x^2 - 100| < 1$, 只要

$$99 < x^2 < 101.$$

解之, 得

$$9.95 < x < 10.05.$$

(b) 要 $|x^2 - 100| < 0.1$, 只要

$$\sqrt{100 - 0.1} < x < \sqrt{100 + 0.1}.$$

解之, 得

$$9.995 < x < 10.005.$$

(B) 要 $|x^2 - 100| < 0.01$, 只要

$$\sqrt{100 - 0.01} < x < \sqrt{100 + 0.01}.$$

解之, 得

$$9.9995 < x < 10.0005.$$

(r) 要 $|x^2 - 100| < \varepsilon$, 只要

$$\sqrt{100 - \varepsilon} < x < \sqrt{100 + \varepsilon}. *$$

*) 本来, x 处应记成 $|x|$, 在此仅考虑点 $x = 10$ 处,

故在其近傍 x 值恒为正, 因此, 不必取绝对值了。

664. 立方体的边是在 2 米和 3 米之间, 为了使计算这立方体的体积时发生的绝对误差不超过 ε 立方米, 设 (a) $\varepsilon = 0.1$ 立方米; (b) $\varepsilon = 0.01$ 立方米; (B) $\varepsilon = 0.001$ 立方米, 问测量此立方体的边 x 时可允许有怎样的绝对误差 Δ ?

解 要 $|x_1^3 - x_2^3| < \varepsilon$, 只要

$$|x_1 - x_2|(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < \varepsilon,$$

即只要

$$|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{3 \times 3^2} = \frac{\varepsilon}{27}.$$

故有

$$(a) \Delta < \frac{0.1}{27} (\text{米}) = 3.7 (\text{毫米});$$

$$(b) \Delta < \frac{0.01}{27} (\text{米}) = 0.37 (\text{毫米});$$

$$(B) \Delta < \frac{0.001}{27} (\text{米}) = 0.037 (\text{毫米}).$$

665. 问在 $x_0 = 100$ 的尽可能多大邻域内, 函数 $y = \sqrt{x}$ 图形的纵坐标与 $y_0 = 10$ 之差小于 $\varepsilon = 10^{-n}$ ($n \geq 0$)? 求当 $n = 0, 1, 2, 3$ 时这个邻域的大小。

解 要 $|\sqrt{x} - 10| < 10^{-n}$, 只要

$$10[1 - 10^{-(n+1)}] < \sqrt{x} < 10[1 + 10^{-(n+1)}],$$

即只要

$$100[1 - 10^{-(n+1)}]^2 < x < 100[1 + 10^{-(n+1)}]^2,$$

故得

(a) 当 $n=0$ 时, $81 < x < 121$;

(б) 当 $n=1$ 时, $98.01 < x < 102.01$;

(в) 当 $n=2$ 时, $98.8001 < x < 100.2001$;

(г) 当 $n=3$ 时, $99.980001 < x < 100.020001$.

666. 利用《 $\varepsilon-\delta$ 》论证法, 证明函数 $f(x) = x^2$ 当 $x=5$ 时连续. 填下表:

ε	1	0.1	0.01	0.001
δ					

证 任给 $\varepsilon > 0$,

$$\text{要 } |x^2 - 25| < \varepsilon, \text{ 即 } |x-5| |x+5| < \varepsilon, \quad (1)$$

不妨只就 $x=5$ 的某一邻域来考虑, 例如, 取

$$|x-5| < 1 \quad \text{或} \quad 4 < x < 6,$$

从而有

$$0 < x+5 < 11.$$

于是, 只要

$$|x-5| < \frac{\varepsilon}{11}.$$

取 $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right)$, 则当 $|x-5| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^2 - 25| < \varepsilon,$$

所以, 函数 $y = x^2$ 在 $x=5$ 处连续.

填下表:

ε	1	0.1	0.01	0.001	ε	...
δ	0.09	0.009	0.0009	0.00009	$\min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right)$...

667. 设 $f(x) = \frac{1}{x}$ 和 $\varepsilon = 0.001$. 对于数值 $x_0 = 0.1; 0.01; 0.001; \dots$ 求出充分大的正数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ 使得可从不等式 $|x - x_0| < \delta$ 推出不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

可否对于已知的 $\varepsilon = 0.001$ 选出 $\delta > 0$ 来, 使它对于区间 $(0, 1)$ 中的一切 x_0 值都适用, 换句话说, 对于任意的值 $x_0 \in (0, 1)$, 若 $|x - x_0| < \delta$, 则 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$?

解 $|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{x - x_0}{x|x_0|} \right|.$ (1)

由于

$$|x_0| - |x| \leq |x - x_0| \quad \text{或} \quad |x| \geq |x_0| - |x - x_0|,$$

故有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|}{|x_0|^2 - |x_0||x - x_0|}$$

(在此, 我们已假设了 $|x - x_0| \leq |x_0|$, 这一点是可以办到的).

于是要求 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{|x - x_0|}{|x_0|^2 - |x_0||x - x_0|} < \varepsilon,$$

即只要

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon |x_0|}.$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon |x_0|} > 0$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

我们取近似值, $\delta \approx 0.001x_0^2$ ($\varepsilon = 0.001$).

当 $x_0 = 0.1$ 时, $\delta \approx 10^{-5}$;

当 $x_0 = 0.01$ 时, $\delta \approx 10^{-7}$;

当 $x_0 = 0.001$ 时, $\delta \approx 10^{-9}$.

由表达式 (1) 可知, 对于不论怎样小的正数 δ (固定), 则当 $|x - x_0| < \delta$ 及 $x_0 \rightarrow 0$ 时, $|f(x) - f(x_0)|$ 可任意地大. 因此, 无法选出一个公共的正数 δ 来.

668. 简明的用《 ε - δ 》的说法在肯定的意义上来表达下面的论断: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义, 而在这一点不连续.

解 存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 对于无论怎样小的 $\delta > 0$, 都有某 x 满足 $|x - x_0| < \delta$, 但

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

669. 设对于某些数 $\varepsilon > 0$, 可找到对应的数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使得, 只要 $|x - x_0| < \delta$, 则

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

设: (a) 诸数 ε 形成一有穷的集合; (b) 数 ε 形成分数 $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的无穷集合. 可否断定函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

解 (a) 不能. 因为 ε 不能任意地小.

(b) 可以. 事实上, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 总可以取充分大的 n , 使 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. 于是, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

670. 设已知函数

$$f(x) = x + 0.001[x].$$

证明对于每一个 $\varepsilon > 0.001$, 便可选出 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, 使得: 只要 $|x' - x| < \delta$, 则 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. 而对于 $0 < \varepsilon \leq 0.001$, 这件事对于一切的值 x 都不行.

在怎样的点这个函数失去了连续性?

证 当 $\varepsilon > 0.001$, 且 $|x' - x| < 1$ 时,

$$|f(x') - f(x)| = |x - x' + 0.001([x] - [x'])|$$

$$\leq |x - x'| + 0.001$$

此时只要取 $\delta = \min \{\varepsilon - 0.001, 1\}$, 则当 $|x - x'| < \delta$ 时恒有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

当 $0 < \varepsilon \leq 0.001$, 且 x_0 不为整数时, 有整数 n , 使得 $n < x_0 < n+1$. 只要取

$$\delta = \min(x_0 - n, n+1 - x_0, \varepsilon) > 0,$$

则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $[x] = [x_0]$, 从而

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta \leq \varepsilon.$$

而当 $x_0 = n$ 为整数时, 则对于无论怎样选取正数 δ , 总有 x 满足

$$x < x_0 \text{ 及 } x_0 - x < \delta,$$

此时

$$|f(x) - f(x_0)| = (x_0 - x) + 0.001 > \varepsilon.$$

于是, 函数 $f(x)$ 在 $x = n$ (整数) 的点失去了连续性.

671. 设对于每一个充分小的数 $\delta > 0$, 都有 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得: 只要 $|x - x_0| < \delta$, 则不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立. 从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续?

由已知的不等式说明了函数 $f(x)$ 的什么性质?

解 不能. 因为 ε 是由 δ 而确定的, 它不能任意小. 因此, 只能说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 的近傍有界. 事实上,
 $|f(x)| \leq |f(x_0)| + \varepsilon.$

672. 设对于每一个数 $\varepsilon > 0$, 都有数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使得: 若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$.
从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 由这些不等式说明了函数的什么性质?

解 不对, 若函数 $f(x)$ 在有穷的区间 (a, b) 内有定义, 则只要取 $\delta = 2(b - a)$, 不等式 $|x - x_0| < \delta$ 恒成立. 若 (a, b) 为无穷区间, 例如, 设 $b = +\infty$, 则必然

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

事实上, 若不然, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = c < +\infty.$$

于是, 存在数列 $x_n > a$ ($n = 1, 2, \dots$), $x_n \rightarrow +\infty$ 使 $f(x_n) \rightarrow c$. 由此可知数列 $f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) 有界, 令

$$\varepsilon_0 = \sup \{|f(x_n)| + |f(x_0)| + 1\} > 0.$$

显然

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = +\infty,$$

故对此 $\varepsilon_0 > 0$, 不存在对应的 $\delta = \delta(\varepsilon_0, x_0) > 0$, 此与假定矛盾. 由此可知, 必有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

673. 设对于每一个数 $\delta > 0$ 及每一个 $x = x_0$, 都有数 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得: 若 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$. 从这里是否应得函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 由已知的不等式说明了函数的什么性质?

解 不能. 它只说明了反函数的连续性和单值性.

674. 利用 $\langle \varepsilon - \delta \rangle$ 论证法证明下列函数的连续性: (a) $ax + b$; (б) x^2 ; (в) x^3 ; (г) \sqrt{x} ; (д) $\sqrt[3]{x}$; (е) $\sin x$; (ж) $\cos x$; (з) $\operatorname{arctg} x$.

证 (a) 设 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \varepsilon$, 只要

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性, 所以, $f(x) = ax + b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内点点连续.

$$(б) |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq |x - x_0| \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|),$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, 只要

$$|x - x_0|^2 + 2|x_0||x - x_0| - \varepsilon < 0,$$

即只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$.

取 $\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0| > 0$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

这就证明了 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad & \text{由于 } |x^3 - x_0^3| = |x - x_0| |x^2 + x_0x + x_0^2| \\ & \leq |x - x_0| (|x|^2 + |x||x_0| + |x_0|^2), \end{aligned}$$

不妨设 $|x - x_0| \leq 1$, 则有 $|x| \leq 1 + |x_0|$ 及

$$|x^3 - x_0^3| \leq |x - x_0| (1 + 3|x_0| + 3x_0^2).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3x_0^2}\right)$, 则

当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^3 - x_0^3| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性, 这就证明了 x^3 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

$$\text{(C)} \quad \text{由于 } |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$< \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \quad (x_0 > 0).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$, 即可得证.

若 $x_0 = 0$, 则取 $\delta = \varepsilon^2$.

(D) 由于

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{|x^{\frac{2}{3}} + (xx_0)^{\frac{1}{3}} + x_0^{\frac{2}{3}}|}$$

$$< \frac{|x - x_0|}{|\sqrt[3]{x_0^2}|} \quad (x_0 \neq 0, xx_0 > 0),$$

取 $\delta = \min\{|x_0|, \varepsilon \sqrt[3]{x_0^2}\}$ 即可得证.

若 $x_0 = 0$, 则取 $\delta = \varepsilon^3$.

(E) 由于

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &\leq |x - x_0|, \end{aligned}$$

取 $\delta = \varepsilon$, 即可得证.

(B) 由于

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x+x_0}{2} \right| \\ &\leq |x-x_0| \end{aligned}$$

取 $\varepsilon = \delta$, 即可得证.

$$(3) \text{ 由 } |\arctg x - \arctg x_0| = \left| \arctg \frac{x-x_0}{1+xx_0} \right|,$$

又因 $|y| < \frac{\pi}{2}$ 时, $|y| \leq |\operatorname{tg} y|$,

故有

$$|\arctg x - \arctg x_0| \leq \left| \frac{x-x_0}{1+xx_0} \right|.$$

当 $x_0 > 0$ 时, 不妨就 $|x-x_0| < |x_0| = x_0$ 进行讨论, 此时

$|1+xx_0| > 1$, 则

$$|\arctg x - \arctg x_0| \leq |x-x_0|.$$

当 $x_0 < 0$ 时可同样讨论.

所以, 取 $\delta = \min(\varepsilon, |x_0|)$ ($x_0 = 0$ 时, 取 $\delta = \varepsilon$),

则当 $|x-x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|\arctg x - \arctg x_0| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性, 所以 $\arctg x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

研究下列函数的连续性并绘出其图形:

675. $f(x) = |x|.$

解 $||x| - |x_0|| \leq |x-x_0|,$

取 $\delta = \varepsilon$, 即可证得 在任一点的连续性, 如图 1.263 所示.

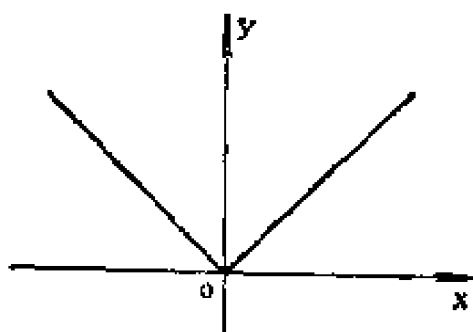


图 1.263

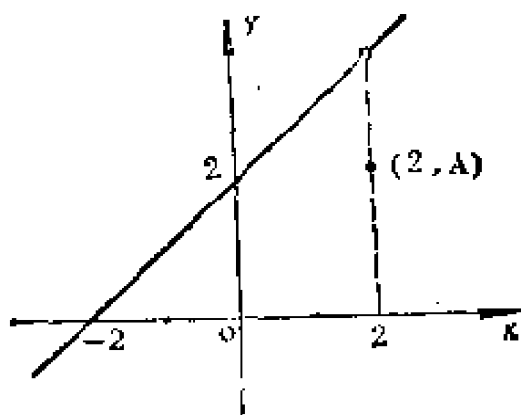


图 1.264

676.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{若 } x \neq 2; \\ A, & \text{若 } x = 2. \end{cases}$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

因此, 当 $A = 4$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处连续; 而当 $A \neq 4$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处不连续. 至于在点 $x \neq 2$ 处显然是连续的, 并且 $f(x) = x + 2$ ($x \neq 2$).

如图 1.264 所示.

677. 若 $x \neq -1$, $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, 而 $f(-1)$ 是任意的.

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty,$$

故函数 $f(x)$ 在点 $x = -1$ 处不连续.

在点 $x \neq -1$ 处函数 $f(x)$ 显然是连续的。

如图 1.265 所示。

678. (a) 若 $x \neq 0$,

$$f_1(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|, \text{ 而 } f_1(0) = 1,$$

(b) 若 $x \neq 0$,

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{[x]}, \text{ 而 } f_2(0) = 1.$$

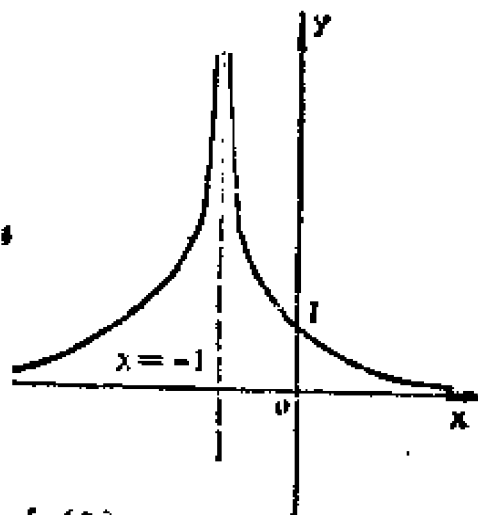


图 1.265

解 (a) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1 = f_1(0)$,

故 $f_1(x)$ 点点连续。

(b) 因 $\lim_{x \rightarrow +0} f_2(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -0} f_2(x) = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$ 不存在, 因此 $f_2(x)$ 在点 $x = 0$ 处不连续, 其余各点均连续。

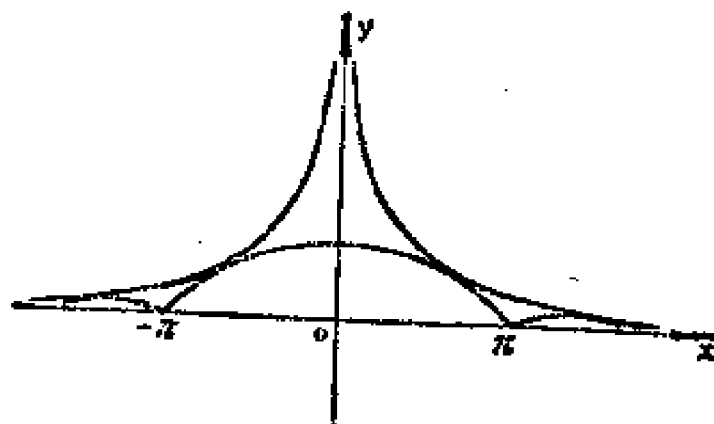


图 1.266

其中 (a) 的图形关于 Oy 轴对称 (图 1·266), 而 (b) 的图形关于原点对称 (图 1·267) .

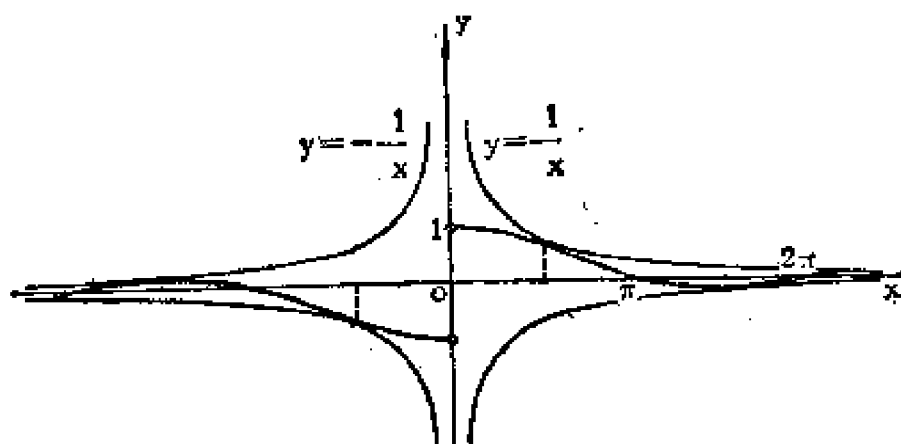


图 1·267

679. 若 $x \neq 0$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, 而 $f(0)$ 是任意的.

解 在 $x \neq 0$ 的点 $f(x)$ 均为连续, 而在 $x = 0$ 不连续 (因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在). 图形关于原点对称, 图 1·268 仅为 $x > 0$ 的一部分.

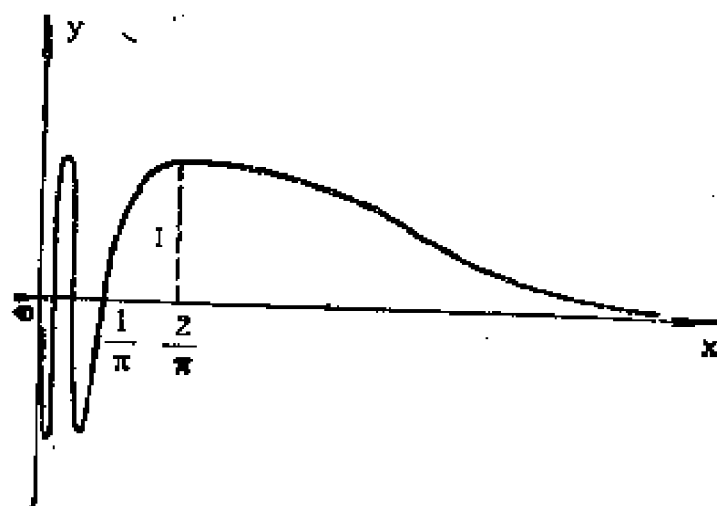


图 1·268

680. 若 $x \neq 0$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 而 $f(0) = 0$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$,
点点连续.

图形关于 Oy 轴
对称, 如图 1.269 所
示.

当 $x \rightarrow \infty$ 时,
 $y \rightarrow 1$, 且当 $|x| >$
 $\frac{2}{\pi}$ 时, 有 $0 < y < 1$.

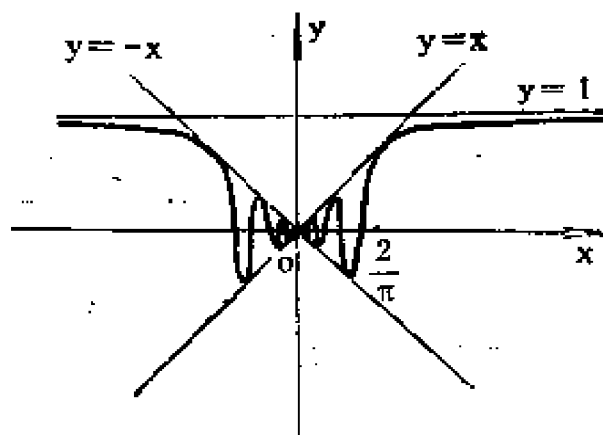


图 1.269

681. 若 $x \neq 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, 而 $f(0) = 0$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, 点点连续.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.270 所示.

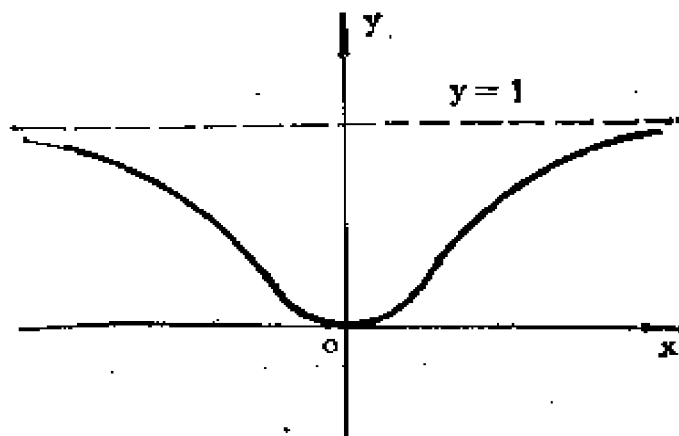


图 1.270

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 1$, 且 $0 < y < 1$.

682. 若 $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$, 而 $f(1)$ 是任意的.

解 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0,$

除点 $x=1$ 外其余点点连续.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$. 如图 1.271 所示.

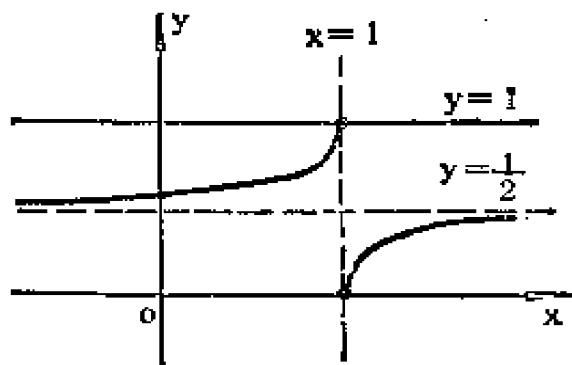


图 1.271

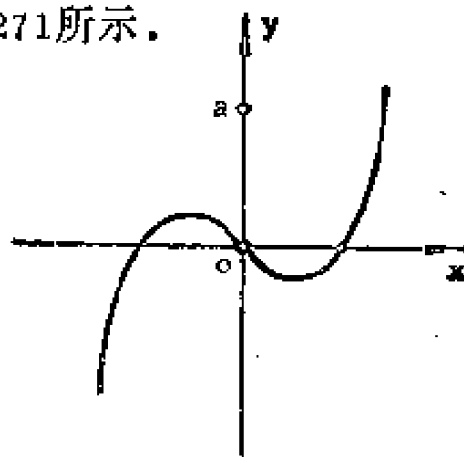


图 1.272

683. 若 $x \neq 0, f(x) = x \ln x^2$, 而 $f(0) = a$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^2 = 0$

当 $a=0$ 时, 点点连续; 而当 $a \neq 0$ 时, 除点 $x=0$ 处不连续, 其余点点连续. 图形关于原点对称, 如图 1.272 所示.

684. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

解 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -1$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = 1$;

当 $x=0$ 时, $f(x) = 0$.

除点 0 外, 点点连续.

如图 1.273 所示.

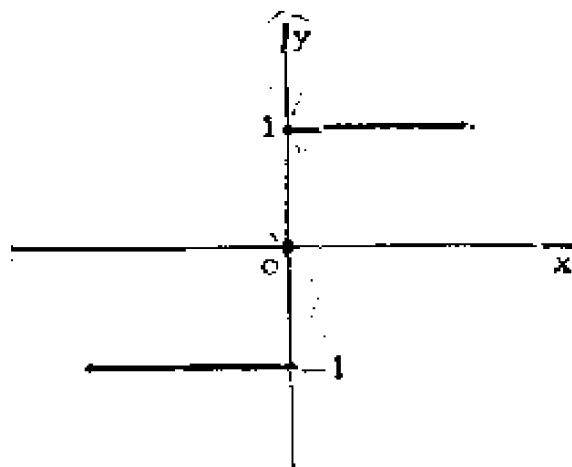


图 1.273

685. $f(x) = [x]$.

解 除当 $x = k$ (k 为整数) 外, 其余点点连续.

如图1.274所示.

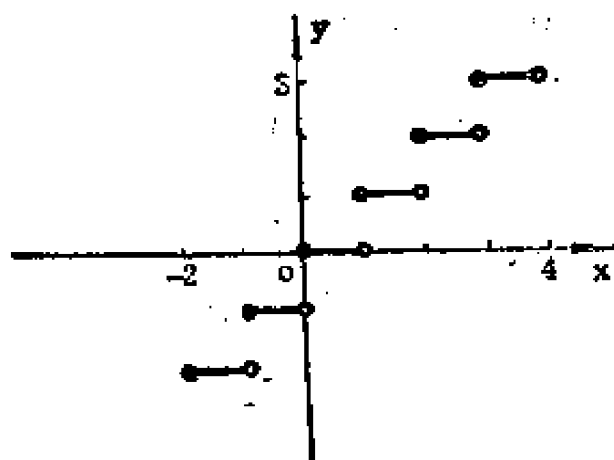


图 1.274

686. $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$.

解 当 $x = k^2$ ($k = 1, 2, \dots$) 时不连续. 当 $k^2 \leq x < (k+1)^2$ 时,

$$f(x) = \sqrt{x} - k, \quad f[(k+1)^2] = 0.$$

如图1.275所示.

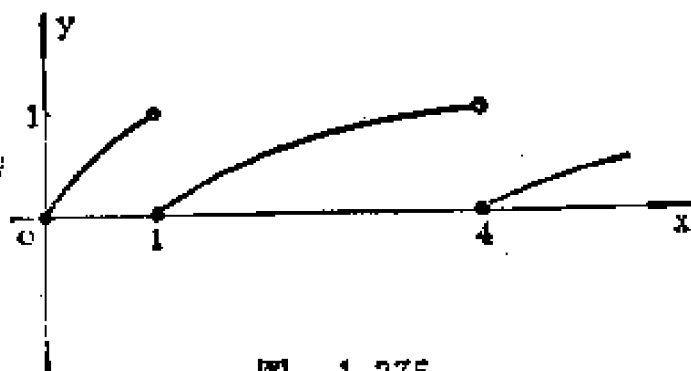


图 1.275

求出下列函数的不连续点, 并研究这些点的性质:

687. $y = \frac{x}{(1+x)^2}$.

解 $x = -1$ 为无穷型不连续点.

688. $y = \frac{1+x}{1+x^3}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3},$

故 $x = -1$ 为“可移去”的不连续点。

$$689. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}.$$

解
$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+2)},$$

$x = 1$ 及 $x = -2$ 均为无穷型不连续点。

$$690. \quad y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} y = -1$, 及 $\lim_{x \rightarrow 1} y = 0$,

所以, $x = -1$ 为无穷型不连续点, 而 $x = 0$ 及 $x = 1$ 为“可移去”的不连续点。

$$691. \quad y = \frac{x}{\sin x}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$ 及 $\lim_{x \rightarrow k\pi} y = \infty$ (k 为不等于零的整数), 所以, $x = 0$ 为“可移去”的不连续点, 而 $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不连续点。

$$692. \quad y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2\pi \sin^2 \frac{\pi}{2}(2-x)}{\frac{\pi}{2}(2-x) \cdot 2(2+x)}} = 0.$$

同理, $\lim_{x \rightarrow -2} y = 0$,

所以, $x = 2$ 及 $x = -2$ 为“可移去”的不连续点。

$$693. \quad y = \cos^2 \frac{1}{x}.$$

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} y$ 不存在, *) 故 $x = 0$ 为第二类不连续点.

*) 左右极限均不存在.

$$694. \quad y = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$$

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

因为 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k} - 0} y = (-1)^k$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k} + 0} y = (-1)^{k+1}$, 故 $x = \frac{1}{k}$

$$(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

为第一类不连续点.

$$695. \quad y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}.$$

解 $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为“可移去”的不连续点.

$$696. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

解 因 $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$,

故 $x = 0$ 为第一类不连续点.

$$697. \quad y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, $x = 0$ 为“可移去”的不连续点.

$$698. \quad y = e^{x + \frac{1}{x}}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$,
所以, $x = 0$ 为第二类不连续点.

699. $y = \frac{1}{\ln x}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty$,
所以, $x = 0$ 为“可移去”的不连续点, 而 $x = 1$ 为
无穷型不连续点.

700. $y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -0} y = +\infty$, 所以, $x = 1$ 为第一类不连续点, 而 $x = 0$
为无穷型不连续点.

研究下列函数的连续性并绘出其大略图形.

701. $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 $x = k\pi$ ($k = 0$,
 $\pm 1, \pm 2, \dots$).

为第一类不连续点.

如图1.276所示.

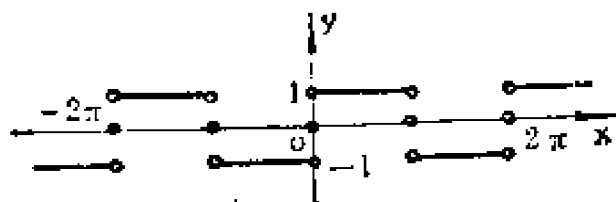


图 1.276

702. $y = x - [x]$.

解 $x = k$ ($k = 0, \pm 1$,
 $\pm 2, \dots$)

为第一类不连续点.

如图1.277所示.

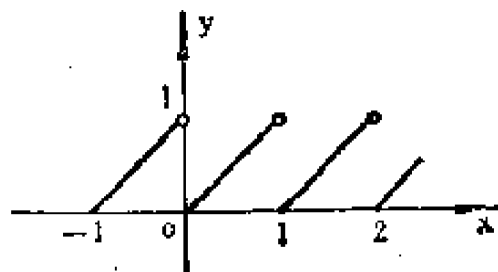


图 1.277

703. $y = x[x]$.

解 $x=k$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$)

为第一类不连续点.

如图1.278所示.

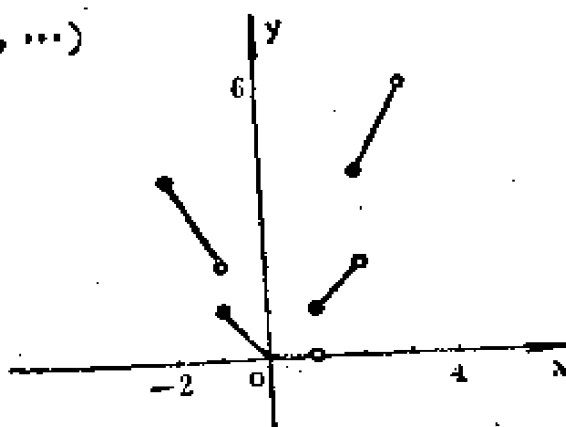


图 1.278

704. $y = [x] \sin \pi x.$

解 处处连续.

当 $x=k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时 $y=0$.

如图1.279所示.

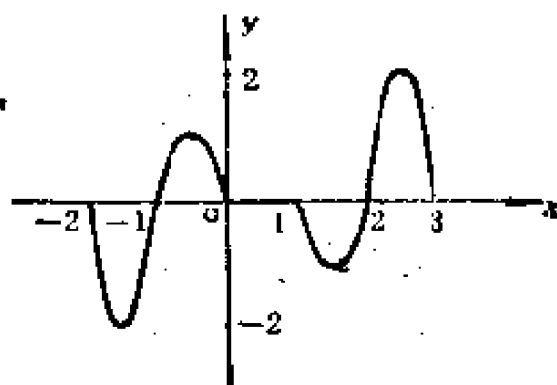


图 1.279

706. $y = \left[\frac{1}{x} \right].$

解 $x=0$ 为无穷型不连续点, $x=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) 为第一类不连续点.

图1.281仅画了 $x>0$ 的部分, 并且在图形中两轴比例不一致, 即已经过“压缩”变换.

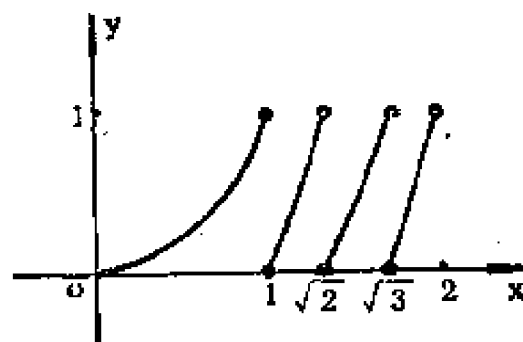


图 1.280

707. $y = x \left[\frac{1}{x} \right].$

解 $x=0$ 为“可移去”的不连续点, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.

$x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第一类不连续点.

图1.282仅画了当 $x > 0$ 的部分, 并且两轴所取的单位不一致.

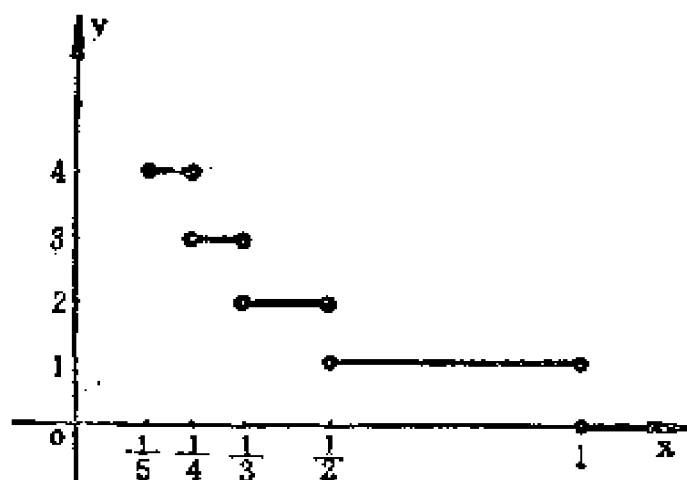


图 1.281

708. $y = \text{sgn}\left(\cos \frac{1}{x}\right).$

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

凡使 $\cos \frac{1}{x} = 0$ 的点, 即 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第一类不连续点.

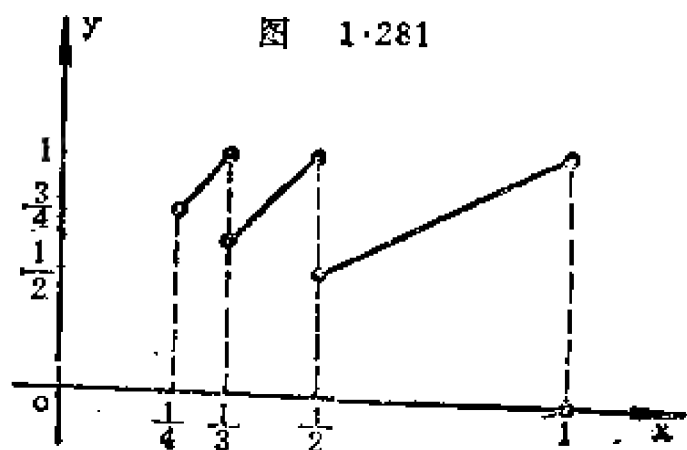


图 1.282

图1.283仅画了当 $k = 0, \pm 1, \pm 2$ 时的情形, 图形关于 Oy 轴对称.

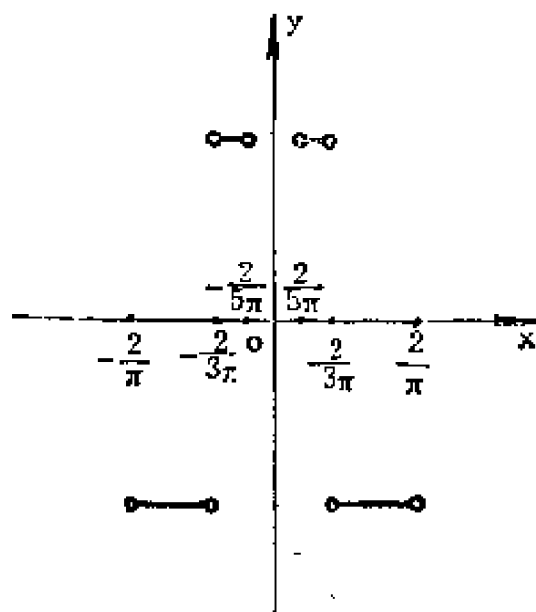


图 1.283

709. $y = \left\lfloor \frac{1}{x^2} \right\rfloor \text{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

$x = \pm \frac{1}{k}$ 及 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k=1, 2 \dots$) 为第一类不连续点.

图1·284仅画了 $x > 0$ 时的一部分. 又两轴所取的比例单位不同.

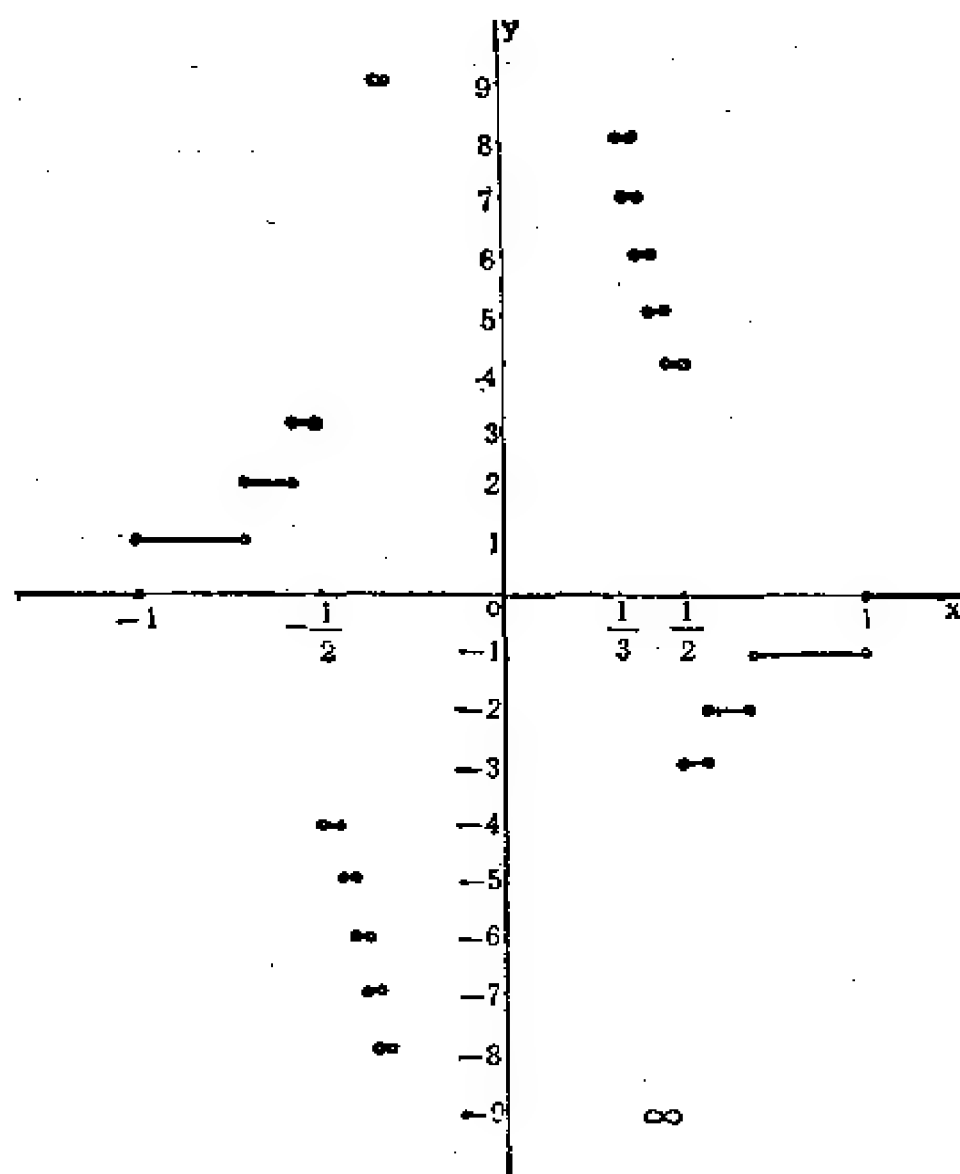


图 1 284

710. $y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x}$.

解 凡使 $\sin \frac{\pi}{x} = 0$, 即

$$x = \frac{1}{k} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

为无穷型不连续点. $x = 0$ 为第二类不连续点.

图形关于原点对称, 如图 1.285 所示.

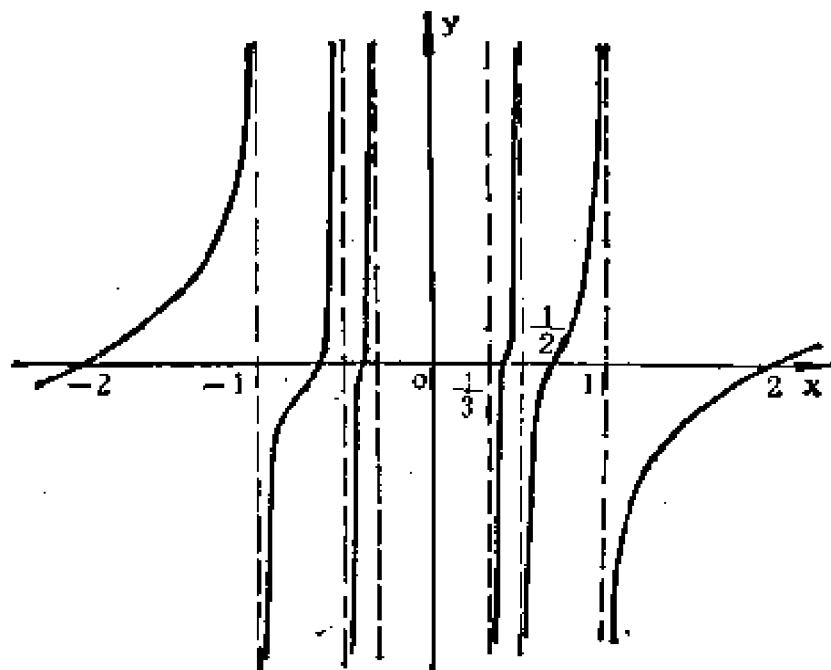


图 1 285

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow -\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$.

711. $y = \sec^2 \frac{1}{x}$.

解 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为无穷型不

连续点.

$x=0$ 为第二类不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 1$.

如图 1.286 所示.

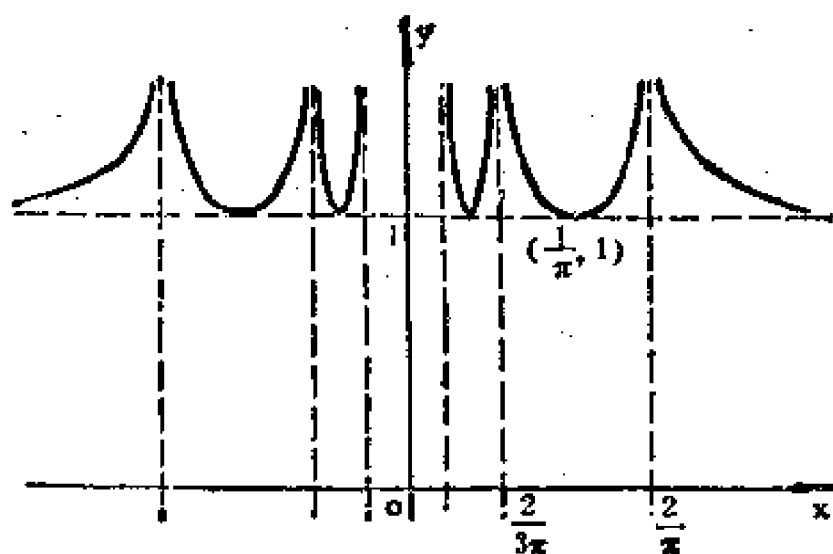


图 1.286

712. $y = (-1)^{[x^2]}$.

解 $x = \pm\sqrt{n}$ ($n=1, 2, \dots$) 为第一类不连续点.

图形关于 Oy 轴对

称.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}-0} y = (-1)^{n-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}+0} y = (-1)^n.$$

如图 1.287 所示.

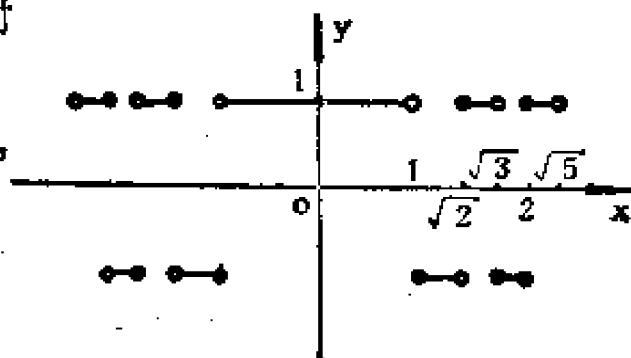


图 1.287

713. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right).$

$$+ \frac{1}{x-2}).$$

解 $x=0$, $x=1$ 和 $x=2$ 为第一类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0.$$

如图1.288所示.

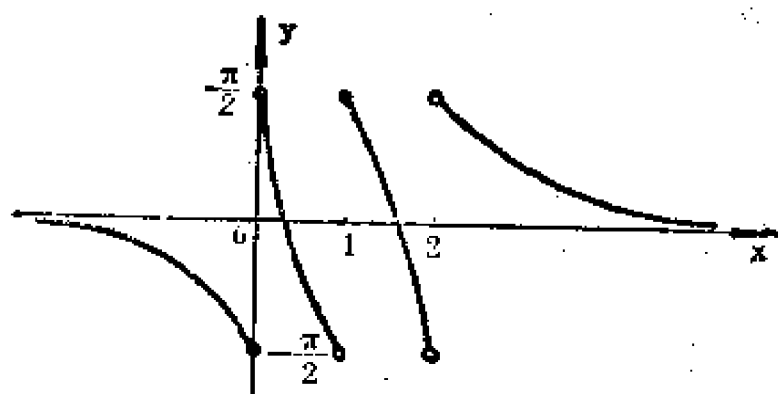


图 1.288

714. $y = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}.$

解 $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 如图1.289所示.

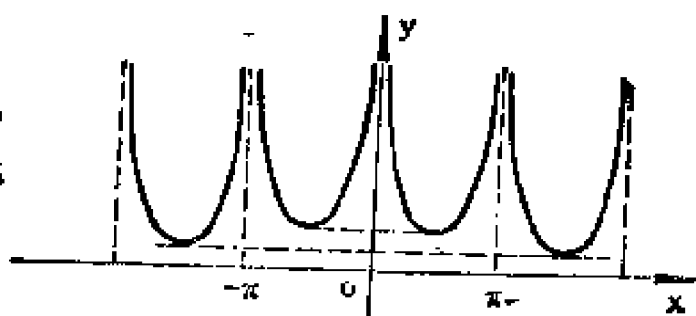


图 1.289

715. $y = \frac{1}{\sin(x^2)}.$

解 $x = \pm \sqrt{k\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 为无穷型不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.290 所示. 图中只画了 $x > 0$ 的一部分.

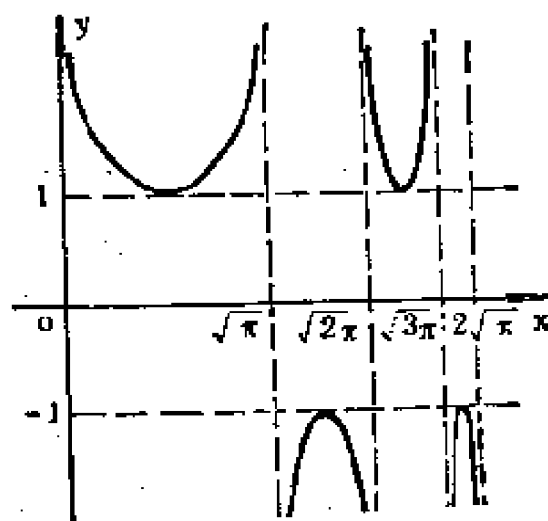


图 1.290

716. $y = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

解 $x = -1$ 和 $x = 3$ 为无穷型不连续点.

定义域为 $x < -1$ 或 $x > 3$.

当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, $0 < \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} < 1$, 故 $\ln \frac{1}{(x+1)(x-3)} < 0$.

当 $x > -\frac{3}{2}$ 时,

$$\frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} > 1$$

故 $\ln \frac{1}{(x+1)(x-3)} > 0$.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

如图 1.291 所示.

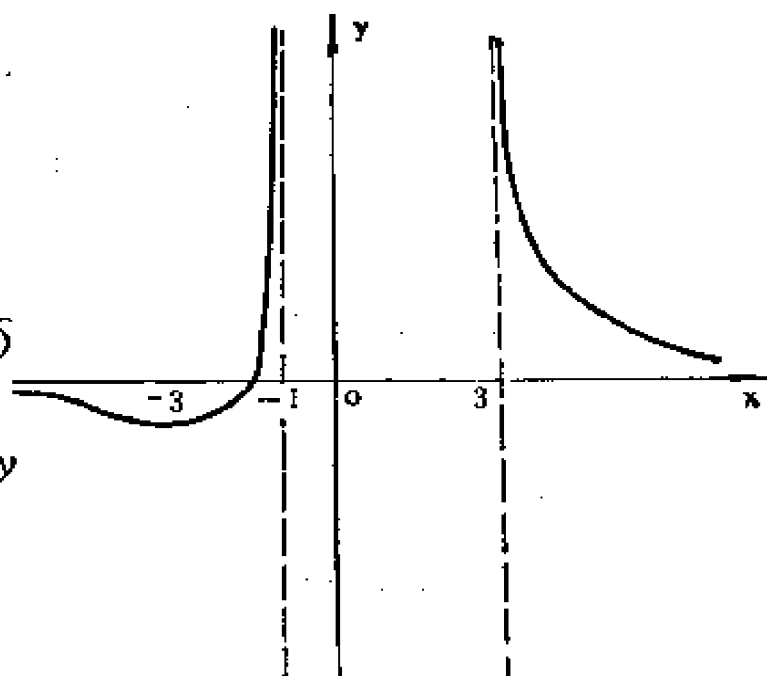


图 1.291

717. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

解 $x = 0$ 为第二

类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = +\infty.$$

如图1·292所示.

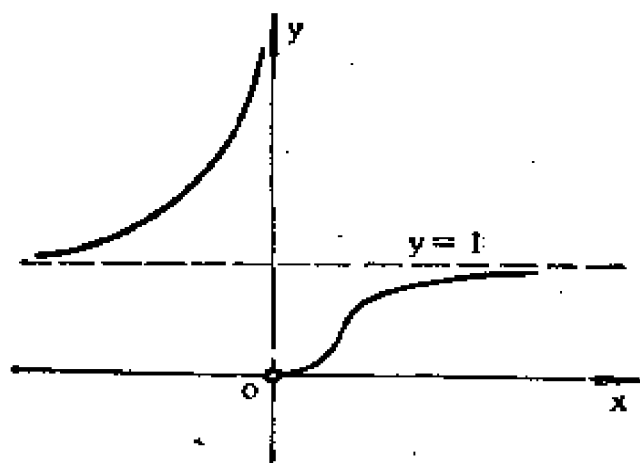


图 1·292

718. $y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}.$

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1,$

故 $x = 0$ 为“可移去”的不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 如图1·293所示.

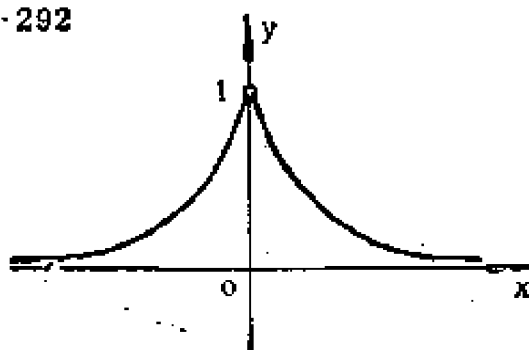


图 1·293

719. $y = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2}.$

解 $x = \pm 1$ 为第一类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = -1.$$

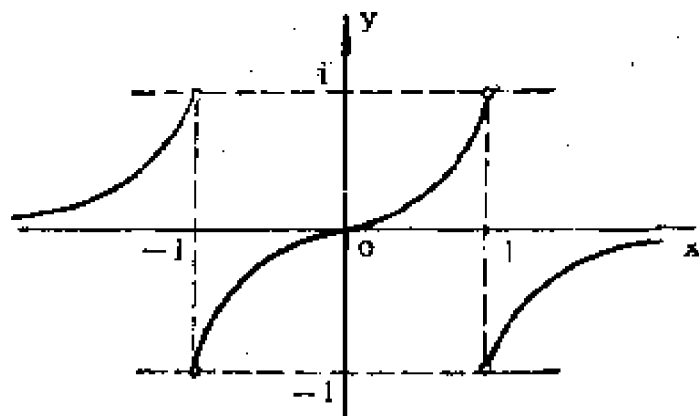


图 1·294

图形关于原点对称, 如图1·294所示.

研究下列函数的连续性并作出其图形：

20. $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} \quad (x \geq 0)$.

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{当 } x > 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$$

$x = 1$ 为第一类不连续点。

如图1·295所示。

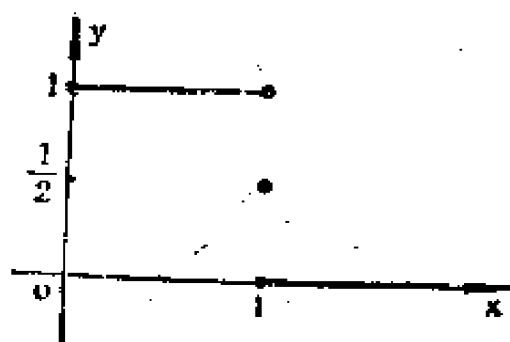


图 1·295

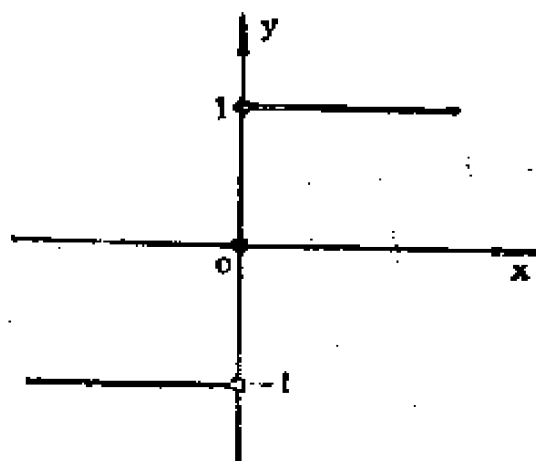


图 1·296

721. $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$.

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0, \end{cases}$$

即 $y = \operatorname{sgn} x$.

$x = 0$ 为第一类不连续点，如图1·296所示。

722. $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ x^2, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.297 所示.

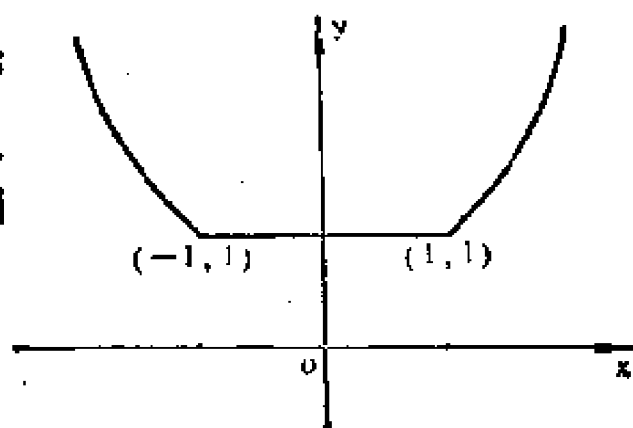


图 1.297

723. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = k\pi, \\ 0, & \text{当 } x \neq k\pi. \end{cases}$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

$x = k\pi$ 为第一类不连续点, 如图 1.298 所示.

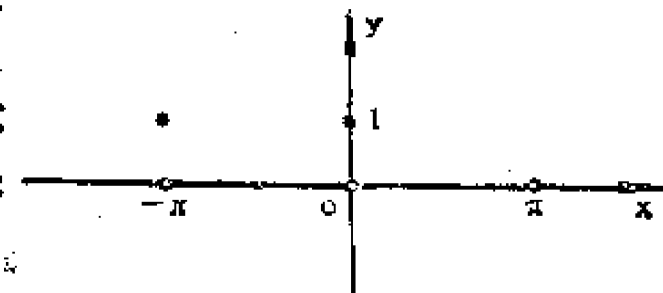


图 1.298

724. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}.$

解

$$y = \begin{cases} x, & \text{当 } |x - k\pi| < \frac{\pi}{6}; \\ \frac{x}{2}, & \text{当 } x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}; \\ 0, & \text{当 } \frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 为第一

类不连续点.

如图 1.299 所示.

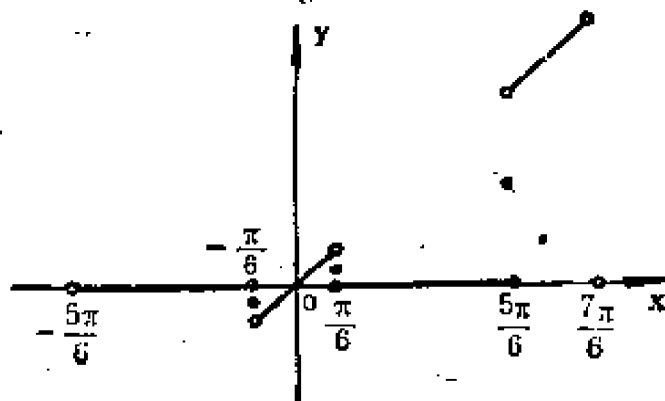


图 1.299

725. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \arctg (n \operatorname{ctg} x)].$

解

$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi; \\ 0, & \text{当 } x = k\pi + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \neq 0$) 为第一

类不连续点, 如图 1.300 所示.

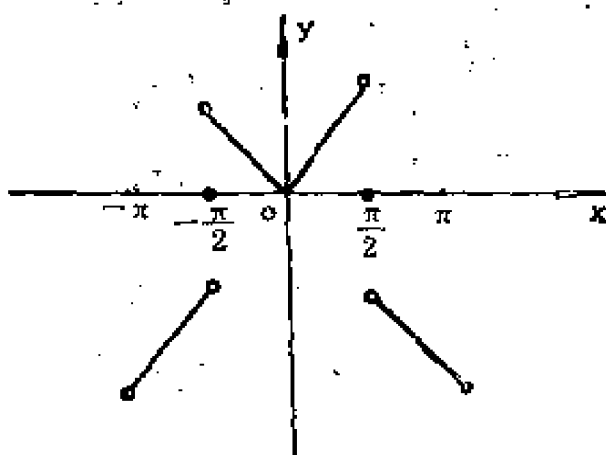


图 1.300

726. $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}.$

解

$$y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \leq 0; \\ x^2, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.301 所示.

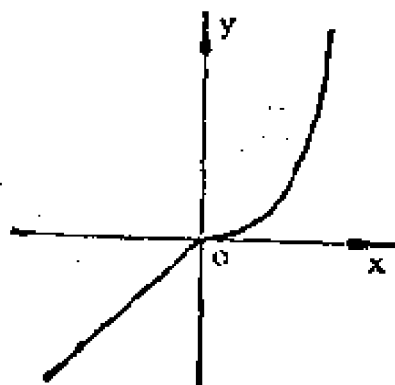


图 1.301

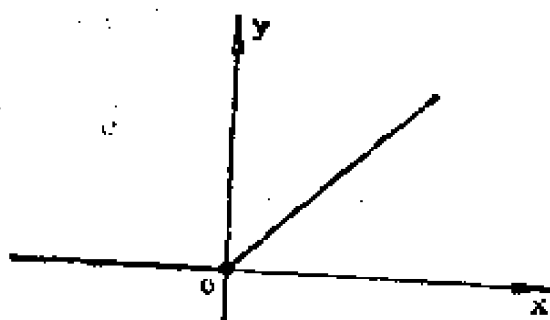


图 1.302

727. $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{xt})}{\ln(1 + e^t)}.$

解 $y = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0; \\ x, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$

处处连续, 如图1·302所示.

728. $y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+x) \text{ th } tx.$

解

$$y = \begin{cases} -(1+x), & \text{当 } x < 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ 1+x, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

$x = 0$ 为第一类不连续点.

如图1·303所示.

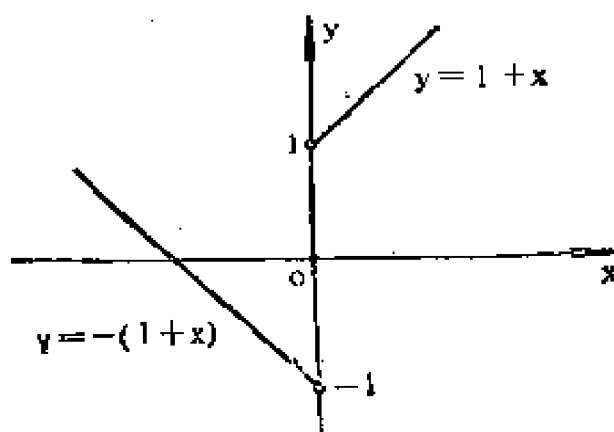


图 1·303

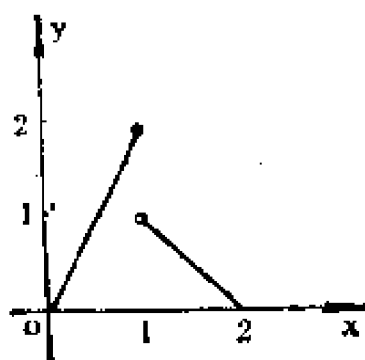


图 1·304

729. 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & \text{若 } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

是否为连续函数?

解 $x = 1$ 为第一类不连续点, 在 $[0, 2)$ 上 $f(x)$ 不是连续函数.

如图1·304所示.

730. 设:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{若 } x < 0; \\ a+x, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

当怎样选择数 a , 函数 $f(x)$ 方为连续的?

解 因 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = a$ 及 $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$,

而 $f(0) = a$,

故当 $a = 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

此即说明函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续; 至于当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 显然连续.

于是, 我们选择数 $a = 1$, 则函数 $f(x)$ 在整个数轴上为连续的, 如图1·305所示.

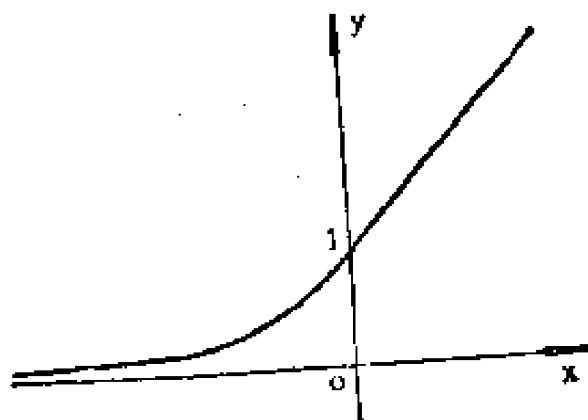


图 1·305

731. 研究下列函数的连续性并说明不连续点的性质, 设:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{当 } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ 1, & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(B) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ |x-1|, & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(r) f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x, & \text{当 } x \text{ 为非整数;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为整数;} \end{cases}$$

$$(A) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

解 (a) 连续函数.

(b) $x = -1$ 为第一类不连续点.

(B) $x = -1$ 为第一类不连续点.

(F) $x = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不连续点.

(R) $x \neq k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第二类不连续点.

732. 函数 $d = d(x)$ 是数轴 Ox 上的点 x 与由线 $0 \leq x \leq 1$ 及 $2 \leq x \leq 3$ 所构成点集间的最短距离. 求函数 d 的解析表示式, 作出其图形并研究其连续性.

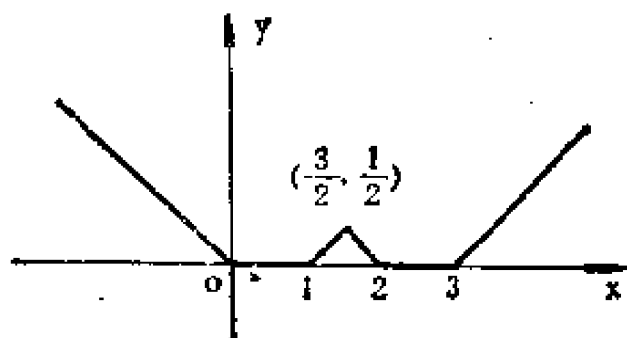


图 1·306

解

$$d = \begin{cases} -x, & -\infty < x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq 1; \\ x-1, & 1 < x \leq \frac{3}{2}; \\ 2-x, & \frac{3}{2} < x < 2; \\ 0, & 2 \leq x \leq 3; \\ x-3, & 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

处处连续, 如图1·306所示.

733. 图形 E 是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成

(图 1·307). 函数 $S = S(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) 是图形 E 介于平行线 $Y = 0$ 及 $Y = y$ 之间的那一部分面积; 而函数 $b = b(y)$ ($0 \leq y < +\infty$) 是用平行线 $Y =$

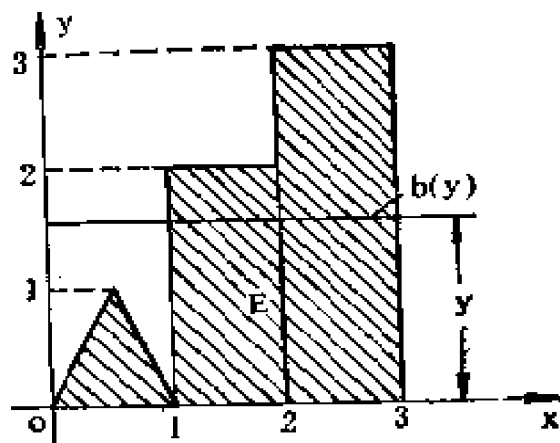


图 1·307

y 去截图形所得截痕之长. 求函数 S 及 b 的解析表示式, 作出它们的图形并研究其连续性.

解

$$S = \begin{cases} 3y - \frac{y^2}{2}, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1; \\ \frac{1}{2} + 2y, & \text{当 } 1 < y \leq 2; \\ \frac{5}{2} + y, & \text{当 } 2 < y \leq 3; \\ \frac{11}{2}, & \text{当 } 3 < y < +\infty. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1·308 所示.

对于函数 $b = b(y)$ 根据假设, 则有如下解析表示式:

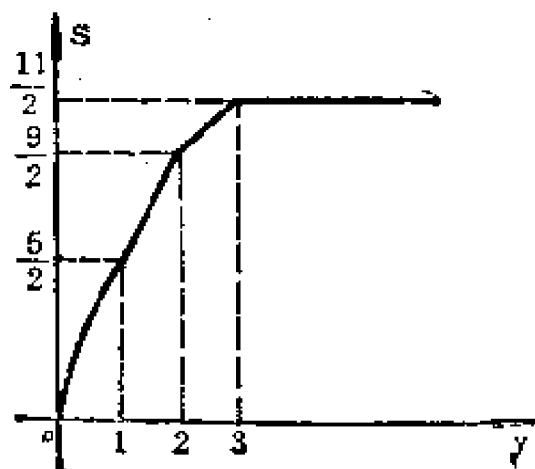


图 1·308

$$b = \begin{cases} 3-y, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1; \\ 2, & \text{当 } 1 < y \leq 2; \\ 1, & \text{当 } 2 < y \leq 3; \\ 0, & \text{当 } 3 < y < +\infty. \end{cases}$$

$y=2$ 及 $y=3$ 为第一类不连续点, 如图 1-309所示.

734. 证明迪里黑里函数

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m_1 x) \}$$

当 x 取任一值时都是不连续的.

证 记 $f(m, n)$

$$= \cos^n(\pi m_1 x).$$

当 x 为有理数时, 总可认为 $m > p$, 其中 $x = \frac{q}{p}$ (p, q 为互质的整数), 于是 $f(m, n) = 1$, 故此时

$$\chi(x) = 1;$$

当 x 为无理数时, 则对任一固定的 m 而言, $|\cos(\pi m_1 x)| < 1$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m_1 x) = 0,$$

故此时 $\chi(x) = 0$.

总之,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

由实数的稠密性可知, 对于 x 的任意值在其任一邻域内均含有无限个有理数和无理数, 因而 $\chi(x)$ 的值总

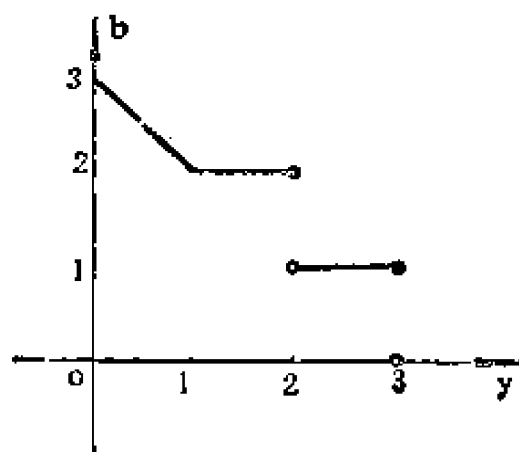


图 1-309

在 1 和 0 这两数中取一个。这样， $\chi(x)$ 的极限就不存在。于是，当 x 取任一值时， $\chi(x)$ 都是不连续的。

735 设有函数

$$f(x) = x \cdot \chi(x),$$

式中 $\chi(x)$ 为迪里黑里函数（参阅上例），研究此函数 $f(x)$ 的连续性，作出这函数的略图。

解

$$x \cdot \chi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数及 } 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

因此，

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \chi(x) = 0$$

等于在 $x=0$ 处的函数值，故当 $x \neq 0$ 时， $x \cdot \chi(x)$ 不连续，而当 $x=0$ 时， $x \cdot \chi(x)$ 连续。如图 1.310 所示。

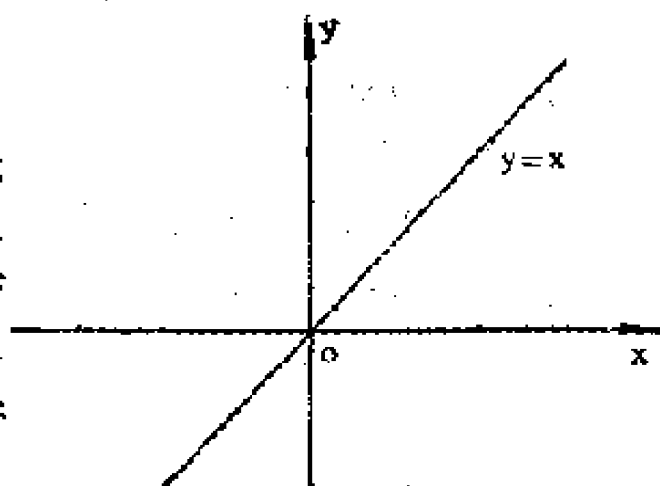


图 1.310

736. 证明黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } x = \frac{m}{n}, \text{ 其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互质的整数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

当 x 取任一有理值时是不连续的，而当 x 取任一无理值时是连续的，作出这个函数的略图。

证 不失一般性，我们仅就区间 $[0, 1]$ 讨论，图 1·311 为 $f(x)$ 在 $x \in (0, 2]$ 时的略图。

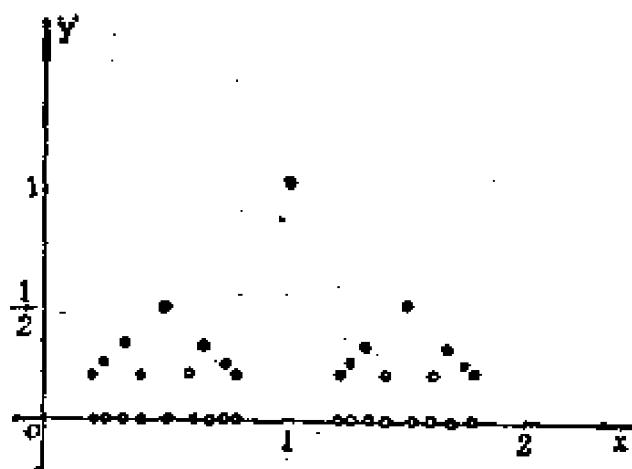


图 1·311

对于任意的 $x_0 \in (0, 1]$ 来说，若任取 $\varepsilon > 0$ ，则

满足不等式 $n < \frac{1}{\varepsilon}$ 的自然数 n 至多只有有限个，即在

$[0, 1]$ 中至多只有有限个有理数 $\frac{m}{n}$ ，使得 $f(\frac{m}{n}) =$

$\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ 。因而我们可以取 $\delta > 0$ ，使得 x_0 的邻域 $(x_0 -$

$\delta, x_0 + \delta)$ 内不含有这样的有理数（若 x_0 为有理数，则

可能除去 x_0 ）。于是，只要 $0 < |x - x_0| < \delta$ ，不论 x

是否为有理数，都成立 $|f(x)| < \varepsilon$ 。即证明了对于 $[0,$

$1]$ 中任意点 x_0 ，都成立

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

若 x_0 为无理数，则 $f(x_0) = 0$ ，可见 $f(x)$ 在 x_0 连

续；若 x_0 是有理数，则 $f(x_0) \neq 0$ ，函数 $f(x)$ 在 x_0 点

有可移间断。

737. 若 x 是既约有理分数 $\frac{m}{n}$ ($n \geq 1$) 时， $f(x) = \frac{nx}{n+1}$ ；若

x 是无理数时， $f(x) = |x|$ 。

试研究函数 $f(x)$ 的连续性并作出此函数的略图。

证 当 $x < 0$ 时， $f(x)$ 显然不连续，而对于正有理数

$\xi = \frac{m}{n}$, $f(\xi) = \frac{m}{n+1}$. 若我们取一系列无理数 x_i 趋于 ξ ,

则 $\lim_{x_k \rightarrow \xi} f(x_k) = \frac{m}{n} \neq \frac{m}{n+1}$, 故 $f(x)$ 在正有理数点也不

连续. 当 ξ 为正无理数

时, 由于对任意的 $\varepsilon >$

0 , 满足 $\frac{1}{q} > \varepsilon$ 的自然

数 q 至多只有有限个.

与736题类似可证 $f(x)$

在点 $x = \xi$ 连续.

如图1.312所示.

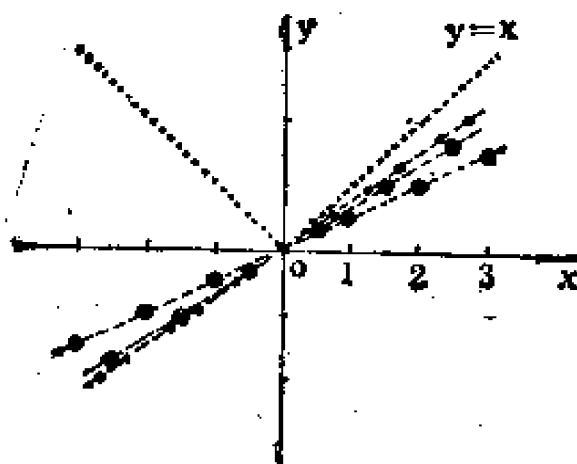


图 1.312

738. 函数 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 除 $x = 0$ 外, 对于自变数 x 的一切值都有定义. 为了使此函数当 $x = 0$ 是连续的, 则在 $x = 0$ 这一点应当以甚么数值作为函数的值?

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

所以, 应取 $f(0) = \frac{1}{2}$, 那么, $f(x)$ 当 $x = 0$ 时是连续的.

739. 证明不管怎样选取数 $f(1)$, 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $x = 1$ 是不连续的.

证 因为 $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$, 所以,

我们无法选择 $f(1)$ 使之成为连续的。

740. 当 $x=0$ 时, 函数 $f(x)$ 失去意义, 定义 $f(0)$ 的数值, 使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续, 若:

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}; \quad (b) f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x};$$

$$(B) f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}; \quad (r) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(A) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad (e) f(x) = x^x (x > 0);$$

$$(ж) f(x) = x \ln^2 x.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{3}{2},$$

取 $f(0) = \frac{3}{2}$ 即行.

$$(b) f(0) = 2.$$

$$(B) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ 故取 } f(0) = 0.$$

$$(r) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ 故取 } f(0) = e.$$

$$(A) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \text{ 故取 } f(0) = 0.$$

$$(e) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1, \text{ 故取 } f(0) = 1.$$

$$(ж) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x = 0, \text{ 故取 } f(0) = 0.$$

741. 设: (a) 函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时是连续的, 而函数 $g(x)$

当 $x=x_0$ 时是不连续的；(6) 当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的，则此二函数的和 $f(x)+g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续的？举出适当的例子。

解 (a) $f(x)+g(x)$ 必为不连续的。事实上，
 设 $F(x)=f(x)+g(x)$

对于函数 $F(x)-f(x)=g(x)$ ，如果 $F(x)$ 在 x_0 连续，则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [F(x)-f(x)]$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F(x_0) - f(x_0) = g(x_0).$$

因此当 $g(x)$ 有意义的话，那么 $g(x_0) = F(x_0) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ，这与假设是矛盾的，故 $F(x)$ 在点 x_0 不

连续；若 $g(x_0)$ 没有意义，那么当然它在 x_0 点不连续。

(6) 不。例如，

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases} \quad \text{及 } g(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x \geq 0, \\ 1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

它们在点 $x=0$ 处均不连续，但其和 $f(x)+g(x) \equiv 0$ 却处处连续。

742. 设：(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，而 $g(x)$ 在点 x_0 不连续；(6) 当 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的。则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续？举出适当的例子。

解 (a) 不。例如，

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases} \quad \text{及 } f(x) = 0.$$

它们满足假设条件，其中 $f(x)$ 处处连续，而 $g(x)$

在点 $x=0$ 不连续, 但 $f(x)g(x) \equiv 0$ 处处连续.

(6) 不. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}, \text{ 及 } g(x) = f(x).$$

它们均在点 $x=0$ 处不连续, 但其乘积 $f(x)g(x) \equiv 1$ 却处处连续.

743. 可否断定不连续函数平方后仍为不连续函数? 举出处处都有不连续点的函数, 而平方后是连续函数的例子.

解 不能. 例如742题(6)之例.

又对于函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 1, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

处处不连续, 但平方后所得函数 $f^2(x) \equiv 1$ 却处处连续.

744. 研究函数 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$ 的连续性, 设:

(a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $g(x) = 1 + x^2$;

(6) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $g(x) = x(1 - x^2)$;

(B) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $g(x) = 1 + x - [x]$.

解 (a) $f[g(x)] \equiv 1$ 处处连续;

$$\text{而 } g[f(x)] = \begin{cases} 2, & \text{当 } x \neq 0; \\ 1, & \text{当 } x = 0, \end{cases}$$

在 $x=0$ 点不连续.

(6) 因为 $g(x) = x(1 - x^2)$ 当 $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ 时为正, 而当 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$ 时为负, 故

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & \text{当 } x < -1; \\ 0, & \text{当 } x = -1; \\ -1, & \text{当 } -1 < x < 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ 1, & \text{当 } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{当 } x = 1; \\ -1, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$$

在点 $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ 处不连续.

而 $g[f(x)] \equiv 0$ 却处处连续.

(B) $f[g(x)] \equiv 1$ 处处连续.

$g[f(x)] \equiv 1$ 也处处连续.

745. 设

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{当 } 0 < u \leq 1; \\ 2-u, & \text{当 } 1 < u < 2, \end{cases}$$

$$\text{及 } \varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数;} \\ 2-x, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases} \quad (0 < x < 1)$$

研究复合函数 $y = f(u)$ 的连续性, 其中 $u = \varphi(x)$.

解 当 x 为有理数时, $u = x$, 且 $0 < u < 1$, 故 $f(u) = x$;

当 x 为无理数时, $u = 2-x$ 且 $1 < u < 2$, 故 $f(u) =$

$2-u = x$. 从而 $f(\varphi(x)) \equiv x$ 处处连续.

746. 证明若 $f(x)$ 为连续函数, 则下列函数也是连续的:

$$F(x) = |f(x)|.$$

证 设 x_0 为任一连续点, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在一个正数 δ , 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

由 $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$ 知

$$||f(x)| - |f(x_0)|| < \varepsilon,$$

故 $F(x)$ 在点 x_0 也连续.

747. 证明若函数 $f(x)$ 是连续的, 则函数

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{若 } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{若 } |f(x)| \leq c, \\ c, & \text{若 } f(x) > c, \end{cases}$$

(式中 c 为任意的正数) 也是连续函数.

证 易知

$$f_c(x) = \frac{1}{2}(|c + f(x)| + |c - f(x)|).$$

于是, 利用 746 题的结果, 即知 $f_c(x)$ 是连续函数.

748. 证明若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \text{ 和 } M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在 $[a, b]$ 上也是连续的.

证 只证 $m(x)$ 在 $[a, b]$ 连续. $M(x)$ 连续性之证完全类似. 设 $x_0 \in [a, b]$. 先证 $m(x)$ 在点 x_0 右连续. 任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

于是, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \geq m(x_0) - \varepsilon.$$

而当 $a \leq x \leq x_0$ 时, $f(x) \geq m(x_0) > m(x_0) - \varepsilon$. 由此可知当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, $m(x) \geq m(x_0) - \varepsilon$. 又因 $m(x)$ 显然是递减的, 故

$m(x_0) \geq m(x) \geq m(x_0) - \varepsilon$ (当 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 时).
由此可知 $\lim_{x \rightarrow x_0} m(x) = m(x_0)$, 即 $m(x)$ 在 x_0 右连续.

下证左连续. 不妨设 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 的最小值在点 $x = x_0$ 达到, 即 $m(x_0) = f(x_0)$ (否则, 若 $m(x_0) = f(x_1)$, $a \leq x_1 < x_0$, 则显然知, 当 $x_1 < x < x_0$ 时 $m(x) = m(x_0)$, 从而左连续). 任给 $\varepsilon > 0$. 仿上述, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon = m(x_0) + \varepsilon,$$

因此 $m(x) \leq m(x_0) + \varepsilon$, 从而

$$m(x_0) \leq m(x) \leq m(x_0) + \varepsilon \text{ (当 } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 时)}.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow x_0} m(x) = m(x_0)$, 即 $m(x)$ 在 x_0 左连续.

证毕.

749. 证明 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的, 则函数 $\varphi(x) = \min[f(x), g(x)]$ 和 $\psi(x) = \max[f(x), g(x)]$ 也是连续的.

证 由 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

利用746题的结果, 即知 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 为连续的.

750. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并有界. 证明函数 $m(x) = \inf_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$ 和 $M(x) = \sup_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 是左方连续的. 而函数

$$\bar{m}(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \text{ 和 } \bar{M}(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a, b]$ 是右方连续的*).

证 设 $x_0 \in (a, b]$, 要证 $m(x)$ 在 x_0 左方连续. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 故 $m(x)$ 恒为有限. 任给 $\varepsilon > 0$, 必存在一点 $\xi_0 \in (a, x_0)$, 使得

$$f(\xi_0) < m(x_0) + \varepsilon.$$

于是, 当 $\xi_0 < x < x_0$ 时, 必有 $m(x_0) \leq m(x) \leq f(\xi_0) < m(x_0) + \varepsilon$, 由此可知 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} m(x) = m(x_0)$. 故 $m(x)$ 在 x_0 点左方连续.

同法可证 $M(x)$ 在 $[a, b]$ 也为左方连续.

*) $\overline{m}(x)$ 和 $\overline{M}(x)$ 在 $[a, b]$ 右方连续的结论是错误的, 今举反例以明之. 例如, 对于有界函数

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a \leq x \leq p; \\ 0, & \text{当 } p < x \leq b, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } a \leq x \leq p; \\ 0, & \text{当 } p < x \leq b. \end{cases}$$

分别有

$$\overline{m}(x) = f_1(x), \quad \overline{M}(x) = f_2(x),$$

显然它们在点 p 不是右方连续的.

若定义 $\overline{m}(x) = \inf_{x < \xi \leq b} f(\xi)$, $\overline{M}(x) = \sup_{x < \xi \leq b} f(\xi)$, 则

可证明 $\overline{m}(x)$ 与 $\overline{M}(x)$ 在 $[a, b]$ 右方连续.

751. 证明若函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x \leq +\infty$ 上连续, 且有有限的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则此函数在已知区间上是有界的.

证 记 $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 $X > a$, 使当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x)| < |A| + 1$. 又因 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 因而有界, 即存在常数 M_1 , 使当 $x \in [a, X]$

$X)$ 时,恒有 $|f(x)| \leq M_1$,取 $M = \max(|A| + 1, M_1)$,
 则 $x \in [a, +\infty)$ 时,恒有

$$|f(x)| \leq M.$$

752. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上连续并有界,证明
 对于任何数 T ,可求得数列 $x_n \rightarrow +\infty$,使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

证 不妨设 $T \geq 0$,记 $g(y) = f(x_0 + (y+1)T) - f(x_0 + yT)$, $y \geq 1$.取一数列 $\{\varepsilon_n\} (n=1, 2, \dots)$,且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon_n \rightarrow 0$.易见, $g(y)$ 是 $[1, +\infty)$ 上连续且有界的函数.今按下法取 $x_1 = x_0 + k_1 T$,使 $|g(k_1)| \leq \varepsilon_1$.如果 $g(1), g(2)$ 异号,则由连续函数介值定理,存在 k_1 ,且 $1 \leq k_1 \leq 2$,使得 $|g(k_1)| = 0 \leq \varepsilon_1$,这时取 $x_1 = x_0 + k_1 T$.若 $g(1)$ 与 $g(2)$ 同号,且 $g(1), g(2), g(3), g(4) \dots$ 都是同号的,不妨设它们均大于0,那么我们可以证明,必存在一个自然数 $k_1 \geq 1$,使 $g(k_1) \leq \varepsilon_1$.因为,若对一切自然数 $n, g(n) \geq \varepsilon_1$,则由 $g(y)$ 的定义,

$$f(x_0 + 2T) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + T),$$

$$f(x_0 + 3T) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + 2T),$$

$$f(x_0 + 4T) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + 3T),$$

.....

$$f(x_0 + nT) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + (n-1)T).$$

则 $f(x_0 + nT) \geq (n-1)\varepsilon_1 + f(x_0 + T)$,这与 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有界矛盾.故必存在自然数 k_1 ,使得 $|g(k_1)| \leq \varepsilon_1$,取 $x_1 = x_0 + k_1 T$.然后,取自然数 $p_2 \geq k_1 + 1$.通过考虑 $g(p_2), g(p_2 + 1), \dots$ 的符号,仿上,可取

$x_2 = x_0 + k_2 T$, $k_2 \geq k_1 + 1$, 使 $|g(k_2)| \leq \varepsilon_2$. 依此类推, 我们就可得到一数列 $\{x_n\}$ 适合要求.

753. 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为连续周期函数, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时有定义且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$$

证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

证 先证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的周期相同, 设 $\varphi(x)$ 的周期为 p , 则 $\varphi(x+p) = \varphi(x)$, 由于当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(x+p) - \psi(x+p) \rightarrow 0$, 即得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] = 0$$

以及

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} [\psi(x) - \psi(x+p)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] - \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

我们再来证明 $\psi(x)$ 的周期也是 p . 若不然, 则至少存在一个 x_0 , 使 $\psi(x_0) \neq \psi(x_0+p)$. 且设 $\psi(x)$ 周期为 q , N 为任意正整数, $x = x_0 + Nq$, 以及 $\alpha = |\psi(x_0) - \psi(x_0+p)| > 0$, 此时恒有 $|\psi(x) - \psi(x+p)| = \alpha$. 但由 (1) 式, 对充分大的 x , 必成立 $|\psi(x) - \psi(x+p)| \leq \alpha$, 这显然是矛盾的.

最后证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, 若结论不成立, 则至少存在一个 x_1 , 使 $\varphi(x_1) \neq \psi(x_1)$. 记 $\beta = |\varphi(x_1) - \psi(x_1)| > 0$, 则对任意 $x = x_1 + Np$, 恒有 $|\varphi(x) - \psi(x)| = \beta$, 这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$ 矛盾. 于是, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. 证毕.

754. 证明单调有界函数的一切不连续点皆为第一类的不连续点.

证 不妨设 $f(x)$ 为单调增函数, 取其定义域 A 中的任意点 x_0 , 且设 x_0 不是 A 的左端点, 由于 $x < x_0$ 时显然有 $f(x) \leq f(x_0)$. 由关于单调函数的极限定理知 $f(x_0-0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \leq f(x_0)$. 可见若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则函数在该点只可能有跃度, 即第一类间断点.

755. 证明若函数 $f(x)$ 具有下列诸性质: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调, (2) 取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的数作为其函数值, 则此函数在 $[a, b]$ 上连续.

证 用反证法, 不妨设单调函数 $f(x)$ 为递增的且在 x_0 间断 ($x_0 \in (a, b)$), 由 754 题知 x_0 只能是第一类间断点, 则 $f(x_0) - f(x_0-0)$ 及 $f(x_0+0) - f(x_0)$ 中至少有一个大于零, 例如 $f(x_0) - f(x_0-0) > 0$. 于是, 由函数 $f(x)$ 的单调性知, $f(x)$ 无法取到 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0)$ 之间的数值.

这与题设函数 $f(x)$ 的性质 (2) 矛盾, 从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

756. 证明: 函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a}, \text{ 若 } x \neq a \text{ 及 } f(a) = 0,$$

在任意闭区间 $[a, b]$ 上取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切中介值, 但在 $[a, b]$ 上并不连续.

证 事实上, 只要 $a < b$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取 $[-1, 1]$ 之间的一切值, 当然更取 $f(a) = 0$ 与 $f(b)$ ($|f(b)| \leq 1$) 之间的一切值. 但显然有 $f(x)$ 在 $x=a$ 处

不连续。

757. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 且 x_1, x_2, \dots, x_n 为此区间中的任意值, 则在它们之间可找到一个数值 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

证 不妨设 $a < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < b$, 此时设 $x_1 \neq x_n$; 当 $x_1 = x_n$ 结论显然成立。

由于 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续, 于是, $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上取得最大值和最小值:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [x_1, x_n].$$

从而有

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M.$$

由连续函数的性质, 总存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

758. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且

$$l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad \text{及} \quad L = \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

证明对于任意的数 λ , 此处 $l \leq \lambda \leq L$, 则有数列 $x_n \rightarrow a+0$ ($n=1, 2, \dots$), 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda.$$

证 当 $\lambda = l$ 或 $\lambda = L$ 时结论都是显然的。因此设

$$l < \lambda < L.$$

由条件有 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$, $a_n \rightarrow a+0$, $b_n \rightarrow a+0$,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = L$.

于是, 存在自然数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$f(a_n) < \lambda \text{ 及 } f(b_n) > \lambda.$$

再由 $f(x)$ 的连续性知, 在 a_n 及 b_n 之间存在 x_n , 使

$$f(x_n) = \lambda \quad (n > N).$$

这样选取的 $\{x_n\}$, 由于 $a_n \rightarrow a+0$, $b_n \rightarrow a+0$,
故 $x_n \rightarrow a+0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda.$$

§ 8. 反函数. 用参数表示的函数

1° 反函数的存在及其连续性 若函数 $y = f(x)$ 具有下列性质: (1) 在区间 (a, b) 上有定义并连续; (2) 在严格的意义上说来, 于此区间上是单调的, 则有单值的反函数 $x = f^{-1}(y)$, 此函数在区间 (A, B) 上有定义并连续, 而且在严格的意义上说来, 是相应地单调的, 其中

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ 和 } B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

任何一个单值连续函数 $x = g(y)$, 它在其有定义的最大区域上适合方程 $f(g(y)) = y$, 则被了解为已知连续函数 $y = f(x)$ 的多值反函数的一个单值连续分枝。

2° 以参数表示的函数的连续性 若函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (α, β) 上有定义并且是连续的, 且函数 $\varphi(t)$ 在此区间上是严格地单调的, 则方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

在区间 (a, b) 上把 y 定义成 x 的单值连续函数:

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)],$$

其中 $a = \lim_{t \rightarrow \alpha+0} \varphi(t)$ 及 $b = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t)$,

759. 求线性分式函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

的反函数, 在怎样的情形下, 反函数与已知函数相同?

解 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 解之得反函数为

$$y = \frac{-dx+b}{cx-a} \text{ 或写成 } x = \frac{-yd+b}{yc-a}.$$

欲反函数与已知函数相同, 只须

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-xd+b}{cx-a}.$$

解之得 $a+d=0$,

此即所求的条件.

760. 设

$$y = x + [x],$$

求反函数 $x = x(y)$.

解 若当 $k \leq x < k+1$, 即当

$$2k \leq y < 2k+1$$

时, $[x] = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 此时 $y = x + k$, 即反函数为 $x = y - k$.

761. 证明: 有唯一的连续函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 满足于克卜勒方程

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

证 由640题知叙列

$$y_0 = x,$$

$$y_1 = x + \varepsilon \sin y_0,$$

$$y_2 = x + \varepsilon \sin y_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_n = x + \varepsilon \sin y_{n-1},$$

$$\dots\dots\dots$$

的极限 $y(x)$ 为克卜勒方程 $y - \varepsilon \sin y = x$ 的唯一的根. 现在证明 $y = y(x)$ 是连续的. 我们只须证明当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y(x) \rightarrow y(x_0)$. 为此, 我们考虑

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_n(x_0)| &= |(x - x_0) + \varepsilon[\sin y_{n-1}(x) \\ &\quad - \sin y_{n-1}(x_0)]| \\ &\leq |x - x_0| + \varepsilon |y_{n-1}(x) - y_{n-1}(x_0)|. \end{aligned}$$

逐次应用此不等式, 即得

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_n(x_0)| &\leq |x - x_0| (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n) \\ &= |x - x_0| \cdot \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} |x - x_0|. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 便有

$$|y(x) - y(x_0)| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} |x - x_0| \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

于是, 显然有 $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y(x_0)$. 这就证明了 $y(x)$ 的连续性.

762. 证明: 方程

$$\operatorname{ctg} x = kx$$

对于每一个实数 k ($-\infty < k < +\infty$) 在区间 $0 < x < \pi$

中有唯一连续的根 $x=x(k)$ 。

证 令 $f(x)=\frac{\operatorname{ctg} x}{x}$ 。显然，在 $(0, \pi)$ 上 $\operatorname{ctg} x$ 和 $\frac{1}{x}$ 都是连续的严格减函数，从而 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上也是连续的严格减函数，并且，很明显

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = -\infty.$$

由此可知，对每一实数 $k (-\infty < k < +\infty)$ ，恰有一个 $x \in (0, \pi)$ ，使 $f(x)=k$ ，即 $\operatorname{ctg} x=kx$ 。另外，由于

$f(x)=\frac{\operatorname{ctg} x}{x}$ 在 $(0, \pi)$ 上是连续的严格减函数，故

$k=f(x)$ 的反函数 $x=x(k)=f^{-1}(k)$ 存在而且是一 $-\infty < k < +\infty$ 上的连续的严格减函数。此 $x=x(k)$ 即方程 $\operatorname{ctg} x=kx$ 的根。

綜上述，可知：对任何 $-\infty < k < +\infty$ ，方程 $\operatorname{ctg} x=kx$ 在 $(0, \pi)$ 上具有唯一的根 $x=x(k)$ ，而且 $x(k)$ 是 $k (-\infty < k < +\infty)$ 的连续的严格减函数。证毕。

763. 非单调的函数 $y=f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 可否有单值的反函数？

解 可以。例如函数

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单值的，但不是单调的函数，而其反函数仍为此函数本身。

764. 在甚么情形下，函数 $y=f(x)$ 和反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一的函数？

解 为统一坐标起见, 我们把 $y=f(x)$ 的反函数记成为 $y=f^{-1}(x)$.

按题设应有

$$f^{-1}(x) \equiv f(x),$$

即 $x=f(f(x))$, 这就是所求的条件.

765. 证明不连续函数

$$y=(1+x^2)\operatorname{sgn} x$$

的反函数是连续函数.

证 易见 $\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} x$ 及 $\operatorname{sgn}^2 x = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则

$y \operatorname{sgn} y = (1+x^2)\operatorname{sgn}^2 x$. 于是反函数在 $|y| \geq 1$ 及 $y=0$ 有定义:

$$x = \begin{cases} \sqrt{y \operatorname{sgn} y - 1}, & \text{当 } y \geq 1 \text{ 时;} \\ -\sqrt{y \operatorname{sgn} y - 1}, & \text{当 } y \leq -1 \text{ 时;} \\ 0 & \text{当 } y = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

易见上述函数在其定义域内连续.

766. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是严格地单调的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leq x_n \leq b),$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

证 不妨设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调下降. 如果结论不真, 则在 (a, b) 内总存在一个 a_1 及数列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x_{n_k} > a_1.$$

由于 $f(x)$ 严格单调下降, 故有

$$f(x_{n_k}) < f(a_1) < f(a).$$

于是, $f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \leq f(a_1)$, 得出矛盾,

因此, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

求下列函数的反函数的连续的单值枝:

767. $y = x^2$.

解 反函数的单值连续分枝为

$$x = \sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty)$$

及 $x = -\sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty).$

768. $y = 2x - x^2$.

解 由于 $x^2 - 2x + y = 0$, 故

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$$

于是单值连续分枝为

$$x = 1 - \sqrt{1 - y} \quad \text{及} \quad x = 1 + \sqrt{1 - y} \quad (-\infty < y \leq 1).$$

769. $y = \frac{2x}{1+x^2}$

解 由于 $x^2 y - 2x + y = 0$, 故

$$x = \begin{cases} \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y}, & \text{当 } y \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } y = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

又由于

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y(1 + \sqrt{1 - y^2})} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} = \infty,$$

故反函数的连续分支为

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

及 $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad (0 < |y| \leq 1).$

770. $y = \sin x.$

解 单值连续分枝为

$$x = (-1)^k \arcsin y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(|y| \leq 1).$$

771. $y = \cos x.$

解 单值连续分枝为

$$x = 2k\pi \pm \arccos y \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) (|y| \leq 1).$$

772. $y = \operatorname{tg} x.$

解 单值连续分枝为

$$x = \operatorname{arctg} y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (-\infty < y$$

$$< +\infty).$$

773. 证明连续函数 $y = 1 + \sin x$ 对应于区间 $0 < x < 2\pi$ 的值的集合是一线段.

证 显然, 当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, $-1 \leq \sin x \leq 1$, 从而 $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$. 而由于 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2$, $y|_{x=\frac{3\pi}{2}} = 0$. 而 $y =$

$1 + \sin x$ 是 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的连续函数, 故由介值定理

知当 x 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, y 取 0 到 2 之间的一切数值. 由

此可知当 $0 \leq x \leq 2\pi$ 时, y 的值的集合是线段 $(0, 2)$.

774. 证明等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

证 令 $\varphi = \arcsin x$, 则得 $\sin \varphi = x$, 从而

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = x.$$

因为 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $0 \leq \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \pi$; 而在 $(0, \pi)$ 内有唯一的数, 它的余弦等于 x . 因此, 得

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \arccos x,$$

即

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. 证明等式

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

证 当 $x > 0$ 时, 令 $\varphi = \operatorname{arctg} x$, 则得 $\operatorname{tg} \varphi = x$, 且

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \text{ 又 } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg} \varphi = x, \text{ 故}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{x}.$$

因为 $0 < \frac{\pi}{2} - \varphi < \frac{\pi}{2}$, 而在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内仅有唯一的数,

使其正切等于 $\frac{1}{x}$, 故

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x},$$

即当 $x > 0$ 时, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

当 $x < 0$ 时, 令 $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, 则得 $\operatorname{tg} \varphi = x$, 且 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$. 又

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg} \varphi = x, \text{ 即 } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{x}.$$

因为 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \varphi < 0$, 而在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 内有唯一的数, 使其正切等于 $\frac{1}{x}$, 故

$$-\frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x},$$

即当 $x < 0$ 时, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

总之, 当 $x \neq 0$ 时,

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x.$$

776. 证明反正切相加的定理:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} + e\pi,$$

式中 $e = e(x, y)$ 为取值: 0, 1, -1 三者之一的函数。

当已知 x 的值时, 对于怎样的 y 值, 函数 e 可能不连续? 在 Oxy 平面上作出函数 e 连续的对应域, 并求此函数在所求得的域内的数值。

证 由于

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2} \quad \text{及} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2},$$

故有

$$-\pi < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \pi.$$

若 x 和 y 的符号相反, 则

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}.$$

若 $x > 0$ 和 $y > 0$, 则

$$0 < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \pi.$$

再看这个和是位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 还是 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. 条件

$$0 < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2},$$

即

$$\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y,$$

它相当于 $x < \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{y}$,

也即 $xy < 1$.

因此, 当 $x > 0, y > 0, xy < 1$ 时, 此和位于 $(0, \frac{\pi}{2})$. 同法可证, 当 $x > 0, y > 0, xy > 1$ 时, 此和位于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

仿此，又可证得：当 $x < 0$ ， $y < 0$ ， $xy < 1$ 时，此和位于 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ；当 $x < 0$ ， $y < 0$ ， $xy > 1$ 时，此和位于 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 。

总之，若 $xy < 1$ ，则此和位于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ；若 $x > 0$ ， $xy > 1$ ，则此和位于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ；若 $x < 0$ ， $xy > 1$ ，则此和位于 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 。

其次，我们考虑此和的正切

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y) = \frac{x+y}{1-xy}.$$

现令 $u = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$ ， $v = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$ ，则得

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v.$$

因为 $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ ，故当 $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ 时， $u = v$ ；当 $\frac{\pi}{2}$

$< u < \pi$ 时， $v + \pi = u$ ；当 $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ 时， $u = -\pi + v$ 。

因此，我们证得：

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } xy < 1; \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } x > 0, xy > 1; \\ -\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } x < 0, xy > 1. \end{cases}$$

当 x 固定时, 若 $y = \frac{1}{x}$, 则 ε 不连续, 因为此时
 (例如设 $x > 0$), 当 $y > \frac{1}{x}$ 时 $\varepsilon \equiv 1$, 而当 $y < \frac{1}{x}$ 时
 $\varepsilon \equiv 0$.

如图1.313所示, 曲线 $xy = 1$ 为函数 $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ 的不连续域.

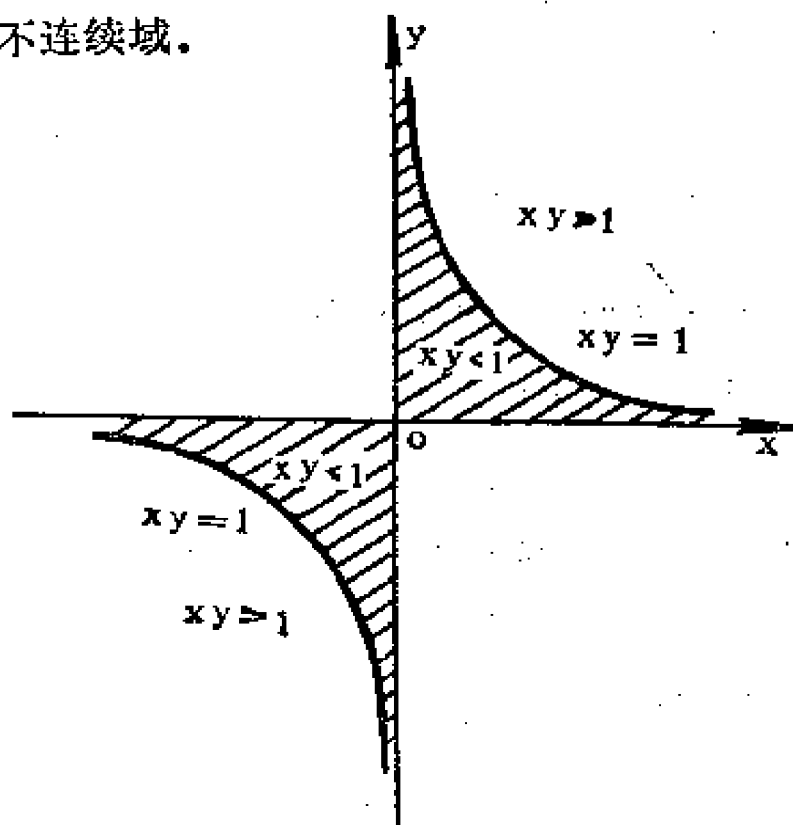


图 1.313

当 $xy < 1$ 时, $\varepsilon = 0$; 当 $x > 0$, $xy > 1$ 时, $\varepsilon = 1$;
 当 $x < 0$, $xy > 1$ 时, $\varepsilon = -1$.

777. 证明反正弦相加的定理:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi$$

$$(|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

式中, 若 $xy \leq 0$ 或 $x^2 + y^2 \leq 1$, $e = 0$; 若 $xy > 0$ 及 $x^2 + y^2 > 1$, $e = \operatorname{sgn} x$.

证 令 $u = \arcsin x + \arcsin y$ ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$), 即得

$$\sin u = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

由此, 还不能断定

$$u = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

事实上, u 及 $v = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ 可以位在不同的区间内, 其中 v 始终位在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内, 而 u 可有三种情形:

$$\text{情形 I: } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

若 $xy \leq 0$, 则不是 $0 \leq x \leq 1$ 及 $-1 \leq y \leq 0$ 就是 $-1 \leq x \leq 0$ 及 $0 \leq y \leq 1$, 不论哪一种情况, 总有

$$0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 及 } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq 0 \text{ (或交}$$

换)

因而

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y = u \leq \frac{\pi}{2}.$$

若 $x > 0, y > 0$ 时, 显然有 $u \geq 0$. 条件 $u \leq \frac{\pi}{2}$

即

$$u = \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2},$$

相当于

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y.$$

由于正弦在第一象限内是增函数, 故这又相当于

$$\sin(\arcsin x) \leq \sin(\arccos y),$$

或 $x \leq \sqrt{1-y^2}$, 即 $x^2 + y^2 \leq 1$.

同法可证, 若 $x < 0$, $y < 0$ 时, 必 $u \leq 0$. 且条件 $-\frac{\pi}{2} \leq u$ 相当于 $x^2 + y^2 \leq 1$.

情形 I: $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$.

在 $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$ 时, 必 $x > 0$, $y > 0$. 条件

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin x + \arcsin y \leq \pi,$$

即

$$\arcsin x > \frac{\pi}{2} - \arcsin y,$$

两端取正弦, 即得 $x^2 + y^2 > 1$.

情形 II: $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$.

在这种情形下必 $x < 0$, $y < 0$. 条件

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2},$$

即

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin(-x) + \arcsin(-y) \leq \pi,$$

因此, 即 $x^2 + y^2 > 1$.

总之, 当 $xy \leq 0$ 或 $xy > 0$ 但 $x^2 + y^2 \leq 1$ 时, 必有 $-\frac{\pi}{2}$

$\leq u \leq \frac{\pi}{2}$; 当 $x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1$ 时, 必 $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$;

当 $x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1$ 时, 必 $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$.

但当 $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $u = v$; 当 $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$ 时, $u = \pi - v$;

当 $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$ 时, $u = -\pi - v$.

因此, 最后得

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \\ \quad \text{若 } xy \leq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \\ \quad \text{若 } x > 0, y > 0, x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \\ \quad \text{若 } x < 0, y < 0, x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

即

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\epsilon} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \epsilon\pi,$$

$$\text{其中 } \epsilon = \begin{cases} 0, & \text{若 } xy \leq 0 \text{ 或 } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \operatorname{sgn} x, & \text{若 } xy > 0 \text{ 及 } x^2 + y^2 > 1, \\ & (|x| \leq 1, |y| \leq 1). \end{cases}$$

778. 证明反余弦相加的定理:

$$\begin{aligned} & \arccos x + \arccos y \\ &= (-1)^e \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) + 2e\pi \\ & \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1), \end{aligned}$$

其中, 若 $x+y \geq 0$, $e=0$; 若 $x+y < 0$, $e=1$.

证 由基本的不等式

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \quad \text{及} \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi,$$

有 $0 \leq \arccos x + \arccos y \leq 2\pi$.

若 $0 \leq \arccos x + \arccos y \leq \pi$,

则 $\arccos x \leq \pi - \arccos y$.

由于 $\arccos x$ 及 $\pi - \arccos y$ 都含在 $[0, \pi]$ 内, 而在此区间内余弦是减函数, 故有

$$x \geq \cos(\pi - \arccos y) = -y,$$

即

$$x+y \geq 0.$$

同法可证得: 若

$$\pi < \arccos x + \arccos y \leq 2\pi,$$

则

$$x+y < 0.$$

又由于

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2},$$

故知

$$u = \arccos x + \arccos y$$

$$\text{及 } v = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2})$$

有同一的余弦. 因为 v 始终在 0 与 π 之间, 故知:

若 $0 \leq u \leq \pi$, 则 $u=v$; 若 $\pi < u \leq 2\pi$, 则 $u=2\pi-v$.

因此, 最后得

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & \text{若 } x+y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & \text{若 } x+y < 0, \end{cases}$$

此即所欲证明的公式。

779. 作函数的图形:

(a) $y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2};$

(b) $y = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2} - 2\arcsin x.$

解 (a) 利用777题的结果得知:

由于 $x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 = 1$, 故

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x + \arcsin(-\sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x\sqrt{1-(1-x^2)} - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x|x| - 1 + x^2). \end{aligned}$$

当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $y = -\frac{\pi}{2}$; 当 $0 < x \leq 1$ 时, $y = \arcsin$

$(2x^2 - 1)$. 可以证明,

$$\arcsin(2x^2 - 1) - 2\arcsin x =$$

$-\frac{\pi}{2}$, 故有

$$y = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时,} \\ 2\arcsin x - \frac{\pi}{2}, & \text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

如图1.314所示。

(b) 由于

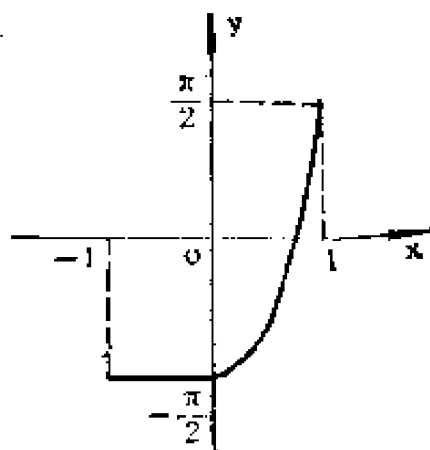


图 1.314

$$2\arcsin x = \arcsin x + \arcsin x$$

$$= \begin{cases} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \pi \operatorname{sgn} x - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

故当 $-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,

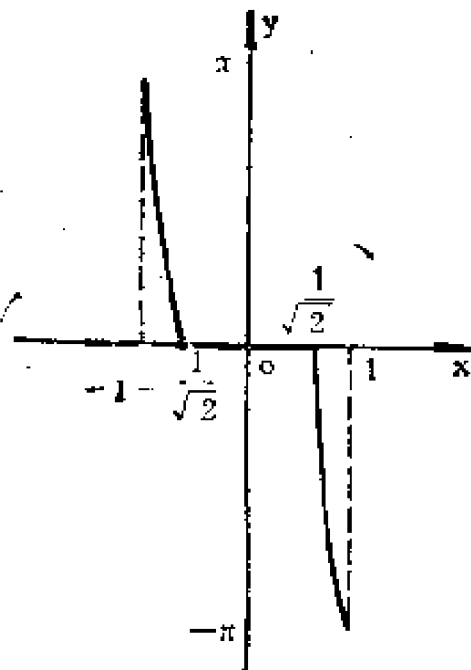
$$y = -(\pi + 4\arcsin x);$$

当 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,

$$y = 0;$$

当 $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$ 时,

$$y = \pi - 4\arcsin x.$$



如图1.315所示.

图 1.315

780. 函数 $y = y(x)$ 由下面的方程给出:

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \operatorname{arctg} t \quad (-\infty < t < +\infty),$$

求此函数. 在怎样的域上此函数才有定义?

解 由条件 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \pi$ 且

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \operatorname{ctg} y = t,$$

即得

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

从而当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$y = \frac{\pi}{2} - x.$$

781. 设

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

参数 t 变化的域怎样, 即可视变数 y 为变数 x 的单值函数? 求在各个域上 y 的表示式.

解 由于 $x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t$, 故

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

当 $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \geq 0$ 时, 即 $e^t \geq e^{-t}$ 或 $e^{2t} \geq 1$ 或 $t \geq 0$ 时,

$$y = \sqrt{x^2 - 1};$$

当 $t \leq 0$ 时, $y = -\sqrt{x^2 - 1}$.

不论 t 为何值, $x \geq 1$, 故 $\sqrt{x^2 - 1}$ 有意义. $t = 0$ 是函数 $y = y(x)$ 单值区域的分界值.

782. 要使方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

把 y 定义为 x 的单值函数的必要而且充分的条件是甚么?

解 其必要而且充分的条件为, 使 $\varphi(t) = x$ 的一切 t 值, 函数 $\psi(t)$ 应有同一的值. 下面加以证明. 先证必要性. 若不然, 则存在 x^* 及 $t_1 \neq t_2$, 使

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x^* \text{ 且 } \psi(t_1) \neq \psi(t_2).$$

于是, 对于这样的 x^* , 一方面有 $y_1 = \psi(t_1)$ 及 $y_2 = \psi(t_2)$,

另一方面又有 $y_1 \neq y_2$, 这样 y 就不定义为 x 的单值函数. 因此, 使 $\varphi(t) = x$ 的一切 t 值, $\psi(t)$ 应有同一的值.

再证充分性. 设所述条件满足, 则对于任一 $x^* \in \{\varphi(t)\}$, 有 t^* 使

$$\varphi(t^*) = x^*, \quad \psi(t^*) = y^*$$

有意义, 这样定义的函数 $y = y(x)$ 不因 t^* 的不同选取而不同, 因此它由 x^* 唯一确定, 从而 y 定义为 x 的单值函数.

783. 在怎样的条件下, 二方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

$$\text{及 } x = \varphi[\chi(\tau)], \quad y = \psi[\chi(\tau)] \quad (a < \tau < \beta)$$

定义出同一的函数 $y = y(x)$?

解 当 $a < \tau < \beta$ 时, 函数 $\chi(\tau)$ 的值的集应为区间 (a, b) .

784. 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义并且是连续的, 且

$$A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a < x < b} \varphi(x).$$

在怎样的场合下, 有定义在区间 (A, B) 上的单值函数 $f(x)$, 使得

$$\text{当 } a < x < b \text{ 时, } \psi(x) = f[\varphi(x)]?$$

解 显然, 要求对于使 $\varphi(x) = u$ 的一切 x 值 (其中 u 为区间 (A, B) 中的任一给定的数), 函数 $\psi(x)$ 应取同一的值. 满足了这个条件就可以了. 这时, 对 $u \in (A, B)$ 可定义

$$f(u) = \psi(x),$$

其中 x 为满足 $\varphi(x)=u$ ($a < x < b$) 的任何数. 上述条件保证了这样定义的 $f(u)$ 是单值的.

§ 9. 函数的一致连续性

1°一致连续性的定义 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在有 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 且对于使 $f(x)$ 有意义的任何数值 x' , $x'' \in X$, 由不等式

$$|x' - x''| < \delta$$

可得不等式

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在已知集合 (区间、线段等) $X = \{x\}$ 上为一致连续的.

2°康托尔定理 在有界的闭区间 $[a, b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$ 在此闭区间上一致连续.

785. 某工厂的车间制造正方形薄板, 其边 x 可取由 1 厘米到 10 厘米之间的值. 为了使不论何种边长 (在上述的范围内) 的薄板的面积 y 与原设计的面积差皆小于 ε , 问可以多大的公差 δ 对这些薄板的边长加工, 设 (a) $\varepsilon = 1$ 平方厘米; (б) $\varepsilon = 0.01$ 平方厘米; (в) $\varepsilon = 0.0001$ 平方厘米, 计算 δ 的值.

解 $y = x^2$. 由于,

$$|x'^2 - x''^2| = |x' - x''| |x' + x''| \leq 20 |x' - x''|,$$

于是对于任给的 $\varepsilon > 0$, 要 $|x'^2 - x''^2| < \varepsilon$ 时, 只要

$$|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{20} \text{ 即可.}$$

于是，在加工薄板边长时，只要取公差 $\delta \leq \frac{\varepsilon}{20}$ ，当 $|x' - x''| \leq \delta$ 时，即可满足要求。

(a) 当 $\varepsilon = 1$ 厘米²时， $\delta \leq \frac{1}{20} = 0.05$ 厘米 = 0.5 毫米；

(b) 当 $\varepsilon = 0.01$ 厘米²时， $\delta \leq \frac{0.01}{20} = 0.0005$ 厘米
= 0.005 毫米；

(c) 当 $\varepsilon = 0.0001$ 厘米²时， $\delta \leq \frac{0.0001}{20} = 0.000005$ 厘米
= 0.00005 毫米。

786⁺ 圆柱形鞘筒之宽度为 ε ，长度为 δ ，将鞘筒套在曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上且沿此曲线滑动，但筒之轴须保持平行于 Ox 轴。为了使此筒顺利地经过此曲线上由不等式 $-10 \leq x \leq 10$ 所限定的部分，问 δ 应等于甚么？设 (a) $\varepsilon = 1$ ；
(b) $\varepsilon = 0.1$ ；(c) $\varepsilon = 0.001$ ；(d) ε 为任意小数。

解 $y = \sqrt[3]{x}$ ，对于 $y' \neq y''$ ，由于

$$\begin{aligned} |y' - y''| &= \left| \frac{y'^3 - y''^3}{y'^2 + y'y'' + y''^2} \right| \\ &= \left| \frac{y'^3 - y''^3}{\frac{3}{4}(y' + y'')^2 + \frac{1}{4}(y' - y'')^2} \right| \\ &\leq \frac{|y'^3 - y''^3|}{\frac{1}{4}|y' - y''|^2} \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{4}|y' - y''|^3 \leq |y'^3 - y''^3| = |x' - x''| \text{ 或 } |y' -$$

$y''| \leq \sqrt[3]{4|x' - x''|}$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 要 $|y' - y''| < \varepsilon$, 只要 $4|x' - x''| < \varepsilon^3$, 或 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon^3}{4}$ 即可.

取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon^3}{4}$, 则当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 恒有

$$|\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''}| < \varepsilon.$$

(a) 当 $\varepsilon = 1$ 时, $\delta < \frac{1}{4}$;

(b) 当 $\varepsilon = 0.1$ 时, $\delta < 2.5 \times 10^{-4}$;

(c) 当 $\varepsilon = 0.001$ 时, $\delta < 2.5 \times 10^{-10}$;

(r) 当 ε 为任意小数时, $\delta < \frac{\varepsilon^3}{4}$ ($\varepsilon \leq 1$).

787. 以《 ε - δ 》的说法在肯定的意义上表达下面论断的意义: 函数 $f(x)$ 在某集合 (区间, 线段) 上连续, 但在此集合上并不一致连续.

解 设集合为 E . 所需论断的《 ε - δ 》说明如下: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 及 $x_0 \in E$, 总存在一个数 $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

同时, 至少存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 使对于任意给定的 $\delta > 0$, 都可找到 $x_1, x_2 \in E$, 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$, 但是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0.$$

788. 证明: 函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在区间 $(0, 1)$ 上是连续的, 但在此区间上并非一

致连续的.

证 连续性是显然的, 现证其不一致连续. 考虑 $(0, 1)$ 上的两串点

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n' = \frac{1}{n+1}.$$

则当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时, 不论 $\delta > 0$ 取得多小, 只要 n 取得充分大, 总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上并非一致连续.

789. 证明: 函数

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

在区间 $(0, 1)$ 上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

证 当 $x \neq 0$ 时, 由基本初等函数在其定义域的连续性可知, $f(x)$ 是连续的, 同时, 由于 $|f(x)| \leq 1$, 因而它也是有界的.

现考虑 $(0, 1)$ 上的两串点 $x_n = \frac{2}{n}, x_n' = \frac{2}{n+1}$,

则当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时, 不论 $\delta > 0$ 取得多小, 只要 n 充分大, 总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{2}{n(n+1)} < \delta,$$

但是

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上并非一致连续.

790. 证明: 函数

$$f(x) = \sin x^2$$

在无穷区间 $-\infty < x < +\infty$ 上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

证 函数 $f(x)$ 的连续性及其有界性是显然的, 现证其不一致连续性.

考虑 $(-\infty, +\infty)$ 上的两串点

$$x_n = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}, \quad x'_n = \sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}.$$

则当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时, 不论 $\delta > 0$ 如何选取, 只要 n 充分大, 总可以使

$$|x_n - x'_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} + \sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上并非一致连续.

791. 证明: 若函数 $f(x)$ 在域 $a \leq x < +\infty$ 上有定义并且是连续的, 而且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

存在, 则 $f(x)$ 在此域上是一致连续的.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 故必存在 $X > a$,

使当 $x' > X$, $x'' > X$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, X+1]$ 连续, 故一致连续, 从而必有正数 δ' 存在, 使当 $x' \in [a, X+1]$, $x'' \in [a, X+1]$, $|x' - x''| < \delta'$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

令 $\delta = \min\{\delta', 1\}$. 现设 x' , x'' 为满足 $a \leq x' < +\infty$, $a \leq x'' < +\infty$, $|x' - x''| < \delta$ 的任何两点. 由于 $|x' - x''| < \delta$, 故 x' 与 x'' 或同时属于 $[a, X+1]$, 或同时满足 $x' > X$, $x'' > X$. 因此, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上一致连续. 证毕.

792. 证明: 无界函数

$$f(x) = x + \sin x$$

于全轴 $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续.

$$\begin{aligned} \text{证 } |f(x') - f(x'')| &= |(x' - x'') + (\sin x' - \sin x'')| \\ &\leq |x' - x''| + |\sin x' - \sin x''| \leq 2|x' - x''|. \end{aligned}$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, 则当 $-\infty < x' < +\infty$,

$-\infty < x'' < +\infty$, $|x' - x''| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续.

793. 函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的: (a)

$(-l, l)$, 这里 l 为随便多大的正数; (b) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上?

解 当 $x_1, x_2 \in (-l, l)$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2l|x_1 - x_2|.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2l}$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$, 且 $x_1, x_2 \in (-l, l)$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致连续.

(6) 取 $\varepsilon_0 = 1$, 不论 $\delta > 0$ 取得多小, 只要 n 充分大, 我们总可以使 $x_n' = n + \frac{1}{n}$, $x_n'' = n$ 的距离 $|x_n' - x_n''| = \frac{1}{n} < \delta$, 但是,

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 > \varepsilon_0.$$

可见 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致连续.

研究下列函数在已知域上的一致连续性:

$$794. f(x) = \frac{x}{4-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$\text{解 } |f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1}{4-x_1^2} - \frac{x_2}{4-x_2^2} \right|$$

$$= \left| \frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \right| |x_1 - x_2|.$$

$$\text{由于 } \left| \frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \right| < \frac{4+1}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9} < 1,$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则对满足 $|x_1 - x_2| < \delta$ 的 x_1, x_2 (x_1, x_2 属于 $[-1, 1]$) 值, 均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上一致连续.

795. $f(x) = \ln x$ ($0 < x < 1$).

解 考虑 $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n' = \frac{1}{2n}$, 则当 $0 < \varepsilon_0 < \ln 2$ 时, 不论 δ 如何选取, 只要 n 充分大, 我们总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{2n} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x_n')| = \ln 2 > \varepsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内并非一致连续.

796. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($0 < x < \pi$).

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 我们定义函数

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{\sin x}{x} & 0 < x < \pi; \\ 0 & x = \pi. \end{cases}$$

易见 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 根据康托尔定理便知, $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上一致连续, 从而 $f(x)$ 也在 $(0, \pi)$ 上一致连续.

797. $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$ ($0 < x < 1$).

解 取 $\varepsilon_0 = 1$, 令 $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $x_n' = \frac{1}{n\pi}$ (n 为正整数), 显然 x_n, x_n' 均属于 $(0, 1)$. 不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 只要 n 充分大, 总有

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{(2n+1)n\pi} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x_n')| = e^{\frac{1}{n}} > 1 = \varepsilon_0.$$

因而 $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上非一致连续.

798. $f(x) = \arctg x$ ($-\infty < x < +\infty$).

解 由于 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 、 $[0, +\infty)$ 上连续, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2},$$

由791题知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 及 $(-\infty, 1]$ 上均一致连续.

于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1(\varepsilon) > 0$, 当 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$, $|x_1 - x_2| < \delta_1(\varepsilon)$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

成立.

又存在 $\delta_2(\varepsilon) > 0$, 当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta_2(\varepsilon)$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

成立.

今取 $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$, 则当 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ 时, x_1 与 x_2 必或同时属于 $(-\infty, 1]$, 或同时属于 $[0, +\infty)$, 故恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

799. $f(x) = \sqrt{x}$ ($1 \leq x < +\infty$).

解 考虑 $(1, +\infty)$ 内任意两点 x_1, x_2 .

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}.$$

于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = 2\varepsilon$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ 时, 恒有

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon = \varepsilon.$$

因而 $f(x) = \sqrt{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上一致连续.

800. $f(x) = x \sin x$ ($0 \leq x < +\infty$).

解 考虑点 $x_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$, $x_n' = 2n\pi$, 则 $|x_n - x_n'| = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_n')| &= \left(2n\pi + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{1}{n} \\ &= 2n\pi \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} = 0,$$

$$\text{及 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2n\pi \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = 2\pi,$$

所以,

$$|f(x_n) - f(x_n')| \rightarrow 2\pi \quad (n \rightarrow \infty).$$

现取 $\varepsilon_0 = 2\pi - 1$. 于是, 不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 只要 n 充分大, 总有 $|x_n - x_n'| < \delta$, 并且

$$|f(x_n) - f(x_n')| > \varepsilon_0 = 2\pi - 1.$$

因而 $f(x) = x \sin x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上非一致连续.

801. 证明: 函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间

$$J_1 = (-1 < x < 0) \text{ 及 } J_2 = (0 < x < 1)$$

上是一致连续的, 但在它们的和

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$$

上并非一致连续的.

证 在 $J_1 = (-1 < x < 0)$ 上 $f(x) = -\frac{\sin x}{x}$, 在 $J_2 =$

$(0 < x < 1)$ 上 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 它们的一致连续性由 796

题可知.

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = -1,$$

故必存在 $\eta > 0$ ($\eta < 1$), 使当 $0 < x_1 < \eta$, $-\eta < x_2 < 0$ 时恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$. 现取 $\varepsilon_0 = 1$, 则不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 都可取两点 x_1' 和 x_2' , 使 $0 < x_1' < \min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\}$, $-\min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\} < x_2' < 0$. 于是 $|x_1' - x_2'| < \delta$, 但是,

$$|f(x_1') - f(x_2')| > \varepsilon_0 = 1.$$

由此可知 $f(x)$ 在 $J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$ 上非一致连续.

802. 对于 $\varepsilon > 0$, 求使函数 $f(x)$ 在已知区间上满足一致连

续的条件的 $\delta = \delta(\varepsilon)$ (任何的 ε) 设:

$$(a) f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(b) f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5);$$

$$(B) f(x) = \frac{1}{x} \quad (0.1 \leq x \leq 1);$$

$$(r) f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty);$$

$$(d) f(x) = 2\sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$(e) f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

解 (a) $|f(x_1) - f(x_2)| = 5|x_1 - x_2|.$

只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ 即行.

$$(b) |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2 - 2|.$$

由于 $-2 \leq x \leq 5$, 故 $|x_1 + x_2 - 2| \leq 8$, 于是只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ 即行.

$$(B) |f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{0.01}.$$

只需取 $\delta = 0.01\varepsilon$.

(r) 对于 $a \geq 0, b \geq 0$, 显然有不等式

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

成立.

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon^2$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 时,

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2 + \delta} \leq \sqrt{x_2} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_2} + \varepsilon;$$

同理可有

$$\sqrt{x_2} < \sqrt{x_1 + \delta} \leq \sqrt{x_1} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_1} + \varepsilon.$$

则恒有

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} (\text{A}) \quad |f(x_1) - f(x_2)| &\leq 2|\sin x_1 - \sin x_2| + |\cos x_1 - \cos x_2| \\ &\leq 2|x_1 - x_2| + \left| \left(\frac{\pi}{2} - x_1 \right) - \left(\frac{\pi}{2} - x_2 \right) \right| = 3|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

(6) 任给 $\varepsilon > 0$, 当 $x_1, x_2 \in \left[\frac{\varepsilon}{3}, \pi \right]$ 时, 有

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_1 \sin \frac{1}{x_2} + x_1 \sin \frac{1}{x_2} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| \cdot \left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| \cdot \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \\ &= \left(\frac{1}{x_2} + 1 \right) \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

取 $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3 + \varepsilon} \right\}$. 现设 $x_1, x_2 \in (0, \pi)$ 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$, 下证必有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

不妨设 $x_1 < x_2$. 若 $x_1 \geq \frac{\varepsilon}{3}$, 则 x_1, x_2 均属于 $\left[\frac{\varepsilon}{3}, \pi \right]$, 故由上述, 知

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} \cdot |x_1 - x_2| < \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon^2}{3 + \varepsilon} = \varepsilon.$$

若 $0 \leq x_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, 则 $x_2 = x_2 - x_1 + x_1 < \delta + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{2\varepsilon}{3}$. 于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right|$$

$$\leq |x_1| + |x_2| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (\text{当 } x_1 > 0 \text{ 时}),$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| 0 - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \leq |x_2| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

(当 $x_1 = 0$ 时) .

总上述, 只要 $x_1, x_2 \in [0, \pi)$, $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

803. 需要尽量地把闭区间 $[1, 10]$ 划分为几个彼此相等的线段, 才能使得函数 $f(x) = x^2$ 在这些线段中的每一段上的振幅是小于 0.0001?

解 设分为相等的 n 段, 则对于每段中的任意两点均有

有 $|x_1 - x_2| \leq \frac{9}{n}$. 于是,

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \leq \frac{(10+10)9}{n} = \frac{180}{n}.$$

按题设, 我们只需 $\frac{180}{n} < 0.0001$, 也即

$$n > 1800000.$$

因此, 应把 $[1, 10]$ 等分成至少为 1800000 个的等长的线段, 就能满足要求.

804. 证明: 在区间 (a, b) 上有无穷个一致连续函数的和与它们的乘积在此区间内仍是一致连续的.

证 由于有无穷个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数相加或相乘, 故我们只需考虑两个函数的情况.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在有限区间 (a, b) 上一致连续, 要证 $f(x) + g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 也在 (a, b) 上一致连续. 任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 故有 $\delta_1 > 0$ 存在, 使对于 (a, b) 中任何两点 x' 与 x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta_1$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 又由于 $g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 故又有 $\delta_2 > 0$ 存在, 使对于 (a, b) 中任何两点 x' 与 x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta_2$, 就有 $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|x' - x''| < \delta$ (x', x'' 为 (a, b) 中任何两点) 时, 恒有

$$\begin{aligned} |(f(x') + g(x')) - (f(x'') + g(x''))| &\leq |f(x') - f(x'')| \\ &\quad + |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

故 $f(x) + g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 下证 $f(x)g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 为此先证一个结论: 若函数 $F(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续, 则 $F(x)$ 在 (a, b) 上必有界. 事实上, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\delta > 0$ 存在, 使对于 (a, b) 中任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有 $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$. 特别, 当 $a < x' < a + \delta$, $a < x'' < a + \delta$ 时, 必有 $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$; 当 $b - \delta < x' < b$, $b - \delta < x'' < b$ 时, 也必有 $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$. 因此, 根据柯西收敛准则, 知 $F(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} F(x)$

与 $F(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$ 都存在 (有限). 现在 (a, b)

上定义函数 $F^*(x)$:

$$F^*(x) = \begin{cases} F(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ F(a+0), & \text{当 } x=a \text{ 时;} \\ F(b-0), & \text{当 } x=b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然, $F^*(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 从而有界, 由此可知 $F(x)$ 在 (a, b) 上有界.

根据刚才已证的结论, 存在常数 $L > 0$ 与 $M > 0$, 使

$$|f(x)| \leq L, \quad |g(x)| \leq M \quad (a < x < b).$$

任给 $\varepsilon > 0$. 根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a, b) 上的一致连续性, 可取 $\delta > 0$, 使对于 (a, b) 中任何两点 x' 与 x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

由此可知,

$$\begin{aligned} |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| &= |(f(x') - f(x''))g(x') + \\ &+ f(x'')(g(x') - g(x''))| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon. \end{aligned}$$

故得知 $f(x)g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

注. 当 (a, b) 是无穷区间时, (a, b) 上一致连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x) + g(x)$ 必也一致连续, 但乘积 $f(x)g(x)$ 不一定一致连续. 例如, 设 $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, 函数 $f(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 则函数 $[f(x)]^2 = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续 (参看 793 题(σ)).

805. 证明: 若单调有界的函数 $f(x)$ 在有穷或无穷的区间 (a, b) 上是连续的, 则此函数在区间 (a, b) 上是一致连

续的.

证 分三种情形论之.

(i) 设 (a, b) 是有限区间. 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调有界, 故极限 $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 与 $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$

都存在 (有限). 按下式定义 $[a, b]$ 上的函数 $f^*(x)$:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ f(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而一致连续, 当然在 (a, b) 上也一致连续, 故 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

(ii) a 为有限数, $b = +\infty$. 此时, 令

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < +\infty \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时.} \end{cases}$$

则 $f^*(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

存在 (有限), 故根据 791 题的结果知 $f^*(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 一致连续, 从而 $f(x)$ 在 $a < x < +\infty$ 一致连续.

若 $a = -\infty$, b 为有限数. 考虑函数 $g(x) = f(-x)$, $(-b < x < +\infty)$ 即化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是 $+\infty$ 的情形.

(iii) $a = -\infty$, $b = +\infty$. 任给 $\varepsilon > 0$. 利用 (ii) 已证的结果, $f(x)$ 在 $0 \leq x < +\infty$ 上一致连续, 故存在 $\delta_1 > 0$, 使当 x' 与 x'' 都属于 $(0, +\infty)$ 且 $|x' - x''| < \delta_1$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

同样利用 (ii) 已证的结果, $f(x)$ 在 $-\infty < x < 1$ 上一致

连续, 故对于同一个 ε , 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 x' 与 x'' 都属于 $(-\infty, 1)$ 且 $|x' - x''| < \delta_2$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

现令 $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$, 则当 $-\infty < x' < +\infty$, $-\infty < x'' < +\infty$, $|x' - x''| < \delta$ 时, x' 与 x'' 必或是同属于区间 $(0, +\infty)$, 或是同属于区间 $(-\infty, 1)$. 因此, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

由此可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. 证毕.

806. 证明: 在有穷区间 (a, b) 上有定义而且是连续的函数 $f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a, b]$ 上, 其必要且充分的条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是一致连续的.

证 必要性: 若 $f(x)$ 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a, b]$ 上, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而一致连续, 当然在 (a, b) 上也是一致连续的.

充分性: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 根据 804 题的证明过程, 知 $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 与 $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 都存在 (有限). 按下式定义 $[a, b]$ 上的函数:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ f(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然, $f^*(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上 $f^*(x) \equiv f(x)$. 故 $f^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的连续延拓. 证毕.

807. 函数

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为 (a, b) 中受条件 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 限制的任意两点) 称为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的连续模数.

证明: 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是一致连续的 必要且充分的条件是

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

证 必要性: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使 (a, b) 中任何两点 x_1, x_2 , 只要 $|x_1 - x_2| < \delta'$ 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 现设 $0 < \delta < \delta'$, 则当

$|x_1 - x_2| \leq \delta$ 时, 必 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

由此可知, $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0$.

充分性: 设

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_f(\delta) = 0.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使当 $0 < \delta < \delta'$ 时, 恒有

$$\omega_f(\delta) < \varepsilon.$$

现设 x_1 与 x_2 是 (a, b) 中满足 $|x_1 - x_2| < \delta'$ 的任何两点.

若 $x_1 = x_2$, 则显然

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \varepsilon;$$

若 $x_1 \neq x_2$. 令 $|x_1 - x_2| = \delta^*$, 则 $0 < \delta^* < \delta'$, 于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega_f(\delta^*) < \varepsilon.$$

由此可知, $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续. 证毕.

808. 设:

$$(a) f(x) = x^3 \quad (0 \leq x \leq 1);$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq a) \text{ 及 } (a < x < +\infty);$$

$$(B) f(x) = \sin x + \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

对函数 $f(x)$ 的连续模数 $\omega_f(\delta)$ (参阅前题) 作下形的估价

$$\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha,$$

式中 C 和 α 为常数.

解 (a) $|x_1^3 - x_2^3| = |x_1 - x_2| |x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2| \leq 3\delta$,
于是,

$$\omega_f(\delta) \leq 3\delta.$$

(b) 当 $0 \leq x \leq a$ 时 [参看802题(r)的证明过程]

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \leq \sqrt{\delta},$$

于是,

$$\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta};$$

当 $a < x < +\infty$ 时

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}},$$

于是,

$$\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}}.$$

$$(B) f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{故} \quad \left| \sqrt{2} \sin\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(x_2 + \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} \cdot 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2 + \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \\
&\leq \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} = \sqrt{2} \delta,
\end{aligned}$$

于是

$$\omega_f(\delta) \leq \sqrt{2} \delta.$$

§10. 函数方程

809. 证明: 对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

的唯一的连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是齐次线性函数:

$$f(x) = ax,$$

式中 $a = f(1)$ 是任意的常数.

证 先证: 若 $f(x)$ 满足 (1), 则对任何有理数 c , 必有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

事实上, 当 m 与 n 为正整数时, 有

$$\begin{aligned}
f(mx) &= f(x + (m-1)x) = f(x) + f((m-1)x) \\
&= f(x) + f(x) + f((m-2)x) = \dots \\
&= f(x) + f(x) + \dots + f(x) = mf(x);
\end{aligned}$$

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right), \text{ 故 } f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x).$$

又在(1)中令 $y=0$, 得 $f(x)=f(x)+f(0)$, 故 $f(0)=0$; 又在(1)中令 $y=-x$, 并注意已证的结果 $f(0)=0$, 得 $f(-x)=-f(x)$.

于是

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x).$$

故对任何有理数 c , 有 $f(cx)=cf(x)$ ($-\infty < x < +\infty$). 下面, 我们利用 $f(x)$ 的连续性证明对任何无理数 c , 此式也成立. 事实上, 设 c 为无理数. 取一串有理数 c_n , 使 $c_n \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$). 于是

$$f(c_n x) = c_n f(x), \quad (n=1, 2, \dots).$$

在此式两端令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 并注意到函数 f 在点 cx 连续, 即得 $f(cx) = cf(x)$. 于是, 对任何实数 x 和 c , 有 $f(cx) = cf(x)$. 由此可知, 对任何实数 x , 有

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = ax,$$

其中 $a = f(1)$. 证毕.

810. 证明: 满足方程(1)的单调函数 $f(x)$ 是齐次线性的.

证 由809题之证明过程, 知: 对任何有理数 c , 有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面, 我们利用 $f(x)$ 的单调性证明此式对任何无理数 c 也成立. 为确定起见, 设 $f(x)$ 是单调递增的, 设 c 是无理数, 要证 $f(cx) = cf(x)$ ($-\infty < x < +\infty$). 只就 $x > 0$ 讨论之 ($x \leq 0$ 时可类似讨论). 取两串有理数 $\{c_n\}$ 与 $\{c_n'\}$ 使:

$$c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c < \dots < c_3' < c_2' < c_1',$$

并且 $c_n \rightarrow c$, $c_n' \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$). 由于 $x > 0$, 故

$$c_1x < c_2x < c_3x < \cdots < cx < \cdots < c_n'x < c_{n-1}'x < c_1'x,$$

并且 $c_nx \rightarrow cx$, $c_n'x \rightarrow cx$ ($n \rightarrow \infty$). 另外, 我们有

$$f(c_nx) = c_nx, \quad f(c_n'x) = c_n'x \quad (n=1, 2, \cdots).$$

由于 $f(x)$ 是单调递增的, 故在点 cx 的左、右极限均存在有限, 并且满足

$$f(cx-0) \leq f(cx) \leq f(cx+0).$$

在前面两个等式中令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 得

$$f(cx-0) = cx, \quad f(cx+0) = cx.$$

由此可知 $f(cx) = cx$.

以下证明同809题, 不再重复.

S11. 证明: 满足方程(1)且在某小区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中为有界的函数 $f(x)$, 是线性齐次函数.

证 由809题的证明过程, 知: 对任何有理数 c , 有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面, 我们利用 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中的有界性来证明对于任何无理数 c , 此式也成立. 用反证法, 假定对于某无理数 c_0 以及某实数 x_0 , 有 $f(c_0x_0) \neq c_0f(x_0)$.

令 $f(c_0x_0) - c_0f(x_0) = \alpha$, 则 $\alpha \neq 0$. 今取一串有理数 $\{c_n\}$, 使 $c_n \rightarrow c_0$ ($n \rightarrow \infty$). 于是, 对于任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned} f(m(c_0 - c_n)x_0) &= mf[(c_0 - c_n)x_0] \\ &= m[f(c_0x_0) - f(c_nx_0)] \\ &= m(c_0 - c_n)f(x_0) + m\alpha, \\ (n=1, 2, 3, \cdots; m=1, 2, 3, \cdots). \end{aligned}$$

任给 $G > 0$. 先取定一个正整数 m , 使 $m > \frac{2G}{|\alpha|}$.

对此 m , 再取定一个正整数 n , 使

$$|m(c_0 - c_n)|x_0| \leq \varepsilon, \quad |m(c_0 - c_n)f(x_0)| \leq G.$$

令 $\bar{x} = m(c_0 - c_n)x_0$. 于是 $\bar{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 并且

$$|f(\bar{x})| \geq |ma| - |m(c_0 - c_n)f(x_0)| \geq 2G - G = G.$$

由所给 $G > 0$ 的任意性, 即知 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 无界, 此与假定矛盾. 于是, 对任何无理数 c , 也有

$$f(cx) = cf(x).$$

以下证明同809题, 不再重复.

812. 证明: 对 x 和 y 的一切值满足方程

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数:

$$f(x) = a^x,$$

式中 $a = f(1)$ 为正的常数.

证 先证必 $f(x) > 0$ ($-\infty < x < +\infty$). 事实上, 由

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2, \quad \text{知 } f(x) \geq 0. \text{ 由于}$$

$f(x) \neq 0$, 故存在 x_0 使 $f(x_0) > 0$. 在(2)中令 $x = x_0$, $y = 0$, 得 $f(x_0) = f(x_0)f(0)$, 故 $f(0) = 1$; 又在(2)中令 $y = -x$, 得 $1 = f(0) = f(x)f(-x)$, 故 $f(x) \neq 0$, 由此可知 $f(x) > 0$ ($-\infty < x < +\infty$).

当 m 与 n 为正整数时,

$$\begin{aligned} f(mx) &= f((m-1)x + x) = f((m-1)x) \cdot f(x) \\ &= f((m-2)x) \cdot f(x) \cdot f(x) = \cdots = [f(x)]^m; \end{aligned}$$

$$f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n, \quad \text{即 } f\left(\frac{x}{n}\right) = [f(x)]^{\frac{1}{n}}.$$

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m=[f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

又有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=[f(-x)]^{\frac{m}{n}}=[f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

由此可知, 对任何有理数 c , 有

$$f(cx)=[f(x)]^c \quad (-\infty < x < +\infty).$$

根据 $f(x)$ 的连续性, 仿 809 之证易知此式对任何无理数也成立. 因此, 对于任何实数 c 与 x , 有

$$f(cx)=[f(x)]^c,$$

从而 $f(x)=f(x \cdot 1)=[f(1)]^x=a^x$, $a=f(1)>0$.

注. 也可利用 809 题的结果来证. 前面已证 $f(x)>0$ $(-\infty < x < +\infty)$. 令 $F(x)=\log_a f(x)$, 这里 $a=f(1)>0$, 于是 $F(x)$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 满足 (1) 式:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \log_a f(x+y) = \log_a f(x)f(y) \\ &= \log_a f(x) + \log_a f(y) = F(x) + F(y). \end{aligned}$$

故由 809 题的结果, 知 $F(x)=a^*x$, 这里

$a^*=F(1)=\log_a f(1)=\log_a a=1$, 从而 $F(x)=x$.

由此可知 $f(x)=a^x$.

813. 证明: 在区间 $(0, \varepsilon)$ 中有界并满足方程 (2) 的不恒等于零的函数 $f(x)$ 是指数函数.

证 由 812 的证明知: $f(x)>0$ $(-\infty < x < +\infty)$, 并且对任何有理数 c , 有 $f(cx)=[f(x)]^c$.

下证对任何无理数 c , 也有

$$f(cx)=[f(x)]^c \quad (-\infty < x < +\infty).$$

用反证法. 假定对某无理数 c_0 , 及某实数 x_0 , 有 $f(c_0 x_0) \neq [f(x_0)]^{c_0}$. 显然 $x_0 \neq 0$ (因为 $f(0)=1$). 不妨设 $x_0 > 0$. 我们有 $f(c_0 x_0) = \beta [f(x_0)]^{c_0}$, $\beta > 0$, $\beta \neq 1$. 不妨设 $\beta > 1$. 取一串有理数 c_n , 使 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_0$, 且 $c_n \rightarrow c_0$ ($n \rightarrow \infty$). 于是, 对任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned} f[m(c_0 - c_n)x_0] &= \{f[(c_0 - c_n)x_0]\}^m \\ &= f(c_0 x_0)^m \cdot f(-c_n x_0)^m = \beta^m \cdot [f(x_0)]^{m(c_0 - c_n)}. \end{aligned}$$

现任给 $G > 0$. 先取定一个正整数 m , 使 $\beta^m > 2G$. 然后, 再取一个 n , 使

$$0 < m(c_0 - c_n)x_0 < \varepsilon, \quad [f(x_0)]^{m(c_0 - c_n)} > \frac{1}{2}.$$

于是, 令 $\bar{x} = m(c_0 - c_n)x_0$, 则 $\bar{x} \in (0, \varepsilon)$, 且 $f(\bar{x}) > 2G \cdot \frac{1}{2} = G$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \varepsilon)$ 无界, 此与假定矛盾.

注意, 若 $\beta < 1$, 则需取 $c_1 > c_2 > c_3 > \dots > c_0$, $c_n \rightarrow c_0$ 并考虑 $f[-m(c_0 - c_n)x_0] = \beta^{-m} [f(x_0)]^{-m(c_0 - c_n)}$.

由此可知, 对任何无理数 c , $f(cx) = [f(x)]^c$ 也成立.

以下证明同于812题, 不再重复.

814. 证明: 对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) 是对数函数:

$$f(x) = \log_a x,$$

式中 a 为正的常数.

证 在 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 中令 $y = 1$, 得 $f(1) = 0$.
 由于 $f(x) \neq 0$, 故存在 $x_0 > 0$ 使 $f(x_0) \neq 0$. 先设 $f(x_0) > 0$.

由于 $f(x_0^2) = f(x_0) + f(x_0) = 2f(x_0)$, $f(x_0^4) = 2f(x_0^2) = 4f(x_0)$, \dots , 利用归纳法, 易知 $f(x_0^{2^n}) = 2^n f(x_0) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$. 故可取某正整数 n , 使 $f(x_0^{2^n}) > 1$. 于是, 根据连续函数性质知, 在 1 与 $x_0^{2^n}$ 之间必存在某 a (显然 $a > 0$) 使 $f(a) = 1$. 现考虑函数 $F(x) = f(a^x) (-\infty < x < +\infty)$. 显然 $F(x)$ 连续且满足 (1) 式:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f(a^{x+y}) = f(a^x \cdot a^y) = f(a^x) + f(a^y) \\ &= F(x) + F(y) \end{aligned}$$

于是, 根据 809 题的结果知 $F(x) = a^* x (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $a^* = F(1) = f(a) = 1$. 于是 $F(x) = x$, 即

$$f(a^x) = x;$$

令 $a^x = y$, 则 $x = \log_a y$, 于是

$$f(y) = \log_a y \quad (0 < y < +\infty).$$

若 $f(x_0) < 0$, 则可考虑函数 $g(x) = -f(x)$.

于是 $g(x_0) > 0$ 且 $g(x)$ 也满足 $g(xy) = g(x) + g(y)$, 故根据刚才已证的结果, 知 $g(y) = \log_a y (0 < y < +\infty)$, 其中 $a > 0$. 即 $-f(y) = \log_a y$, 或 $f(y) = -\log_a y$. 令 $a^* = \frac{1}{a}$, 则 $a^* > 0$ 且 $-\log_a y = \log_{a^*} y$, 故

$$f(y) = \log_{a^*} y \quad (0 < y < +\infty),$$

其中 $a^* > 0$, 证毕.

815. 证明: 对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (3)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ ($0 \leq x < +\infty$) 是幂函数:

$$f(x) = x^a,$$

式中 a 为常数.

证 考察函数 $F(x) = f(e^x)$ ($-\infty < x < +\infty$), 则 $F(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 连续不恒为零, 且满足 (2) 式:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x)f(e^y) \\ &= F(x)F(y). \end{aligned}$$

于是, 根据 812 题的结果知

$$F(x) = b^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中 $b > 0$, 即 $f(e^x) = b^x$ ($-\infty < x < +\infty$).

令 $e^x = y$, 则 $y > 0$; 显然, 存在唯一的 a ($-\infty < a < +\infty$), 使 $e^a = b$. 于是

$$f(y) = b^x = e^{ax} = y^a \quad (0 < y < +\infty).$$

证毕.

816. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程 (3) 的一切连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

证 因为 $f(xy) = f(x)f(y)$, 所以 $f(1) = f(1)f(1)$, 于是, $f(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

当 $f(1) = 0$ 时, 对于任意实数 x , 均有

$$f(x) = f(1)f(x) \equiv 0.$$

当 $f(1) = 1$ 时, 由于 $f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1)f(-1) = 1$, 所以 $f(-1) = \pm 1$. 下面分两种情况讨论:

1° 当 $f(-1) = 1$ 时, 由于

$$f(-x) = f(-1)f(x) = f(x),$$

所以在这种情形下就可把问题归结为对 $0 < x < +\infty$ 中的 x 进行讨论。而对于 $x > 0$ ，我们已证得 $f(x) = x^a$ ，式中 a 为常数^{*}。然后再利用 $f(-x) = f(x)$ ，即得

$$f(x) = |x|^a,$$

为保证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中连续，需 $a \geq 0$ 。

2° 当 $f(-1) = -1$ 时，同 1° 可得

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a \quad (a \geq 0).$$

综上所述，所求的函数为 (1) $f(x) \equiv 0$ ；或 (2) $f(x) = |x|^a (a \geq 0)$ ；或 (3) $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a (a \geq 0)$ 。

^{*} 利用 815 题的结果。

817. 证明：不连续函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

满足方程 (3)。

证 由 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 知， $f(xy) = \operatorname{sgn}(xy)$ 。

分三种情况讨论：

1° 当 $xy > 0$ 时， x 与 y 同号，此时

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 1;$$

2° 当 $xy < 0$ 时， x 与 y 异号，此时

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = -1;$$

3° 当 $xy = 0$ 时，在实数域内， x 与 y 中至少有一个为 0，于是，

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 0.$$

总之，不论哪一种情形，均有

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y,$$

也即函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

818. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

的一切连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

解 显见函数

$$f(x) = \cos ax \text{ 或 } f(x) = \operatorname{ch} ax$$

满足所给方程. 下面我们将指出满足所给方程的函数具有上述形式. 为此, 在方程中令 $y = 0$, 得

$$2f(x) = 2f(x)f(0),$$

则当 $f(x) \neq 0$ 时 $f(0) = 1$. 又令 $x = 0$ 得

$$f(y) + f(-y) = 2f(y),$$

所以

$$f(-y) = f(y).$$

由 $f(x)$ 的连续性, 故知存在 $c > 0$, 使当 $x \in [0, c]$ 时, $f(x) > 0$. 设 $f(c) = a$. 下面分两种情况讨论:

1° 当 $0 < a \leq 1$ 时,

于是存在 θ : $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, 使得

$$f(c) = \cos \theta. \quad (1')$$

从而

$$\begin{aligned} f(2c) &= 2[f(c)]^2 - f(0) = 2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta, \\ f(3c) &= 2f(2c)f(c) - f(c) = 2\cos 2\theta \cos \theta - \cos \theta \\ &= \cos 3\theta. \end{aligned}$$

利用数学归纳法易证, 对于一切正整数 n , 均有

$$f(nc) = \cos n\theta. \quad (2')$$

又

$$\begin{aligned}\left[f\left(\frac{1}{2}c\right)\right]^2 &= \frac{1}{2}[f(0)+f(c)] = \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

由于 $f(x) \geq 0$ ，故取正根，则得

$$f\left(\frac{1}{2}c\right) = \cos\frac{\theta}{2}. \quad (3')$$

同样，利用数学归纳法可得，对于一切正整数 n ，均有

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right). \quad (4')$$

重复应用(1')到(2')的推理过程于(4')，可知对于一切正整数 m ，均有

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right). \quad (5')$$

因此，对于 $\frac{m}{2^n}$ 型的正实数 x_n ，有

$$f(cx_n) = \cos(\theta x_n).$$

又因任一正实数 x 皆可表成 $\frac{m}{2^n}$ 型数列的极限，所以利用极限过程易得

$$f(cx) = \cos(\theta x). \quad (6')$$

由于 $f(-y) = f(y)$ ，故(6')式对 $x < 0$ 也成立。至于当 $x = 0$ 时， $f(cx) = \cos(\theta x)$ 显然成立。因此，对于 $-\infty < x < +\infty$ 的一切实数，均有

$f(cx) = \cos(\theta x)$ 。把 cx 换成 x ，并令 $\frac{\theta}{c} = a$ ，则得

$$f(x) = \cos ax.$$

2° 当 $a > 1$ 时, 于是存在这样的 θ , 使得

$$f(c) = a = ch \theta.$$

根据双曲余弦的关系式, 再重复上面的推理过程, 可得

$$f(x) = ch ax.$$

当 $a = 0$ 时, $f(x) \equiv 1$.

综上所述, 所求的函数为 $f(x) = \cos ax$ 或 $f(x) = ch ax$.

819. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程组:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

及

$$f(0) = 1 \text{ 和 } g(0) = 0$$

的一切有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

解 考虑函数

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x),$$

则

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f^2(x+y) + g^2(x+y) = (f(x)f(y) \\ &\quad - g(x)g(y))^2 + (f(x)g(y) + f(y)g(x))^2 \\ &= F(x)F(y), \end{aligned}$$

由于 $F(0) = 1$ 及 $F(x) \neq 0$, 故

$$F(x) = a^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

式中 $a = F(1)$ 为正的常数*).

由于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有界, 故只能有 $a = 1$. 因此, 对于一切实数 x , 有 $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

因为

$$0 = g(0) = g(x-x) = f(x)g(-x) + f(-x)g(x)$$

及

$$1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x) - g(-x)g(x).$$

上面二式分别乘以 $g(-x)$ 及 $f(-x)$, 然后相加, 得

$$f(-x) = f(x) \cdot [f^2(-x) + g^2(-x)] = f(x);$$

如果上面二式分别乘以 $f(-x)$ 及 $g(-x)$, 然后相减, 得

$$g(-x) = -g(x)[g^2(-x) + f^2(-x)] = -g(x).$$

从而可得

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= f(x)f(y) - g(x)g(y) \\ + f(x)f(-y) - g(x)g(-y) &= 2f(x)f(y). \end{aligned}$$

于是, 考虑到 $f(x)$ 的有界性, 可得

$$f(x) = \cos ax^{**}),$$

再由 $f^2(x) + g^2(x) = 1$ 可得

$$g(x) = \pm \sin ax,$$

*) 利用812题的结果.

**) 利用818题的结果.

820. 设

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

及

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$$

分别为函数 $f(x)$ 的一阶、二阶有限差.

证明: 若函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是连续的且

$$\Delta^2 f(x) \equiv 0,$$

则此函数是线性函数, 即

$$f(x) = ax + b,$$

式中 a 和 b 为常数.

证 由 $\Delta^2 f(x) \equiv 0$ 得

$$f(x + \Delta_1 x + \Delta_2 x) - f(x + \Delta_2 x) \equiv f(x + \Delta_1 x) - f(x).$$

令 $x = 0$, 得

$$f(\Delta_1 + \Delta_2) - f(\Delta_2) \equiv f(\Delta_1) - f(0).$$

令 $\Delta_2 = n\Delta_1$, 得

$$f((n+1)\Delta_1) - f(n\Delta_1) \equiv f(\Delta_1) - f(0).$$

利用数学归纳法, 可得

$$f((n+1)\Delta_1) - f(0) \equiv (n+1)[f(\Delta_1) - f(0)], \quad (1')$$

关系式(1')可写成

$$f(\Delta_1) - f(0) = \frac{1}{n}[f(n\Delta_1) - f(0)].$$

在上式中令 $n\Delta_1 = m$, 再利用(1')即得

$$f\left(\frac{m}{n}\right) - f(0) = \frac{m}{n}[f(1) - f(0)],$$

所以

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a \cdot \frac{m}{n} + b,$$

式中 $a = f(1) - f(0)$ 及 $b = f(0)$ 均为常数.

于是, 对于有理数 x , 均有

$$f(x) = ax + b.$$

对于无理数 x , 利用 $f(x)$ 的连续性, 即可证得上式仍成立. 事实上, 取有理数列 $x_n \rightarrow x$, 则

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = f(x).$$

另一方面

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x} (ax_n + b) = ax + b.$$

因此, 对于一切实数 x , 均有

$$f(x) = ax + b.$$

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

贾定群 周学圣 编注
郭大钧 邵品珠 主审

山东科学技术出版社

022953

B. II. 吉米多维奇

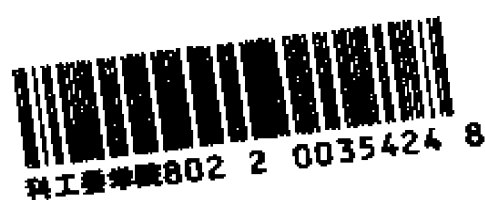
数学分析习题集题解

19

(二)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审



Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解
(二)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东青岛印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 18.5印张 395千字
1980年1月第1版 1981年11月第2次印刷
印数: 100,001—130,000
书号 13195·18 定价 2.00 元

出版说明

吉米多维奇 (Б. П. ДЕМИДОВИЧ) 著《数学分析习题集》一书的中译本, 自五十年代初在我国翻译出版以来, 引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生, 常以试解该习题集中的习题, 作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来, 对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题, 数量多, 内容丰富, 由浅入深, 部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限, 单变量函数的微分学, 不定积分, 定积分, 级数, 多变量函数的微分学, 带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等, 概括了数学分析的全部主题。当前, 我国广大读者, 特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者, 在为四个现代化而勤奋学习的热潮中, 迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此, 我们特约作者, 将全书4462题的所有解答汇编成书, 共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书, 同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知, 原习题集, 题多难度大, 其中不少习题如果认真习作的活, 既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念, 又可以有效地提高我们的运算能力, 特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样, 我们殷切期望初学数学分析的青年读者, 一定要刻苦钻研, 千万不要轻

易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有刘一鸣同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目 录

第二章 单变量函数的微分学	1
§1. 显函数的导函数	1
§2. 反函数的导函数, 用参变数表示的函数的导函数, 隐函数的导函数	117
§3. 导函数的几何意义	131
§4. 函数的微分	153
§5. 高阶的导函数和微分	168
§6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理	242
§7. 函数的增大与减小, 不等式	278
§8. 凹凸性, 拐点	312
§9. 未定形的求值法	331
§10. 台劳公式	362
§11. 函数的极值, 函数的最大值和最小值	392
§12. 依据函数的特征点作函数图形	427
§13. 函数的极大值与极小值问题	523
§14. 曲线的相切, 曲率圆, 渐屈线	549
§15. 方程的近似解法	569

第二章 单变量函数的微分学

§ 1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义 若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

有意义, 则称为导函数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数.

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率 [$\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$] (图2.1).

2° 求导函数的基本法
则 若 c 为常数且函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ 都有导函数, 则

$$(1) \quad c' = 0;$$

$$(2) \quad (cu)' = cu';$$

$$(3) \quad (u \pm v - w)' = u' \pm v' - w';$$

$$(4) \quad (uv)' = u'v + v'u;$$

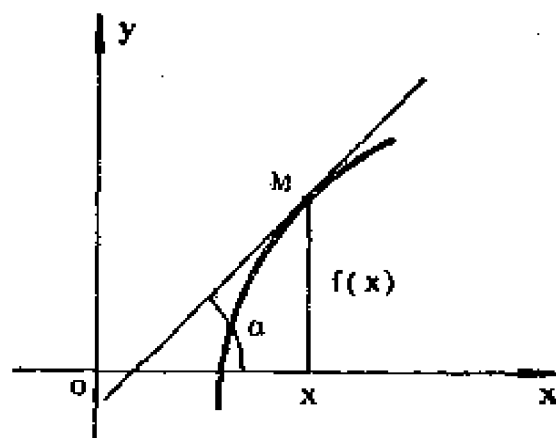


图 2.1

$$(5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

$$(6) (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \text{ 为常数});$$

(7) 若函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 都有导函数, 则

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

3° 基本公式 若 x 为自变数^{*)}, 则

$$\text{I. } (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ 为常数});$$

$$\text{II. } (\sin x)' = \cos x; \quad \text{III. } (\cos x)' = -\sin x;$$

$$\text{IV. } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \text{V. } (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\text{VI. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{VII. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{VIII. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{IX. } (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{X. } (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0); \quad (e^x)' = e^x;$$

$$\text{XI. } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

*) 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中, 一些明显的定义域要求, 例如本节公式 V 中要求 $x \neq k\pi$ (k 整数), VI 中要求 $|x| < 1$ 等等, 以及例如尔后 §5 中相应的限制, 一般地就不再一一声明.

$$\text{XII. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad \text{XIII. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$\text{XIV. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad \text{XV. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4° 单侧的导函数 表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的 左导函数 或 右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5° 无穷的导函数 若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷的导函数. 在此种情形下, 函数 $y = f(x)$ 的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的对应的增量 Δy .

解 $\Delta x = 1000 - 1 = 999$;

$$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数

$$y = \frac{1}{x^2} \text{ 的对应的增量 } \Delta y.$$

解 $\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009$;

$$\Delta y = \frac{1}{(0.001)^2} - \frac{1}{(0.01)^2} = 990000.$$

823. 设:

$$(a) y = ax + b; \quad (b) y = ax^2 + bx + c; \quad (B) y = a^x.$$

若变量 x 得到增量 Δx , 求增量 Δy .

$$\text{解} \quad (a) \Delta y = [(ax + a\Delta x) + b] - [ax + b] = a\Delta x;$$

$$\begin{aligned} (b) \Delta y &= [a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c] \\ &\quad - [ax^2 + bx + c] \\ &= (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2; \end{aligned}$$

$$(B) \Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

824. 证明:

$$(a) \Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$\begin{aligned} (b) \Delta[f(x)g(x)] \\ = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (a) \Delta[f(x) + g(x)] \\ &= [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)] \\ &= [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)] \\ &= \Delta f(x) + \Delta g(x), \end{aligned}$$

于是,

$$\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$\begin{aligned} (b) \Delta[f(x)g(x)] \\ &= [f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)] - [f(x)g(x)] \\ &= [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) \\ &\quad + [g(x + \Delta x) - g(x)]f(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + \Delta g(x)f(x), \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\Delta[f(x)g(x)] \\ = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).\end{aligned}$$

同样, 我们还可将(6)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x + \Delta x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$$

825. 过曲线 $y = x^2$ 上的二点 $A(2, 4)$ 和 $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ 引割线 AA' , 求此割线的斜率, 设:
(a) $\Delta x = 1$; (b) $\Delta x = 0.1$; (B) $\Delta x = 0.01$;
(r) Δx 为任意小.

在已知曲线上 A 点的切线的斜率等于甚么?

解 割线 AA' 的斜率 $k_{AA'} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x,$

$$\begin{aligned}(\text{a}) \quad k_{AA'} &= 5; & (\text{b}) \quad k_{AA'} &= 4.1; \\ (\text{B}) \quad k_{AA'} &= 4.01; & (\text{r}) \quad k_{AA'} &= 4 + \Delta x.\end{aligned}$$

于是, 在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \rightarrow A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

826. 把 Ox 轴上的线段 $1 \leq x \leq 1 + h$ 利用函数关系 $y = x^3$ 映变到 Oy 轴上. 求其平均的伸长系数. 设:
(a) $h = 0.1$; (b) $h = 0.01$; (B) $h = 0.001$, 计算此系数的值.

当 $x = 1$ 时伸长的系数等于甚么?

解 平均伸长系数 $\bar{l} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2,$

$$\begin{aligned}(\text{a}) \quad \bar{l} &= 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31; \\ (\text{b}) \quad \bar{l} &= 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301; \\ (\text{B}) \quad \bar{l} &= 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001.\end{aligned}$$

于是,

$$I|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{I} = 3.$$

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x = 10t + 5t^2$$

式中 t 以秒计的时间, x 为以米计的距离. 求在 $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设: (a) $\Delta t = 1$; (б) $\Delta t = 0.1$; (B) $\Delta t = 0.01$, 计算此速度的值.

当 $t = 20$ 时运动的速度等于甚么?

$$\begin{aligned} \text{解 平均速度 } \bar{v} &= \{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2] \\ &\quad - [10 \times 20 + 5 \times 20^2]\} \div \Delta t \\ &= 210 + 5\Delta t \text{ (米/秒)}, \end{aligned}$$

$$(a) \quad \bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215 \text{ (米/秒)};$$

$$(б) \quad \bar{v} = 210.5 \text{ (米/秒)};$$

$$(B) \quad \bar{v} = 210.05 \text{ (米/秒)}.$$

于是,

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (210 + 5\Delta t) = 210 \text{ (米/秒)}.$$

828. 根据导函数的定义, 直接求下列函数的导函数:

$$(a) \ x^2; \quad (б) \ x^3; \quad (B) \ \frac{1}{x}; \quad (Г) \ \sqrt{x}; \quad (A) \ \sqrt[3]{x};$$

$$(e) \ \operatorname{tg} x; \quad (H) \ \operatorname{ctg} x; \quad (3) \ \arcsin x; \quad (H) \ \arccos x;$$

$$(K) \ \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$$\text{解 } (a) \ y = x^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

$$(6) \quad y = x^3,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2. \end{aligned}$$

$$(B) \quad y = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(\Delta x + x)} \right] \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

$$(r) \quad y = \sqrt{x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0) . \end{aligned}$$

(л) $y = \sqrt[3]{x}$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} . \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x \neq 0) . \end{aligned}$$

(e) $y = \operatorname{tg} x$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \Delta x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)} \\ &= \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

(м) $y = \operatorname{ctg} x$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} \Delta x - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x} - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{-1 - \operatorname{ctg}^2 x}{\Delta x (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)} \\ &= -\frac{\operatorname{csc}^2 x}{\Delta x (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{csc}^2 x}{\Delta x (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \Delta x)} \\ &= -\operatorname{csc}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

$$(3) \quad y = \arcsin x,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arcsin(x + \Delta x) - \arcsin x}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin[(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(x + \Delta x)^2}x]}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin[(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}]}{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \frac{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin t}{t} \\ &\quad \cdot \frac{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin t}{t} \\ &\quad \cdot \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}}, \end{aligned}$$

式中 $t = (x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}$,
从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$.

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x + \Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1,$$

$$(H) \quad y = \arccos x,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arccos(x + \Delta x) - \arccos x}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin[(x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2} - (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2})]}{\Delta x} \\ &= -\frac{\arcsin t}{t} \end{aligned}$$

$$= -\frac{-(2x + 2\Delta x)}{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},$$

式中 $t = (x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,
从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$.

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2x + 2\Delta x)}{(x + \Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

$$(K) \quad y = \operatorname{arctg} x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{arctg}(x + \Delta x) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x} \\
&= \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}} \\
&\quad \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)} \right] = \frac{1}{1+x^2},
\end{aligned}$$

其中利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = 1$.

829. 设:

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } f'(x) &= (x-2)^2(x-3)^3 \\
&\quad + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 \\
&\quad + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2
\end{aligned}$$

$$= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).$$

于是,

$$f'(1) = -8; f'(2) = f'(3) = 0.$$

830. 设:

$$f(x) = x^2 \sin(x-2),$$

求 $f'(2)$.

解 $f'(x) = 2x \sin(x-2) + x^2 \cos(x-2).$

于是,

$$f'(2) = 4.$$

831. 设:

$$f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}},$$

求 $f'(1)$.

解 方法一:

若用复合函数求导法, 可得

$$f'(x) = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是,

$$f'(1) = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

方法二:

若按定义作, 注意到当 $x=1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin \sqrt{\frac{1 + \Delta x}{2 + \Delta x}} \right) \\
&= 1 + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

832. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微分, 求

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

解 设 $\Delta x = x - a$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$. 于是, 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a).
\end{aligned}$$

833. 证明: 若函数 $f(x)$ 可微分及 n 为自然数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (1)$$

反之, 若对于函数 $f(x)$ 有极限 (1) 存在, 则可否定这个函数有导函数? 研究迪里黑里函数的例子 (参阅第一章第734题).

$$\begin{aligned}
\text{证} \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x),
\end{aligned}$$

反之，就不一定对了。例如，对于迪里黑里函数

$$Z(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

在任一有理点是不连续的，当然其导数也不存在。但

由于 $x + \frac{1}{n}$ 仍为有理数，故当 x 为有理数时，

$$Z\left(x + \frac{1}{n}\right) - Z(x) = 1 - 1 = 0,$$

从而，极限 (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[Z\left(x + \frac{1}{n}\right) - Z(x) \right] = 0$$

存在。

利用导函数表，求下列函数的导函数：

834. $y = 2 + x - x^2$. 问 $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$

等于甚么？

解 由于 $y'(x) = 1 - 2x$ ，故得

$$y'(0) = 1; \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad y'(1) = -1;$$

$$y'(-10) = 21.$$

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. 当 x 为何值时：

(a) $y'(x) = 0$; (b) $y'(x) = -2$; (c) $y'(x) = 10$?

解 $y'(x) = x^2 + x - 2$.

(a) 令 $y'(x) = 0$ ，得 $x^2 + x - 2 = 0$ 。于是， $x = -2$ 或 $x = 1$ ；

(5) 令 $y'(x) = -2$, 得 $x^2 + x = 0$. 于是, $x = -1$ 或 $x = 0$;

(B) 令 $y'(x) = 10$; 得 $x^2 + x - 12 = 0$. 于是, $x = -4$ 或 $x = 3$.

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

解 $y' = 10a^3x - 5x^4$.

837. $y = \frac{ax+b}{a+b}$.

解 $y' = \frac{a}{a+b}$.

838. $y = (x-a)(x-b)$.

解 $y' = x-a+x-b = 2x-a-b$.

839. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解 $y' = (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3$
 $+ 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$
 $= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)$
 $+ 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)]$
 $= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2 + 11x + 9)$.

840. $y = (x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha)$.

解 $y' = \sin \alpha(x \cos \alpha - \sin \alpha)$
 $+ \cos \alpha(x \sin \alpha + \cos \alpha)$
 $= x \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

841. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$.

解 $y' = mn x^{m-1}(1 + mx^n) + mn x^{n-1}(1 + nx^m)$
 $= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}]$.

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= -(1-x^2)^2(1-x^3)^3 \\
&\quad -4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3 \\
&\quad -9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2 \\
&= -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x \\
&\quad +15x^2+14x^3) \\
&= -(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x \\
&\quad +7x^2)(1+x+x^2)^2.
\end{aligned}$$

$$843. \quad y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$$

$$\text{解 } y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right) \quad (x \neq 0).$$

844. 证明公式

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = -\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{证 } \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' &= \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} \\
&= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = -\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2},
\end{aligned}$$

这里已暗设 $cx+d \neq 0$.

求下列函数之导函数:

$$845. \quad y = \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (|x| \neq 1).$$

$$846. \quad y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$$

解 由于 $y = \frac{2}{1-x+x^2} - 1$, 故

$$y' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$$

$$847. \quad y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[3(1+x)^2(1-x)^2 - 2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6} \\ &= \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}, \quad (|x| \neq 1). \end{aligned}$$

$$848. \quad y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}.$$

解

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3)-3x^2(2-x^2)] + 2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4} \\ &= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} \quad (x \neq 1). \end{aligned}$$

$$849. \quad y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}.$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q - q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}}$$

$$= - \frac{(1-x)^{p-1} \{ (p+q) + (p-q)x \}}{(1+x)^{q+1}} \\ (x \neq -1) .$$

$$850. \quad y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x} .$$

解

$$y' = \frac{[px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1}](1+x) - x^p(1-x)^q}{(1+x)^2} \\ = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2] \\ (x \neq -1) .$$

$$851. \quad y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} .$$

$$\text{解} \quad y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0) .$$

$$852. \quad y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} .$$

$$\text{解} \quad y' = - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} \right) \quad (x > 0) .$$

$$853. \quad y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}} .$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (x > 0) .$$

$$854. \quad y = x\sqrt{1+x^2} .$$

$$\text{解} \quad y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} .$$

$$855. \quad y = (1+x) \cdot \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3}.$$

解 $y' = \sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{3+x^3}$

$$+ (1+x) \left[\frac{x \sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{x^2 \sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}} \right]$$

$$= \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2} \cdot \sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$$

$$(x \neq \sqrt[3]{-3}).$$

$$856. \quad y = {}^{m+n}\sqrt{(1-x)^m(1+x)^n}.$$

解

$$y' = \frac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + n(1+x)^{n-1}(1-x)^m}{(m+n) {}^{m+n}\sqrt{[(1-x)^m(1+x)^n]^{m+n-1}}}$$

$$= \frac{(n-m) - (n+m)x}{(m+n) {}^{m+n}\sqrt{(1-x)^n(1+x)^m}} \quad (|x| \neq 1).$$

$$857. \quad y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

解 $y' = \frac{\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} \quad (|x| < |a|).$$

$$858. \quad y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}} \\
 &\quad \cdot \frac{3x^2(1-x^3) + 3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2} \\
 &= \frac{2x^2}{1-x^3} \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \quad (|x| \neq 1) .
 \end{aligned}$$

$$859. \quad y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})} .$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= - \frac{1}{(1+x^2)(x + \sqrt{1+x^2})^2} \left[\sqrt{1+x^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + 2x \right] \\
 &= - \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} .
 \end{aligned}$$

$$860. \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} .$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{2 \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \\
 &\quad \cdot \left[1 + \frac{1}{2 \sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2 \sqrt{x}} \right) \right] \\
 &= \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}{8 \sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \\
 &\quad (x \geq 0) .
 \end{aligned}$$

$$861. \quad y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}})^2}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{3 \sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^2}} \cdot \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{1}{27 \sqrt[3]{x^2(1 + \sqrt[3]{x})^2 \cdot \sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}})^2}}} \\ &\quad (x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8). \end{aligned}$$

$$862. \quad y = \cos 2x - 2 \sin x.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= -2 \sin 2x - 2 \cos x \\ &= -2 \cos x(1 + 2 \sin x). \end{aligned}$$

$$863. \quad y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= -2x \cos x - (2 - x^2) \sin x + 2 \sin x \\ &\quad + 2x \cos x \\ &= x^2 \sin x. \end{aligned}$$

$$864. \quad y = \sin(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= -2 \sin x \cos x \cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) \\ &\quad - 2 \sin x \cos x \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x) \\ &= -\sin 2x [\cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) \\ &\quad + \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x)] \\ &= -\sin 2x \cos(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= -\sin 2x \cos(\cos 2x). \end{aligned}$$

$$865. \quad y = \sin^n x \cos nx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= n \sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n \sin^n x \sin nx \\ &= n \sin^{n-1} x (\cos x \cos nx - \sin x \sin nx) \end{aligned}$$

$$= n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x.$$

$$866. \quad y = \sin[\sin(\sin^2 x)].$$

$$\text{解} \quad y' = \cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)].$$

$$867. \quad y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{2 \sin x (\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2} \\ (x^2 \neq k\pi; k=1, 2, \dots).$$

$$868. \quad y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x}.$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{-2 \sin^3 x - 4 \sin x \cos^2 x}{4 \sin^4 x} \\ = -\frac{1 + \cos^2 x}{2 \sin^3 x} \quad (x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$869. \quad y = \frac{1}{\cos^n x}.$$

$$\text{解} \quad y' = -\frac{1}{\cos^{2n} x} (-n \cos^{n-1} x \sin x) \\ = \frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).$$

$$870. \quad y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{(\cos x + x \sin x)^2} [(x \sin x - \cos x \\ + \cos x)(\cos x + x \sin x) - (\sin x - \sin x \\ + x \cos x)(\sin x - x \cos x)]$$

$$= \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}.$$

871. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$

解 $y' = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \csc^2 \frac{x}{2}$
 $= \frac{2}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

872. $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x.$

解 $y' = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x + \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^4 x$
 $(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

873. $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^3 x}.$

解 $y' = \frac{8}{3} (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{3}} (-\csc^2 x)$
 $+ \frac{8}{3} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{2}{3}} (-\csc^2 x)$
 $= -\frac{8}{3 \sin^4 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$
 $(x \neq k\pi; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

874. $y = \sec^2 \frac{x}{a} + \csc^2 \frac{x}{a}.$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{2}{a} \sec^2 \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{2}{a} \csc^2 \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} \\
&= \frac{2}{a} \left(\frac{\sin \frac{x}{a}}{\cos^3 \frac{x}{a}} - \frac{\cos \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a}} \right) \\
&= \frac{2}{a} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{a} - \cos^4 \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a} \cos^3 \frac{x}{a}} \\
&= \frac{16 \left(\sin^2 \frac{x}{a} - \cos^2 \frac{x}{a} \right)}{a \left(2 \sin \frac{x}{a} \cos \frac{x}{a} \right)^3} = \frac{-16 \cos \frac{2x}{a}}{a \sin^3 \frac{2x}{a}} \\
&\quad \left(x \neq \frac{k\pi a}{2}; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).
\end{aligned}$$

875. $y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)] \\
&\quad \cdot [-2 \cos(\operatorname{tg}^3 x) \sin(\operatorname{tg}^3 x)] \\
&\quad \cdot [3 \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x] \\
&= -3 \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \cdot \sin(2 \operatorname{tg}^3 x) \\
&\quad \cdot \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)] \\
&\quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).
\end{aligned}$$

876. $y = e^{-x^2}$.

$$\text{解 } y' = -2x e^{-x^2}.$$

877. $y = 2^{\operatorname{tg}^3 x}$.

$$\text{解 } y' = -\frac{1}{x^2} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 \quad (x \neq 0).$$

$$878. \quad y = e^x(x^2 - 2x + 2).$$

$$\text{解 } y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2 e^x.$$

$$879. \quad y = \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -e^{-x} \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] \\ &\quad + e^{-x} \left[\frac{1-x^2}{2} \cos x - x \sin x \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1+x)^2}{2} \sin x - (1+x) \cos x \right] \\ &= x^2 e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

$$880. \quad y = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} e^x \csc^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$881. \quad y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}.$$

解

$$y' = \frac{3^x (\ln 3 \cdot \cos x - \sin x) - 3^x \ln 3 (\ln 3 \cdot \sin x + \cos x)}{3^{2x}}$$

$$= - \frac{(1 + \ln^2 3) \sin x}{3^x}.$$

$$882. \quad y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{ax} \{a(a \sin bx - b \cos bx) \\ &\quad + (ab \cos bx + b^2 \sin bx)\} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

$$883. \quad y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$$

$$\text{解} \quad y' = e^x [1 + e^{e^x} (1 + e^{e^{e^x}})].$$

$$884. \quad y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0).$$

解 两边取对数, 得

$$\ln y = x \ln \frac{a}{b} + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a).$$

两端同时对 x 求导数, 得

$$\frac{y'}{y} = \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= y \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) \quad (x > 0). \end{aligned}$$

$$885. \quad y = x^{a^x} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad y' = a^a x^{a^a-1} + a x^{a-1} a^{x^a} \ln a + a^x \cdot a^{a^x} \ln^2 a.$$

$$886. \quad y = \lg^3 x^2.$$

$$\text{解} \quad y' = 3 \lg^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \lg e$$

$$= \frac{6}{x} \lg e \cdot \lg^2 x^2 \quad (x \neq 0).$$

或按 $y = (\lg e \cdot \ln x^2)^3 = 8 \lg^3 e \cdot \ln^3 |x|$ 求导数, 有

$$y' = 24 \lg^3 e \cdot \left(\frac{1}{x} \ln^2 |x| \right)^* \quad (x \neq 0).$$

$$*) \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}, \text{ 以后不再说明.}$$

$$887. \quad y = \ln[\ln(\ln x)].$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \quad (x > e).$$

$$888. \quad y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2 \ln(\ln^3 x) - \frac{1}{\ln^3 x} \\ &\quad \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{6}{x \ln x \cdot \ln(\ln^3 x)} \quad (x > e). \end{aligned}$$

$$889. \quad y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} \quad (x > -1) .\end{aligned}$$

$$890. \quad y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1} .$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{4} [\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)]' \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} \right] = \frac{x}{x^4-1} \quad (|x| > 1) .\end{aligned}$$

$$891. \quad y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4} .$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \ln|x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) ,$$

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 4x^3 \\ &= \frac{1}{x(1+x^4)^2} \quad (x \neq 0) .\end{aligned}$$

$$892. \quad y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} .$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y &= \frac{1}{2\sqrt{6}} [\ln|x\sqrt{3}-\sqrt{2}| \\ &\quad - \ln|x\sqrt{3}+\sqrt{2}|] .\end{aligned}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{3x^2 - 2} \quad \left(|x| > \sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

$$893. \quad y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \\ (0 < k < 1).$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{1-k} \left(-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \\ - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \left(-\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \right) \\ = \frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)} \quad (|x| < 1).$$

$$894. \quad y = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1}).$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})} \\ = \frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} \quad (x > -1).$$

$$895. \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$896. \quad y = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$$

$$\text{解} \quad y' = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x \quad *)$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

*) 利用895题的结果, 下同, 不再说明.

$$897. \quad y = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x.$$

$$\text{解} \quad y' = \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$+ \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$- \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$- 2\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2$$

$$= \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$898. \quad y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}).$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= \sqrt{x^2+a^2}.$$

$$899. \quad y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \right)$$

$$= \frac{1}{a-bx^2} \quad \left(|x| < \sqrt{\frac{a}{b}} \right).$$

$$900. \quad y = \frac{2+3x^2}{x^4} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{6x^5 - 4x^3(2+3x^2)}{x^8} \sqrt{1-x^2} \\ &\quad - \frac{x(2+3x^2)}{x^4 \sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+\sqrt{1-x^2}} \\ &\quad \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \frac{3}{x} \\ &= -\frac{8}{x^5 \sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

$$901. \quad y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin x} \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$902. \quad y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \sec^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\left(|x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}\right).$$

$$903. \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= -\operatorname{ctg} x \cdot \csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= -\operatorname{ctg}^3 x \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$904. \quad y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \\ &= -\frac{1}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}\right). \end{aligned}$$

$$905. \quad y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x}{2 \sin^4 x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) \\ &= \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$906. \quad y = \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} \quad (0 \leq |a| < |b|).$$

解 当 $a=0$ 时, $y=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$. 由于 $1+\sin x$ 非负, 为使对数有意义, 必须有

$$\begin{cases} 1+\sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

当 $(2k-\frac{1}{2})\pi < x < (2k+\frac{1}{2})\pi$ (k 为整数) 时, 上述不等式成立. 在此域内, 得

$$y' = \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

当 $a \neq 0$ 时, 记 $y = \ln u(x)$, 而

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1 + \frac{a}{b} \cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \sin x}{\frac{a}{b} + \cos x} \\ &= \frac{1 + \cos \varphi_0 \cos x + \sin \varphi_0 \sin x}{\cos \varphi_0 + \cos x} \\ &= \frac{1 + \cos(x - \varphi_0)}{\cos x + \cos \varphi_0} = \frac{v_1(x)}{v_2(x)}, \end{aligned}$$

其中 $\varphi_0 = \arctg \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 显然 $v_1(x) \geq 0$. 为保证 y 可导, 首先必须有 $u(x) > 0$, 故应有 $v_1(x) \neq 0$ (从而 $v_1(x) > 0$), 进而应有 $v_2(x) > 0$. 于是, y 的存在域 R 为满足不等式

$$\begin{cases} v_1(x) \neq 0, \\ v_2(x) > 0 \end{cases}$$

的一切 x 值, 记成

$$R = \{x | v_1(x) \neq 0, v_2(x) \geq 0\},$$

则

$$R = \{x | \cos x + \cos \varphi_0 \geq 0 \text{ 且 } x \neq (2k+1)\pi + \varphi_0; \\ k \text{ 为整数}\}.$$

在此域内, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\sin(x-\varphi_0)}{1+\cos(x-\varphi_0)} + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} \\ &= \frac{-\sin x \cos \varphi_0 + \cos x \sin \varphi_0}{1+\cos x \cos \varphi_0 + \sin x \sin \varphi_0} \\ &\quad + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} \\ &= \frac{-\frac{a}{b} \sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}}{1+\frac{a}{b} \cos x + \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} \sin x} \\ &\quad + \frac{\sin x}{\cos x + \frac{a}{b}} \\ &= \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b \cos x}, \end{aligned}$$

其实此结果也包含了 $a=0$ 时的情形.

$$907. \quad y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6).$$

$$\text{解} \quad y' = -\frac{1}{x^2} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} \ln^2 x + \frac{6}{x} \ln x + \frac{6}{x} \right) \\
& = - \frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0) .
\end{aligned}$$

$$908. \quad y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4} .$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= - \frac{1}{x^5} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5} \\
&= \frac{1}{x^5} \ln x \quad (x > 0) .
\end{aligned}$$

$$909. \quad y = \frac{3}{2} (1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3 \ln (1 + \sqrt[3]{1+x^2}) .$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= \frac{3}{2} \cdot 2 (1 - \sqrt[3]{1+x^2}) \left[- \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \right] \\
&+ \frac{3}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \\
&= \frac{2x}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}} .
\end{aligned}$$

$$910. \quad y = \ln \left[\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right] .$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right)} \left[- \frac{1}{x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}} \left(- \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]} \\ (x>0).$$

911. $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)].$

解 $y' = [\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$
 $+x\left[\frac{1}{x}\cos(\ln x)+\frac{1}{x}\sin(\ln x)\right]$
 $= 2\sin(\ln x) \quad (x>0).$

912⁺. $y=\ln\lg\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\lg x.$

解 $y' = \frac{1}{\lg\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sin x\cdot\ln\lg x$
 $-\cos x\cdot\frac{1}{\lg x}\cdot\sec^2 x$
 $=\sin x\cdot\ln\lg x \quad (0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}).$

913. $y=\arcsin\frac{x}{2}.$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (|x|<2).$

914. $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1| < \sqrt{2}) .\end{aligned}$$

$$915. \quad y = \arctg \frac{x^2}{a}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{a}\right)^2} \cdot \frac{2x}{a} = \frac{2ax}{a^2+x^4} \quad (a \neq 0) .$$

$$916. \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\sqrt{2}}{x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2+2} \quad (x \neq 0) .\end{aligned}$$

$$917. \quad y = \sqrt{x} - \arctg \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x \geq 0) .\end{aligned}$$

$$918. \quad y = x + \sqrt{1-x^2} \arccos x.$$

$$\text{解 } y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} \\
&= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \quad (|x| < 1) .
\end{aligned}$$

919. $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} .$

解 $y' = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2}$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \geq 0) .
\end{aligned}$$

920. $y = \arccos \frac{1}{x} .$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1) .$$

921. $y = \arcsin(\sin x) .$

解 $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \operatorname{sgn}(\cos x)$

$$(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).$$

$$922. y = \arccos(\cos^2 x).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x(1+\cos^2 x)}} \\ &= \frac{2 \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad (x \neq k\pi; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$923. y = \arcsin(\sin x - \cos x).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}} \\ &= \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} \quad (0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$924. y = \arccos \sqrt{1-x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

$$925. y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 1). \end{aligned}$$

$$926. \quad y = \arctg \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right).$$

解

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-1}{1 + \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)^2} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= 1 \quad \left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}; k \text{ 为整数} \right). \end{aligned}$$

$$927. \quad y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctg \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \quad (a > b \geq 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{a+b \cos x}. \end{aligned}$$

$$928. \quad y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2}} \\ &\quad \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{2 \operatorname{sgn} x}{1+x^2} \quad (x \neq 0).$$

$$929. \quad y = \frac{1}{\arccos^2(x^2)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= -\frac{2}{\arccos^3(x^2)} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{1-x^4} \cdot \arccos^3(x^2)} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$930. \quad y = \arctg x + \frac{1}{3} \arctg(x^3).$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^6} = \frac{1+x^4}{1+x^6}.$$

$$931. \quad y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \arctg(\sin x).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} - 2 \cos x \cdot \arctg(\sin x) \\ &\quad - \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} \\ &= -2 \cos x \cdot \arctg(\sin x). \end{aligned}$$

$$932. \quad y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x-1} \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1). \end{aligned}$$

$$933. \quad y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{b}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)} \\ &= \frac{a^2+b^2}{(x+a)(b^2+x^2)} \quad (x > -a). \end{aligned}$$

$$934. \quad y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= \sqrt{a^2-x^2}. \end{aligned}$$

$$935. \quad y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{1+x^3} \quad (x \neq -1). \end{aligned}$$

$$936. \quad y = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1} \right)^2} \\
 &\quad \cdot \frac{\sqrt{2}(x^2 - 1) - 2x^2\sqrt{2}}{(x^2 - 1)^2}, \\
 &= \frac{1}{1 + x^4} \quad (|x| \neq 1).
 \end{aligned}$$

$$937. \quad y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= (\arcsin x)^2 + \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad - \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - 2 \\
 &= (\arcsin x)^2 \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$938. \quad y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right) \\
 &= -\frac{\arccos x}{x^2} \quad (0 < |x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$939. \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{1 + (x^2 - 1)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \\ &\quad + \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (x > 1). \end{aligned}$$

$$940. \quad y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x}{1 + x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{1 - x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x} \right) \\ &= \frac{x \arcsin x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$941. \quad y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{1}{12} \left(\frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 + 1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1} \right)^2} \left[\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2 - 1)^2} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3}{1+x^6} \quad \left(|x| \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right).$$

942. $y = \frac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arctg} x^6.$

解
$$y' = \frac{6x^5(1+x^{12}) - 12x^{17}}{(1+x^{12})^2} + \frac{6x^5}{1+x^{12}}$$

$$= \frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}.$$

943⁺. $y = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

解
$$y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot (1 - \sqrt[3]{x})}$$

$$- \frac{1}{2(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right)$$

$$+ \sqrt{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}} \right)^2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= -\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}} \quad (-\infty < x < 1, x \neq 0)$$

944. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$

解
$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right)^2}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1 + \sqrt{1-x^2})^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

$$945. \quad y = \arctg \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= -\frac{1}{1 + \frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}} \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad \cdot \frac{-2\sqrt{ax-x^2} - \frac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{ax-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (0 < x < a). \end{aligned}$$

$$946. \quad y = \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= -\frac{1}{2}\sqrt{1-2x-x^2} - \frac{3-x}{2} \cdot \frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \\ &= \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad (|x+1| < \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$947. \quad y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4} + x} \cdot \left[1 + \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\left\{-\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-1\right\} \\
& -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)^2} \\
& \cdot\frac{1}{x^2}\left[\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}-\sqrt[4]{1+x^4}\right] \\
& =\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} \quad (x\neq 0).
\end{aligned}$$

948. $y = \arctg(\operatorname{tg}^2 x)$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^4 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x \\
&= \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).
\end{aligned}$$

949. $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$
 $+ \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\
&+ \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2}) \sqrt{1-x^2}} \right. \\
&\left. + \frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2}) \sqrt{1-x^2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
& = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\
& \quad (0 < |x| < 1).
\end{aligned}$$

950. $y = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2.$

解 $y' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

$$= \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

951. $y = \ln (e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$

解 $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right)$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

952. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x + \sqrt{1+x^2}).$

解 $y' = \frac{1}{1 + (x + \sqrt{1+x^2})^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

953. $y = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \cos x} \right).$

解

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin \alpha \sin x}{1-\cos \alpha \cos x}\right)^2}} \\
 &\quad \cdot \frac{\sin \alpha \cos x(1-\cos \alpha \cos x)-\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 x}{(1-\cos \alpha \cos x)^2} \\
 &= -\frac{1-\cos \alpha \cos x}{\sqrt{(\cos x-\cos \alpha)^2}} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot (\cos x-\cos \alpha)}{(1-\cos \alpha \cos x)^2} \\
 &= -\frac{\sin \alpha \cdot \operatorname{sgn}(\cos x-\cos \alpha)}{1-\cos \alpha \cos x}
 \end{aligned}$$

($\cos x \neq \cos \alpha$, 即 $x \neq \alpha + 2k\pi$, k 为整数).

$$954. \quad y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}} \right. \\
 &\quad \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{3} \right) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \sqrt{3} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2+2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}}{x^2} \\
 &= \frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}} \quad (0 < |x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$955. \quad y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.$$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{1+x^4}} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}} \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} - \sqrt{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}} \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} + \sqrt{2} \right) \right]$

$$= \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \quad (|x| \neq 1).$$

956. $y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $y' = \frac{1}{(1+x^2)^2} \left[\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) (1+x^2) - 2x^2 \sqrt{1-x^2} \right] + \frac{3}{\sqrt{2} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2} \right)}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2} x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\
 &= \frac{4}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

957. $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x^2 - \cos x^2)^2}} \\
 &\quad \cdot 2x(\cos x^2 + \sin x^2) \\
 &= -\frac{2x(\sin x^2 + \cos x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}} \\
 &\quad \left(0 < |x| < \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}; k=0, 1, 2, \dots\right).
 \end{aligned}$$

958. $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{2x \cos(x^2)}{\sqrt{1-\sin^2(x^2)}} + \frac{2x \sin(x^2)}{\sqrt{1-\cos^2(x^2)}} \\
 &= 2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)] \\
 &\quad \left(|x| \neq \sqrt{\frac{k\pi}{2}}; k=0, 1, 2, \dots\right).
 \end{aligned}$$

959. $y = e^{m \arcsin x} [\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)]$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= e^{m \arcsin x} \left\{ \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} [\cos(m \arcsin x) \right. \\
 &\quad \left. + \sin(m \arcsin x)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} [\cos(m \arcsin x) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin(m \arcsin x) \Big\} \\
& = -\frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} e^{m \arcsin x} \cos(m \arcsin x) \\
& \quad (|x| \leq 1).
\end{aligned}$$

960. $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}.$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \right) \\
&= \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}.
\end{aligned}$$

961. $y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0).$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^{x^x}(x^x \ln x)' \\
&= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^x \cdot x^{x^x} \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right).
\end{aligned}$$

962. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad (a > 0, x > 0).$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= x^{x^a} \left(ax^{a-1} \ln x + \frac{x^a}{x} \right) \\
&\quad + x^{a^x} \left(a^x \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x} \right) \\
&\quad + a^{x^x} \cdot \ln a \cdot x^x(1 + \ln x) \\
&= x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^x} \left(\frac{1}{x} + \ln a \ln x \right) \\
&\quad + x^x \cdot a^{x^x} \ln a (1 + \ln x).
\end{aligned}$$

963. $y = \sqrt[n]{x} \quad (x > 0),$

解 $y' = \left(e^{\frac{1}{n} \ln x} \right)' = x^{\frac{1}{n}-2} (1 - \ln x).$

964. $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$

解 $y' = (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right]$
 $+ (\cos x)^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right]$
 $= (\sin x)^{\cos x+1} [\operatorname{ctg}^2 x - \ln(\sin x)]$
 $- (\cos x)^{\sin x+1} [\operatorname{tg}^2 x - \ln(\cos x)]$
 $\left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right).$

965⁺. $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$

解 $y = \frac{e^{x \ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}} = e^{x \ln(\ln x) - \ln^2 x}.$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left\{ [x \ln(\ln x)]' - (\ln^2 x)' \right\} \\ &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left\{ \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right\} \\ &= \frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}} \left\{ x \ln x \cdot \ln(\ln x) + x - 2 \ln^2 x \right\}. \end{aligned}$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明，中译本基本是按俄文第二版翻译的，俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

966. $y = \lg_x e$.

解 由 $y = \lg_x e$ 推得 $y = \frac{1}{\ln x}$.

于是,

$$y' = -\frac{1}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{x} (\lg_x e)^2 \quad (x > 0, x \neq 1).$$

967. $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}$.

解 $y' = \operatorname{th} x - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \operatorname{th}^3 x$.

968. $y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln\left(\operatorname{cth} \frac{x}{2}\right)$.

解 $y' = \frac{\operatorname{sh}^3 x - 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^4 x} + \frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} \cdot \operatorname{cth} \frac{x}{2}}$
 $= -\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x} \quad (x > 0).$

969. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{th} x)$.

解 $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.

970. $y = \operatorname{arc} \cos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \left(-\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\right)$
 $= \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x} \quad (x \neq 0).$

$$971. \quad y = \frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th} \frac{x}{2}\right) \\ (0 \leq |b| < a).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad y' &= \frac{b}{a} + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{b}{a} + \frac{a^2-b^2}{a(b+a \operatorname{ch} x)} = \frac{a+b \operatorname{ch} x}{b+a \operatorname{ch} x}. \end{aligned}$$

972. 引入中间变量 $u = \cos^2 x$ 求函数

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$$

的导函数.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad u &= \cos^2 x, \quad y = \ln(u + \sqrt{1+u^2}), \\ y'_x &= y'_u \cdot u'_x, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}}, \\ u'_x &= -2 \cos x \sin x = -\sin 2x, \end{aligned}$$

于是,

$$y'_x = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

利用972题所示的方法, 求下列函数的导函数:

$$973^+. \quad y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) \right]$$

$$+\frac{1}{2}\Big].$$

解 设 $u = \arccos x$, 则 $y = u^2 \left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right)$.

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= 2u \left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right) + u^2 \left(\frac{2 \ln u}{u} - \frac{1}{u} \right) \\ &= 2u \ln^2 u = 2 \arccos x \cdot \ln^2(\arccos x), \end{aligned}$$

$$u'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

于是,

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_x = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \\ &\quad \cdot \ln^2(\arccos x) \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$974^+. \quad y = \frac{1}{2} \arctg(\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}.$$

解 设 $u = \sqrt[4]{1+x^4}$, 则

$$y = \frac{1}{2} \arctg u + \frac{1}{4} \ln \frac{u+1}{u-1}.$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{1}{2(1+u^2)} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) \\ &= \frac{1}{1-u^4} = -\frac{1}{x^4}, \end{aligned}$$

$$u'_x = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = -\frac{1}{x \sqrt[3]{(1+x^4)^3}} \quad (x \neq 0).$$

$$975. \quad y = \frac{e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1-e^{-2x^2}).$$

解 设 $u = e^{-x^2}$, 则

$$y = \frac{u \arcsin u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{2} \ln(1-u^2).$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{\left(\arcsin u + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \sqrt{1-u^2} + \frac{u^2 \arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} \\ &\quad - \frac{u}{1-u^2} \\ &= \frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

$$u'_x = -2xe^{-x^2},$$

于是,

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_x = \frac{-2xe^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$976. \quad y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arctg}(a^{-x}).$$

解 设 $u = a^x$, 则

$$y = \frac{u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} \operatorname{arc\,ctg}(u^{-1}).$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{(1+u^2) - 2u^2}{(1+u^2)^2} \\ &\quad - \frac{-2u(1+u^2) - 2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \operatorname{arc\,ctg}(u^{-1}) \\ &\quad - \frac{1-u^2}{1+u^2} \cdot \frac{1}{u^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)} \\ &= -\frac{4u \operatorname{arc\,ctg}(u^{-1})}{(1+u^2)^2} = -\frac{4a^x \cdot \operatorname{arc\,ctg}(a^{-x})}{(1+a^{2x})^2}, \end{aligned}$$

$$u'_x = a^x \ln a,$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = -\frac{4a^{2x} \ln a}{(1+a^{2x})^2} \operatorname{arc\,ctg}(a^{-x})$$

$$(a > 0).$$

977. 求函数的导函数并作函数及导函数的图形, 设:

(a) $y = |x|$; (b) $y = x|x|$; (B) $y = \ln|x|$.

解 (a) $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (\text{图2.2}).$

$$y' = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad \text{或写成 } y' = \frac{|x|}{x}.$$

在 $x = 0$ 时 y' 不存在 (图2.3).

$$(6) \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x^2, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (\text{图2.4}).$$

$$y' = \begin{cases} 2x, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ -2x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad \text{而且易见有 } y'|_{x=0} = 0,$$

故 $y' = 2|x|$ *) (图2.5) .

*) 以下各题, 对于分界点的导数, 不再单独讨论.

$$(B) \quad y = \ln|x| \quad (\text{图2.6}).$$

$$y' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad (\text{图2.7}).$$

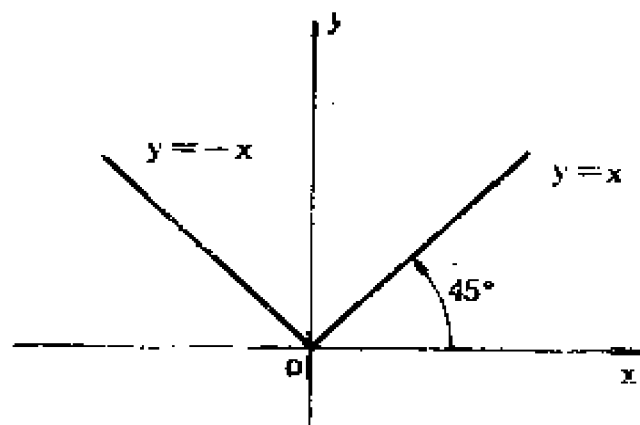


图 2.2

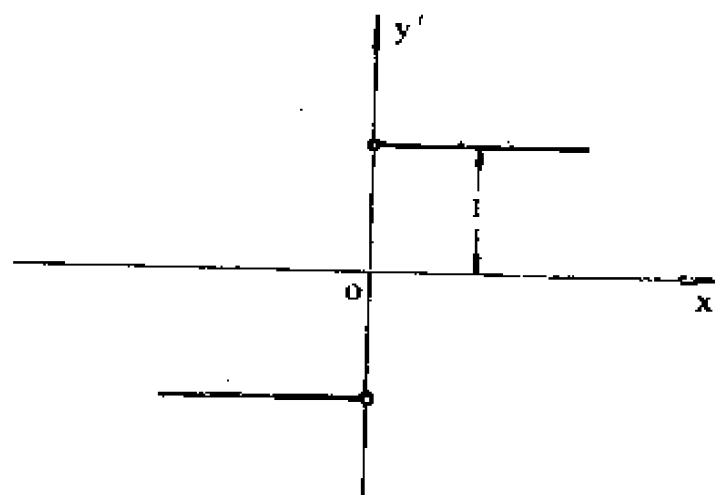


图 2.3

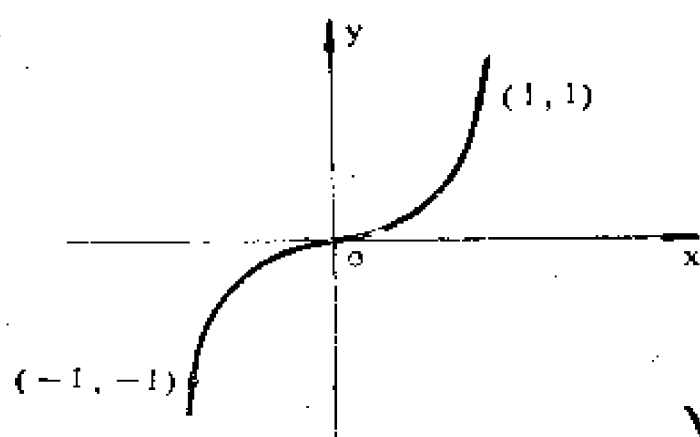


图 2.4

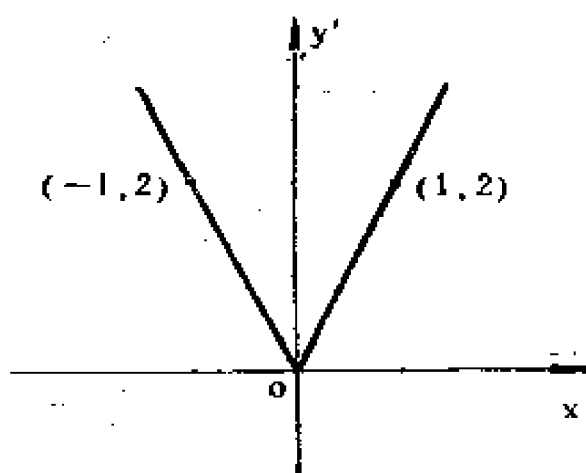


图 2.5

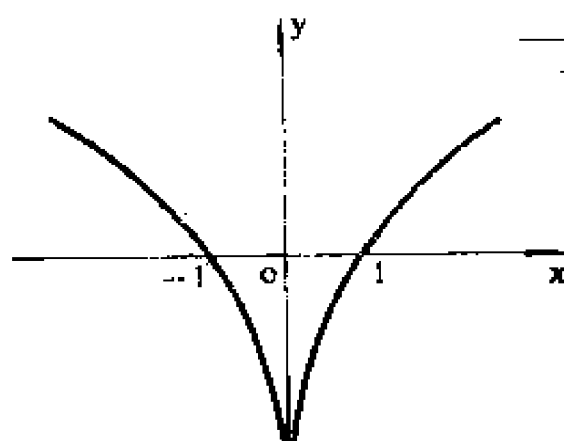


图 2.6

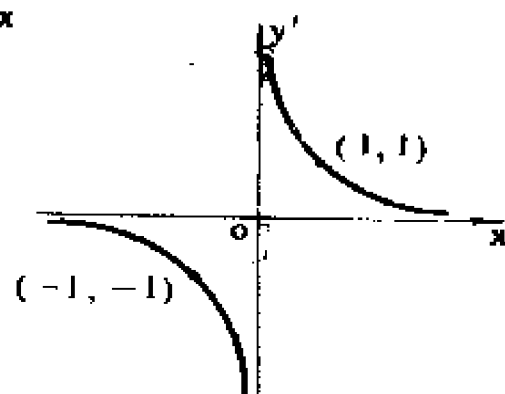


图 2.7

978. 求下列函数的导函数:

(a) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$; (б) $y = |\sin^3 x|$;

(в) $y = \arccos \frac{1}{|x|}$; (г) $y = [x] \sin^2 \pi x$.

$$\begin{aligned}\text{解 (a) } y' &= \frac{|(x-1)^2(x+1)^3|}{(x-1)^2(x+1)^3} [2(x-1)(x+1)^3 \\ &\quad + 3(x-1)^2(x+1)^2] \\ &= (x-1)(x+1)^2(5x-1) \underline{\text{sgn}(x+1)} \\ &\quad (|x| \neq 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b) } y' &= \frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x} 3 \sin^2 x \cos x \\ &= \frac{3}{2} \sin 2x |\sin x| \quad (x \neq k\pi, k \text{ 为整数}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(B) } y' &= \left[-\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \right] \cdot \left[-\left(\frac{|x|}{x \cdot x^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \quad (|x| > 1); \end{aligned}$$

$$\text{(r) 对于 } y = [x] \text{ 有 } y' = 0$$

$$(x \neq k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

于是, 当 $x \neq k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 有

$$\begin{aligned}\{[x] \sin^2 \pi x\}' &= 2\pi \sin \pi x \cos \pi x \cdot [x] \\ &= \pi [x] \sin 2\pi x.\end{aligned}$$

容易直接验证当 $x = k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时上式也成立.

求导函数并作出函数及其导函数的图形:

$$979. \quad y = \begin{cases} 1-x & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{当 } 1 \leq x \leq 2; \\ -(2-x) & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases} \quad (\text{图2.3})$$

解 显然 $y' = \begin{cases} -1 & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ 2x-3 & \text{当 } 1 \leq x \leq 2; \\ 1 & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

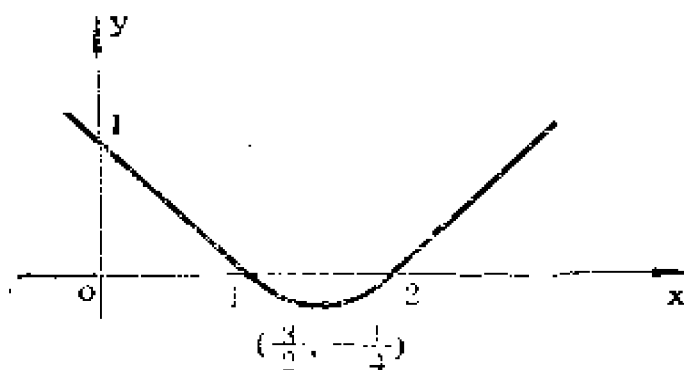


图 2.8

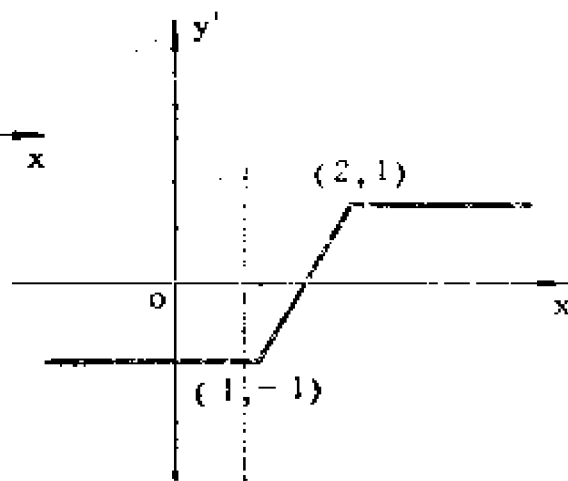


图 2.9

当 $x = 1$ 时, 右导数

$$y'_+|_{x=1} = (2x-3)|_{x=1} = -1,$$

左导数

$$y'_-|_{x=1} = -1.$$

因此 $x = 1$ 的导数存在, 且 $y'|_{x=1} = -1$. 同理, 可得 $y'|_{x=2} = 1$. 于是

$$y' = \begin{cases} -1, & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ 2x-3, & \text{当 } 1 \leq x \leq 2; \\ 1, & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases} \quad (\text{图2.9})$$

注: 在下面980题到983题中, 求分段定义函数的导数时, 在分段点, 都要先求其左、右导数. 若左、右导数存在而且相等, 则导数存在. 为简便计, 我们只写出结果, 而省去了 (在分段点) 求左、右导数的

过程.

$$980. \quad y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & \text{当 } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{在线段 } [a, b] \text{ 之外.} \end{cases} \quad (\text{图 } 2.10)$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & \text{当 } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{当 } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

(图 2.11)

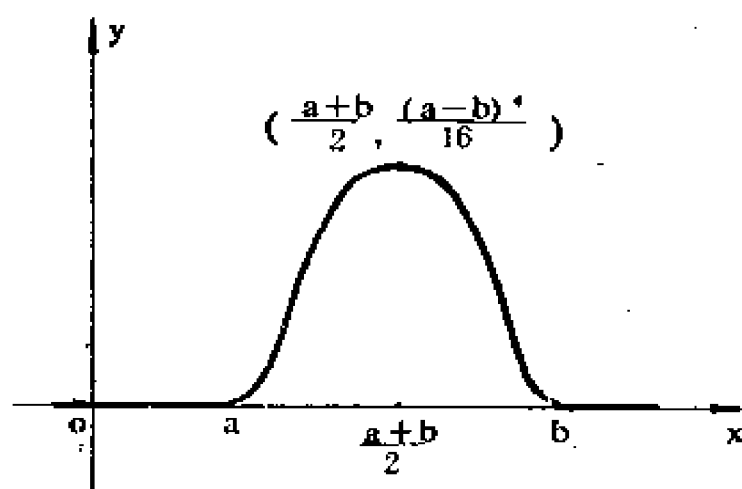


图 2.10

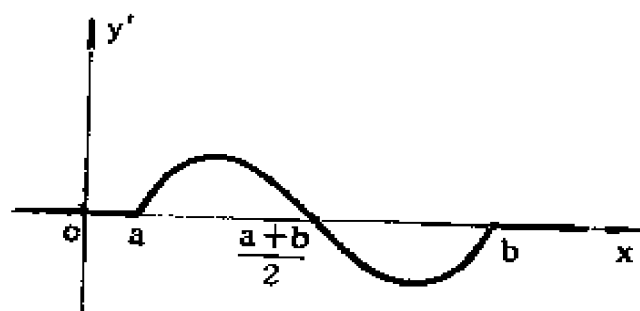


图 2.11

$$981. \quad y = \begin{cases} x & \text{当 } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{当 } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{图 } 2.12)$$

解 $y' = \begin{cases} 1 & \text{当 } x < 0; \\ \frac{1}{1+x} & \text{当 } x \geq 0. \end{cases}$ (图2.13)

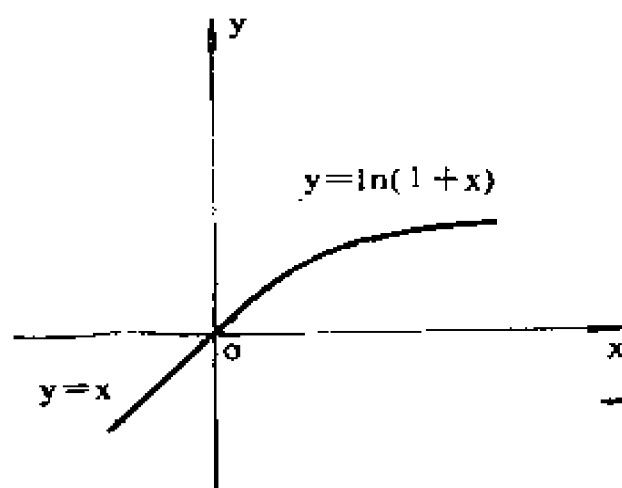


图 2.12

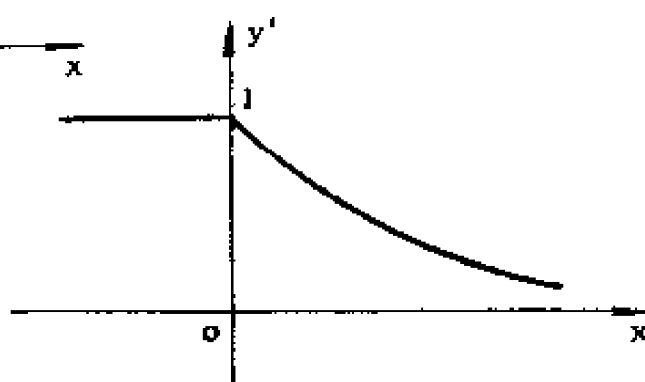


图 2.13

982. $y = \begin{cases} \arctg x & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$ (图2.14)

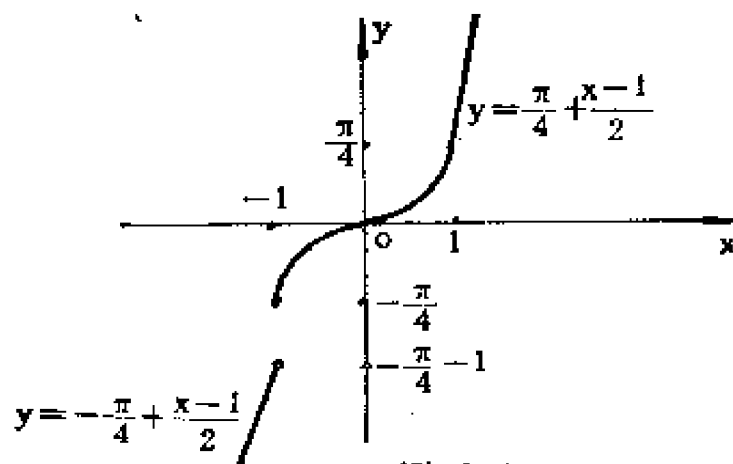


图 2.14

$$\text{解 } y = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{当 } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{当 } |x| > 1 \end{cases} \quad (\text{图2.15})$$

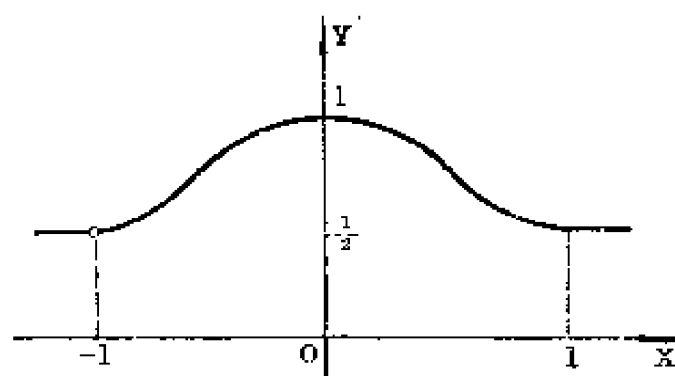


图 2.15

$$983. \quad y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{1}{e} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图2.16})$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2) & \text{当 } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图2.17})$$

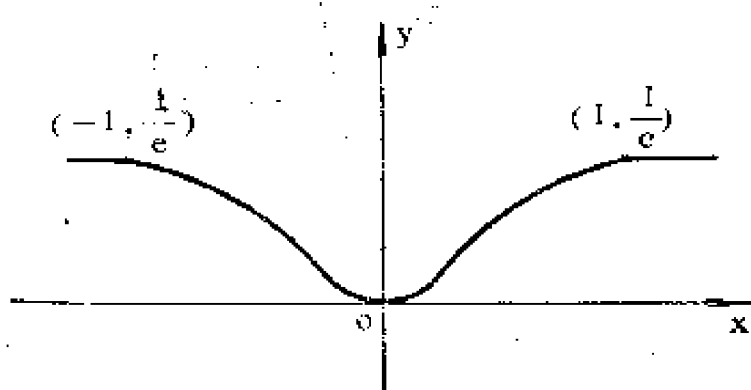


图 2.16

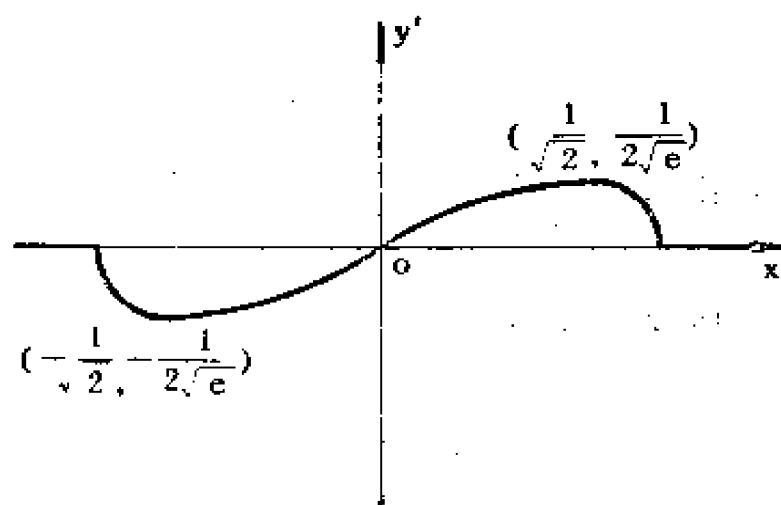


图 2.17

984. 由已知函数的对数得来的导函数称为此函数的对数的导函数;

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

已知函数 y , 求其对数的导函数:

$$(a) \quad y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad (b) \quad y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}};$$

$$(B) \quad y = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n};$$

$$(r) \quad y = (x + \sqrt{1+x^2})^a.$$

解 (a) 由 $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得

$$\ln y = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln |1+x|,$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}$$

$$= \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)} \quad (0 < |x| < 1);$$

(6) 由 $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y = 2 \ln |x| - \ln |1-x| + \frac{1}{3} \ln |3-x|$$

$$- \frac{2}{3} \ln |3+x|,$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3(3-x)}$$

$$- \frac{2}{3(3+x)}$$

$$= \frac{54 - 36x + 4x^2 + 2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$$

$$(x \neq 0, x \neq 1, |x| \neq 3);$$

(B) 由于 $y = \prod_{i=1}^n (x-a_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内,

故应设 $\prod_{i=1}^n (x-a_i)^{\alpha_i} > 0$, 从而有

$$\ln y = \ln \prod_{i=1}^n (x-a_i)^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln |x-a_i|,$$

得

$$\frac{d}{dx} \ln y = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x-a_i} \quad (x \in R),$$

$$\text{其中 } R = \left\{ x \mid \prod_{i=1}^n (x-a_i)^{\alpha_i} > 0 \right\};$$

(r) 由 $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$ 得

$$\ln y = n \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

985. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微分函数, 求函数 y 的导函数, 若:

(a) $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$; (б) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

(B) $y = {}^{\varphi(x)}\sqrt{\psi(x)}$ [$\varphi(x) \neq 0$, $\psi(x) \geq 0$];

(r) $y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x)$ [$\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$].

解 (a) $y' = \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$
 $[\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0].$

(б) $y' = \frac{1}{1 + \frac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}} \cdot \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\psi^2(x)}$
 $= \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$
 $(\psi(x) \neq 0).$

(B) 由 $y = {}^{\varphi(x)}\sqrt{\psi(x)}$ 得

$$\ln y = \frac{1}{\varphi(x)} \ln \psi(x).$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x) - \varphi'(x) \ln \psi(x)}{\varphi^2(x)}$$

于是,

$$y' = {}^{\varphi(x)}\sqrt{\psi(x)} \cdot \left\{ \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}.$$

(r) 由 $y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x)$ 得

$$y = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)},$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \ln \varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)} \\ &= \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln \varphi(x)} \\ &\quad - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)}. \end{aligned}$$

986. 求 y' , 设:

$$(a) \ y = f(x^2); \quad (b) \ y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x);$$

$$(B) \ y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}; \quad (r) \ y = f\{f[f(x)]\},$$

其中 $f(u)$ 表示可微分的函数.

解 (a) $y' = 2x f'(x^2);$

$$\begin{aligned} (b) \ y' &= 2 \sin x \cos x f'(\sin^2 x) \\ &\quad - 2 \sin x \cos x f'(\cos^2 x) \\ &= \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]; \end{aligned}$$

$$(B) \quad y' = e^{f(x)} [f'(x) f(e^x) + e^x f'(e^x)];$$

$$(F) \quad y' = f'(x) \cdot f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}.$$

987. 证明 n 阶行列式微分法:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

证 证法一: 从行列式的定义出发予以证明.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad f_{nj_n}(x) \quad *) \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \frac{d}{dx} [f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \cdot f_{nj_n}(x)] \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \sum_{i=1}^n f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} f_{ij_1}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\
& \quad \frac{d}{dx} f_{ij_i}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\
&= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

*) 其中 $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

证法二: 利用数学归纳法予以证明.

由于

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} \\
&= \frac{d}{dx} [f_{11}(x) f_{22}(x) - f_{12}(x) f_{21}(x)] \\
&= \left[\frac{d}{dx} f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - \frac{d}{dx} f_{12}(x) \cdot f_{21}(x) \right] \\
& \quad + \left[-\frac{d}{dx} f_{22}(x) \cdot f_{11}(x) - \frac{d}{dx} f_{21}(x) \cdot f_{12}(x) \right]
\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} f_{11}(x) & \frac{d}{dx} f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ \frac{d}{dx} f_{21}(x) & \frac{d}{dx} f_{22}(x) \end{vmatrix},$$

知等式 (1) 对于 $n = 2$ 时成立.

今假定等式 (1) 对于 $n = k$ 时成立, 即

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} \\ = \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}.$$

要证明等式 (1) 对于 $n = k + 1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1, k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{i, k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+1,1}(x) & f_{k+1,2}(x) & \cdots & f_{k+1, k+1}(x) \end{vmatrix} \\ = \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+i+1} f_{k+1, i}(x)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \cdot \sum_{i=1}^k \\
& \left| \begin{array}{cccc} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \cdots & & & \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ij-1}(x) & \frac{d}{dx} f_{ij+1}(x) \cdots \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \cdots & & & \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{ki-1}(x) & f_{ki+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right| \\
& = \left| \begin{array}{ccc} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x) \end{array} \right| + \\
& + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+i+1} f_{k+1j}(x) \\
& \left| \begin{array}{cccc} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \cdots & & & \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ij-1}(x) & \frac{d}{dx} f_{ij+1}(x) \cdots \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \cdots & & & \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{ki-1}(x) & f_{ki+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right| \\
& = \left| \begin{array}{ccc} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x) \end{array} \right| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} \\
& = \sum_{i=1}^{k+1} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

故等式 (1) 对于 $n=k+1$ 时也成立.

于是, 由数学归纳法知, 等式 (1) 对于一切自然数 n 均成立.

988. 设:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

解 用上题结果, 有

$$\begin{aligned}
F'(x) = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \\
& \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} +
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
= (x^2 + x + 9) + (x^2 - 1 + 4) + (x^2 - x + 3) \\
= 3(x^2 + 5),$$

989. 设:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \\ &\quad \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 0 + 6(2x^2 - x^2) = 6x^2. \end{aligned}$$

990. 已知函数的图形. 近似地作出其导函数的图形.

解 先由给定曲线 $y=f(x)$ 上一点 M , 作出曲线 $y'=f'(x)$ 上的对应点 M' . 为清楚起见, 作两个坐标系 Oxy 及 $O'x'y'$, 取相同的单位, x 轴与 x' 轴平行, y 轴及 y' 轴平行且在一条直线上 (如图 2.18).

在 Oxy 系内画出曲线 $y=f(x)$, 在曲线上任取一点 $M(x, f(x))$, 并作曲线在点 M 处的切线 MN . 过 $O'x'y'$ 系内的点 $P(-1, 0)$ 作平行 MN 的直线 PQ 交

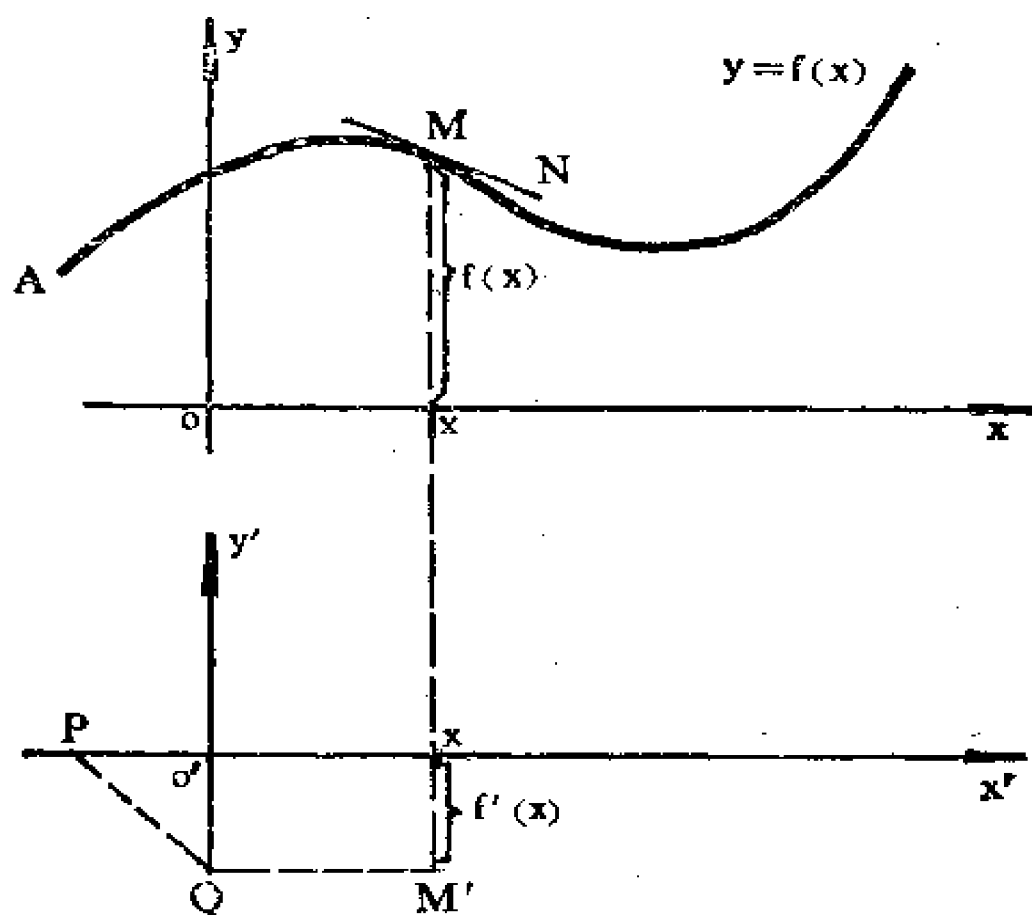


图 2.18

y' 轴于点 Q ，于是

$$O'Q = \operatorname{tg} \alpha = f'(x),$$

即线段 $O'Q$ 是对应于在点 x 的导函数 $f'(x)$ ，再过点 Q 引平行 x 轴的直线，交过点 $(x, 0)$ 且垂直于 x 轴的直线于点 M' ，则点 M' 就是曲线 $y' = f'(x)$ 上对应于曲线 $y = f(x)$ 上点 M 的点。

由此，我们就可由已给曲线 $y = f(x)$ 作出曲线 $y' = f'(x)$ ，按上述方法，在曲线 $y = f(x)$ 上取若干点：

$$M_i(x_i, f(x_i)) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

且在 Oxy' 系（相当于 $O'x'y'$ 系，这是为了方便起见，分开画）内作出对应点：

$$M_i'(x_i, f'(x_i)) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

最后用光滑曲线连接 M_1', M_2', \dots, M_n' 各点，此即已给曲线 $y=f(x)$ 对应的导函数 $y'=f'(x)$ 的图形，如图2.19所示。

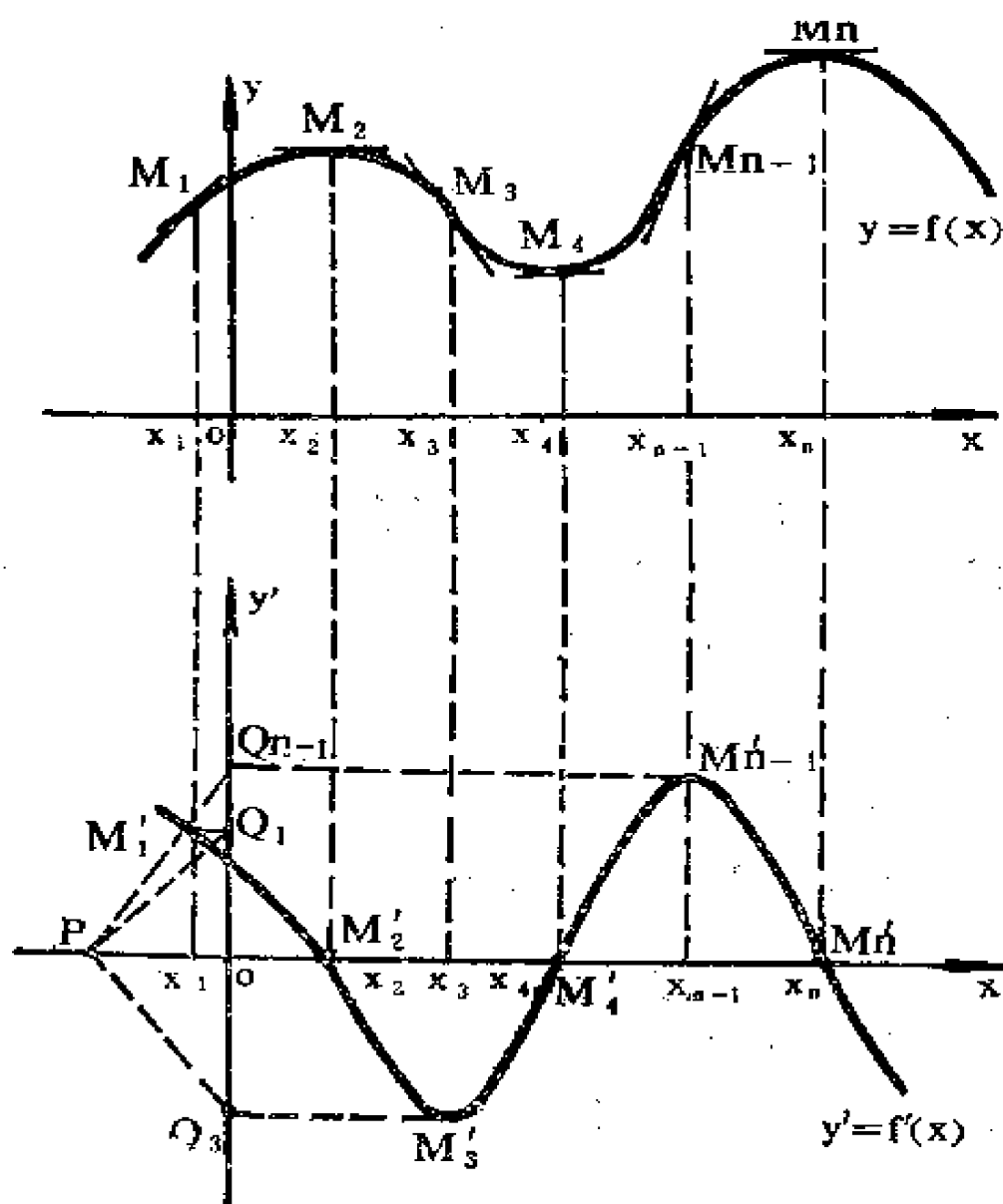


图 2.19

991. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{当 } x \neq 0; \\ 0 & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

有不连续的导函数.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

而

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0, \end{aligned}$$

故 $f'(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 中处处存在. 但当 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x)$ 并不趋向于任何极限, 所以 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处是间断的, 这就说明了 $f(x)$ 有不连续的导函数.

992. 在甚么条件下函数

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

(a) 在 $x = 0$ 处是连续的; (b) 在 $x = 0$ 处可微分;

(B) 在 $x = 0$ 处其导函数是连续的?

解 (a) 当 $n > 0$ 时

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0,$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 此时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的 (当 $n = \frac{p}{q}$ (p, q 互质) 且 q 为偶数时, 只考虑在 $x = 0$ 处右连续).

(6) 当 $n > 1$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

于是, $f'(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是可微的,

(B) 当 $n > 2$ 时, 由于

$$f(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} (x \neq 0),$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

而由(6)可得 $f'(0) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. 这就说明当 $n > 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

993. 在甚么条件下函数

$$\begin{aligned} f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0 \\ (m > 0) \end{aligned}$$

有: (a) 于坐标原点的邻域上有有界的导函数;

(6) 在此域上无有界的导函数.

解 (a) 当 $x \neq 0$, $x \in (-\delta, \delta)$ ($\delta > 0$) 时,

$$f(x) = n|x|^{n-1} \frac{|x|}{x} \sin \frac{1}{|x|^m}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{|x|^{m+1}} \cdot \frac{|x|}{x} \cdot |x|^n \cdot \cos \frac{1}{|x|^m} \\
&= \frac{|x|}{x} \left[n |x|^{n-1} \sin \frac{1}{|x|^m} \right. \\
&\quad \left. - m |x|^{n-(m+1)} \cos \frac{1}{|x|^m} \right].
\end{aligned}$$

由于 $\frac{|x|}{x}$, $\sin \frac{1}{|x|^m}$, $\cos \frac{1}{|x|^m}$ 均为有界函数, 于是当 $n \geq m+1$ 时, $f'(x)$ 为有界函数 (易知此时 $f'(0)=0$).

(6) 在此域上, 当 $n-(m+1) < 0$ (即 $n < m+1$) 时 $f'(x)$ 无界. 另一方面, 同 992 题 (6) 一样, 当 $n > 1$ 时 $f'(0)$ 才存在, 因而所求的条件为

$$1 \leq n \leq m+1 \quad (m \geq 0).$$

994. 设:

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的, 求 $f'(a)$.

解 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \varphi(a+\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x),$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x) = \varphi(a)$.

于是, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \varphi(a)$, 即

$$f'(a) = \varphi(a).$$

995. 设:

$$f(x) = |x - a| \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为连续函数及 $\varphi(a) \neq 0$, 证明此函数在 a 点没有导数.

单侧导函数 $f'_-(a)$ 及 $f'_+(a)$ 等于甚么?

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \varphi(a + \Delta x) \\ &= \begin{cases} \varphi(a + \Delta x), & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时,} \\ -\varphi(a + \Delta x), & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} [-\varphi(a + \Delta x)] = -\varphi(a),$$

即

$$f'_-(a) = -\varphi(a);$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} [\varphi(a + \Delta x)] = \varphi(a),$$

即

$$f'_+(a) = \varphi(a).$$

由于 $\varphi(a) \neq 0$, 故 $f'_-(a) \neq f'_+(a)$, 因此 $f(x)$ 在 a 点没有导数.

996. 举出在已知点: a_1, a_2, \dots, a_n 没有导数的连续函数的例子.

解 我们已知 $y = |x - a|$ 在 $x = a$ 处连续而无导数. 利用这一点, 我们作一个函数

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|,$$

它在 a_1, a_2, \dots, a_n 点均连续, 而在这些点均无导数.

997. 证明: 函数

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域上有不可微分的点, 但在 $x = 0$ 这点是可微分的.

作出此函数的略图.

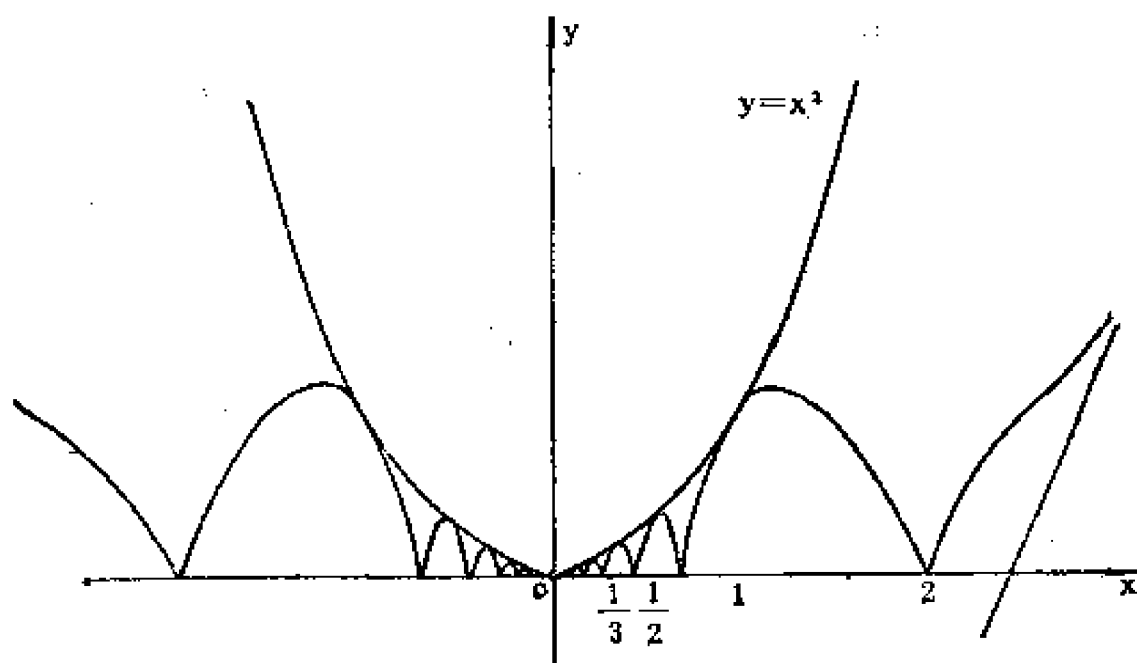


图 2.20

证 对于函数 $f(x)$, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{x} = 0,$$

故 $f'(0) = 0$, 即在 $x = 0$ 处函数 $f(x)$ 是可微的.

下面我们将指出对于 $x = 0$ 的任何邻域 $(-\delta, \delta)$ (其中 $\delta > 0$) 中, 函数 $f(x)$ 总有不可微分的点. 事实上, 令

$$x_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

则当 n 充分大时, 总可使 $0 < x_n < \delta$, 从而点 $x_n \in (-\delta, \delta)$. 对于这样的点 x_n , 有

$$f'_-(x_{2n}) = \pi \quad \text{及} \quad f'_+(x_{2n}) = -\pi,$$

所以

$$f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_-(x_{2n+1}) \neq f'_+(x_{2n+1}).$$

于是, 函数 $f(x)$ 在点 x_n 处不可微.

函数的图形全在 Ox 轴上方, 包括原点; 当

$x = \frac{2}{2n+1}$ 时, $f(x) = 0$, 且 $f'(x)$ 不存在. 此函数的

略图如图2.20所示.

998. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 时有导数.

证 $\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$

$$= \begin{cases} \Delta x, & \text{当 } \Delta x \text{ 为有理数;} \\ 0, & \text{当 } \Delta x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

于是, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0,$$

即

$$f'(0) = 0.$$

其次, 对于任一点 $x \neq 0$, 分两种情形讨论函数的可微性:

(1) x 为有理数. 取一无理数数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 则有

$$\lim_{x_n \rightarrow x} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{x_n \rightarrow x} \frac{0 - x^2}{x_n - x} = \infty.$$

由此可知, 函数 $f(x)$ 在任一有理点 ($\neq 0$) 不可微.

(2) x 为无理数. 取一异于零的有理数数列 $\{x_n'\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n' = x$, 则有

$$\lim_{x_n' \rightarrow x} \frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x} = \lim_{x_n' \rightarrow x} \frac{x_n'^2}{x_n' - x} = \infty.$$

由此可知, 函数 $f(x)$ 在任一无理点也不可微.

综上所述, 函数 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 时有导数.

999. 研究下列函数的可微性:

(a) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|;$

(b) $y = |\cos x|;$

(c) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x;$

$$(F) \quad y = \arcsin(\cos x);$$

$$(A) \quad y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{当 } |x| \leq 1; \\ |x| - 1 & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

解 (a) 当 $x \neq 1$ 或 $x \neq 2$ 或 $x \neq 3$ 时, 函数均可微. 现在我们来考察在 1, 2, 3 这三点的可微性.

1. 当 $x = 1$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \left| (\Delta x - 1)^2 (\Delta x - 2)^3 \right|,$$

$$\text{故 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -8.$$

因此 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在, 由此可知 y 在 $x = 1$ 点不可微;

2. 当 $x = 2$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 1)(\Delta x - 1)^3|,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而 y 在 $x = 2$ 点可微;

3. 当 $x = 3$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 2)(\Delta x + 1)^2 \Delta x|,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而 y 在 $x = 3$ 点可微.

(6) $y = |\cos x|$ 在 $x = \frac{2k-1}{2}\pi$ (k 为整数) 点

不可微分.

(B) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ 只可能在 $x = \pm\pi$ 的点不可微分. 现在我们来考察在 $x = -\pi$ 及 $x = \pi$ 时函数 y 的可微性.

1. 当 $x = \pi$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{|\pi^2 - (\pi + \Delta x)^2| \sin^2(\pi + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \frac{|\sin \Delta x \sin \Delta x| 2\pi \Delta x + (\Delta x)^2|}{\Delta x},\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以函数 y 在 $x = \pi$ 点可微.

2. 同理可证函数 y 在 $x = -\pi$ 点也可微.

于是, 函数 $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ 处处可微分.

(C) $y = \arcsin(\cos x)$ 在 $|\cos x| = 1$ 的点不可微分, 即在 $x = k\pi$ (k 为整数) 的点不可微分.

(D) 函数 y 对于 $|x| \neq 1$ 的点均可微. 现在我们来考虑函数 y 在 $|x| = 1$ 点的可微性.

1. 当 $x = 1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\Delta x + 2)^2, & \text{当 } \Delta x < 0; \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0; \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, 即函数 y 在 $x=1$ 点可微.

2. 当 $x=-1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x} = -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时,} \\ \frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{\frac{4}{\Delta x}} = -\frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以函数 y 在 $x=-1$ 点不可微分.

求函数 $f(x)$ 左侧和右侧的导函数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$,

设:

1000. $f(x) = |x|$.

解 当 $x \neq 0$ 时, 易见

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x,$$

当 $x=0$ 时,

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

所以,

$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1.$$

1001. $f(x) = [x] \sin \pi x$.

解 当 $x \neq$ 整数时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \pi [x] \cos \pi x;$$

当 x 为整数时, 从定义出发得

$$\begin{aligned} f'_+(k) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{[k + \Delta x] \sin \pi(k + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{k \cos k\pi \sin(\pi \Delta x)}{\Delta x} \\ &= k\pi (-1)^k, \end{aligned}$$

同法可得 $f'_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k$.

1002. $f(x) = x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$

解 当 $x \neq \frac{2}{2k+1}$ (k 为整数) 时 (即使 $\cos \frac{\pi}{x} \neq 0$ 的 x 值),

$$\begin{aligned} f'_-(x) &= f'_+(x) \\ &= \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| + \frac{\pi}{x} \frac{\left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{\cos \frac{\pi}{x}} \sin \frac{\pi}{x} \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} \right) \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi}{x} \right); \end{aligned}$$

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ 时, 从定义出发易得

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -\frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = \frac{2k+1}{2}\pi \quad (k \text{ 为整数}).$$

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

解 当 $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \left[-\sqrt{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x^2}} \right] = -1. \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{2k\pi}$ ($k = 1, 2, \dots$) 时, 我们有

$$\begin{aligned} f'_+(\sqrt{2k\pi}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi} + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\sin[2\Delta x\sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2]}{2\Delta x\sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2}} \end{aligned}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x} + 1}$$

$$= +\infty;$$

同理, 可得

$$f'_-(\sqrt{2k\pi}) = -\infty \quad (k=1, 2, \dots);$$

$$f'_+(\sqrt{(2k+1)\pi}) = +\infty \quad (k=1, 2, \dots).$$

1004. $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2};$$

当 $x = 0$ 时,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0.$$

1005. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}};$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \sqrt{\frac{1-e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = -1 \end{aligned}$$

同理可求得 $f'_+(0) = 1$.

1006. $f(x) = |\ln|x||$ ($x \neq 0$).

解 当 $|x| \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(x) = f'_+(x) &= \frac{|\ln|x||}{\ln|x|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{|\ln|x||}{\ln|x|}, \end{aligned}$$

分两种情况:

1° 当 $0 < |x| < 1$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = -\frac{1}{x},$$

2° 当 $|x| > 1$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1}{x};$$

当 $|x| = 1$ 时,

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\ln|1+\Delta x||}{\Delta x} \\
&= - \lim_{\Delta x \rightarrow -0} |\ln(1+\Delta x)|^{\frac{1}{\Delta x}} \\
&= -\ln e = -1,
\end{aligned}$$

同理可求得 $f'_-(-1) = -1$, $f'_+(\pm 1) = 1$.

1007. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $|x| \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned}
f'_-(x) &= f'_+(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
&= \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} \\
&= \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sgn}(1-x^2);
\end{aligned}$$

当 $x = 1$ 时,

$$\begin{aligned}
f'_-(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin \frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2} - \arcsin 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arcsin \frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}}{\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}} \\
&\quad \cdot \frac{\frac{(1+\Delta x)^2-1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

同理可求得

$$f'_-(-1) = -1, \quad f'_+(1) = -1, \quad f'_+(-1) = 1.$$

1008. $f(x) = (x-2) \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2), \quad f(2) = 0.$

解 当 $x \neq 2$ 时,

$$\begin{aligned}
f'_-(x) &= f'_+(x) \\
&= \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} \\
&\quad + \frac{x-2}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2} \cdot \left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right] \\
&= \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1};
\end{aligned}$$

当 $x = 2$ 时,

$$\begin{aligned}
f'_-(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

同理可求得 $f'_+(2) = \frac{\pi}{2}$.

1009. 证明: 在 $x \neq 0$ 时函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 在 $x = 0$ 时 $f(0) = 0$, 在此点连续, 但在此点既无左侧导数, 又无右侧导数.

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

其次, 由于

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左、右侧趋向于零, 此极限均不存在, 因此在点 $x = 0$, 函数 $f(x)$ 既无左侧导数, 也无右侧导数.

1010. 设:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 于点 $x = x_0$ 处连续而且可微分, 应当如何选取系数 a 和 b ?

解 $f(x_0) = x_0^2 = f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0) = ax_0 + b$. 当

$$x_0^2 = ax_0 + b$$

时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 又因 $f'_-(x_0) = 2x_0$, $f'_+(x_0) = a$, 故当

$$a = 2x_0$$

时, 函数在点 x_0 处可微. 从而得

$$x_0^2 = 2x_0^2 + b,$$

即

$$b = -x_0^2.$$

于是, 所求的系数为

$$a = 2x_0, \quad b = -x_0^2.$$

1011. 设:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0, \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 为左方可微分的. 应当选择如何的系数 a 和 b , 使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微分?

解 $F(x_0) = F(x_0 - 0) = f(x_0),$

$F(x_0 + 0) = ax_0 + b.$ 当

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

时, 函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 又因 $F'_-(x_0) = f'_-(x_0), F'_+(x_0) = a,$ 故当

$$a = f'_-(x_0)$$

时, 函数 $F(x)$ 在点 x_0 处可微分.

解方程组

$$\begin{cases} a = f'_-(x_0), \\ f(x_0) = ax_0 + b, \end{cases}$$

即得所求的系数为

$$a = f'_-(x_0), \quad b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0).$$

1012. 适当地选定参数 A 与 c 用立方抛物线

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c)$$

在区域 $a \leq x \leq b$ 上把两个半直线:

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a)$$

及

$$y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

光滑地连接起来.

解 对于立方抛物线,

$$y' = A[(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)],$$

此即曲线上在任一点切线的斜率.

当接点处两条曲线的切线重合时, 它们就平滑地联接起来, 此时应有相等的斜率. 于是, 有

1°. 在点 $x=a$ 处,

$$A(a-b)(a-c) = k_1; \quad (1)$$

2°. 在点 $x=b$ 处,

$$A(b-a)(b-c) = k_2. \quad (2)$$

联立 (1) 和 (2) 式, 解之得

$$A = \frac{k_1 + k_2}{(b-a)^2}, \quad c = \frac{ak_2 + bk_1}{k_1 + k_2}.$$

1013. 用抛物线 $y = a + bx^2$ ($|x| \leq c$) (其中 a 与 b 为未知的参数) 去补充曲线 $y = \frac{m^2}{|x|}$ ($|x| > c$) 的部分, 使所得的为一平滑曲线.

解 显见 $c > 0$, 否则在点 $x=c$ 处就不可能形成一平滑曲线. 此时, 在点 $x=c$ 处两曲线的切线斜率相等, 且有相同的纵坐标. 于是, 有

$$(a+bx^2)' \Big|_{x=c} = \left(\frac{m^2}{|x|} \right)' \Big|_{x=c}$$

及

$$a+bc^2 = \frac{m^2}{c}.$$

从而得

$$\begin{cases} 2bc = -\frac{m^2}{c^2}, \\ a+bc^2 = \frac{m^2}{c}. \end{cases}$$

解之，得

$$a = \frac{3m^2}{2c}, \quad b = -\frac{m^2}{2c^3}.$$

由曲线的对称性可知，在点 $x=-c$ 处，按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y=a+bx^2$ 与曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}$ 也联成一平滑曲线。

1014. 若：(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数，而函数 $g(x)$ 在这点没有导数；(b) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数，可否断定它们的和

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

在点 $x=x_0$ 没有导数？

解 (a) 能，因为

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ ，上式右端第一项的极限存在，而第二项

的极限不存在. 因而当 $\Delta x \rightarrow 0$, 左端的极限也不存在 (否则差 $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ 的极限就存在, 与 $g(x)$ 不可导相矛盾), 这说明 $F(x)$ 在点 x_0 没有导数.

(6) 不能. 例如,

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, \quad g(x) = \frac{x - |x|}{2},$$

它们在点 $x = 0$ 处都没有导数, 但它们的和 $F(x) = f(x) + g(x) = x$ 在点 $x = 0$ 处有导数且为 1.

1015. 若: (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (6) 在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数, 可否断定他们的积

$$F(x) = f(x)g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

解 (a) 不能. 例如,

$f(x) = x$, 在 $x = 0$ 处有导数,

$g(x) = |x|$, 在点 $x = 0$ 没有导数,

而它们的积

$$F(x) = f(x)g(x) = x|x|$$

在点 $x = 0$ 处有导数. 事实上,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x |\Delta x| - 0 \cdot |0|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0, \end{aligned}$$

即有 $F'(0) = 0$.

(6) 不能. 例如,

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = |x|,$$

在点 $x = 0$ 它们都没有导数, 但它们的积

$$F(x) = f(x)g(x) = (|x|)^2 = x^2,$$

在点 $x = 0$ 处有导数, 且 $F'(0) = 2x|_{x=0} = 0$.

1016. 若: (a) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 没有导数; (6) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 没有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 有导数; (B) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 没有导数及函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 没有导数, 则函数

$$F(x) = f[g(x)]$$

于已知点 $x = x_0$ 的可微性怎样?

解 (a) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在. 例如, 考察函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 及点 x_0 如下:

1° $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
 $f'(0) = 0$, $g'(0)$ 不存在; 而 $F(x) = f[g(x)] = (|x|)^2 = x^2$, $F'(0) = 0$. 这是 $F'(x_0)$ 存在的一例.

2° $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
 $f'(0) = 0$, $g'(0)$ 不存在; 而 $F(x) = f[g(x)] = |x|$,
 $F'(0)$ 不存在. 这是 $F'(x_0)$ 不存在的一例.

(6) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在. 例如,

1° $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
 $f'(0)$ 不存在, $g'(0)$ 存在, 且等于零; 而 $F(x) = f[g(x)] = |x^2| = x^2$, $F'(0)$ 存在, 且等于零.

2° $f(x) = |x|$, $g(x) = x$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
而 $F(x) = f[g(x)] = |x|$, $F'(0)$ 不存在.

(B) $F'(x_0)$ 可能存在,也可能不存在,例如,

1° $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$, 点 $x=0$, $g(0)=0$. 则 $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在; 易知 $F(x) = f[g(x)] = 2\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right) + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right| \equiv x$. 因此 $F'(0)$ 存在且等于 1.

2° $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$, 点 $x=0$, $g(0)=0$. $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在; 而 $F(x) = f[g(x)] = |x|$, $F'(0)$ 也不存在.

1017. 在函数

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

的图形上哪些点处有垂直切线? 作出这图形.

解 $y' = 1 + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}} \quad (x \neq k\pi, k=0, \pm 1, \dots)$.

当 $x = k\pi$ 时, 容易直接算出

$$\begin{aligned} y'|_{x=k\pi} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\pi + \Delta x + \sqrt[3]{\sin(k\pi + \Delta x)} - k\pi}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{(-1)^k \sin \Delta x}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

故当 $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时有垂直切线.

当 $x = k\pi$ 时,

$$y = k\pi;$$

当 $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ 时,

$$y = x \pm 1,$$

其图形如图 2.21 所示.

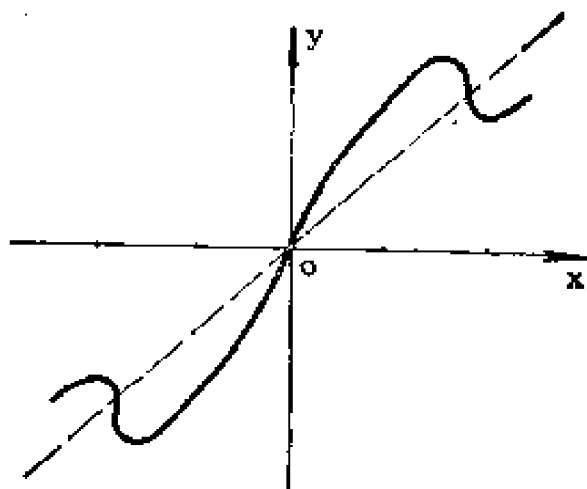


图 2.21

1018. 函数 $f(x)$ 在其不连续点可否有: (a) 有穷的导数; (b) 无穷的导数?

解 (a) 不能. 否则由此可推出其连续性.

(b) 能. 例如,

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x$$

它在 $x = 0$ 点不连续, 但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{1}{|\Delta x|} \rightarrow +\infty \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

1019. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a, b) 上可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty,$$

则是否必有

(1) $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$; (2) $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = +\infty$?

解 (1) 一般地说, 不能保证 $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$. 例如,

对于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内定义的函数

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x},$$

显然有 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$. 但是, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$

$\sin \frac{1}{x}$, 对于特殊的一串数 $x_n = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($k=1, 2, \dots$) 有 $f'(x_n) = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$, 因而

$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \infty$ 不成立.

(2) 必有 $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = \infty$.

由于 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, 故 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的右近旁保持定号, 从而必有 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$, 显然可设前者成立 (否则, 考察函数 $-f(x)$ 即化为前者). 再通过对自变量作代换 $t = a + b - x$ 可知, 我们只须证明下面的命题:

“若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (A, B) 上可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow B-0} f(x) = +\infty, \quad (1)$$

则必有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow B-0} |f'(x)| = +\infty. \quad (2)''$$

现在给出上述命题的证明如下:

由 (1), 对于任给 $M_0 > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使当 $x \in (B - \delta_0, B)$ 时, 有

$$f(x) \geq M_0 \quad (B_0 \leq x < B, \text{ 其中 } B_0 = B - \delta_0).$$

记 $P_0 = (B_0, f(B_0))$, 有 $f(B_0) \geq M_0$. 为证 (2), 我们采用反证法. 设存在 $K > 0$, 使

$$|f'(x)| \leq K \quad (x \in [B_0, B]),$$

则将引出矛盾. 论证如下:

今过 P_0 作斜率为 $2K$ 的直线

$$l: Y - f(B_0) = 2K(x - B_0). \quad (3)$$

它与 $x = B$ 垂线相交于一点 Q , 其纵坐标为

$$y_Q = f(B_0) + 2K(B - B_0) = f(B_0) + 2K\delta_0,$$

记 $M_1 = f(B_0) + 2K\delta_0$, 则 $y_Q = M_1$, 它是 l 直线在 $[B_0, B]$ 上的最大值.

对 M_1 而言, 由 (1) 可知, 存在 $x_2 \in (B_0, B)$ 使 $f(x_2) > M_1$, 即点 $P_2 = (x_2, f(x_2))$ 位于 l 线之上方.

另一方面, 由在 $x = B_0$ 点 $f(x)$ 的可微性, 在 $x = B_0$ 右侧邻域内, 对于任给 $\varepsilon_1 > 0$ (取 $\varepsilon_1 < \frac{K}{2}$), 存在 δ , 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\left| f'(B_0) - \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| < \varepsilon_1 < \frac{K}{2}.$$

于是, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| \\ & \leq |f'(B_0)| + \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - x_0} - f'(B) \right| \\ & < K + \varepsilon_1 < K + \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K. \end{aligned}$$

即有在 r 曲线 $y = f(x)$ 上: 当 $0 < |x - B_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(B_0)| < \frac{3}{2}K|x - B_0|, \quad (4)$$

今取 $x_1 > B_0$ 使 $x_1 < x_2$, $x_1 < B_0 + \delta$.

于是, 由(3)式和(4)式知

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(B_0) &< \frac{3}{2}K(x_1 - B_0) \\ &< 2K(x_1 - B_0) = Y(x_1) - f(B_0), \end{aligned}$$

故

$$f(x_1) < Y(x_1),$$

即点 $(x_1, f(x_1))$ 位于直线 l 之下方.

考虑连续函数

$$G(x) = f(x) - Y(x),$$

我们取

$$c = \inf_{x \in [x_1, x_2]} \{x | G(x) \geq 0\},$$

则由 $G(x_1) < 0$, $G(x_2) \geq 0$, 易见 c 是存在的, 而且 $G(c) = 0$. 它也就是连续函数 $G(x)$ 的一个中间值点.

考虑 $x_2 \geq x > c$, 则有 $G(x) \geq 0$, 即在 c 点附近且 $x > c$ 时, 有

$$f(x) \geq Y(x).$$

从而

$$f(x) - f(c) \geq Y(x) - f(c) = Y(x) - Y(c).$$

注意 $x - c > 0$, 故又有 (当 $x > c$, 且在 c 附近时):

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq \frac{Y(x) - Y(c)}{x - c},$$

上式两边取极限 (让 $x \rightarrow c+0$), 并注意到函数的可

微性, 有 $f'(c+0)=f'(c)$, 于是有

$$f'(c) \geq Y'(c) = 2K.$$

此处 $c \in (x_1, x_2) \subset [B_0, B)$, 这个不等式与 $|f'(x)| \leq K$ 式相抵触. 因此 $f'(x)$ 当 $x \in [B_0, B)$ 时是无界的. 这就完成了 (2) 的证明, 从而命题得证.

注. 若利用以后的拉格朗日定理, 则可很简单地证明此结论.

1020. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a, b) 上可微分且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty,$$

是否必有

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty?$$

解 不一定. 例如:

$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

它在 $(0, b)$ ($b > 0$) 上可微分, 且 $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = +\infty,$$

然而

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} = 0.$$

1021. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微分且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

存在. 由此能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在?

解 不能. 例如, 函数

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在 $(0, +\infty)$ 上可微分, $f'(x) = 2 \cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

然而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在.

1022. 设有界函数 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上可微分且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在. 由此可否推出有穷的或无穷的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在?

解 不能. 例如,

$$f(x) = \cos(\ln x),$$

它在 $(0, +\infty)$ 上有界且可微分, 其导数为

$$f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

同时有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

然而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在.

1023. 对不等式可否逐项微分?

解 一般地说不行. 例如, 在 $(-\infty, 0)$ 上有

$$2x \leq x^2 + 1,$$

但在此区间上不能对此不等式逐项微分, 因为在 $(-\infty, 0)$ 上不等式

$$2 \leq 2x$$

不成立.

1024. 导出表示和式

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

及

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$$

的公式。

$$\text{解 设 } \overline{P}_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \quad (1)$$

$$\overline{Q}_n = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n. \quad (2)$$

$$\text{则 } (\overline{P}_n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = P_n,$$

$$(\overline{Q}_n)' = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = Q_n.$$

另一方面，由(1)式得

$$\overline{P}_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

由于 $(\overline{P}_n)' = P_n$ ，即

$$\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right]' = P_n,$$

于是，得

$$P_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

由(2)式得

$$\overline{Q}_n = x(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}) = xP_n.$$

由于 $(\overline{Q}_n)' = Q_n$ ，所以

$$(xP_n)' = Q_n,$$

即

$$P_n + xP_n' = Q_n. \quad (3)$$

而

$$\begin{aligned} P_n' &= \left[\frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \right]' \\ &= \frac{[-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n](1-x)^2 + 2(1-x)[1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}]}{(1-x)^4}, \end{aligned}$$

将 P_n 及 P_n' 代入 (3) 式, 即得

$$Q_n = \frac{1+x-(n+1)^2 x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

1025. 导出表示和式

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$$

及

$$T_n = \cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx$$

的公式.

$$\begin{aligned} \text{解 } S_n &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[2 \sin \frac{x}{2} \sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \sin 2x \right. \\ &\quad \left. + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \sin nx \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{2n-1}{2} x - \cos \frac{2n+1}{2} x \right) \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x \right) \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

即

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

又因

$$\begin{aligned} T_n &= (S_n)' \\ &= \frac{\left[n \cos \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x + (n+1) \cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2} \right] \sin \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &\quad - \frac{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{n \left(\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{nx}{2} + \cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &\quad - \frac{\sin \frac{nx}{2} \left(\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{x}{2} \right)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

所以，

$$T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

1026. 利用恒等式:

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

推出表示和式:

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad (1)$$

两端分别求导数, 即得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \\ & -\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \\ & -\cdots -\frac{1}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \sin \frac{x}{2^n} \\ & = \frac{\cos x \sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^n} \sin x \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin^2 \frac{x}{2^n}}. \end{aligned} \quad (2)$$

(2) ÷ (1) 得

$$-\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

$$= \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n},$$

所以,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x \end{aligned}$$

1027. 求证可微分的偶函数的导函数为奇函数, 而可微分的奇函数的导函数为偶函数.

对这个事实加以几何解释.

证 设 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(x) = f(-x)$.

两端微分之, 得

$$f'(x) = -f'(-x), \text{ 即 } f'(-x) = -f'(x).$$

这就说明 $f'(x)$ 是奇函数.

同理可证: 可微分的奇函数的导函数为偶函数.

这个事实说明: 凡对称于 Oy 轴的图形, 其对称点的切线也关于 Oy 轴对称; 凡关于原点对称的图形, 其对称点的切线互相平行.

1028. 求证可微分的周期函数, 其导函数仍为具有相同周期的周期函数.

证 设 $f(x)$ 为周期函数, 周期为 T , 则

$$f(x+T) = f(x).$$

两端微分之, 得

$$f'(x+T) = f'(x),$$

这说明 $f'(x)$ 为具有周期 T 的周期函数.

1029. 若圆半径以 2 厘米/每秒的等速度增加, 则当圆半径 $R=10$ 厘米时, 圆面积增加的速度如何?

解 设圆面积为 S , 则 $S=\pi R^2$,

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{R=10} = 2\pi R \left. \frac{dR}{dt} \right|_{R=10} = 40\pi \text{ (平方厘米/每秒)},$$

故当 R 为 10 厘米时, 圆面积的增加速度为 40π 平方厘米/每秒.

1030. 长方形的一边 $x=20$ 米, 另一边 $y=15$ 米, 若第一边以 1 米/秒的速度减少, 而第二边以 2 米/秒的速度增加, 问这长方形的面积和对角线变化的速度如何?

解 面积 $S=xy$, 对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$ ($x>0$, $y>0$). 对 t 求导数, 即得

$$\frac{dS}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

及

$$\frac{dl}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

按题设, 有 $x=20$, $y=15$, $\frac{dx}{dt}=-1$, $\frac{dy}{dt}=2$,

代入上面两式, 得

$$\frac{dS}{dt} = 20 \cdot 2 + (-1) \cdot 15 = 25,$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{-20 + 2 \cdot 15}{\sqrt{20^2 + 15^2}} = 0.4.$$

于是, 该长方形的面积的变化率为 25 平方米/每秒, 而对角线的变化率为 0.4 米/每秒.

1031. 二轮船 A 和 B 从同一码头同时出发, A 船往北, B 船往东. 若 A 船的速度为 30 千米/每小时, B 船的速度为 40 千米/每小时, 问二船间的距离增加的速度如何?

解 记时间为 t (小时), A 与 B 离码头的距离分别为 $30t$ 与 $40t$ (千米), 注意成直角情形, 故两船间的距离为

$$d(t) = \sqrt{(30t)^2 + (40t)^2} = 50t,$$

故两船间的距离增加的速度为

$$d'(t) = 50 \text{ 千米/每小时}.$$

1032. 设:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2; \\ 2x-2, & \text{若 } 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

又设 $S(x)$ 表示由曲线 $y=f(x)$, 轴 Ox 及过点 x ($x \geq 0$) 而垂直于 Ox 的直线三者围成的面积. 作出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导函数 $S'(x)$, 并作出函数 $y=S'(x)$ 的图形.

解 当 $x \in [0, 2]$ 时, $S(x) = \frac{1}{2}x^2$;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{2}(x-2)[2 + (2x-2)] \\ &= x^2 - 2x + 2. \end{aligned}$$

从而有

$$S'(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 2 \text{ 时,} \\ 2x-2, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (\text{图 2.22})$$

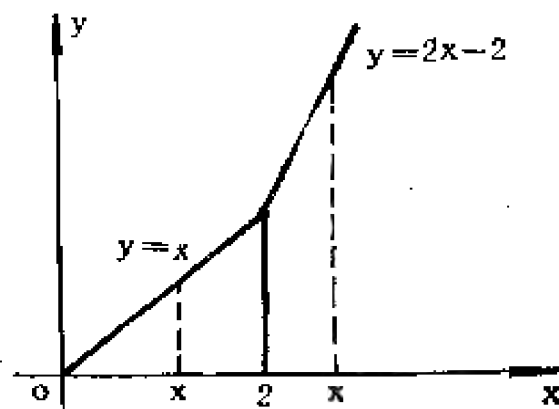


图 2.22

1033. 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 、轴 Ox 及通过点 O 和 x ($|x| \leq a$) 而垂直于轴 Ox 的两条直线四者围成的面积. 作出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导函数 $S'(x)$, 并作其导函数 $y = S'(x)$ 的图形.

解 $S(x)$ 是由一个直角三角形和一个中心角为 α 的扇形组成, 其中 $\sin \alpha = \frac{|x|}{a}$, 故当 $0 < |x| \leq a$ 时,

$$S(x) = \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{a}.$$

于是,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|}{x} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{|x|}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

$$= \frac{|x| \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{sgn} x (0 < |x| \leq a).$$

函数 $y=S(x)$ 的图形如图 2.23 所示. 函数 $y=S'(x)$ 的图形就是以原点为中心, a 为半径的圆周上, 位于第一及第三象限的弧段, 但不包括 $(0, a)$ 点及 $(0, -a)$ 点, 图形省略.

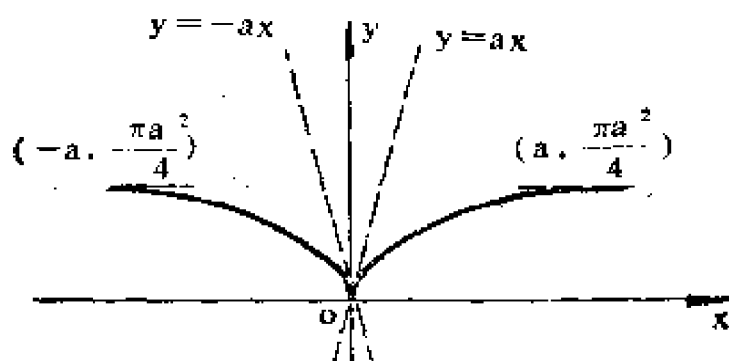


图 2.23

§ 2. 反函数的导函数. 用参变数表示 的函数的导函数. 隐函数的导函数

1° 反函数的导函数 若具有导函数 $f'(x) \neq 0$ 的可微分的函数 $y=f(x)$ ($a < x < b$) 有单值连续的反函数 $x=f^{-1}(y)$, 则此反函数也可微分, 且有公式

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

成立.

2° 用参变数表示的函数的导函数 若方程组:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微分的函数，且 $\varphi'(t) \neq 0$ ，确定 y 为 x 的单值连续函数：

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导函数存在，且可用公式

$$y'_x = -\frac{y'_t}{x'_t}$$

求出。

3° 隐函数的导函数 若可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x, y) = 0,$$

则此隐函数之导函数 $y' = y'(x)$ 可从以下方程求得：

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

其中 $F(x, y)$ 是当作变量 x 的复合函数。

1034. 证明由方程 $y^3 + 3y = x$ 定义的单值函数 $y = y(x)$ 存在，并求它的导函数 y'_x 。

证 对函数 $x = f(y) = y^3 + 3y$ 有

$$f'(y) = 3y^2 + 3 = 3(y^2 + 1) > 0.$$

其中 y 为任意实数，故 $f(y)$ 是严格增大的（在 $-\infty < y < +\infty$ ），因此存在单值的反函数 $y = y(x)$ （ $-\infty < x < +\infty$ ），且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

1035. 证明由方程 $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 \leq \varepsilon < 1$) 确定的单值

函数 $y=y(x)$ 存在, 并求其导函数 y'_x .

证 对于函数 $x=f(y)=y-e \sin y$ 有

$$f'(y)=1-e \cos y > 0 \quad (0 \leq e < 1).$$

故 $f(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增大的, 从而反函数 $y=y(x)$ 存在且是单值的, 且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1-e \cos y}.$$

1036. 设:

$$(a) \quad y=x+\ln x \quad (x>0); \quad (b) \quad y=x+e^x;$$

$$(B) \quad y=\operatorname{sh} x; \quad (r) \quad y=\operatorname{th} x.$$

求它们的反函数 $x=x(y)$ 的存在域, 并求它们的导函数.

解 (a) 由 $y'_x = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad (x>0)$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

(b) 由 $y'_x = 1 + e^x > 0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1-x+y}.$$

(B) 由 $y'_x = \operatorname{ch} x > 0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

其中因为 $x = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$, 所以, $e^x + e^{-x} = 2\sqrt{1+y^2}$.

(F) 由 $y'_x = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2} > 0$ 知有单值连续反函数

$x = x(y)$. 其存在域为 $-1 < y < 1$. 由于

$$y^2 = \operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

而 $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{y'_x} = x'_y$, 于是, 反函数的导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-y^2}.$$

1037. 设:

$$(a) \ y = 2x^2 - x^4; \quad (b) \ y = \frac{x^2}{1+x^2};$$

$$(B) \ y = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

选出反函数 $x = x(y)$ 的单值连续的各枝, 求它们的导函数并作其图形.

解 (a) $x^4 - 2x^2 + y = 0$.

$$x^2 = 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

单值连续的各枝为

$$x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1),$$

$$x_2 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1 - y}} \quad (-\infty < y \leq 1).$$

由 $y = 2x^2 - x^4$, 微分得

$$1 = 4x \frac{dx}{dy} - 4x^3 \frac{dx}{dy},$$

所以

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x - 4x^3}.$$

从而有

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{1}{4x(1-x^2)} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (\text{图2.24})$$

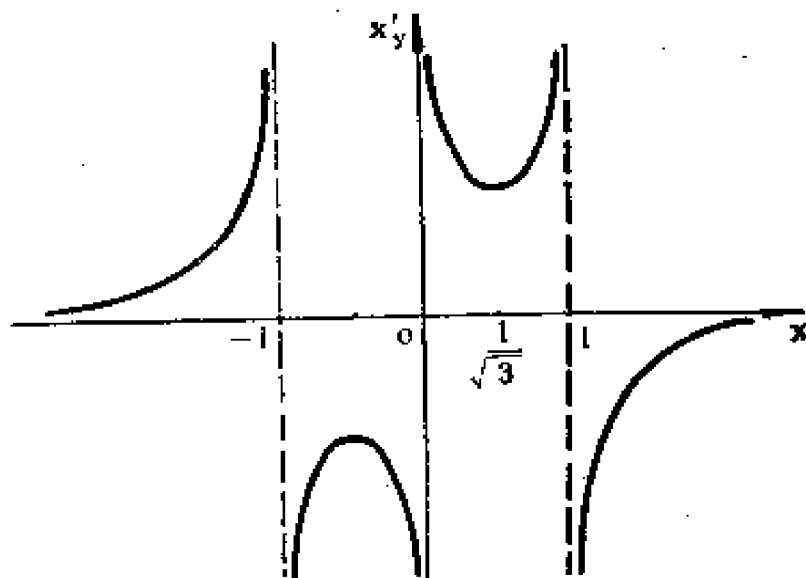


图 2.24

$$(6) \quad \frac{x^2}{1+x^2} = y, \quad \text{即} \quad x^2 = \frac{y}{1-y}.$$

单值连续各枝为

$$x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}, \quad (0 \leq y < 1)$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$

$$\text{由 } y'_x = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{及 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} \text{ 有}$$

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{(1+x^2)^2}{2x}$$

$$= \frac{x^3}{2y^2}.$$

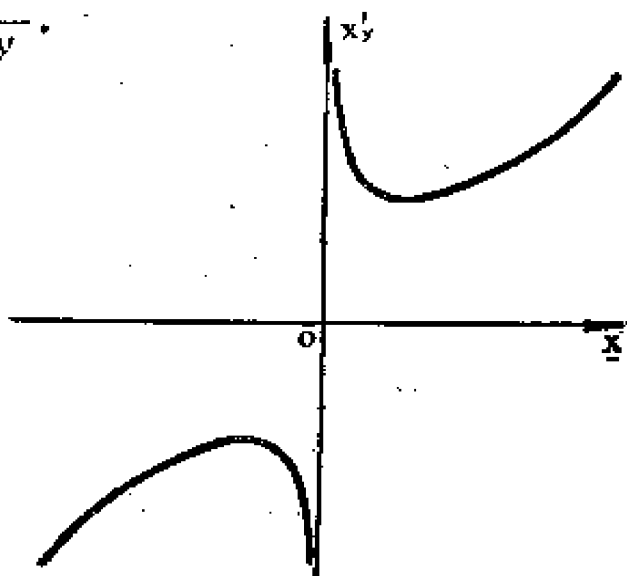


图 2.25

$$\text{当 } x_i \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{dx_i}{dy} \rightarrow$$

$$(\operatorname{sgn} x_i) \cdot (+\infty)$$

$$(i=1,2) \text{ (图 2.25)}$$

$$(B) \ y = 2e^{-x}$$

$$-e^{-2x}, \text{ 解出 } e^{-x}, \text{ 得}$$

$$e^{-x} = 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

单值连续各枝为

$$x_1 = -\ln(1 + \sqrt{1-y})$$

$$(-\infty < y \leq 1),$$

$$x_2 = -\ln(1 - \sqrt{1-y})$$

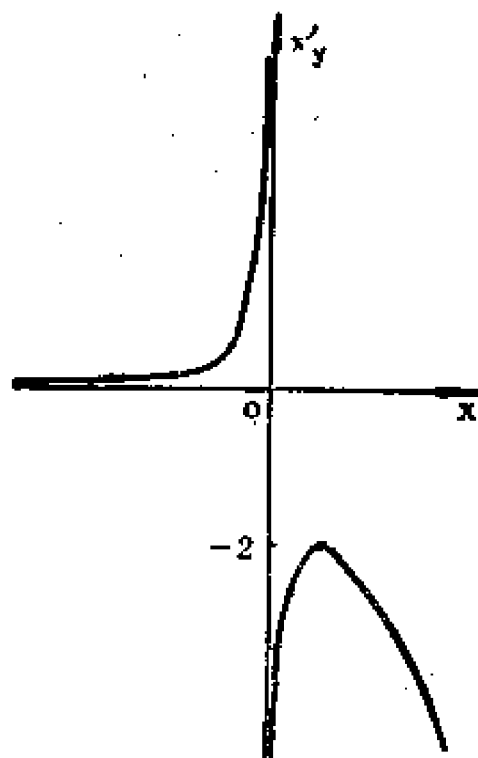


图 2.26

$$= \ln \frac{1 + \sqrt{1-y}}{y} \quad (0 < y \leq 1).$$

由 $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$, 对 y 求导数, 得

$$1 = -2e^{-x} \frac{dx}{dy} + 2e^{-2x} \frac{dx}{dy},$$

所以,

$$\frac{dx_i}{dy} = -\frac{1}{2(e^{-x} - e^{-2x})} \quad (i=1, 2) \quad (\text{图2.26}).$$

1038. 作出函数 $y = y(x)$ 的略图, 并求其导函数 y'_x , 设:
 $x = -1 + 2t - t^2, y = 2 - 3t + t^3$, 当 $x = 0$ 及 $x = -1$ 时 $y'_x(x)$ 等于甚么? 在何点 $M(x, y)$ 的导函数 $y'_x(x) = 0$?

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 + 3t^2}{2 - 2t} = -\frac{3}{2}(1+t).$

当 $t = -1$, 即 $x = -4, y = 4$ 时, $y'_x(x) = 0$.

当 $x = 0$ 时, $t = 1$, 此时 $y'_x(x) = -3$;

当 $x = -1$ 时, $t = 0$ 或 $t = 2$, 此时 $y'_x(x) = -\frac{3}{2}$ 或 $y'_x(x) = -\frac{9}{2}$.

列表:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

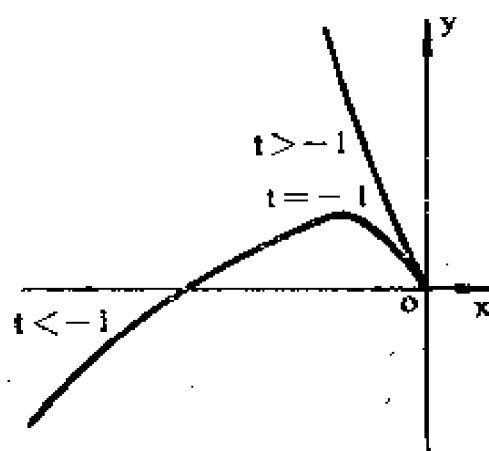
当 $t < -1$ 时,

$$\frac{dy}{dx} > 0, \text{ 函数值 } y$$

随自变量增加而增加, 曲线上升.

当 $t > -1$ 时,

$$\frac{dy}{dx} < 0, \text{ 曲线下降.}$$



降.

图形如图2.27所

示.

图 2.27

求导函数 y'_x (参数是正数). 设:

1039. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, \quad y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}.$

解 $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}},$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6\sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{(1 - \sqrt{t})^2}},$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt[6]{\frac{(1 - \sqrt{t})^4}{t(1 - \sqrt[3]{t})^3}} \quad (t > 0, t \neq 1).$$

1040. $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t.$

解 $\frac{dy}{dt} = -2 \cos t \sin t, \quad \frac{dx}{dt} = 2 \sin t \cos t,$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \cos t \sin t}{2 \cos t \sin t} = -1 \quad (0 < x < 1).$$

1041. $x = a \cos t, y = b \sin t.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t \quad (0 < |t| < \pi).$

1042. $x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{b \operatorname{ch} t}{a \operatorname{sh} t} = \frac{b}{a} \operatorname{cth} t \quad (t \neq 0).$

1043. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{3 a \sin^2 t \cos t}{-3 a \cos^2 t \sin t}$
 $= -\operatorname{tg} t \quad \left(t \neq \frac{2k+1}{2} \pi, k \text{ 为整数} \right).$

1044. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}$
 $= \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数}).$

1045. $x = e^{2t} \cos^2 t, y = e^{2t} \sin^2 t.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t}(\sin^2 t + \sin t \cos t)}{2e^{2t}(\cos^2 t - \sin t \cos t)}$
 $= \frac{\sin t \cdot \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos t \cdot \sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}$

$$= \operatorname{tg} t \operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数}; \right.$$

$$\left. t \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n=0, 1, 2, \dots \right).$$

1046. $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

解 $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} \left[-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$

$$= \frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \operatorname{sgn} t \quad (0 < |t| < +\infty).$$

1047. 证明由方程组

$$x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|,$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分. 但它的导

函数不能用普通的公式求得.

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时, x 由 0 变化到 $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$, y 由 0 变化到 $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$. 于是,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{t=0} &= \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} \\ &= \begin{cases} 3\Delta t, & \Delta t > 0, \\ \Delta t, & \Delta t < 0, \end{cases}\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

即 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分. 但由于 $|t|$ 当 $t = 0$ 时不可微, 因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t = 0$ 时不存在. 所以,

导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t = 0$ 的值不能从普通公式求得.

求下列隐函数的导函数 y'_x :

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$. 当 $x = 2$ 与 $y = 4$ 及当 $x = 2$ 与 $y = 0$ 时, y' 等于甚么?

解 对 x 微分, 得

$$2x + 2xy'_x + 2y - 2yy'_x = 2.$$

于是,

$$y'_x = \frac{1 - x - y}{x - y} \quad (x \neq y).$$

$$y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=4}} = \frac{5}{2}, \quad y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = -\frac{1}{2}.$$

1049. $y^2 = 2px$ (抛物线).

解 对 x 微分, 得

$$2yy'_x = 2p.$$

于是,

$$y'_x = \frac{p}{y} \quad (y \neq 0).$$

1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (椭圆).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (y \neq 0).$$

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (抛物线).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} y'_x = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad (x > 0, y > 0).$$

1052. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (内摆线).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} y'_x = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

1053. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (对数螺线).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'_x - y}{x^2} = \frac{x + yy'_x}{x^2 + y^2}.$$

于是,

$$y'_x = \frac{x + y}{x - y} \quad (x \neq y, x \neq 0).$$

1054. 求 y'_x , 设:

- (a) $r = a\varphi$ (阿基米得螺线);
- (b) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (心脏形线);
- (B) $r = ae^{m\varphi}$ (对数螺线),

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ 表极坐标.

解 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 其中 $r = r(\varphi)$. 于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi}. \quad (1)$$

$$(a) \quad \frac{dr}{d\varphi} = a, \text{ 代入 (1) 式得}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a \sin \varphi + a \varphi \cos \varphi}{a \cos \varphi - a \varphi \sin \varphi} \\ &= \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varphi). \end{aligned}$$

$$(6) \quad \frac{dr}{d\varphi} = -a \sin \varphi, \text{ 代入 (1) 式得}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-a \sin^2 \varphi + a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi}{-a \sin \varphi \cos \varphi - a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi} \\ &= -\frac{\cos 2\varphi + \cos \varphi}{\sin 2\varphi + \sin \varphi} \\ &= -\frac{2 \cos \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \\ &= -\operatorname{ctg} \frac{3\varphi}{2} \quad \left(\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

$$(B) \quad \frac{dr}{d\varphi} = m a e^{m\varphi}, \text{ 代入 (1) 式得}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{m a e^{m\varphi} \sin \varphi + a e^{m\varphi} \cos \varphi}{m a e^{m\varphi} \cos \varphi - a e^{m\varphi} \sin \varphi} \\ &= \frac{m \sin \varphi + \cos \varphi}{m \cos \varphi - \sin \varphi} \\ &= \operatorname{tg} \left(\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

§ 3. 导函数的几何意义

1° 切线和法线的方程 可微分的函数 $y=f(x)$ 在其图形上之一点 $M(x, y)$ (图2.28) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程的形式分别是:

$$Y - y = y'(X - x)$$

及

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中 X, Y 为切线或法线上的流动坐标, 而 $y' = f'(x)$ 为切点处导函数的值.

2° 切线长和法线长 PT 为次切线, PN 为次法线, MT 为切线, MN 为法线. 设 $\operatorname{tg} \alpha = y'$ (图2.28). 我们得下列的值:

$$PT = \left| -\frac{y}{y'} \right|, \quad PN = |yy'|,$$

$$MT = \left| -\frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2},$$

$$MN = |y| \sqrt{1 + y'^2}.$$

3° 切线与切点的向径间的夹角 若 $r = f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程及 β 为切线 MT 与切点 M 的向径 OM

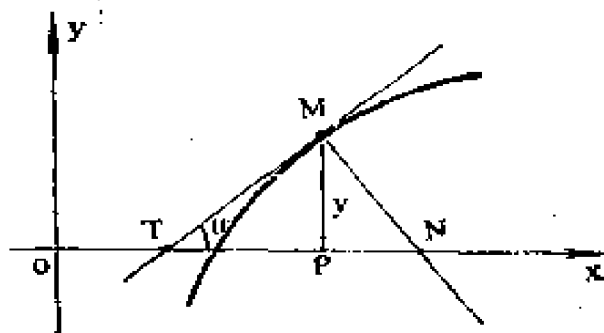


图 2.28

所成的角 (图2.29), 则

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'}.$$

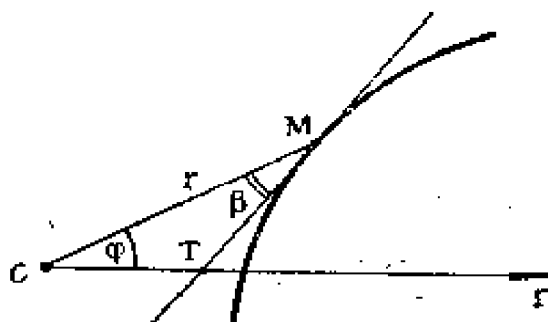


图 2.29

1055. 写出曲线

$$y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$$

上 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 3)$ 、 $C(3, 0)$ 诸点处的切线和法线方程.

解 由于

$$y' = \sqrt[3]{3-x} - \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以, 在 A 点的切线方程为

$$y - 0 = y'|_{x=-1}(x+1), \text{ 即 } y = \sqrt[3]{4}(x+1);$$

法线方程为

$$y - 0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1),$$

即
$$y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

在 B 点的切线方程为

$$y - 3 = y'|_{x=2}(x-2), \text{ 即 } y = 3;$$

法线方程为

$$x = 2.$$

在 C 点, 由于 y' 为无穷, 故切线方程为

$$x = 3;$$

法线方程为

$$y = 0.$$

1056. 在曲线

$$y = 2 + x - x^2$$

上的哪些点其切线(a)平行于 Ox 轴; (b) 平行于第一象限角的平分线?

解 由于

$$y' = 1 - 2x,$$

所以, 有

$$(a) \text{ 令 } y' = 0, \text{ 则 } x = \frac{1}{2}, \quad y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4},$$

故在点 $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$ 处其切线平行于 Ox 轴;

(b) 令 $y' = 1$, 则 $x = 0$, $y = 2$, 故在点 $(0, 2)$ 处其切线平行于第一象限角的平分线.

1057. 证明抛物线

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta <$

$\frac{\pi}{2}$) 彼此相等.

解 如图2.30所示, 显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$. 由于 $y' = 2ax - a(x_1 + x_2)$, 故在点 A 、 B 处切线的斜率分别为

$$\begin{aligned} k_A &= y' |_{x=x_1} = 2ax_1 - a(x_1 + x_2) \\ &= a(x_1 - x_2) = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\pi - \beta), \end{aligned} \quad (1)$$

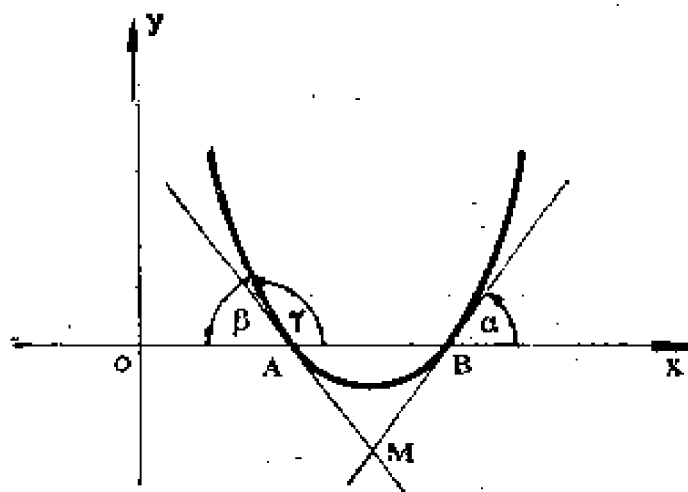


图 2.30

$$\begin{aligned} k_B = y' \big|_{x=x_2} &= 2ax_2 - a(x_1 + x_2) \\ &= a(x_2 - x_1) = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

由 (2) 式得

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = a(x_1 - x_2). \quad (3)$$

由 (1) 式及 (3) 式证得

$$\alpha = \beta.$$

1058. 在曲线

$$y = 2 \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

上求出“曲线的坡度”(即是 $|y'|$) 大于 1 的区域.

解 由于 $y' = 2 \cos x$, 故要 $|y'| > 1$, 只要

$$|\cos x| > \frac{1}{2},$$

也即

$$|x| < \frac{\pi}{3} \quad \text{及} \quad \frac{2\pi}{3} < |x| \leq \pi,$$

此即所求的区域.

1059. 函数

$$y = x \text{ 及}$$

$$y_1 = x + 0.01$$

$$\cdot \sin 1000\pi x$$

二者相差不大于
0.01, 则这些函
数的导函数的差
的最大值为何?
作出对应的图
形.

解 导函数差的
最大值

$$\max |y' - y_1'|$$

$$= \max |10\pi \sin$$

$$\cdot \cos 1000\pi x|$$

$$= 10\pi \approx 31.4.$$

由此可见,
两函数相差甚微
时(图2.31), 其
导函数却可相差
很大.

如图2.32所示.

1060. 曲线 $y = \ln x$ 与
 Ox 轴相交的角
如何?

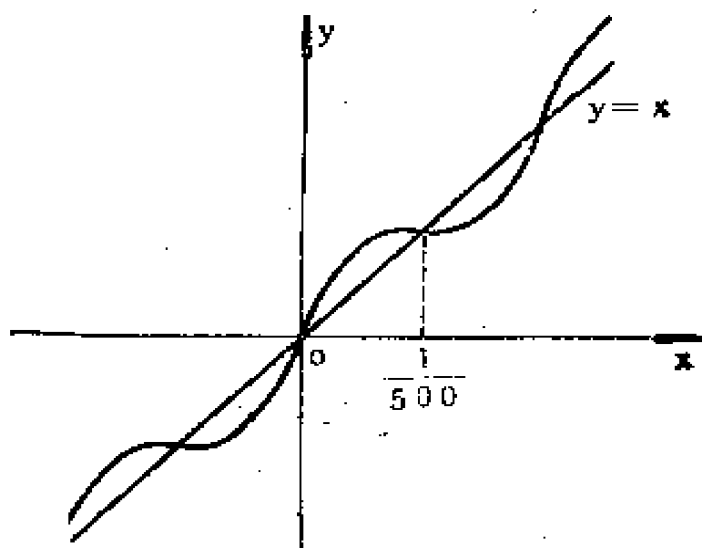


图 2.31

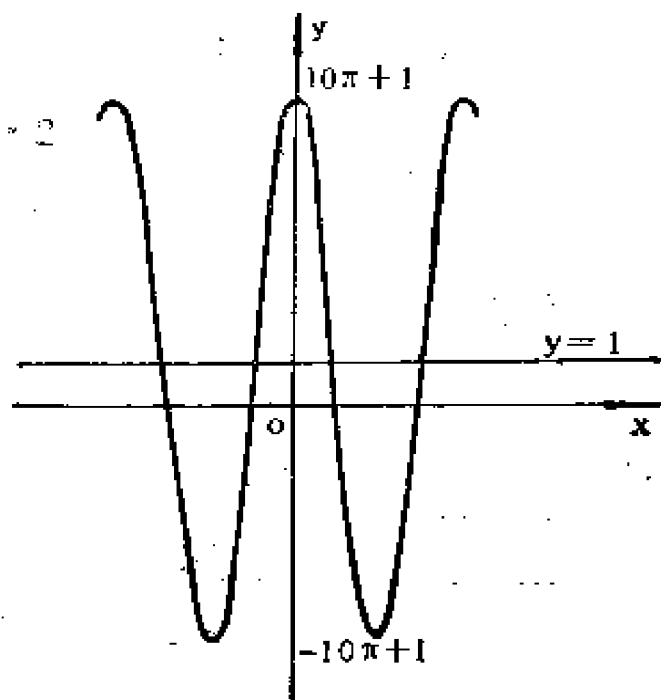


图 2.32

解 曲线 $y = \ln x$ 与 Ox 轴的交点为 $(1, 0)$, 设曲线与 Ox 轴的相交角为 α , 则

$$\operatorname{tg} \alpha = y' \Big|_{x=1} = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1,$$

故交角 α 为 45° .

1061. 曲线 $y = x^2$ 及 $x = y^2$ 相交的角如何?

解 两曲线的交点为 $(0, 0)$ 及 $(1, 1)$. 由于导数为

$$y' = 2x \text{ 及 } y' = \frac{1}{2y},$$

故在 $(0, 0)$ 点两曲线的交角显然为 90° .

在 $(1, 1)$ 点两切线的斜率分别为

$$k_1 = 2 \text{ 及 } k_2 = \frac{1}{2},$$

故其交角 θ 的正切为

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

于是

$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{4} \approx 37^\circ.$$

1062. 曲线 $y = \sin x$ 及 $y = \cos x$ 相交的角如何?

解 先求交点. 解

$$\begin{cases} y = \sin x, \\ y = \cos x, \end{cases}$$

得 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k 为整数).

其次，求两曲线在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 处切线的斜率：

$$k_1 = (\sin x)' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi} = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k_2 = (\cos x)' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi} = (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 处，交角 θ （今取锐角，即 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ）满足

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right| \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

于是，

$$\theta = \arctg 2\sqrt{2} \approx 70^\circ 30'.$$

1063. 当如何选择参数 n ，以使曲线

$$y = \arctg nx \quad (n > 0)$$

与 Ox 轴相交所成的角大于 89° ？

解 曲线 $y = \arctg nx$ 与 Ox 轴的交点为 $(k\pi, 0)$ （ k 为整数）。不妨取 $0 \leq x < \pi$ ，则交点为 $O(0, 0)$ 。

交角的正切为

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{n}{1 + n^2 x^2} \Big|_{x=0} = n.$$

$\theta > 89^\circ$ ，相当于 $\operatorname{tg} \theta > \operatorname{tg} 89^\circ = 57.29$ ，即

$$n > 57.29.$$

1064. 求出曲线：(a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$ 于点 $x = 0$ 处，

(6) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x = 1$ 处的左切线与右切

线间的夹角。

解 (a) 函数的左、右导数分别为

$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -0} \left[-\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}} \cdot a^2 \right] \\ &= -|a|, \\ y'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}} \cdot a^2 = |a|. \end{aligned}$$

所以，于点 $x = 0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2|a|}{|a|^2-1}, \quad \text{即 } \theta = 2 \arctg \frac{1}{|a|}.$$

(6) 函数的左、右导数分别为

$$\begin{aligned} y'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x} = 1, \end{aligned}$$

同理, $y_+'(1) = -1$. 因此, 左、右切线的斜率互为负倒数, 所以, 夹角为 90° .

1065. 证明对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ (a 及 m 为常数) 的切线与切点的向径所成的角度为一常量.

证 设切线与切点的向径所成的角为 β , 由于

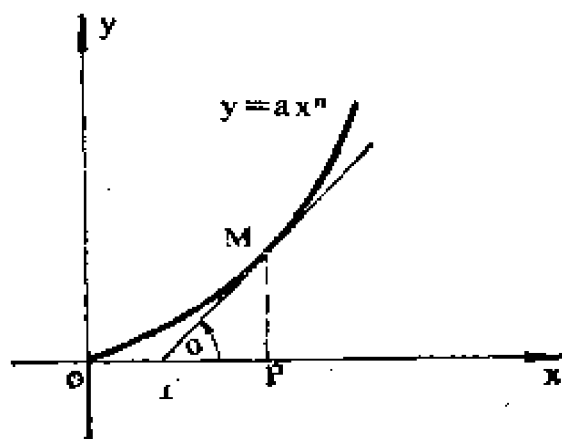
$$r = ae^{m\varphi}, \quad r' = ame^{m\varphi},$$

所以 $\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m}$, 它为一常数, 故 β 为一常量.

1066. 求曲线 $y = ax^n$ 的次切线长, 由此给出作这曲线的切线的方法.

解 设在任一点 $M(x, y)$ 的次切线长为 l_T , 如图 2.33 中的 $|PT|$, 则

$$\begin{aligned} l_T &= \left| \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} \right| \\ &= \left| \frac{y}{y'} \right| \\ &= \left| \frac{ax^n}{nax^{n-1}} \right| \\ &= \left| \frac{x}{n} \right|. \end{aligned}$$



由此, 该曲线的

图 2.33

切线可以这样作: 对于曲线 $y = ax^n$ 上任一点 $M(x, y)$, 由此点向 Ox 轴作垂线, 得交点 P . 再在 Ox 轴上取点 T , 使 $|PT| = \left| \frac{x}{n} \right|$ (当然, 只是在 P 的一侧

取点 T , 若在此点 $yy' > 0$, 则在 P 点的左侧取 T ;

若在此点 $yy' \leq 0$ ，则在 P 点的右侧取 T ，以后不再说明），然后联接 MT ，则 MT 就是所求的切线。

1067. 证明抛物线 $y^2 = 2px$ 的 (a) 次切线长等于切点的横坐标的两倍；(6) 次法线为一常量。给出作抛物线的切线的方法。

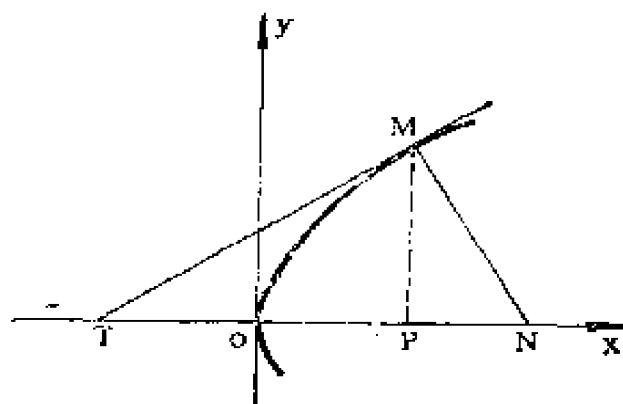
证 (a) 次切线长为

$$\begin{aligned} l_T = |PT| &= \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{y}{\frac{p}{y}} \right| \\ &= \left| \frac{y^2}{p} \right| = \left| \frac{2px}{p} \right| = 2|x|, \end{aligned}$$

所以，次切线长为切点横坐标的两倍。

(6) 次法线长为

$$\begin{aligned} l_N &= |PN| \\ &= |yy'| \\ &= \left| y \cdot \frac{p}{y} \right| \\ &= |p|, \end{aligned}$$



所以，次法线长为一常量。

图 2.34

由此，抛物线的切线可以这样作：由曲线 $y^2 = 2px$ 上的任一点 $M(x, y)$ 向 Ox 轴作垂线，得交点 P 。由于 $yy' = p$ ，故当 $p > 0$ ($p < 0$) 时，在 Ox 轴上 P 点的左（右）侧取点 T ，如图 2.34，使 $|PT| = 2|x|$ ，联结 MT ，此即所求的切线。

1068. 证明指数曲线 $y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

证 次切线长为

$$\begin{aligned} l_T &= \left| \frac{y}{y'} \right| \\ &= \left| \frac{a^x}{a^x \ln a} \right| \\ &= \frac{1}{|\ln a|}. \end{aligned}$$

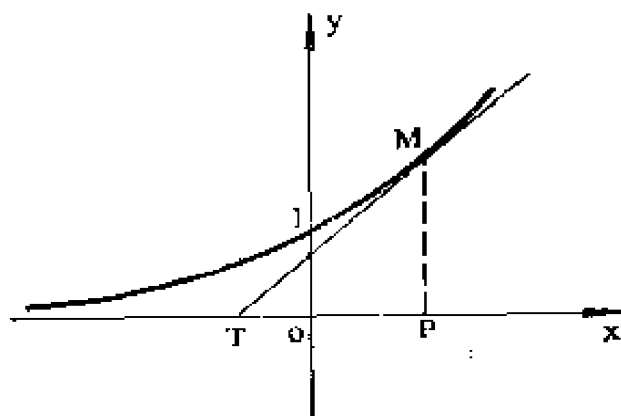


图 2.35

从而 l_T 为常量.

由此, 该曲线的切线可以这样作: 对于曲线 $y=a^x$ 上任一点 $M(x, y)$ 向 Ox 轴作垂线, 得交点 P . 由于当 $a>1$ 时 $yy'>0$, 当 $0<a<1$ 时 $yy'<0$, 故在 Ox 轴上点 P 的左侧 (当 $a>1$ 时) 或右侧 (当 $0<a<1$ 时) 取点 T , 使 $|PT| = \frac{1}{|\ln a|}$, 联接 MT , 此即所求的切线 (图2.35).

1069. 求悬链线

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

上任一点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线长.

解 法线长为

$$|MN| = |y| \sqrt{1 + y'^2} \Big|_{(x_0, y_0)}.$$

由于

$$y' = a \cdot \frac{1}{a} \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+y'^2} &= \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \left| \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right| \\ &= \left| \frac{y}{a} \right|,\end{aligned}$$

故

$$|MN| = |y_0| \cdot \left| -\frac{y_0}{a} \right| = \frac{y_0^2}{|a|},$$

即

$$|MN| = \frac{y_0^2}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

1070. 证明内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 对于曲线上任一点 (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0$) 处, 其切线方程为

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}} (x - x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x = x_0 + \sqrt[3]{x_0 y_0^2} \quad \text{及} \quad l_y = y_0 + \sqrt[3]{x_0^2 y_0}.$$

于是, 切线在两坐标轴间的部分长为

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}.$$

由于,

$$\begin{aligned}l_x^2 + l_y^2 &= x_0^2 + y_0^2 + 3x_0 \sqrt[3]{x_0 y_0^2} + 3y_0 \sqrt[3]{x_0^2 y_0} \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{x_0^2 y_0^2} (\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{y_0^2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{a^2 x_0^2 y_0^2} \\
&= (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}})^3 + y_0^2 + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\
&= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{4}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\
&= a^2 - 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}}) + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\
&= a^2 - 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\
&= a^2,
\end{aligned}$$

故 $l = a$, 即内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

1071. 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切, 则系数 a , b , c 间的关系如何?

解 由方程 $y = ax^2 + bx + c$ 求得导数 $y' = 2ax + b$. 要抛物线与 Ox 轴相切, 需 $y' = 0$, 所以

$$2ax + b = 0,$$

即

$$x = -\frac{b}{2a}; \quad (1)$$

另一方面, 切点的横坐标满足:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

即

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}. \quad (2)$$

比较 (1) 式及 (2) 式, 得

$$b^2 - 4ac = 0,$$

此即所求的 a, b, c 间的关系.

1072. 在甚么条件下, 三次抛物线

$$y = x^3 + px + q$$

与 Ox 轴相切?

解 由方程 $y = x^3 + px + q$ 求得 $y' = 3x^2 + p$. 要此曲线与 Ox 轴相切, 必须满足

$$\begin{cases} 3x^2 + p = 0, & (1) \\ x^3 + px + q = 0. & (2) \end{cases}$$

由 (2) 式得 $x(x^2 + p) = -q$, 两端平方, 则

$$x^2(x^2 + p)^2 = q^2. \quad (3)$$

以 (1) 式代入 (3) 式, 得

$$-\frac{p}{3} \cdot \left(-\frac{p}{3} + p\right)^2 = q^2,$$

即

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0,$$

此即所求的条件.

1073. 当参数 a 为何值时, 抛物线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切?

解 按题意, 我们有

$$(ax^2)' = (\ln x)',$$

即

$$x^2 = \frac{1}{2a} \quad (a \neq 0),$$

从而
$$y = a \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}.$$

同时，由于在切点相切，其纵坐标也必需相等，所以

$$\ln x = \frac{1}{2}, \text{ 即 } x = \sqrt{e}.$$

最后得到

$$a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2e}.$$

1074. 证明曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

及
$$y = f(x) \sin ax,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数，于公共点彼此相切。

证 解曲线方程

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = f(x) \sin ax, \end{cases}$$

得 $\sin ax = 1$, $x = \frac{(4k+1)\pi}{2a}$ (k 为整数)，这就是两曲线交点的横坐标。两曲线在交点处切线的斜率分别为

$$k_1 = f' \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right),$$

$$k_2 = f' \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right) \sin \left(\frac{4k+1}{2} \pi \right)$$

$$+ a \cos \left(\frac{4k+1}{2} \pi \right) f \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right)$$

$$= f' \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right).$$

从而

$$k_1 = k_2,$$

所以两曲线在公共点彼此相切.

1075. 证明双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一正交网, 就是说这两族中的曲线成直角相交.

证 设双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与双曲线 $xy = b$ 相交于点 $P(x, y)$, 则在此点双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 的切线的斜率 k_1 满足: $2x - 2yk_1 = 0$, 所以,

$$k_1 = \frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy = b$ 的切线的斜率 k_2 满足: $y + xk_2 = 0$, 所以,

$$k_2 = -\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x} \right) = -1.$$

因此, 两双曲线交成直角, 故此两曲线族形成一正交网.

1076. 证明抛物线族

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0)$$

$$\text{及} \quad y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$$

形成正交网.

证 设抛物线 $y^2 = 4a(a-x)$ 与抛物线 $y^2 = 4b(b+x)$ 相交于点 $P(x, y)$, 则在此点 $y^2 = 4a(a-x)$ 的切线的斜率 k_1 满足: $2yk_1 = -4a$, 所以,

$$k_1 = -\frac{2a}{y};$$

在同一点抛物线 $y^2 = 4b(b+x)$ 的切线的斜率 k_2 满足: $2yk_2 = 4b$, 所以,

$$k_2 = \frac{2b}{y};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = -\frac{4ab}{y^2}. \quad (1)$$

但点 $P(x, y)$ 同时在这两条抛物线上, 故

$$4a(a-x) = 4b(b+x).$$

于是, $x = a-b$, 所以

$$y^2 = 4a(a-a+b) = 4ab. \quad (2)$$

以 (2) 式代入 (1) 式, 得知在交点处, 两切线的斜率满足

$$k_1 k_2 = -1,$$

故此两切线直交. 由此可知, 该两抛物线族形成正交网.

1077. 写出曲线 $x = 2t - t^2$ 及 $y = 3t - t^3$ 上于 (a) $t = 0$,
(6) $t = 1$ 各点处的切线和法线的方程.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(1+t).$$

所以, 有

(a) 当 $t = 0$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}.$$

切线方程为

$$y = \frac{3}{2}x, \text{ 即 } 3x - 2y = 0;$$

法线方程为

$$y = -\frac{2}{3}x, \text{ 即 } 2x + 3y = 0.$$

(6) 当 $t = 1$ 时,

$$x = 1, y = 2, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为

$$y - 2 = 3(x - 1), \text{ 即 } 3x - y - 1 = 0;$$

法线方程为

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1), \text{ 即 } x + 3y - 7 = 0.$$

1078. 写出曲线

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

在 (a) $t = 0$, (6) $t = 1$, (B) $t = \infty$ 各点的切线与法线的方程.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2t - 4t^3 + t^4}{2 + 2t - 4t^3 - t^4},$$

所以, 有

(a) 当 $t = 0$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 1.$$

切线方程为

$$y = x;$$

法线方程为

$$y = -x.$$

(6) 当 $t = 1$ 时,

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = 3 \left(x - \frac{3}{2} \right), \text{ 即 } 3x - y - 4 = 0;$$

法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{2} \right), \text{ 即 } x + 3y - 3 = 0;$$

(B) 当 $t = \infty$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = -1.$$

(意即: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -1$).

切线方程为

$$y = -x.$$

法线方程为

$$y = x.$$

1079. 写出摆线（旋轮线）

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t = t_0$ 处的切线方程，给出摆线的切线的作法。

解 因为

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} &= \left. \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} \right|_{t=t_0} \\ &= \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \Big|_{t=t_0} = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}. \end{aligned}$$

于是，切线方程为

$$y - a(1 - \cos t_0) = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2} \cdot [x - a(t_0 - \sin t_0)],$$

化简得

$$y - 2a = (x - at_0) \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.$$

由此可知，
切线通过点
($at_0, 2a$)，其

斜率为 $\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$ ，

如图 2.36 中所示， $\angle T'O'P = t_0$ ，而

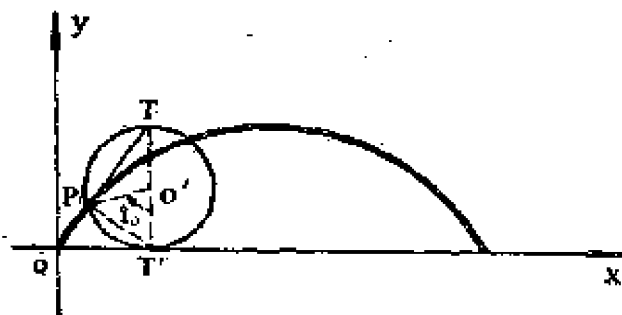


图 2.36

$$OT' = \widehat{T'P} = at_0, \quad T'T = 2a,$$

故 T 点的坐标为($at_0, 2a$)，它在切线上。

其次，联接 PT 及 PT' ，则 $PT' \perp PT$ ，

$$\begin{aligned} k_{PT} &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \angle PTT'\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t_0}{2}\right) \\ &= \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}. \end{aligned}$$

这样， PT 就通过点 $(at_0, 2a)$ ，且其斜率为 $\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$ ，

所以，直线 PT 即为所求的切线。于是摆线的切线可以这样作：先联接切点与滚动的圆的接触点（即点 P ），然后，过 P 作其垂直线，此即所求的切线。

1080. 证明曳物线

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right),$$

$$y = a \sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi)$$

有一定长的切线段。

证 切线段的长 $= \left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + y'^2_x}$ ，而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \cos t}{a \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right)} = \frac{\sin t}{\cos t},$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + y'^2_x} &= \left| \frac{a \sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}} \right| \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \\ &= |a| |\cos t| \cdot \frac{1}{|\cos t|} \\ &= |a|, \end{aligned}$$

这是一个常量，故曳物线有定长的切线段。

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程：

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, $M(6, 6.4)$.

解 由于

$$y' = -\frac{64x}{100y} = -\frac{16x}{25y},$$

从而点 M 处的导数

$$y'|_M = -\frac{16 \times 6}{25 \times 6.4} = -\frac{3}{5},$$

此即曲线在 M 点的切线的斜率。

所以，切线方程为

$$y - 6.4 = -\frac{3}{5}(x - 6), \quad \text{即} \quad 3x + 5y - 50 = 0;$$

法线方程为

$$y - 6.4 = \frac{5}{3}(x - 6), \quad \text{即} \quad 5x - 3y - 10.8 = 0.$$

1082. $xy + \ln y = 1$, $M(1, 1)$.

解 先求 y' . 由于

$$xy' + y + \frac{y'}{y} = 0,$$

从而

$$y' = -\frac{y^2}{x+y}, \quad y' \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1}{2},$$

故切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1), \text{ 即 } x+2y-3=0;$$

法线方程为

$$y-1=2(x-1), \text{ 即 } 2x-y-1=0.$$

§ 4. 函数的微分

1° 函数的微分 若自变数为 x 的函数 $y=f(x)$ 之增量可表为下形

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

其中 $dx = \Delta x$, 则此增量的线性主部称为函数 y 的微分:

$$dy = A(x)dx$$

函数 $y=f(x)$ 的微分存在的必要且充分条件为存在有限的导函数 $y'=f'(x)$, 且有

$$dy = y'dx. \quad (1)$$

若自变数 x 为另一自变数的函数, 公式 (1) 于这种情形下仍然有效 (一阶微分的不变性).

2° 函数的微小增量的估计 为了计算可微分的函数 $f(x)$ 的微小增量可利用公式

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x) \neq 0$, 当 $|\Delta x|$ 充分小时, 它的相对误差可以任意地小.

特别情形, 若计算自变数 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$, 则函数 $y=f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δy 用下列公式近似地表示出来:

$$|\Delta y| = |f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y = |(\ln f(x))' \Delta x| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x \right|.$$

1083. 设:

(a) $\Delta x = 1$, (б) $\Delta x = 0.1$, (в) $\Delta x = 0.01$,

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

求出: (1) $\Delta f(1)$, (2) $df(1)$, 并比较它们.

解 $\Delta f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1)$

$$= (\Delta x + 1)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1 - (1 - 2 + 1)$$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$df(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2 - 2)|_{x=1} \cdot \Delta x = \Delta x,$$

将所求值列表如下:

	$\Delta f(1)$	$df(1)$
Δx	$\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$	Δx
(a) $\Delta x = 1$	5	1
(б) $\Delta x = 0.1$	0.131	0.1
(в) $\Delta x = 0.01$	0.010301	0.01

从上表可以看出, 当 Δx 值愈小时, $\Delta f(1)$ 与 $df(1)$ 之差就愈小.

1084. 运动方程是

$$x = 5t^2,$$

其中 t 以秒来度量, x 以公尺来度量. 设 (a) $\Delta t = 1$ 秒, (б) $\Delta t = 0.1$ 秒, (в) $\Delta t = 0.001$ 秒, 对 $t = 2$

秒的时刻，求出路线的增量 Δx 及路线的微分 dx ，并作比较。

解 $\Delta x = 5(2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2 = 20 \Delta t + 5(\Delta t)^2,$

$$dx = x_t' |_{t=2} \cdot \Delta t = 10 t |_{t=2} \cdot \Delta t = 20 \Delta t,$$

(a) 当 $\Delta t = 1$ 秒时，

$$\Delta x = 25 \text{公尺}, dx = 20 \text{公尺};$$

(b) 当 $\Delta t = 0.1$ 秒时，

$$\Delta x = 2.05 \text{公尺}, dx = 2 \text{公尺};$$

(B) 当 $\Delta t = 0.001$ 秒时，

$$\Delta x = 0.020005 \text{公尺}, dx = 0.02 \text{公尺}.$$

由上可以看出，当 Δt 愈小时， $\Delta x - dx$ 就愈小。

求下列函数 y 的微分：

1085. $y = \frac{1}{x}.$

解 $y' = -\frac{1}{x^2}, \quad dy = -\frac{1}{x^2} dx \quad (x \neq 0).$

1086. $y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$

解 $y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2},$

$$dy = \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

1087. $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{x^2 - a^2},$$

$$dy = \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (|x| \neq |a|).$$

$$1088. \quad y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

$$1089. \quad y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$$

$$\text{解 } y' = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$dy = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (|x| < |a|).$$

$$1090. \quad (\text{a}) \quad d(xe^x); \quad (\text{б}) \quad d(\sin x - x \cos x);$$

$$(\text{в}) \quad d\left(\frac{1}{x^3}\right); \quad (\text{г}) \quad d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right);$$

$$(\text{д}) \quad d(\sqrt{a^2 + x^2}); \quad (\text{е}) \quad d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right);$$

$$(\text{ж}) \quad d \ln(1-x^2); \quad (\text{з}) \quad d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right);$$

$$(\text{и}) \quad d\left[\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right]$$

$$\text{解 } (\text{a}) \quad d(xe^x) = (xe^x)' dx = e^x(x+1)dx;$$

$$\begin{aligned} (\text{б}) \quad d(\sin x - x \cos x) &= (\sin x - x \cos x)' dx \\ &= x \sin x dx; \end{aligned}$$

$$(B) \quad d\left(-\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4} dx \quad (x \neq 0);$$

$$(r) \quad d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} dx \\ = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} dx \quad (x > 0);$$

$$(A) \quad d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}};$$

$$(o) \quad d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} dx \\ = \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1);$$

$$(ж) \quad d \ln(1-x^2) = -\frac{2x dx}{1-x^2} \quad (|x| < 1);$$

$$(з) \quad d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ \cdot \frac{|x|}{x} dx \\ = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1);$$

$$(н) \quad d\left[\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|\right]$$

$$= \left[\frac{\cos^3 x + 2 \sin^2 x \cos x}{2 \cos^4 x} + \frac{1}{2 \cos x} \right] dx$$

$$= -\frac{dx}{\cos^3 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ 为整数} \right).$$

设 u, v, w 为 x 的可微分的函数. 求函数 y 的微分
 设:

1091. $y = uvw.$

解 $dy = vwdu + uwdv + uvdw.$

1092. $y = \frac{u}{v^2}.$

解 $dy = \frac{v^2 du - 2u v dv}{v^4}$

$$= \frac{v du - 2u dv}{v^3} \quad (v \neq 0).$$

1093. $y = -\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$

解 $dy = -\frac{1}{2(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2u du + 2v dv)$

$$= -\frac{u du + v dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (u^2 + v^2 > 0).$$

1094. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{v}.$

解 $dy = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \frac{v du - u dv}{v^2}$

$$= \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2} \quad (u^2 + v^2 > 0, v \neq 0).$$

1095. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad dy &= \frac{2u du + 2v dv}{2(u^2 + v^2)} \\ &= \frac{u du + v dv}{u^2 + v^2} \quad (u^2 + v^2 > 0). \end{aligned}$$

1096. 求

(a) $\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9);$ (б) $\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^+;$

(B) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)};$ (r) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)};$

(A) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (a) \quad &\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9) \\ &= \frac{d}{dx^3}[x^3 - 2(x^3)^2 - (x^3)^3] \\ &= 1 - 4x^3 - 3x^6; \end{aligned}$$

(б) 由于 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 故不妨设 $x \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2x} \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3},$$

显然，上述结果对于 $x < 0$ 也是正确的 ($x \neq 0$)。

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} &= \frac{\cos x dx}{-\sin x dx} \\ &= -\operatorname{ctg} x \quad (x \neq k\pi, k \text{ 为整数}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(r)} \quad \frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)} &= \frac{d}{d(\operatorname{ctg} x)} - \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right) \\ &= -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x \end{aligned}$$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right);$$

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = -1 \\ &(|x| < 1). \end{aligned}$$

1097. 有半径为 $R=100$ 厘米及圆心角 $\alpha=60^\circ$ 的扇形。若
(a) 其半径 R 增加 1 厘米；(b) 角 α 减小 $30'$ ，则
扇形面积的变化若干？求出精确的和近似的解。

解 扇形面积 $A = \frac{1}{2}R^2\alpha$ ，其增量

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{\alpha}{2}[(R + \Delta R)^2 - R^2] \\ &= \alpha R \Delta R + \frac{1}{2}\alpha(\Delta R)^2, \end{aligned}$$

或

$$\Delta A = \frac{1}{2} R^2 \Delta \alpha.$$

扇形面积的微分

$$dA = R\alpha \cdot dR,$$

或

$$dA = \frac{1}{2} R^2 d\alpha.$$

增量是精确的解，微分是近似的解。

(a) 当 $R=100$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\Delta R=1$ 时,

$$\Delta A = \frac{\pi}{6} (200+1) = 105.2 \text{ 平方厘米},$$

$$dA = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = 104.7 \text{ 平方厘米 (增加)}.$$

(6) 当 $\Delta \alpha = -\frac{\pi}{360}$ 时,

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right) = -43.6 \text{ 平方厘米},$$

$$dA = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right)$$

$$= -43.6 \text{ 平方厘米 (减少)}.$$

1098. 单摆振动的周期 (以秒计算) 按下式确定:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长以公分计, $g=981$ 厘米/每秒² 为重力加

速度.

为了使周期 T 增大 0.05 秒, 对摆长 $l=20$ 厘米的长度需要作多少修改?

解 周期 T 对摆长 l 的微分

$$dT = -\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} dl = -\frac{\pi}{\sqrt{lg}} dl.$$

将 $dT=0.05$, $g=981$, $l=20$ 代入上式, 即得

$$dl = \frac{0.05 \times \sqrt{981 \times 20}}{3.1416} \approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23 厘米.

利用函数之微分代替函数的增量, 求下列各式之近似值:

1099. $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.02$, 则

$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{3},$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 0.0066.$$

于是

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1.02} &= f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) \\ &= 1 + 0.0066,\end{aligned}$$

即

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1.007.$$

1100. $\sin 29^\circ$.

解 设 $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$, 则

$$\sin 29^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{6} = 0.4849.$$

1101. $\cos 151^\circ$.

解 设 $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$, 则

$$\cos 151^\circ \approx \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = -0.8747.$$

1102. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1.05$.

解 设 $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.05$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} 1.05 &\approx \operatorname{arctg} 1 + 0.05 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0.8104 \text{ (竖)} = 46^\circ 26'. \end{aligned}$$

1103. $\lg 11$.

解 $\lg 11 = \lg 10 + \lg 1.1 = 1 + \lg 1.1$.

设 $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$, 则

$$\lg 1.1 \approx \lg 1 + \frac{0.1}{\ln 10} = \frac{0.1}{2.3026} = 0.0434,$$

于是

$$\lg 11 \approx 1.0434.$$

1104. 证明近似公式:

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0),$$

其中 $|x| \ll a$ (正数 A 和 B 间的关系式 $A \ll B$ 表示 A 与 B 相比较时, A 为高阶无穷小).

利用这个公式近似地计算:

(a) $\sqrt{5}$; (6) $\sqrt{34}$; (B) $\sqrt{120}$

并与表中的数值比较.

证 设 $f(y) = \sqrt{y}$, $y_0 = a^2$, $\Delta y = x$, 则

$$\sqrt{y_0 + \Delta y} \approx \sqrt{y_0} + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \Delta y$$

(当 $|\Delta y| \ll \sqrt{y_0}$ 时) .

于是,

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}, \quad (\text{当 } |x| \ll a \text{ 时}).$$

$$(a) \sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \approx 2 + \frac{1}{4} = 2.25,$$

$$\text{查表: } \sqrt{5} = 2.24;$$

$$(6) \sqrt{34} = \sqrt{6^2 - 2} \approx 6 - \frac{2}{2 \cdot 6} = 5.833,$$

$$\text{查表: } \sqrt{34} = 5.831;$$

$$(B) \sqrt{120} = \sqrt{11^2 - 1} \approx 11 - \frac{1}{2 \cdot 11} = 10.9546,$$

$$\text{查表: } \sqrt{120} = 10.9545.$$

1105. 证明近似公式:

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0).$$

其中 $|x| \ll a$. 利用此公式近似地计算:

$$(a) \sqrt[3]{9}; \quad (6) \sqrt[3]{80}; \quad (B) \sqrt[3]{100};$$

$$(r) \sqrt[10]{1000}.$$

证 设 $f(y) = \sqrt[n]{y}$, $y_0 = a^n$, $\Delta y = x$, 则

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a^n+x} &\approx \sqrt[n]{a^n} + \frac{x}{n\sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}} \\ &= a + \frac{x}{n a^{n-1}} \quad (\text{当 } |x| \ll a \text{ 时}).\end{aligned}$$

$$(a) \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3+1} \approx 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} = 2.083,$$

$$\text{查表: } \sqrt[3]{9} = 2.080;$$

$$(b) \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4-1} \approx 3 - \frac{1}{4 \cdot 3^3} = 2.9907,$$

$$\text{查表: } \sqrt[4]{80} = 2.9905;$$

$$(c) \sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7-28} \approx 2 - \frac{28}{7 \cdot 2^6} = 1.938,$$

$$\text{查表: } \sqrt[7]{100} = 1.931;$$

$$(r) \sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10}-24} \approx 2 - \frac{24}{10 \cdot 2^9} = 1.9954,$$

$$\text{查表: } \sqrt[10]{1000} = 1.9953.$$

1106. 正方形的边 $x=2.4$ 米 ± 0.05 米. 由此计算所得正方形的面积的相对误差和绝对误差如何?

解 正方形的面积 $A=x^2$. 于是, 面积的相对误差为

$$\begin{aligned}\delta_A &= \left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \left| \frac{2x \Delta x}{x^2} \right| = 2 \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \\ &= 2 \cdot \frac{0.05}{2.4} = 4.2\%;\end{aligned}$$

而绝对误差为

$$|\Delta A| = |2.45^2 - 2.4^2| = 0.24 \text{ 平方米}.$$

1107. 为了计算出球的体积准确到 1%, 问度量球半径 R 时

所允许发生的相对误差如何?

解 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 从而

$$dV = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 R^2 dR = V \frac{3 dR}{R},$$

即体积的相对误差是半径的相对误差的 3 倍:

$$\left| \frac{dV}{V} \right| = 3 \left| \frac{dR}{R} \right|.$$

因而, 半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R = \frac{1}{3} \delta_V \leq \frac{1}{3} \cdot 0.01 = 0.33\%.$$

1108. 借助于单摆的振动利用公式 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ (其中 l 为摆长, T 为摆振动的全周期) 以求重力加速度. 当测量 (a) 摆长 l , (b) 周期 T 时的相对误差 δ 影响于值 g 几何?

解 (a) $\delta_g = \left| \frac{dg}{g} \right| = \left| \frac{dl}{l} \right|$, 于是

$$\delta_g = \delta_l,$$

即 g 的相对误差等于摆长的相对误差.

$$(b) \delta_g = \left| \frac{-8\pi^2 l \cdot T^2 dT}{T^3 \cdot 4\pi^2 l} \right| = 2 \left| \frac{dT}{T} \right|, \text{ 于是}$$

$$\delta_g = 2\delta_T,$$

即 g 的相对误差是周期的相对误差的 2 倍.

1109. 求数 x ($x > 0$) 的常用对数的绝对误差, 设此数的相对

误差等于 δ .

解 设 $f(x) = \ln x$, 若数 δ 很小, 则有

$$\ln(1 + \delta) \approx \delta.$$

因而, 所要求的绝对误差

$$\begin{aligned} |\lg(x + \Delta x) - \lg x| &= \left| \lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \right| \\ &= |\lg(1 + \delta)| = \frac{1}{\ln 10} \ln(1 + \delta) \approx 0.43 \delta. \end{aligned}$$

1110. 证明: 根据正切对数表所求得的角度比用具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

证 正切对数函数的微分

$$\begin{aligned} d(\lg \operatorname{tg} \varphi) &= \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}, \end{aligned}$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot |\cos \varphi| \cdot |d(\lg \operatorname{tg} \varphi)|, \quad (1)$$

而正弦对数函数的微分

$$d(\lg \sin \varphi) = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin \varphi \ln 10},$$

于是

$$\begin{aligned} |d\varphi| &= \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot \left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \\ &\quad \cdot |d(\lg \sin \varphi)|. \end{aligned} \quad (2)$$

比较 (1) 式及 (2) 式的右端, 由于假设确定

$\lg \sin \varphi$ 与 $\lg \operatorname{tg} \varphi$ 时, 具有同样的误差, 而 $\left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \geq 1 \geq |\cos \varphi|$, 故由 (2) 式所确定的 $|d\varphi|$ 不比 (1) 式的 $|d\varphi|$ 小. 这就证明了求角度时用正切对数表更为精确.

§ 5. 高阶的导函数和微分

1° 基本定义 函数 $y=f(x)$ 的高阶导函数由下列关系式顺次地定义出来 (假设对应的运算都有意义):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n=2, 3, \dots).$$

函数 $y=f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n=2, 3, \dots),$$

其中采取 $d^1 y = dy = y' dx$.

若 x 为自变数, 则应有:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0.$$

在这种情形下, 下列公式正确

$$d^n y = y^n dx^n \quad \text{及} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2° 基本公式:

$$\text{I. } (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a>0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x,$$

$$\text{II. } (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\text{III. } (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\text{IV. } (x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n};$$

$$\text{V. } (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3° 莱布尼兹公式 若函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 有 n 阶导函数（可微分 n 次），则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$, C_n^i 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

同样地对于微分 $d^n(uv)$ 得:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i}u d^i v,$$

其中设 $d^0 u = u$ 及 $d^0 v = v$.

求 y'' , 设:

$$1111. \quad y = x \sqrt{1+x^2}.$$

$$\text{解} \quad y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y'' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - \frac{x(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}.$$

$$= \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$1112. \quad y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$(|x| < 1).$$

$$1113. \quad y = e^{-x^2}.$$

$$\text{解 } y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

$$1114. \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \quad \left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为整数} \right).$$

$$1115. \quad y = (1+x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$$\text{解 } y' = 1 + 2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x,$$

$$y'' = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$1116. \quad y = \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \operatorname{arc} \sin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\
 &+ \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{(1-x^2)^3} \\
 &= \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
 & \quad (|x| < 1) .
 \end{aligned}$$

1117. $y = x \ln x$.

解 $y' = 1 + \ln x, \quad y'' = \frac{1}{x} \quad (x > 0) .$

1118. $y = \ln f(x)$.

解 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)},$

$$y'' = \frac{f(x) f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} \quad (f(x) > 0) .$$

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$
 $+ x \cdot \frac{1}{x}(\cos(\ln x) - \sin(\ln x))$
 $= 2 \cos(\ln x),$
 $y'' = -\frac{2 \sin(\ln x)}{x} \quad (x > 0) .$

1120. 设 $y = e^{\sin x} \cos(\sin x)$, 求 $y(0)$, $y'(0)$ 及 $y''(0)$.

解 $y(0) = 1$. 又

$$y' = e^{\sin x} [\cos x \cos(\sin x)$$

$$-\cos x \sin(\sin x)] .$$

于是,

$$y'(0) = e^0 [1 - 0] = 1 .$$

而

$$\begin{aligned} y'' &= e^{\sin x} [\cos^2 x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad - \sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad + \sin x \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x)] \\ &= e^{\sin x} \{-2 \cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad + \sin x [\sin(\sin x) - \cos(\sin x)]\} , \end{aligned}$$

于是,

$$y''(0) = e^0 \{0 + 0\} = 0 .$$

设 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 为可微分二次的函数. 求 y'' ,
设:

$$1121. \quad y = u^2 .$$

$$\text{解} \quad y' = 2u u' ,$$

$$y'' = 2u'^2 + 2u u'' = 2(u'^2 + u u'') .$$

$$1122. \quad y = \ln \frac{u}{v} .$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} ,$$

$$y'' = \frac{uu'' - u'^2}{u^2} - \frac{vv'' - v'^2}{v^2} \quad (uv > 0) .$$

$$1123. \quad y = \sqrt{u^2 + v^2} .$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}} ,$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{(uu'' + u'^2 + vv'' + v'^2)\sqrt{u^2 + v^2} - \frac{(uu' + vv')^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{u^2 + v^2} \\
 &= \frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - v'u)^2}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad (u^2 + v^2 > 0) .
 \end{aligned}$$

1124. $y = u^v$ ($u > 0$) .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= u^v \left[v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right], \\
 y'' &= u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right)^2 \\
 &\quad + u^v \left[v'' \ln u + \frac{u'v'}{u} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(u'v' + vu'')u - vu'^2}{u^2} \right] \\
 &= u^v \left[\left(v' \ln u + \frac{u'}{u}v \right)^2 + v'' \ln u \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2u'v'}{u} + \frac{v}{u^2}(uu'' - u'^2) \right].
 \end{aligned}$$

设 $f(x)$ 为可微分三次的函数. 求 y'' 及 y''' , 设:

1125. $y = f(x^2)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= 2x f'(x^2), \\
 y'' &= 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2), \\
 y''' &= 4x f''(x^2) + 8x f''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2) \\
 &= 12x f''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2).
 \end{aligned}$$

$$1126. \quad y = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\text{解} \quad y' = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$- \frac{4}{x^6} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6} f'''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^6} f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$- \frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).$$

$$1127. \quad y = f(e^x).$$

$$\text{解} \quad y' = e^x f'(e^x),$$

$$y'' = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x),$$

$$y''' = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x).$$

$$1128. \quad y = f(\ln x).$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{1}{x} f'(\ln x),$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} f'(\ln x) + \frac{1}{x^2} f''(\ln x)$$

$$= \frac{1}{x^2} [f''(\ln x) - f'(\ln x)],$$

$$\begin{aligned}
y''' &= -\frac{2}{x^3} [f''(\ln x) - f'(\ln x)] \\
&\quad + \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - f''(\ln x)] \\
&= \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)] \\
&\quad (x > 0).
\end{aligned}$$

1129. $y = f(\varphi(x))$, 其中 $\varphi(x)$ 是可多次微分的函数.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= \varphi'(x) f'(\varphi(x)), \\
y'' &= \varphi'^2(x) f''(\varphi(x)) + \varphi''(x) f'(\varphi(x)), \\
y''' &= \varphi'^3(x) f'''(\varphi(x)) \\
&\quad + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x)) \\
&\quad + \varphi'''(x)f'(\varphi(x)).
\end{aligned}$$

1130. 对于以下二种情形: (a) x 为自变量, (b) x 为中间变量, 求函数 $y = e^x$ 的 $d^2 y$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad (a) \quad dy &= e^x dx, \quad d^2 y = e^x dx^2, \\
(b) \quad dy &= e^x dx, \quad d^2 y = e^x d^2 x + e^x dx^2.
\end{aligned}$$

若 x 为自变数, 求 $d^2 y$, 设:

$$1131. \quad y = \sqrt{1+x^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad dy &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx, \\
y'' &= \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

于是,

$$d^2 y = \frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1132. $y = -\frac{\ln x}{x}.$

解 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3},$

于是,

$$d^2 y = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} dx^2 \quad (x > 0).$$

1133. $y = x^x.$

解 $y' = x^x (1 + \ln x),$

$$y'' = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right],$$

于是,

$$d^2 y = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2 \quad (x > 0).$$

令 u 及 v 为变数 x 的可微分两次的函数, 求 $d^2 y$,
设:

1134. $y = uv.$

解 $dy = u dv + v du,$

$$\begin{aligned} d^2 y &= du dv + u d^2 v + dv du + v d^2 u \\ &= u d^2 v + 2 du dv + v d^2 u. \end{aligned}$$

1135+. $y = \frac{u}{v}.$

$$\text{解 } dy = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

$$\begin{aligned} d^2 y &= \frac{v^2(dvdu + ud^2u - dudv - ud^2v) - 2v dv(vdu - udv)}{v^4} \\ &= \frac{v(vd^2u - ud^2v) - 2dv(vdu - udv)}{v^3} \quad (v \neq 0). \end{aligned}$$

1136. $y = u^m v^n$ (m 及 n 为常数) .

$$\text{解 } dy = m u^{m-1} v^n du + n u^m v^{n-1} dv,$$

$$\begin{aligned} d^2 y &= m(m-1)u^{m-2}v^n du^2 \\ &\quad + m u^{m-1}(v^n d^2 u + n v^{n-1} dudv) \\ &\quad + m n u^{m-1} v^{n-1} dudv \\ &\quad + n u^m (n-1) v^{n-2} dv^2 + n u^m v^{n-1} d^2 v \\ &= u^{m-2} v^{n-2} \{ (m(m-1)v^2 du^2 \\ &\quad + 2mnudv + n(n-1)u^2 dv^2) \\ &\quad + uv(mvd^2u + nud^2v) \}. \end{aligned}$$

1137. $y = a^u$ ($a > 0$) .

$$\text{解 } dy = a^u \ln a du,$$

$$\begin{aligned} d^2 y &= a^u \ln^2 a \cdot du^2 + a^u \ln a \cdot d^2 u \\ &= a^u \ln a (\ln a \cdot du^2 + d^2 u) \quad (a > 0). \end{aligned}$$

1138. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

$$\text{解 } dy = \frac{u du + v dv}{u^2 + v^2},$$

$$d^2 y = \frac{(u^2 + v^2)(du^2 + ud^2u + dv^2 + vd^2v) - 2(udu + vdv)^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$= \frac{(v^2 - u^2)du^2 - 4uvdudv + (u^2 - v^2)dv^2 + (u^2 + v^2)(ud^2u + vd^2v)}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$(u^2 + v^2 > 0) .$$

1139. $y = \arctg \frac{u}{v} .$

解 $dy = \frac{v du - u dv}{u^2 + v^2} ,$

$$\begin{aligned} d^2 y &= \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) - 2(udu + vdv)(vdu - u dv)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) + 2uv(dv^2 - du^2) + 2(u^2 - v^2)dudv}{(u^2 + v^2)^2} \end{aligned}$$

$$(v \neq 0) .$$

求以参数给出的函数 $y = y(x)$ 的导函数 y'_x , y''_x , y'''_x , 设:

1140. $x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3 .$

解 $y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(t + 1),$

$$y''_x = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}}{2 - 2t} = \frac{3}{4(1 - t)},$$

$$y'''_x = \frac{\frac{dy''_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{4(1 - t)^2}}{2 - 2t}$$

$$= -\frac{3}{8(1-t)^3} \quad (t \neq 1).$$

1141. $x = a \cos t, y = a \sin t.$

解 $y'_x = \frac{a \cos t}{-a \sin t} = -\operatorname{ctg} t,$

$$y''_{x^2} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-a \sin t} = -\frac{1}{a \sin^3 t},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\frac{3 \cos t}{a \sin^4 t}}{-a \sin t} = -\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^5 t}$$

$(t \neq k\pi, k \text{ 为整数}).$

1142. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$

解 $y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$

$$y''_{x^2} = \frac{-\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\frac{\cos \frac{t}{2}}{2a \sin^5 \frac{t}{2}}}{a(1 - \cos t)} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4a^2 \sin^7 \frac{t}{2}}$$

$(t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数}).$

1143. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t.$

$$\begin{aligned}\text{解 } y'_x &= \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + t\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y''_{x^2} &= \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}}{e^t(\cos t - \sin t)} \\ &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + t\right)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'''_{x^3} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \left[-\cos^{-3}\left(\frac{\pi}{4} + t\right) + 3\cos^{-4}\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \right]}{e^t(\cos t - \sin t)} \\ &= \frac{e^{-2t}(2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2} \cos^5\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} \quad \left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数}\right).\end{aligned}$$

1144. $x = f'(t), y = t f'(t) - f(t).$

$$\text{解 } y'_x = \frac{t f''(t)}{f''(t)} = t,$$

$$y''_{x^2} = \frac{1}{f''(t)},$$

$$\begin{aligned}y'''_{x^3} &= -\frac{\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)} = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3} \\ &\quad (f''(t) \neq 0) .\end{aligned}$$

1145. 设函数 $y=f(x)$ 是可微分若干次的. 求反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导函数 x' , x'' , x''' , $x^{(4)}$ (设这些导函数都存在).

$$\text{解 } x' = \frac{1}{y'},$$

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{1}{y'^2} \cdot \frac{dy'}{dy} \\ &= -\frac{1}{y'^2} \cdot \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''' &= -\frac{y''' \cdot \frac{1}{y'} \cdot y'^3 - 3y'^2 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} \cdot y''}{y'^6} \\ &= -\frac{y' y''' - 3y''^2}{y'^6}, \end{aligned}$$

$$x^{(4)} = -\frac{y'^6 \left(\frac{y''}{y'} y''' + y^{(4)} - 6y'' y''' \cdot \frac{1}{y'} \right)}{y'^{10}}$$

$$-\frac{5y'^4 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} (y' y''' - 3y''^2)}{y'^{10}}$$

$$= -\frac{y'^2 y^{(4)} - 10y' y'' y''' + 15y''^3}{y'^7} \quad (y' \neq 0).$$

求由下列隐函数给出的 $y=y(x)$ 的 y'_x , y''_{x^2} 及 y'''_{x^3} :

1146. $x^2 + y^2 = 25$. 在点 $M(3, 4)$ 的 y' , y'' 及 y''' 等于甚么?

解 $y' = -\frac{x}{y},$

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} \\ &= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3}, \end{aligned}$$

$$y''' = \frac{75y'}{y^4} = -\frac{75x}{y^5},$$

在 $M(3, 4)$ 点, 得

$$y' = -\frac{3}{4}, \quad y'' = -\frac{25}{64}, \quad y''' = -\frac{225}{1024}.$$

1147. $y^2 = 2px.$

解 $y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p}{y^2} y' = -\frac{p^2}{y^3},$

$$y''' = \frac{3p^2}{y^4} y' = \frac{3p^3}{y^5} \quad (y \neq 0).$$

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1.$

解 对 x 微分, 得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0, \quad (1)$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}. \quad (2)$$

将 (1) 式两端再对 x 微分, 得

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \quad (3)$$

将 (2) 式所得 y' 代入 (3) 式, 得

$$y'' = \frac{6}{(x-2y)^3}. \quad (4)$$

将 (3) 式两端对 x 微分, 得

$$-3y'' - x y''' + 6y' y'' + 2y y''' = 0, \quad (5)$$

将 (2) 式及 (4) 式代入 (5) 式, 得

$$y''' = \frac{54x}{(x-2y)^5} \quad (x \neq 2y).$$

求 y'_x 及 y''_{x^2} , 设:

$$1149. \quad y^2 + 2 \ln y = x^4.$$

解 对 x 微分, 得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3, \quad (1)$$

再对 x 微分, 得

$$2y'^2 + 2yy'' + \frac{2y''}{y} - \frac{2y'^2}{y^2} = 12x^2. \quad (2)$$

由 (1) 式及 (2) 式得

$$y' = \frac{2x^3 y}{1+y^2},$$

$$y'' = \frac{2x^2 y}{(1+y^2)^3} [3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)].$$

$$1150. \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \quad (a > 0).$$

解 取对数得

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

对 x 微分, 得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = -\frac{xy' - y}{x^2 + y^2},$$

于是

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

将上式对 x 微分, 得

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1 + y')(x - y) - (1 - y')(x + y)}{(x - y)^2} \\ &= \frac{2xy' - 2y}{(x - y)^2} = \frac{2x \cdot \frac{x + y}{x - y} - 2y}{(x - y)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3} \quad (x \neq y, x \neq 0). \end{aligned}$$

1151. 设函数 $f(x)$ 当 $x \leq x_0$ 时有定义且可微分两次. 应当如何选择系数 a, b 及 c , 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0, \\ a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c, & \text{若 } x > x_0 \end{cases}$$

是可微分两次的函数?

解 按题设 $F'(x)$ 存在, 所以 $F(x)$ 在点 x_0 连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} F(x) = F(x_0),$$

也即

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} [a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c]$$

$$c = f(x_0).$$

于是, $c = f(x_0)$. 其次, 由 $F'(x_0 - 0) = F'(x_0 + 0)$ 得

$$f'(x_0) = [2a(x - x_0) + b] \big|_{x=x_0} = b,$$

再由 $F''(x_0 - 0) = F''(x_0 + 0)$ 得

$$f''(x_0) = 2a,$$

于是

$$a = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

1152. 点作直线运动的规律为

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

求其运动的速度和加速度. 在 $t = 2$ 的时刻, 速度与加速度等于甚么?

解 速度

$$v = \frac{ds}{dt} = 20 - 10t, \quad v|_{t=2} = 0;$$

而加速度

$$j = \frac{d^2s}{dt^2} = -10, \quad j|_{t=2} = -10.$$

1153. 点 $M(x, y)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 均匀地运动, 每 T 秒走完一圈. 求点 M 在 Ox 轴上的射影之速度 v 及加速度 j , 设 $t = 0$ 时点的位置为 $M_0(a, 0)$.

解 设 M 点的坐标为 (x, y) , 由于 $\angle M_0OM = \frac{2\pi}{T}t$,

从而

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

于是速度和加速度分别为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

$$j = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

1154. 质点 $M(x, y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛去. 建立(空气的阻力略去不计)运动的方程并计算速度 v 加速度 j 的大小及运动的轨道. 最大的高度和射程等于多少?

解 若不考虑空气的阻力, 则有

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

此即运动方程. 化为直角坐标方程, 得

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

即轨道为一抛物线. 速度

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \alpha}, \end{aligned}$$

而加速度

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{0 + (-g)^2} = g. \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

在最大高度处, $\frac{dy}{dx} = 0$. 此时

$$x = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

于是, 最大高度为

$$\begin{aligned} H_{\max} &= \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \operatorname{tg} \alpha \\ &\quad - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \end{aligned}$$

上式也可从 $\frac{dy}{dt} = 0$, 解出 $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, 再以 t 值代入 y 的表达式而得到. 在最大射程处有: $y = 0$. 于是

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

解得

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

从而, 最大射程为 $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

1155. 点运动的方程为

$$x = 4 \sin \omega t - 3 \cos \omega t, \quad y = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t,$$

(ω 为常数). 求运动的轨道, 速度与加速度的大小.

解 由于

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \sin^2 \omega t + 9 \cos^2 \omega t \\ &\quad - 24 \sin \omega t \cos \omega t + 9 \sin^2 \omega t \\ &\quad + 16 \cos^2 \omega t + 24 \sin \omega t \cos \omega t \\ &= 25(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = 25. \end{aligned}$$

所以, 运动的轨道为一以原点为中心, 5 为半径的圆.

其次, 速度与加速度的大小分别为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{(4\omega \cos \omega t + 3\omega \sin \omega t)^2 + (3\omega \cos \omega t - 4\omega \sin \omega t)^2} \\ &= 5|\omega|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-4\omega^2 \sin \omega t + 3\omega^2 \cos \omega t)^2 + (-4\omega^2 \cos \omega t - 3\omega^2 \sin \omega t)^2} \\ &= 5\omega^2. \end{aligned}$$

求下列指定的阶的导函数:

1156. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$, 求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

解 y 是 x 的多项式, 最高次数为 6 次, 因而

$$y^{(6)} = 1 \cdot 2^2 \cdot 1^3 \cdot 6! = 4 \cdot 6! = 2880,$$

$$y^{(7)} = 0.$$

1157. $y = \frac{a}{x^m}$; 求 y'' .

解 $y' = -amx^{-m-1}$,

$y'' = am(m+1)x^{-m-2}$,

$y''' = -am(m+1)(m+2)x^{-m-3}$

$= -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} \quad (x \neq 0).$

1158. $y = \sqrt{x}$; 求 $y^{(10)}$.

解 $y^{(10)} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{5}{2} \right) \left(-\frac{7}{2} \right) \left(-\frac{9}{2} \right)$

$\left(-\frac{11}{2} \right) \left(-\frac{13}{2} \right) \left(-\frac{15}{2} \right) \left(-\frac{17}{2} \right) x^{-\frac{19}{2}}$

$= -\frac{1711}{2^{10} \cdot x^9 \sqrt{x}} \quad (x > 0),$

其中 $1711 = 1 \cdot 3 \cdots 17$.

1159. $y = \frac{x^2}{1-x}$; 求 $y^{(8)}$.

解 $y = \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x} = -(x+1) + \frac{1}{1-x},$

$y' = -1 + \frac{1}{(1-x)^2},$

$y'' = \frac{2}{(1-x)^3},$

$y''' = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4},$

$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9} \quad (x \neq 1) .$$

1160. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 求 $y^{(100)}$.

解 $y = (1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, 利用莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= \sum_{i=0}^{100} C_{100}^i (1+x)^{(i)} [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(100-i)} \\ &= (1+x) [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(100)} \\ &\quad + C_{100}^1 [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(99)} \\ &= (1+x) \cdot \frac{199!!}{2^{100}} (1-x)^{-\frac{201}{2}} \\ &\quad + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} (1-x)^{-\frac{199}{2}} \\ &= \frac{197!! \cdot (399-x)}{2^{100} (1-x)^{100} \sqrt{1-x}} \quad (x < 1) . \end{aligned}$$

1161. $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(20)} &= x^2 (e^{2x})^{(20)} + 2x C_{20}^1 (e^{2x})^{(19)} \\ &\quad + 2 C_{20}^2 (e^{2x})^{(18)} \\ &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95) . \end{aligned}$$

1162. $y = \frac{e^x}{x}$, 求 $y^{(10)}$.

$$\text{解 } y^{(10)} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i e^x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(10-i)}$$

$$= e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}},$$

其中 $A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdots (11-i)$ 及 $A_{10}^0 = 1$.

1163. $y = x \ln x$, 求 $y^{(5)}$.

$$\text{解 } y' = 1 + \ln x, \quad y'' = \frac{1}{x},$$

$$y^{(5)} = -\frac{3!}{x^4} \quad (x > 0).$$

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 $y^{(5)}$.

$$\text{解 } y' = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4}$$

$$= -\frac{3 - 2 \ln x}{x^3},$$

$$y''' = -\frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - 3x^2(3 - 2 \ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{11 - 6 \ln x}{x^4},$$

$$y^{(4)} = \frac{-\frac{6}{x} \cdot x^4 - 4x^3(11 - 6 \ln x)}{x^8}$$

$$= -\frac{50 - 24 \ln x}{x^5},$$

$$y^{(5)} = - \frac{-\frac{24}{x} \cdot x^5 - 5x^4(50 - 24 \ln x)}{x^{10}}$$

$$= \frac{274 - 120 \ln x}{x^6} \quad (x > 0) .$$

1165. $y = x^2 \sin 2x$; 求 $y^{(50)}$.

解 $y^{(50)} = x^2 (\sin 2x)^{(50)} + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot (\sin 2x)^{(49)}$
 $+ 2 C_{50}^2 (\sin 2x)^{(48)}$
 $= 2^{50} x^2 \sin \left(2x + \frac{50}{2} \pi \right)$
 $+ 100 x \cdot 2^{49} \sin \left(2x + \frac{49}{2} \pi \right)$
 $+ \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2^{48} \cdot \sin \left(2x + \frac{48}{2} \pi \right)$
 $= 2^{50} \left(-x^2 \sin 2x + 50 x \cos 2x \right.$
 $\left. + \frac{1225}{2} \sin 2x \right) .$

1166. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, 求 y''' .

解 $y''' = \cos 3x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)'''$
 $+ C_3^1 (\cos 3x)' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)''$
 $+ C_3^2 (\cos 3x)'' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)'$

$$\begin{aligned}
& + (\cos 3x)^{\frac{10}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \\
& = -\frac{28}{3^3}(-3)^3 \cdot \frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \\
& \quad + 3(-3 \sin 3x) \cdot \left(-\frac{4}{3^2}\right)(-3)^2 \\
& \quad \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} + 3 \cdot (-3^2 \cos 3x) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\
& \quad \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}} + 3^3 \sin 3x \\
& \quad \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}} \\
& = \frac{28-27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \cos 3x \\
& \quad + \frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} \sin 3x \quad \left(x \neq \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$, 求 $y^{(10)}$.

解 利用三角函数和、差与其积的互化公式, 将 y 化简得

$$y = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

于是,

$$\begin{aligned}
y^{(10)} &= \frac{1}{4} \cdot 4^{10} \sin\left(4x + \frac{10}{2}\pi\right) \\
&\quad - \frac{1}{4} \cdot 6^{10} \sin\left(6x + \frac{10}{2}\pi\right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \cdot 2^{10} \sin\left(2x + \frac{10}{2}\pi\right) \\
&= -2^{18} \sin 4x + 2^8 \cdot 3^{10} \sin 6x - 2^8 \sin 2x.
\end{aligned}$$

1168. $y = x \operatorname{sh} x$, 求 $y^{(100)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y^{(100)} &= x(\operatorname{sh} x)^{(100)} + C_{100}^1 (\operatorname{sh} x)^{(99)} \\
&= x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x.
\end{aligned}$$

1169. $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= e^x (\cos x - \sin x), \\
y'' &= e^x [(\cos x - \sin x) + (-\sin x - \cos x)] \\
&= -2e^x \sin x, \\
y''' &= -2e^x (\sin x + \cos x), \\
y^{(4)} &= -2e^x [(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)] \\
&= -4e^x \cos x.
\end{aligned}$$

1170. $y = \sin^2 x \ln x$, 求 $y^{(6)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \ln x \\
&= \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \ln x. \\
y^{(6)} &= \frac{(-1)^6}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} \\
&\quad - \frac{1}{2} (\cos 2x \cdot \ln x)^{(6)}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x \\ + \left(\frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \right) \cos 2x.$$

于下列各例中，视 x 为自变数，求指定的阶的微分。

1171. $y = x^5$ ，求 $d^5 y$ 。

解 $d^5 y = 5! dx^5 = 120 dx^5$ 。

1172. $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ，求 $d^3 y$ 。

解 $d^3 y = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{5}{2} \right) x^{-\frac{7}{2}} dx^3 \\ = -\frac{15}{8x^3 \cdot \sqrt{x}} dx^3 \quad (x > 0) .$

1173. $y = x \cos 2x$ ，求 $d^{10} y$ 。

解 $d^{10} y = (x \cos 2x)^{(10)} dx^{10} \\ = \left[2^{10} x \cos \left(2x + \frac{10\pi}{2} \right) \right. \\ \left. + 10 \cdot 2^9 \cos \left(2x + \frac{9\pi}{2} \right) \right] dx^{10} \\ = -1024(x \cos 2x + 5 \sin 2x) dx^{10} .$

1174. $y = e^x \ln x$ ，求 $d^4 y$ 。

解 $d^4 y = (e^x \ln x)^{(4)} dx^4 \\ = e^x \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4 .$

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; 求 $d^8 y$.

解 $d^8 y = (\cos x \cdot \operatorname{ch} x)^{(8)} dx^8 = 8 \sin x \operatorname{sh} x dx^8.$

设 u 为 x 的可微分足够多次的函数, 于下列各例中求指定的阶的微分.

1176. $y = u^2$; 求 $d^{10} y$.

解 $d^{10} y = d^{10}(u \cdot u) = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i d^{10-i} u \cdot d^i u$

$$= u d^{10} u + 10 d^9 u \cdot du + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^8 u \cdot d^2 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^7 u d^3 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^6 u d^4 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (d^5 u)^2$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 u d^6 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u d^7 u + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^2 u d^8 u$$

$$+ 10 du d^9 u + u d^{10} u$$

$$= 2u d^{10} u + 20 du d^9 u + 90 d^2 u d^8 u$$

$$+ 240 d^3 u d^7 u + 420 d^4 u d^6 u + 252 (d^5 u)^2.$$

1177. $y = e^u$; 求 $d^4 y$.

解 $dy = e^u du,$

$$d^2 y = e^u du^2 + e^u d^2 u,$$

$$d^3 y = e^u [(du^3 + du d^2 u) + d(du^2) + d^3 u]$$

$$\begin{aligned}
&= e^u (du^3 + 3 du d^2 u + d^3 u), \\
d^4 y &= e^u [(du^4 + 3 du^2 d^2 u + du d^3 u) \\
&\quad + d(du^2 \cdot du) + 3d(du d^2 u) + d^4 u] \\
&= e^u (du^4 + (du^2 d^2 u + 3 d^2 u^2 + 4 du d^3 u \\
&\quad + d^4 u)).
\end{aligned}$$

1178. $y = \ln u$, 求 $d^3 y$.

解 $dy = \frac{1}{u} du,$

$$d^2 y = -\frac{1}{u^2} du^2 + \frac{1}{u} d^2 u,$$

$$\begin{aligned}
d^3 y &= \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{2}{u^2} du d^2 u - \frac{1}{u^2} d^2 u du \\
&\quad + \frac{1}{u} d^3 u \\
&= \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{3}{u^2} du d^2 u + \frac{1}{u} d^3 u.
\end{aligned}$$

1179. 视 x 为某个自变数的函数, 由函数 $y = f(x)$ 求 $d^2 y$, $d^3 y$ 及 $d^4 y$.

解 $dy = f'(x) dx$

$$d^2 y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x$$

$$d^3 y = f'''(x) dx^3 + 3f''(x) dx d^2 x + f'(x) d^3 x,$$

$$\begin{aligned}
d^4 y &= f^{(4)}(x) dx^4 + 3f'''(x) dx^2 d^2 x \\
&\quad + 3f'''(x) dx^2 d^2 x + 3f''(x)(d^2 x)^2 \\
&\quad + dx d^3 x + f''(x) dx d^3 x + f'(x) d^4 x \\
&= f^{(4)}(x) dx^4 + 6f'''(x) dx^2 d^2 x
\end{aligned}$$

$$+ 4f''(x)dx d^3x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ + f'(x)d^4x.$$

1180. 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y=f(x)$ 的导函数 y'' 及 y''' , 但不假定 x 为自变量.

解 $y' = \frac{dy}{dx},$

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3},$$

$$y''' = \frac{d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$= \frac{dx \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

1181. 证明: 函数

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' + y = 0.$$

证 $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x = -y,$$

所以

$$y'' + y = 0.$$

1182. 证明: 函数

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' - y = 0.$$

证 $y' = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x,$

$$y'' = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x = y,$$

所以

$$y'' - y = 0.$$

1183. 证明: 函数

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, λ_1 及 λ_2 为常数, 满足方程

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0.$$

证 $y' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x},$

$$y'' = C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x},$$

于是,

$$\begin{aligned} & y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y \\ &= C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} \\ &\quad - C_1 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} - C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} - C_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \\ &\quad + C_1 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

1184. 证明: 函数

$$y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)],$$

其中 C_1 及 C_2 为任意常数, n 为常数, 满足方程:

$$x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0.$$

$$y' = nx^{n-1} [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$$

$$+ x^{n-1} [C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)],$$

$$y'' = x^{n-2} \{ (n^2 - n - 1) [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] + (2n - 1) [C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)] \},$$

于是,

$$\begin{aligned} & x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y \\ &= x^n \{ (n^2 - n - 1) [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &+ (2n - 1) [C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)] \} \\ &+ (1 - 2n)x^n \{ n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &+ [C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)] \} \\ &+ (1 + n^2)x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

1185. 证明: 函数

$$\begin{aligned} y = & e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ & + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3 及 C_4 为任意常数, 满足方程

$$y^{(4)} + y = 0.$$

证
$$y' = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{C_1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_4}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \Big), \\
y'' = & e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \Big(-\frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& - \frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big) \\
& + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \Big(-\frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& - \frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big) \\
= & e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \Big(C_2 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_1 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big) \\
& + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \Big(C_3 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \Big), \\
y^{(4)} = & (y'')'' = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \Big(-C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& - C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big)
\end{aligned}$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(-C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= -y,$$

于是,

$$y^{(4)} + y = 0.$$

1186. 证明: 若函数 $f(x)$ 有 n 阶导函数, 则

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

证 每求一次导函数, 均要乘以因子 $(ax+b)' = a$, 所以

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. 若 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, 求 $P^{(n)}(x)$.

解 $P'(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$
 $P''(x) = a_0 n(n-1) x^{n-2} + a_1 (n-1)(n-2) x^{n-3}$
 $\quad + \dots + a_{n-2}$
 $\quad \dots \dots \dots$
 $P^{(n)}(x) = n! a_0.$

求 $y^{(n)}$, 设:

1188. $y = \frac{ax+b}{cx+d}.$

解 $y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2},$
 $y'' = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3},$

利用数学归纳法, 可证得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} c^{n-1} (ad-bc) n!}{(cx+d)^{n+1}}$$

$$\left(x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0 \right).$$

事实上, 对于 $n=2$ 等式成立, 设对于 n 等式成立, 则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)} = \frac{-(-1)^{n-1} c^{n-1} (ad-bc) n! (n+1) (cx+d)^n \cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}}$$

$$= \frac{(-1)^{(n+1)-1} c^{(n+1)-1} (ad-bc) (n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}.$$

即对于 $n+1$ 等式也成立, 于是得证.

1189. $y = \frac{1}{x(1-x)}.$

解 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x} \right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(n)}$$

$$= n! \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right]$$

$$(x \neq 0, x \neq 1).$$

1190. $y = \frac{1}{x^2-3x+2}.$

解 $y = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$$

$$(x \neq 1, x \neq 2) .$$

1191. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} .$

解 $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \cdots$

$$\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-2)^n (1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}} \quad \left(x < \frac{1}{2}\right) .$$

1192. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} .$

解 $y = \frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}} .$

$$y^{(n)} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) \cdots$$

$$\left(-\frac{3n-5}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}$$

$$- \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) \cdots$$

$$\left(-\frac{3n-2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdots (3n-5)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}} [2(1+x)]$$

$$\begin{aligned}
& + (3n-2)] \\
& = \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-5)(3n+2x)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}} \\
& (n \geq 2; \quad x \neq -1) .
\end{aligned}$$

1193. $y = \sin^2 x$.

解 $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$,

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)} \\
&= 2^{n-1} \sin \left(2x + \frac{n-1}{2} \pi \right) \\
&= -2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n}{2} \pi \right).
\end{aligned}$$

1194. $y = \cos^2 x$.

解 $y' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$,

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= -(\sin 2x)^{(n-1)} \\
&= -2^{n-1} \sin \left(2x + \frac{n-1}{2} \pi \right) \\
&= 2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{n}{2} \pi \right).
\end{aligned}$$

1195. $y = \sin^3 x$.

解 $y = \sin x \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos 2x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x \\
&= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.
\end{aligned}$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \sin \left(x + \frac{n}{2} \pi \right) - \frac{3^n}{4} \sin \left(3x + \frac{n}{2} \pi \right).$$

1196. $y = \cos^3 x$.

解 $y = \cos x \cos^2 x = \frac{1}{2} \cos x (1 + \cos 2x)$

$$= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \cos 2x$$

$$= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \cos \left(x + \frac{n}{2} \pi \right) + \frac{3^n}{4} \cos \left(3x + \frac{n}{2} \pi \right).$$

1197. $y = \sin ax \sin bx$.

解 $y = \frac{1}{2} \cos (a-b)x - \frac{1}{2} \cos (a+b)x$.

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (a-b)^n \cos \left[(a-b)x + \frac{n}{2} \pi \right] \\ - \frac{1}{2} (a+b)^n \cos \left[(a+b)x + \frac{n}{2} \pi \right].$$

1198. $y = \cos ax \cos bx$.

解 $y = \frac{1}{2} \cos (a-b)x + \frac{1}{2} \cos (a+b)x$.

$$y^{(n)} = \frac{(a-b)^n}{2} \cos \left[(a-b)x + \frac{n}{2} \pi \right] \\ + \frac{1}{2} (a+b)^n \cos \left[(a+b)x + \frac{n}{2} \pi \right].$$

$$1199. \quad y = \sin ax \cos bx.$$

$$\text{解} \quad y = \frac{1}{2} \sin(a+b)x + \frac{1}{2} \sin(a-b)x.$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (a+b)^n \sin \left[(a+b)x + \frac{n}{2} \pi \right] \\ + \frac{1}{2} (a-b)^n \sin \left[(a-b)x + \frac{n}{2} \pi \right].$$

$$1200. \quad y = \sin^2 ax \cos bx.$$

$$\text{解} \quad y = \frac{1}{2} \cos bx (1 - \cos 2ax) \\ = \frac{1}{2} \cos bx - \frac{1}{4} \cos(2a+b)x \\ - \frac{1}{4} \cos(2a-b)x.$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} b^n \cos \left(bx + \frac{n}{2} \pi \right) \\ - \frac{1}{4} (2a+b)^n \cos \left[(2a+b)x + \frac{n}{2} \pi \right] \\ - \frac{1}{4} (2a-b)^n \cos \left[(2a-b)x + \frac{n}{2} \pi \right].$$

$$1201. \quad y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

$$\text{解} \quad y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) \\ = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

$$y^{(n)} = 4^{n-1} \cos \left(4x + \frac{n}{2}\pi \right),$$

1202. $y = x \cos ax.$

解 $y^{(n)} = x(\cos ax)^{(n)} + n(\cos ax)^{(n-1)}$

$$= a^n x \cos \left(ax + \frac{n}{2}\pi \right)$$

$$+ n a^{n-1} \cos \left(ax + \frac{n-1}{2}\pi \right)$$

$$= a^n x \cos \left(ax + \frac{n}{2}\pi \right)$$

$$+ n a^{n-1} \sin \left(ax + \frac{n}{2}\pi \right).$$

1203. $y = x^2 \sin ax.$

解 $y^{(n)} = a^n x^2 \sin \left(ax + \frac{n}{2}\pi \right)$

$$+ 2n a^{n-1} x \sin \left(ax + \frac{n-1}{2}\pi \right)$$

$$+ n(n-1) a^{n-2} \sin \left(ax + \frac{n-2}{2}\pi \right)$$

$$= a^n \left[x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2} \right] \sin \left(ax + \frac{n}{2}\pi \right)$$

$$- 2n a^{n-1} x \cos \left(ax + \frac{n}{2}\pi \right).$$

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$

解 $y^{(n)} = (-1)^n (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

$$\begin{aligned}
& + 2(-1)^{n-1}(x+1)e^{-x} \cdot n \\
& + (-1)^{n-2}n(n-1)e^{-x} \\
& = (-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x \\
& + (n-1)(n-2)].
\end{aligned}$$

1205. $y = \frac{e^x}{x}.$

解 $y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \left(\frac{1}{x}\right)^k$

$$= e^x \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}} \right\}.$$

1206. $y = e^x \cos x.$

解 $y' = e^x(\cos x - \sin x) = 2^{\frac{1}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$

$$\begin{aligned}
y'' &= 2^{\frac{1}{2}} e^x \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\
&= 2^{\frac{2}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),
\end{aligned}$$

利用数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

1207⁺. $y = e^x \sin x.$

解 $y' = e^x(\sin x + \cos x) = 2^{\frac{1}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}} e^x \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin \left(x + \frac{2n\pi}{4} \right),$$

利用数学归纳法可证得

$$y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin \left(x + \frac{n\pi}{4} \right).$$

1208. $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}.$

解 $y' = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx}.$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{(-1)^n b^n (n-1)!}{(a+bx)^n} + \frac{b^n (n-1)!}{(a-bx)^n} \\ &= \frac{(n-1)! b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^n} [(a+bx)^n \\ &\quad + (-1)^{n-1} (a-bx)^n] \quad \left(|x| < \left| \frac{a}{b} \right| \right). \end{aligned}$$

1209. $y = e^{ax} P(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式.

解 $y^{(n)} = e^{ax} [a^n P(x) + C_1^n a^{n-1} P'(x) \\ + \dots + P^{(n)}(x)].$

1210. $y = x \operatorname{sh} x.$

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(n)} &= x(\operatorname{sh} x)^{(n)} + n(\operatorname{sh} x)^{(n-1)} \\ &= \frac{x}{2} [e^x - (-1)^n e^{-x}] + \frac{n}{2} [e^x - (-1)^{n-1} e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} [(x+n)e^x - (-1)^n (x-n)e^{-x}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[(x+n)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \\
&\quad - (-1)^n(x-n)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)] \\
&= \frac{1}{2}\{[(x+n) - (-1)^n(x-n)]\operatorname{ch} x \\
&\quad + [(x+n) + (-1)^n(x-n)]\operatorname{sh} x\}.
\end{aligned}$$

1211. 求 $d^n y$, 设 $y = x^n e^x$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } d^n y &= y^{(n)} dx^n \\
&= e^x \left[x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + n! \right] dx^n.
\end{aligned}$$

1212. 求 $d^n y$, 设 $y = \frac{\ln x}{x}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } d^n y &= y^{(n)} dx^n \\
&= \left[\left(\frac{1}{x} \right)^{(n)} \ln x + n \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \right)^{(n-1)} \right. \\
&\quad \left. + C_n^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{1}{x} \right)^{(n-2)} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \frac{1}{x} (\ln x)^{(n)} \right] dx^n \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] dx^n \quad (x > 0).
\end{aligned}$$

1213. 证明等式:

$$\begin{aligned}
(1) & (e^{ax} \sin(bx+c))^{(n)} \\
&= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx+c+n\varphi)
\end{aligned}$$

及 (2) $[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}$

$$=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

证 (1) $[e^{ax}\sin(bx+c)]'$

$$=e^{ax}[a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c)]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c)\right.$$

$$\left.+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx+c+\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]''$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{2}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+2\varphi),$$

.....

利用数学归纳法可证得

$$[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi).$$

(2) 同理可证

$$[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+c+n\varphi).$$

1214. 求 $y^{(n)}$, 设:

$$(a) y = \operatorname{ch} ax \cos bx; \quad (b) y = \operatorname{ch} ax \sin bx;$$

$$(B) \quad y = \operatorname{sh} ax \cos bx; \quad (Г) \quad y = \operatorname{sh} ax \sin bx.$$

解 (a) $y = \frac{1}{2}e^{ax} \cos bx + \frac{1}{2}e^{-ax} \cos bx,$

利用1213题 (2) 的结果, 得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} [e^{ax} \cos(bx + n\varphi) \\ &\quad + e^{-ax} \cos(bx + n\pi - n\varphi)] \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ e^{ax} \left[\cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \sin\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{-ax} \left[\cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \cos\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \sin\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \right] \right\} \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \right. \\ &\quad \cdot \cos\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \\ &\quad \cdot \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \sin\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \left. \right\} \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \operatorname{ch} ax \cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \\ & - \sin\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \operatorname{sh} ax \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \Big]. \end{aligned}$$

同样方法可求得:

$$\begin{aligned} \text{(G)} \quad y^{(n)} &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \Big[\cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{ch} ax \\ & \quad \cdot \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) + \sin\left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi\right) \operatorname{sh} ax \\ & \quad \cdot \cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad y^{(n)} &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \Big[\sin n\varphi \operatorname{ch} ax \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \\ & \quad + \cos n\varphi \operatorname{sh} ax \cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(r)} \quad y^{(n)} &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \Big[-\sin n\varphi \operatorname{ch} ax \cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \\ & \quad + \cos n\varphi \operatorname{sh} ax \sin\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) \Big], \end{aligned}$$

$$\text{其中} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1215. 将函数

$$f(x) = \sin^{2p} x,$$

其中 p 为自然数, 化为三角多项式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

解 设 $t = \cos x + i \sin x$, 则

$$\sin x = \frac{1}{2i} (t - \bar{t})$$

其中 \bar{t} 为 t 的共轭复数.

于是

$$\begin{aligned} \sin^{2p} x &= \frac{1}{(2i)^{2p}} (t - \bar{t})^{2p} \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k t^{2p-k} (-1)^k \bar{t}^k \\ &= (-1)^p C_{2p}^p + \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (-1)^k \\ &\quad \cdot \cos(2p-2k)x. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} (\sin^{2p} x)^{(n)} &= \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (-1)^k (2p-2k)^n \cos \left[(2p-2k)x + \frac{n}{2}\pi \right] \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k} 2^{n-2p+1} (p-k)^n \\ &\quad C_{2p}^k \cos \left[(2p-2k)x + \frac{n}{2}\pi \right]. \end{aligned}$$

1216. 设:

$$(A) f(x) = \sin^{2p+1} x, \quad (B) f(x) = \cos^{2p} x;$$

$$(B) f(x) = \cos^{2p+1} x,$$

其中 p 为正整数, 求 $f^{(n)}(x)$.

解 (a) 设 $t = \cos x + i \sin x$, 则

$$\sin x = \frac{1}{2i} (t - \bar{t}),$$

$$\begin{aligned} \sin^{2p+1} x &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k t^{2p+1-k} (-1)^k \bar{t}^k \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^k [\cos(2p+1 \\ &\quad - 2k)x + i \sin(2p+1 - 2k)x] \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} 2^{-2p} C_{2p+1}^k \sin(2p+1 \\ &\quad - 2k)x. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} C_{2p+1}^k \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} \\ &\quad \cdot \sin \left[(2p+1-2k)x + \frac{n}{2}\pi \right]; \end{aligned}$$

类似1215题及本题 (a) 的方法, 可求得:

$$(6) f^{(n)}(x) = (\cos^{2p} x)^{(n)}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos \left[(2p \right. \\ &\quad \left. - 2k)x + \frac{n}{2}\pi \right]; \end{aligned}$$

$$(B) f^{(n)}(x) = (\cos^{2p+1} x)^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^p \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \cos \left[(2p+1 - 2k)x + \frac{n}{2}\pi \right].$$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$$

证明

$$\left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(n)} = -\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arctg} x].$$

证 将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化成下列形式:

$$x+i = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$x-i = r(\cos \theta - i \sin \theta).$$

其中 $r = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \operatorname{arctg} x$.

于是

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(n)} &= -\frac{1}{2i} \left[\left(\frac{1}{x-i} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+i} \right)^{(n)} \right] \\ &= -\frac{1}{2i} \left[-\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} \right] \\ &= -\frac{(-1)^n n!}{2i (x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} [(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}] \\ &= -\frac{(-1)^n n!}{2i (x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \{ r^{n+1} [\cos(n+1)\theta - \sin(n+1)\theta] \} \end{aligned}$$

$$+i \sin(n+1)\theta] - r^{n+1}[\cos(n+1)\theta - i \sin(n+1)\theta]\}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} r^{n+1} \sin(n+1)\theta$$

$$= -\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arccotg} x],$$

所以,

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = -\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arccotg} x].$$

1218. 求函数 $f(x) = \operatorname{arctg} x$ 的 n 阶导函数.

解 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$

利用1217题的结果, 得

$$f^{(n)}(x) = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin[n \operatorname{arccotg} x]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)$$

$$(x \neq 0).$$

求 $f^{(n)}(0)$, 设:

1219. (a) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)},$

(b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}.$

解 (a) $f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right)$,

于是,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n! 2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}} \right].$$

所以

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{3} [(-1)^n + 2^{n+1}].$$

(b) $f(x) = -\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

于是,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} \\ &\quad + \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{(2n-3)!!}{2^n} + \frac{(2n-1)!!}{2^n} \\ &= \frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}} \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

1220. (a) $f(x) = x^2 e^{ax}$; (b) $f(x) = \arctg x$;

(B) $f(x) = \arcsin x$.

解 (a) $f^{(n)}(x) = x^2 a^n e^{ax} + 2nxa^{n-1}e^{ax} \\ + n(n-1)a^{n-2}e^{ax},$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2};$$

(6) 利用1218题的结果, 得

$$f^{(2k)}(0) = 0 \text{ 及 } f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)! \\ (k=0, 1, 2, \dots);$$

$$(B) \quad y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

若以添加下标“0”表示在 $x=0$ 时的导数值, 则得

$$y'_0 = f'(0) = 1, \quad y''_0 = f''(0) = 0,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

对上式应用莱布尼兹公式, 得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx y^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} \\ - x y^{(n+1)} - n y^{(n)} = 0.$$

在上式中, 令 $x=0$, 则有

$$y_0^{(n+2)} - n(n-1)y_0^{(n)} - n y_0^{(n)} = 0,$$

即

$$y_0^{(n+2)} = n^2 y_0^{(n)}.$$

由于 $y''_0 = 0$, 故

$$y_0^{(2k)} = f^{(2k)}(0) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots);$$

又由于 $y'_0 = 1$, 故

$$y_0^{(2k+1)} = f^{(2k+1)}(0) \\ = (2k-1)^2 y_0^{(2k-1)} \\ = (2k-1)^2 \cdot (2k-3)^2 y_0^{(2k-3)}$$

$$= \dots$$

$$= [1 \cdot 3 \cdots (2k-1)]^2$$

$$= [(2k-1)!!]^2 \quad (k=1, 2, \dots).$$

1221. (a) $f(x) = \cos(m \arcsin x)$,

(b) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

解 (a) $y' = f'(x)$

$$= -\frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \sin(m \arcsin x),$$

$$y'' = -\frac{m^2}{1-x^2} \cos(m \arcsin x)$$

$$- \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(m \arcsin x).$$

于是,

$$y'_0 = f'(0) = 0, \quad y''_0 = f''(0) = -m^2,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0.$$

对上式应用莱布尼兹公式, 得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx y^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} \\ - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} + m^2y^{(n)} = 0.$$

令 $x = 0$, 即得

$$y_0^{(n+2)} + (m^2 - n^2)y_0^{(n)} = 0.$$

由于 $y'_0 = 0$, 故 $y_0^{(2k-1)} = f^{(2k-1)}(0) = 0$ ($k=1, 2, \dots$);

又由于 $y''_0 = -m^2$, 故

$$y_0^{(2k)} = f^{(2k)}(0) = -[m^2 - (2k-2)^2]y_0^{(2k-2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \{ -[m^2 - (2k-2)^2] \} \cdot \{ -[m^2 - (2k-4)^2] \} y_0^{(2k-4)} \\
&= \dots\dots \\
&= (-1)^{k-1} [m^2 - (2k-2)^2] \{ m^2 - (2k-4)^2 \} \dots (m^2 - 2^2) y_0'' \\
&= (-1)^k m^2 (m^2 - 2^2) \dots [m^2 - (2k-2)^2] \\
&\quad (k=1, 2, \dots) .
\end{aligned}$$

$$(6) \quad y' = f'(x) = \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cos(m \arcsin x),$$

$$y'' = f''(x) = -\frac{m^2}{1-x^2} \sin(m \arcsin x)$$

$$+ \frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(m \arcsin x).$$

于是,

$$y_0' = f'(0) = m, \quad y_0'' = f''(0) = 0,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0,$$

这与本题 (a) 所得的方程是一样的, 因而也有与(a) 同样的结果:

$$y_0^{(n+2)} + (m^2 - n^2)y_0^{(n)} = 0.$$

由于, $y_0'' = 0$, 故 $y_0^{(2k)} = f^{(2k)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$;

又由于 $y_0' = m$, 故

$$\begin{aligned}
y_0^{(2k+1)} &= f^{(2k+1)}(0) \\
&= -[m^2 - (2k-1)^2] y_0^{(2k-1)} = \dots
\end{aligned}$$

$$= (-1)^k m(m^2 - 1^2) \cdots [m^2 - (2k-1)^2] \\ (k=1, 2, \dots).$$

1222. (a) $f(x) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2$; (6) $f(x) = (\operatorname{arc} \sin x)^2$.

解 (a) 仍以下标带“0”者表示在 $x=0$ 时的导数值, 应用莱布尼兹公式及1220题(6)的结果, 即得

$$f^{(2k-1)}(0) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_{0}^{(2k-1)} \\ = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

及

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_{0}^{(2k)} \\ &= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_{0}^{(i)} \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_{0}^{(2k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_{0}^{(2i+1)} \\ &\quad \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_{0}^{(2k-2i-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (-1)^i (2i)! \\ &\quad \cdot (-1)^{k-i-1} (2k-2i-2)! \\ &= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2i+1)!(2k-2i-1)!} \\ &\quad \cdot (2i)!(2k-2i-2)! \\ &= (-1)^{k-1} (2k)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)} \\ &= (-1)^{k-1} (2k)! \\ &\quad \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2k-2i-1} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k-1} 2(2k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2(k-i)-1} \\
&= (-1)^{k-1} (2k-1)! \cdot 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2k-1} \right) \quad (k=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$(6) \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \text{ 或}$$

$$\sqrt{1-x^2} f'(x) = 2 \arcsin x,$$

对上式两边再求导, 得

$$\sqrt{1-x^2} f''(x) - \frac{x f'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(1-x^2)f''(x) - x f'(x) - 2 = 0.$$

应用莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nx f^{(n+1)}(x) \\
&- n(n-1)f^{(n)}(x) - x f^{(n+1)}(x) - n f^{(n)}(x) = 0.
\end{aligned}$$

在上式中令 $x=0$, 即得

$$f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0.$$

由于 $f'(0)=0$, 故

$$f^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots);$$

又由于 $f''(0)=2$, 故

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(0) &= (2k-2)^2 (2k-4)^2 \cdots 2^2 f''(0) \\
&= 2^{2k-1} [(k-1)!]^2 \quad (k=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

1223. 设

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 于 a 点的邻区内有 $(n-1)$ 阶的连续导函数, 求 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= (x-a)^n \varphi^{(n-1)}(x) \\ &\quad + C_{n-1}^1 n (x-a)^{n-1} \varphi^{(n-2)}(x) + \dots \\ &\quad + C_{n-1}^{n-2} n(n-1) \dots 3 (x-a)^2 \varphi'(x) \\ &\quad + n_1 (x-a) \varphi(x). \end{aligned}$$

于是, $f^{(n-1)}(a) = 0$.

按导数定义, 即得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[(x-a)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(x) \right. \\ &\quad + C_{n-1}^1 n (x-a)^{n-2} \varphi^{(n-2)}(x) + \dots \\ &\quad + C_{n-1}^{n-2} n(n-1) \dots 3 (x-a) \varphi'(x) \\ &\quad \left. + n_1 \varphi(x) \right] \\ &= n_1 \varphi(a). \end{aligned}$$

1224. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0 & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

(n 为自然数) 于点 $x=0$ 有一直到 n 阶的导函数, 而无 $(n+1)$ 阶导函数.

证 由莱布尼兹公式, 当 $x \neq 0$ 时得

$$f^{(n)}(x) = \left(x^{2n} \sin \frac{1}{x} \right)^{(n)}$$

$$= \sum_{i=0}^m C_m^i (x^{2*})^{(m-i)} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)}.$$

首先指出, 有

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)} &= \sum_{k=1}^{i-1} \left[a_k x^{-(i+k)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right] \\ &\quad + (-x^{-2})^i \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right), \\ &\quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

其中 a_k 是某些常数. 现用数学归纳法证明之:

当 $i = 1$ 时, 命题显然成立;

设当 $i = N$ 时, 命题成立, 要证命题对 $i = N + 1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(N+1)} &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[x^{-(N+k)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right]' \\ &\quad + \left[(-x^{-2})^N \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) \right]' \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[-(N+k)x^{-(N+1+k)} \right. \\ &\quad \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) + x^{-(N+k)} \\ &\quad \cdot (-x^{-2}) \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k+1}{2} \pi \right) \Big] \\ &\quad + \left[N(-x^{-2})^{N-1} \cdot (2x^{-3}) \right. \\ &\quad \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N}{2} \pi \right) + (-x^{-2})^{N+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi\right) \Big] \\
& = \sum_{k=1}^{(N+1)-1} \left[b_k x^{-(N+1+k)} \right. \\
& \quad \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \Big] + (-x^{-2})^{N+1} \\
& \quad \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi\right),
\end{aligned}$$

其中 b_k 是一些适当的常数。于是，命题对于一切自然数均成立。

因而，我们有

$$\begin{aligned}
f^{(m)}(x) &= \sum_{i=0}^m C_m^i \cdot \frac{(2n)!}{(2n-m+i)!} x^{2n-m+i} \\
& \quad \cdot \left[\sum_{k=1}^{i-1} a_k x^{-(i+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. + (-x^{-2})^i \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2}\right) \right] (x \neq 0).
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
f^{(m)}(x) &= (-1)^m x^{2(n-m)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{m\pi}{2}\right) \\
& \quad + O(|x|^{2(n-m)+1}) \quad (x \rightarrow 0) \\
& \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (*)
\end{aligned}$$

由于

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^{2n-1} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

故由(*)，得知

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-x^{2n-3} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2} \right) + O(|x|^{2n-2}) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

一直推下去，得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(-1)^{n-1} x \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + O(|x|^2) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right) + O(1) \right], \end{aligned}$$

在 $x = 0$ 近旁， $\frac{(-1)^n}{x} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right)$ 无界且振荡，

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right) + O(1) \right]$ 不存在，因而

$f^{(n+1)}(0)$ 不存在。证毕。

1225. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处是无穷次可微分的. 作出此函数的图形.

证 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. 下面我们指出, 对于任何自然数 n , 均有

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式. 现用数学归纳法证明之:

当 $n = 1$ 时, 命题显然成立;

设当 $n = k$ 时命题成立, 即 $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_k\left(\frac{1}{x}\right)$,

$P_k(t)$ 是关于 t 的某多项式. 要证命题对于 $n = k + 1$ 时也成立, 事实上, 有

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left[e^{-\frac{1}{x^2}} P_k\left(\frac{1}{x}\right) \right]' \\ &= \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} P_k\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P_k'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \left\{ 2 \left(\frac{1}{x} \right)^3 P_k\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x} \right)^2 P_k'\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的另一多项式.

于是, 命题对于一切自然数 n 均成立.

现在, 证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是无穷次可微分的. 首先, 注意到

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0,$$

其中最末一式的极限求法可参看654题(6). 仍用此法, 设 $f^{(n)}(0) = 0$, 则可证明 $f^{(n+1)}(0) = 0$. 事实上, 有

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ P_n^*\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} = 0, \end{aligned}$$

($P_n^*(t) = t P_n(t)$ 也是 t 的多项式).

根据数学归纳法, 可知

$$f^{(n)}(0) = 0$$

对于一切自然数 n 均成立, 即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无穷次可微分, 且其各阶导

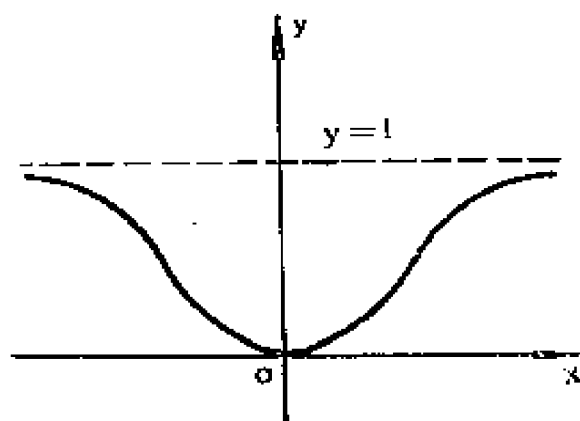


图 2.37

数为零。图象如图2.37所示。

1226. 证明: 契比协夫多项式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

$$\text{证 } T_m'(x) = \frac{m}{2^{m-1}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(m \arccos x)$$

$$(|x| < 1),$$

$$\begin{aligned} T_m''(x) &= -\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)} \cos(m \arccos x) \\ &\quad + \frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(m \arccos x). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} (1-x^2)T_m''(x) &= -\frac{m^2}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x) \\ &\quad + \frac{mx}{2^{m-1}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(m \arccos x) \\ &= -m^2T_m(x) + xT_m'(x), \end{aligned}$$

即

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

1227. 证明: 勒襄德多项式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

满足方程式

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

证 设 $y = (x^2 - 1)^m$, 就有

$$y' = 2mx(x^2 - 1)^{m-1} \text{ 或 } (x^2 - 1)y' = 2mxy.$$

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1)y^{(m+2)} + 2(m+1)xy^{(m+1)} \\ & \quad + m(m+1)y^{(m)} \\ & = 2mxy^{(m+1)} + 2m(m+1)y^{(m)}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1)y^{(m+2)} + 2xy^{(m+1)} - m(m+1)y^{(m)} \\ & = 0, \end{aligned}$$

两端再以 $\frac{1}{2^m m!}$ 乘之, 并以 $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} y^{(m)}$ 代入, 即得所要证明的等式

$$\begin{aligned} & (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) \\ & = 0. \end{aligned}$$

1228. 契比协夫—拉格耳多项式定义如下:

$$L_m(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $L_m(x)$ 的明显的表达式.

证明: $L_m(x)$ 满足方程

$$xL_m'(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

解 按莱布尼兹公式, 有

$$\begin{aligned} L_m(x) &= e^x \{ (-1)^m x^m e^{-x} + (-1)^{m-1} C_m^1 m x^{m-1} e^{-x} \\ & \quad + \dots + (-1) C_m^{m-1} m! x e^{-x} + m! e^{-x} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^m x^m + (-1)^{m-1} C_m^1 m x^{m-1} \\
&\quad + \cdots + (-1) C_m^{m-1} m_1 x + m_1 \\
&= (-1)^m [x^m - m^2 x^{m-1} + \cdots \\
&\quad + (-1)^{m-1} m^2 (m-1)_1 x + (-1)^m m_1]
\end{aligned}$$

其次, 设 $y = x^m e^{-x}$, 就有

$$y' = m x^{m-1} e^{-x} - x^m e^{-x},$$

于是,

$$x y' + (x - m) y = 0.$$

在上述等式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$\begin{aligned}
&x y^{(m+2)} + (m+1) y^{(m+1)} + (x-m) y^{(m+1)} \\
&\quad + (m+1) y^{(m)} = 0
\end{aligned}$$

或

$$x y^{(m+2)} + (1+x) y^{(m+1)} + (m+1) y^{(m)} = 0.$$

再设 $z = y^{(m)}$, 则由上式可得

$$x z'' + (1+x) z' + (m+1) z = 0. \quad (1)$$

由于 $L_m(x) = e^x \cdot z$, 故

$$L'_m(x) = e^x(z + z'), \quad L''_m(x) = e^x(z + 2z' + z''),$$

于是,

$$\begin{aligned}
&x L''_m(x) + (1-x) L'_m(x) + m L_m(x) \\
&= e^x \{ x(z + 2z' + z'') + (1-x)(z + z') + m z \} \\
&= e^x \{ x z'' + (x+1) z' + (m+1) z \}.
\end{aligned} \quad (2)$$

将 (1) 式代入 (2) 式, 即证得

$$x L''_m(x) + (1-x) L'_m(x) + m L_m(x) = 0.$$

1229. 设 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$, 其中 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 为可微分

n 次的函数.

$$\text{证明: } \frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) 与函数 $f(u)$ 无关.

证 由于

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x),$$

故命题当 $n=1$ 时成立;

设当 $n=m$ 时命题成立, 即有

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u),$$

要证命题对于 $n=m+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u) \\ &= \sum_{k=1}^m \{ A'_k(x) f^{(k)}(u) \\ &\quad + A_k(x) f^{(k+1)}(u) \varphi'(x) \} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k(x) f^{(k)}(u), \end{aligned}$$

其中, $B_1(x) = A'_1(x)$, $B_k(x) = \varphi'(x) A_{k-1}(x) + A'_k(x)$ ($k=2, 3, \dots, m$), $B_{m+1}(x) = A_m(x) \varphi'(x)$, 它们均与 $f(u)$ 无关.

于是, 按数学归纳法得知

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u)$$

对于一切自然数 n 均成立。

1230. 证明: 对于复合函数 $y=f(x^2)$ 的 n 阶导函数, 下面的公式正确

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

证 当 $n=1$ 时公式成立, 事实上,

$$\frac{dy}{dx} = 2xf(x^2).$$

设当 $n=m$ 时公式成立, 要证公式对于 $n=m+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right) \\ &= 2m(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) + (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1!} 2(m-2)(2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\ &\cdot 2(m-4)(2x)^{m-5} f^{(m-2)}(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\
& \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\
& = (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\
& + \left[2m + \frac{m(m-1)}{1!} \right] (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\
& + \left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!} \right. \\
& \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right] \\
& \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\
& = (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\
& + \frac{(m+1)m}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\
& + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!} \\
& \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots
\end{aligned}$$

这正是公式对于 $n=m+1$ 时的情形。于是，按数学归纳法得知，公式对于一切自然数 n 均成立。

1231. 契比协夫—厄耳米特多项式定义如下：

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的明显的表达式。

证明： $H_m(x)$ 满足方程

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

解 设 $y=e^{-x^2}$ ，则有

$$y' = (-2x)e^{-x^2} = (-1)^1(2x)^1 e^{-x^2},$$

$$\begin{aligned} y'' &= e^{-x^2} [(-2x)^2 - 2] \\ &= [(-1)^2(2x)^2 - 2] e^{-x^2}, \end{aligned}$$

一般地, 可用数学归纳法证明

$$\begin{aligned} y^{(m)} &= \left[(-1)^m (2x)^m + (-1)^{m-1} \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{m-2} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right. \\ &\quad \left. \cdot (2x)^{m-4} + \dots \right] e^{-x^2}. \end{aligned}$$

于是, 得

$$\begin{aligned} H_m(x) &= (-1)^m e^{x^2} y^{(m)} \\ &= (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} - \dots. \end{aligned}$$

$$\text{又 } y' + 2xy = 0.$$

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$y^{(m+2)} + 2xy^{(m+1)} + 2(m+1)y^{(m)} = 0.$$

再设 $z = y^{(m)}$, 上式就是

$$z'' + 2xz' + 2(m+1)z = 0. \quad (1)$$

由 $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} z$, 得

$$H'_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (2xz + z'),$$

$$H''_m(x) = (-1)^m e^{x^2} [(4x^2 + 2)z + 4xz' + z''].$$

从而有

$$\begin{aligned}
& H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) \\
&= (-1)^m e^{x^2} \{ (4x^2 + 2)z + 4xz' + z'' - 4x^2 z \\
&\quad - 2xz' + 2mz \} \\
&= (-1)^m e^{x^2} \{ z'' + 2xz' + 2(m+1)z \}. \quad (2)
\end{aligned}$$

将 (1) 式代入 (2) 式, 即证得

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

1232. 证明等式

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

证 当 $n=1$ 时, 由于 $(e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, 故等式成立.

设当 $n=k$ 时等式成立, 即有

$$(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} = \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}},$$

要证等式对 $n=k+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned}
(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} &= [(x \cdot x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]' \\
&= [x(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]' \\
&= x(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} + (x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&\quad + k(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&= x \left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} \right]' + (k+1) \cdot \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k (k+1)}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} \\
& = -\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

于是, 按数学归纳法得知

$$(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$$

对于一切自然数 n 均成立.

1233. 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子及

$$f(D) = \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k$$

为微分符号的多项式, 其中 $p_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) 为 x 的某连续函数.

证明:

$$f(D)\{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

证 按莱布尼兹公式, 有

$$\begin{aligned}
D^k\{e^{\lambda x} u(x)\} &= (e^{\lambda x} u(x))^{(k)} \\
&= \sum_{i=0}^k C_k^i (e^{\lambda x})^{(i)} u^{(k-i)}(x) \\
&= e^{\lambda x} \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x).
\end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}
 (D+\lambda)^k u(x) &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i D^{(k-i)} u(x) \\
 &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x).
 \end{aligned}$$

因而，得

$$D^k \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} (D+\lambda)^k u(x).$$

于是，

$$\begin{aligned}
 f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} &= \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k \{e^{\lambda x} u(x)\} \\
 &= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n p_k(x) \cdot (D+\lambda)^k u(x) \\
 &= e^{\lambda x} f(D+\lambda) u(x),
 \end{aligned}$$

即

$$f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D+\lambda) u(x).$$

1234. 证明：若于方程

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

中，令

$$x = e^t,$$

其中 t 为自变数，则此方程具有下形

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$.

证 记 $\delta = \frac{d}{dx}$, 则有

$$Dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \delta y \quad \text{或} \quad \delta y = e^{-t} Dy.$$

从而对于符号 D 及 δ 有关系

$$\delta = e^{-t} D.$$

继续求得

$$\begin{aligned} \delta^2 y &= e^{-t} D(e^{-t} Dy) = e^{-t} [-e^{-t} Dy + e^{-t} D^2 y] \\ &= e^{-2t} D(D-1)y, \end{aligned}$$

一般地, 可用数学归纳法证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt} D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \quad (1)$$

事实上, 设公式 (1) 对 $k=m$ 时成立, 则有

$$\begin{aligned} \delta^{(m+1)} y &= \delta(\delta^{(m)} y) \\ &= e^{-t} D[e^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-t} [-me^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y \\ &\quad + e^{-mt} D^2(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-(m+1)t} D(D-1)\cdots[D \\ &\quad - (m+1) + 1]y, \end{aligned}$$

即公式 (1) 对 $k=m+1$ 时也成立. 于是, 公式 (1) 对于一切自然数均成立.

于是,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \delta^{(k)} y \\ &= \sum_{k=0}^n a_k e^{kt} \cdot e^{-kt} D(D-1)\cdots(D \end{aligned}$$

$$-k+1)y=0,$$

即

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y=0.$$

§6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理

1° 洛尔定理 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在此区间内有有限的导函数 $f'(x)$; (3) $f(a)=f(b)$, 则至少存在有一个数 c 于区间 (a, b) 内, 使

$$f'(c)=0, \text{ 其中 } a < c < b.$$

2° 拉格朗日定理 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在区间 (a, b) 内有有限的导函数, 则

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), \text{ 其中 } a < c < b$$

(有限增量公式)。

3° 哥西定理 若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 于 (a, b) 内 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导函数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$; (3) 当 $a < x < b$, $f'^2(x)+g'^2(x) \neq 0$; (4) $g(a) \neq g(b)$, 则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中 $a < c < b$ 。

1235. 检验洛尔定理对于函数

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

的正确性.

- 解 (1) 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 及 $[2, 3]$ 上连续;
(2) $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 及 $(2, 3)$ 上处处存在;
(3) $f(1)=f(2)=0$ 及 $f(2)=f(3)=0$.

由洛尔定理, 应该有 $1 < c_1 < 2$, $2 < c_2 < 3$ 存在, 使 $f'(c_1)=0$, $f'(c_2)=0$. 下面, 我们验证确有这种 c_1, c_2 存在. 易知

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) \\ &\quad + (x-1)(x-2) \\ &= 3x^2 - 12x + 11. \end{aligned}$$

令 $f'(x)=0$ 解之, 得 $x=2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故可取

$$c_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad c_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3};$$

显然 $1 < c_1 < 2$, $2 < c_2 < 3$, 且

$$f'(c_1)=0, \quad f'(c_2)=0.$$

1236. 函数

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

当 $x_1=-1$ 及 $x_2=1$ 时为零, 但是当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f'(x) \neq 0$. 说明与洛尔定理表面上的矛盾.

解 $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, 它在 $[-1, 1]$ 上恒不为零, 表面上看是与洛尔定理矛盾的. 实际上不然, 原因是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在, 不满足洛尔定理的第二个条件, 故当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 可以有 $f'(x) \neq 0$.

1237. 设函数 $f(x)$ 于有穷或无穷的区间 (a, b) 中的任意一点有有限的导函数 $f'(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

证明:

$$f'(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a, b) 中的某点.

证 当 (a, b) 为有穷区间时, 设

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \in (a, b) \text{ 时,} \\ A, & \text{当 } x = a \text{ 与 } b \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

显然 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且有 $F(a) = F(b)$. 故由洛尔定理可知, 在 (a, b) 内至少存在一点 c , 使

$$F'(c) = 0.$$

而在 (a, b) 内, $F'(x) = f'(x)$, 所以

$$f'(c) = 0.$$

下设 (a, b) 为无穷区间. 若 $a = -\infty$, $b = +\infty$, 可设

$$x = \operatorname{tg} t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right),$$

则对由函数 $f(x)$ 与 $x = \operatorname{tg} t$ 组成的复合函数

$$g(t) = f(\operatorname{tg} t)$$

在有穷区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内仿前讨论可知: 至少存在一

点 $t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \sec^2 t_0 = 0,$$

其中 $c = \operatorname{tg} t_0$. 由于 $\sec^2 t_0 \neq 0$, 故

$$f'(c) = 0.$$

若 a 为有限数, $b = +\infty$. 则可取 $b_0 > \max\{a, 0\}$, 而令

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}.$$

于是, 对复合函数 $g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}\right)$ 在有穷区间 (a, b_0) 上仿前讨论, 可知: 存在 $t_0 \in (a, b_0)$ 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} = 0,$$

其中 $c = \frac{(b_0 - a)t_0}{b_0 - t_0}$. 显然 $a < c < +\infty$. 由于

$$\frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} > 0,$$

故 $f'(c) = 0$.

对于 $a = -\infty$, b 为有限数的情形, 可类似地进行讨论. 证毕.

1238. 设函数 $f(x)$: (1) 于闭区间 $[x_0, x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导函数 $f^{(n-1)}(x)$; (2) 于区间 (x_0, x_n) 内有 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$; (3) 有下面的等式成立

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n).$$

证明：在区间 (x_0, x_n) 内最少有一点 ξ ，使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

证 在每一个闭区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{k-1}, x_k],$$

$$\dots, [x_{n-1}, x_n]$$

上，函数 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件，因此，存在 n 个点

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_k, \dots, x'_n,$$

其中 $x'_k \in (x_{k-1}, x_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$)，使

$$f'(x'_k) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

于是，在每个区间 $[x'_k, x'_{k+1}]$ ($k=1, 2, \dots, n-1$) 上，函数 $f'(x)$ 满足洛尔定理的条件。因此存在点 x''_k 属于 $[x'_k, x'_{k+1}]$ ($k=1, 2, \dots, n-1$)，使

$$f''(x''_k) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

继续上述步骤，经 $(n-1)$ 次后，得出一个区间 $[x_1^{n-1}, x_2^{n-1}] \subset (x_0, x_n)$ ，满足 $f^{(n-1)}(x_k^{n-1}) = 0$ ($k=1, 2$)。

于是在此区间上，函数 $f^{(n-1)}(x)$ 满足洛尔定理的条件。所以，至少存在一点 $\xi \in (x_1^{n-1}, x_2^{n-1})$ ，使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. 设函数 $f(x)$ ：(1) 于闭区间 $[a, b]$ 上有定义且有 $(p+q)$ 阶的连续导函数 $f^{(p+q)}(x)$ ；(2) 在区间 (a, b) 内有 $(p+q+1)$ 阶的导函数 $f^{(p+q+1)}(x)$ ；(3) 有下面的等式成立：

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0$$

及 $f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$

证明：在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a, b) 内的某点.

证 若 $p = q$.

在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件, 因此, 至少存在一点 $x_1^{(1)} \in (a, b)$, 使 $f'(x_1^{(1)}) = 0$;

对于区间 $[a, x_1^{(1)}]$ 及 $[x_1^{(1)}, b]$, 函数 $f'(x)$ 在其上满足洛尔定理的条件, 因此, 至少分别存在 $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$, 使 $f''(x_2^{(1)}) = 0, f''(x_2^{(2)}) = 0$;

.....

继续上述步骤, 经过 p 次后, 得出 $(p+2)$ 个点:

$a, x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, x_p^{(3)}, \dots, x_p^{(p)}, b$
使 $f^{(p)}(a) = f^{(p)}(x_p^{(1)}) = f^{(p)}(b) = 0$ ($k=1, 2, \dots, p$);

由此 $(p+2)$ 个点组成 $(p+1)$ 个区间, 仿1238题对于它们重复使用洛尔定理 p 次, 即可得出点 c 属于 (a, b) , 使

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

若 $p \neq q$, 不失一般性, 设 $q = p + k$ (k 为某正整数).

当进行 $(p+1)$ 次后, 对于函数 $f^{(p)}(x) = 0$ 而言, 在 (a, b) 内有 $(p+1)$ 个点:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+1},$$

满足 $f^{(p+1)}(\xi_k) = 0$ ($k=1, 2, \dots, p+1$);

再加上条件 $f^{(p+1)}(b) = f^{(p+2)}(b) = \dots = f^{(p+k)}(b) = 0$, 重复对此再应用洛尔定理 k 次, 则在 (a, b) 内仍然存在 $(p+1)$ 个点:

$$\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_{p+1}^{(k)},$$

使

$$f^{(p+k+1)}(\xi_j^{(k)}) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p+1).$$

以后, 每进行一次, 减少一个点, 进行 p 次后, 即可得出一点 $c \in (a, b)$, 使

$$f^{(p+k+p+1)}(c) = 0,$$

即

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

证毕.

1240. 证明: 若具实系数 a_k ($k=0, 1, \dots, n$) 的多项式

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

之一切根为实数, 则其逐次的导函数 $P'_n(x)$, $P''_n(x)$, \dots , $P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

证 根据假设, 此处 n 次多项式 $P_n(x)$ 有 n 个实根. 记其诸实根为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$, 并且 α_i 是 k_i 重根, $k_i \geq 1$ ($i=1, 2, \dots, l$), 有 $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$. 于是可改写 $P_n(x)$ 为

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_l)^{k_l}.$$

显见 α_i 为 $P'_n(x)$ 的 $k_i - 1$ 重根 ($i=1, 2, \dots, l$). 由 $P_n(\alpha_1) = P_n(\alpha_2) = \dots = P_n(\alpha_l) = 0$, $P_n(x)$ 可微, 据洛尔定理, 存在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$, 而 $\xi_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, 使 $P'_n(\xi_i) = 0$ ($i=1, 2, \dots, l-1$), 于是有

$P'_n(x)$ 的根	$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$	α_1	α_2	\dots	α_l
重数	单根	$k_1 - 1$	$k_2 - 1$	\dots	$k_l - 1$

即 $n-1$ 次多项式 $P'_n(x)$ 的根恰有 $(k_1-1)+(k_2-1)+\dots+(k_l-1)+(l-1)=k_1+k_2+\dots+k_l-1=n-1$ 个，这就是说，一个 n 次多项式，若 n 个根均为实根的话，则其导函数 $n-1$ 次多项式的 $n-1$ 个根也必全为实根。反复运用这一结果。由 $P'_n(x)$ 的 $n-1$ 个根皆为实根，便可推知 $P''_n(x)$ 的 $n-2$ 个根也均为实根。如此下去，即知关于 $P_n(x)$ 的一切低阶导函数——直至 $P^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根。

1241. 证明：勒襄德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2-1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间 $(-1, 1)$ 中。

证 显然， $2n$ 次多项式 $Q_{2n}(x) = (x^2-1)^n = (x+1)^n \cdot (x-1)^n$ 仅有实根（ -1 是 n 重根， 1 也是 n 重根）。

因此，根据 1240 题的结果知 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x)$

$Q_{2n}(x)$ 仅有实根，且都含于 $[-1, 1]$ 中。但显然 -1 和 1 都不是 $P_n(x)$ 的根（因为，例如， -1 是 $Q_{2n}(x)$

的 n 重根，故 -1 是 $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} Q_{2n}(x)$ 的单根，因而 -1

不是 $\frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x)$ 的根）。因此， $P_n(x)$ 的根全部位于

$(-1, 1)$ 中。证毕。

1242. 证明: 契比协夫——拉格耳多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

所有的根都是正数.

证 令 $Q(x) = x^n e^{-x}$, 则易知

$$\begin{aligned} Q^{(m)}(x) &= e^{-x} [(-1)^m x^n + (-1)^{m-1} C_{m-1}^n x^{n-1} \\ &\quad + \cdots + (-1) C_{m-1}^{n-1} n(n-1) \cdots (n-m \\ &\quad + 2) x^{n-m+1} + n(n-1) \cdots (n-m \\ &\quad + 1) x^{n-m}] \quad (m=1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

显然 $Q^{(m)}(0) = 0$ ($m=0, 1, \cdots, n-1$; 为方便计, 以下记 $Q^{(0)}(x) = Q(x)$), 但 $Q^{(n)}(0) = n! \neq 0$. 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q^{(m)}(x) = 0 \quad (m=0, 1, \cdots, n).$$

对函数 $Q(x)$ 和区间 $(0, +\infty)$ 应用 1237 题, 知存在 $\xi^{(1)} \in (0, +\infty)$ 使 $Q'(\xi^{(1)}) = 0$. 再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0, \xi^{(1)})$ 及 $(\xi^{(1)}, +\infty)$ 应用 1237 题, 知存在 $\xi_1^{(2)} \in (0, \xi^{(1)})$, $\xi_2^{(2)} \in (\xi^{(1)}, +\infty)$ 使

$$Q''(\xi_i^{(2)}) = 0 \quad (i=1, 2).$$

这样继续下去, 反复应用 1237 题 n 次, 知存在 $0 < \xi_1^{(n)} < \xi_2^{(n)} < \cdots < \xi_n^{(n)} < +\infty$ 使

$$Q^{(n)}(\xi_i^{(n)}) = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

显然 $L_n(\xi_i^{(n)}) = 0$ ($i=1, 2, \cdots, n$), 故 $\xi_i^{(n)}$ ($i=1, 2, \cdots, n$) 都是 $L_n(x)$ 的根. 但由于

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x Q^{(n)}(x) \\ &= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_n^1 n x^{n-1} + \cdots \\ &\quad + (-1) C_n^{n-1} n! x + n! \end{aligned}$$

是 x 的 n 次多项式, 故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根 (实的或复的); 因此 $\xi_i^{(n)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 是 $L_n(x)$ 的全部根. 证毕.

1243. 证明: 契比协夫——厄耳米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

所有的根都是实数.

证 设 $Q(x) = e^{-x^2}$, 显然有

$$Q'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$Q''(x) = 2e^{-x^2}(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1),$$

从而得知 $Q'(x) = 0$ 有一个实根, $Q''(x) = 0$ 有两个相异的实根.

设 $Q^{(k)}(x) = 0$ 有 k 个相异实根, 并记成

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k,$$

注意到 $Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积, 从而就有

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k),$$

其中 $A \neq 0$ 为某个常数. 下面我们将证 $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个相异实根. 事实上, 由

$$Q^{(k)}(\alpha_i) = Q^{(k)}(\alpha_{i+1}) \quad (i=1, 2, \dots, k-1)$$

应用洛尔定理得知, 存在 $\beta_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k-1).$$

又由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q^{(k)}(x) = 0 \quad \text{及} \quad Q^{(k)}(\alpha_1) = 0,$$

利用1237题的结果, 故知存在 $\beta_0 \in (-\infty, \alpha_1)$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_0) = 0.$$

同法可知, 存在 $\beta_k \in (\alpha_k, +\infty)$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_k) = 0.$$

于是, $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个实根. 故由数学归纳法, 知 $Q^{(n)}(x) = 0$ 有 n 个相异实根 ($n=1, 2, \dots$). 从而 $H_n(x)$ 有 n 个相异实根. 但是由于 $H_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式, 故 $H_n(x)$ 恰有 n 个根 (实的或复的), 因此 $H_n(x)$ 所有的根都是实数. 证毕.

1244. 在曲线 $y = x^3$ 上某点的切线, 平行于连接点 $A(-1, -1)$ 及点 $B(2, 8)$ 所成的弦, 求出此点.

解 由题设知 $y = x^3$ 在所求点 (x_0, y_0) 的切线斜率

$$\text{应为 } y'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = 3. \text{ 于是,}$$

$$x_0 = -1, \text{ 或 } x_0 = 1,$$

故所求的点为 $A(-1, -1)$ 及 $C(1, 1)$.

1245. 若 $ab < 0$, 有限增量的公式对于函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在闭区间 (a, b) 上是否正确?

解 不正确. 事实上, 如果有限增量公式在此成立, 则有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \xi \in (a, b),$$

即

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{\xi^2}(b - a) = \frac{a - b}{\xi^2}.$$

但是

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

所以

$$\frac{a-b}{\xi^2} = \frac{a-b}{ab},$$

即有 $\xi^2 = ab < 0$ ，这样产生矛盾。因此，有限增量公式对于函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a, b]$ ($ab < 0$) 上不正确。

原因是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在，故有限增量公式的条件不满足。

1246. 设

$$(a) f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0); \quad (b) f(x) = x^{3+},$$

$$(B) f(x) = \frac{1}{x}; \quad (\Gamma) f(x) = e^x.$$

求满足

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

的函数 $\theta = \theta(x, \Delta x)$ 。

解 (a) $f'(x) = 2ax + b$ 。

于是，有

$$\begin{aligned} & a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - ax^2 - bx - c \\ &= \Delta x [2a(x + \theta \Delta x) + b]. \end{aligned}$$

化简之，得 $\theta = \frac{1}{2}$ 。

$$(b) f'(x) = 3x^2.$$

于是，有

$$(x + \Delta x)^3 - x^3 = 3\Delta x(x + \theta \Delta x)^2.$$

如果 $x = 0$ ，则 $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

如果 $x \neq 0$ ，化简整理得

$$3\theta^2 \Delta x + 6\theta x - (3x + \Delta x) = 0,$$

从而有

$$\theta = \frac{\pm \sqrt{x^2 + x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2} - x}{\Delta x}.$$

其中正负号的取法由 x 及 Δx 的符号及条件 $0 < \theta < 1$ 决定。例如，当 $x \geq 0$ ， $\Delta x > 0$ 时，根式前应取正号。

$$(B) \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

于是，有

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{(x + \theta \Delta x)^2}.$$

化简之，得

$$\theta^2(\Delta x)^2 + 2x\theta\Delta x - x\Delta x = 0,$$

$$\text{或} \quad \theta^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\theta - \frac{x}{\Delta x} = 0,$$

故

$$\theta = -\frac{x}{\Delta x} \left(\pm \sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1 \right).$$

此处取正负号要视确保 $\theta \in (0, 1)$ 而定，且应有

$$\frac{\Delta x}{x} > -1 \quad (x \neq 0).$$

$$(r) \quad f'(x) = e^x.$$

于是, 有

$$e^{x+\Delta x} - e^x = \Delta x e^{x+\theta \Delta x}$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

可以验证 $\theta \in (0, 1)$.

1247. 证明: 若 $x \geqslant 0$, 则

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

$$\text{其中} \quad \frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\text{并且} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

证 当 $x \geqslant 0$ 时, 对函数 \sqrt{x} 施用有限增量公式, 即得

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之, 得

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} [\sqrt{x(x+1)} - x].$$

当 $x = 0$ 时 $\theta = \frac{1}{4}$. 当 $x > 0$ 时, 有

$$0 \leq \sqrt{x(x+1)} - x = \frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} < \frac{x}{2x} \\ = \frac{1}{2}.$$

于是,

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{x}{2(\sqrt{x(x+1)} + x)} \right\} \\ = \frac{1}{2}.$$

1248.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上对于函数 $f(x)$ 求有限增量公式中的中间值 c .

解 $f(0) = \frac{3}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{2},$

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

按题设有

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -c(2-0) \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{c^2}(2-0),$$

所以 $c = \frac{1}{2}$ 或 $c = \sqrt{2}$ ($-\sqrt{2}$ 不适合), 此即所求的中间值 c .

1249. 设:

$$f(x) - f(0) = x f'(\xi(x)),$$

其中 $0 < \xi(x) < x$.

证明: 若

$$f(x) = x \sin(\ln x) \quad (x > 0)$$

及

$$f(0) = 0,$$

则函数 $\xi = \xi(x)$ 于任意小的区间 $(0, \varepsilon)$ 内 (于此 $\varepsilon > 0$) 是不连续的.

证 用反证法. 假定 $\xi(x)$ 在某区间 $(0, \varepsilon)$ 内连续 ($\varepsilon > 0$).

由于当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(\ln x) + \cos(\ln x) \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right), \end{aligned}$$

故由 $f(x) - f(0) = x f'(\xi(x))$ 得

$$x \sin(\ln x) = x \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right),$$

从而

$$\sin(\ln x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right), \quad 0 < x < +\infty.$$

现取一个充分大的正整数 N , 使

$$-2N\pi + \frac{\pi}{4} < \ln \xi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由 $0 < \xi(x) < x$ 知 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \xi(x) = 0$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln \xi(x) = -\infty.$$

因此, 可取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$, 使

$$\ln \xi(\delta) < -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

由于 $\ln \xi(x)$ 在 $\left[\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上连续, 根据中间值定理,

必有 $x_0 \in \left(\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 存在, 使

$$\ln \xi(x_0) = -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

于是

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sin(\ln x_0) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x_0)\right) \\ &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

这是不可能的. 证毕.

1250. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内有连续的导函数 $f'(x)$. 对于区间 (a, b) 内任何一点 ξ 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2 使满足于

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2) ?$$

解 一般地说, 不可以. 例如, 研究函数

$$f(x) = x^3 \quad (-1 < x < 1),$$

它对于 $\xi = 0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2 , 使

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

事实上, $f'(\xi) = 3\xi^2 = 0$, 而当 $x_1 < 0 < x_2$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - |x_1| \cdot |x_2| \\ &> x_2^2 + x_1^2 - 2|x_1||x_2| \\ &= (|x_1| - |x_2|)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

1251. 证明下列不等式:

(a) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|;$

(b) 若 $0 < y < x$ 及 $p > 1$, $py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y)$ *);

(B) $|\operatorname{arc} \operatorname{tg} a - \operatorname{arc} \operatorname{tg} b| \leqslant |a - b|;$

(r) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, 设 $0 < b < a$.

证 (a) $|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos \xi| \leqslant |x-y|$
(ξ 在 x, y 之间).

(b) $x^p - y^p = p(x-y)\xi^{p-1}$, 其中 $0 < y < \xi < x$.

由于 $p > 1$, 所以

$$y^{p-1} < \xi^{p-1} < x^{p-1}.$$

于是,

$$p y^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < p x^{p-1}(x-y);$$

*) 原题的不等式中的等号可以去掉.

$$(B) \quad |\arctg a - \arctg b| = \left| \frac{a-b}{1+\xi^2} \right| \leq |a-b|,$$

$$(r) \quad \ln a - \ln b = \frac{a-b}{\xi}, \text{ 其中 } 0 < b < \xi < a.$$

于是,

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

1252. 说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上哥西定理对于函数 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x^3$ 何以不真?

解 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上虽有连续的导函数, 且 $g(-1) \neq g(1)$, 但是, 当 $x = 0$ 时,

$$[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 4x^2 + 9x^4 = 0,$$

因此, 对于函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 不满足哥西定理的条件, 所以结论可以不真. 事实上

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = 0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} \neq 0 \quad \xi \in (-1, 1), \xi \neq 0,$$

它们是不相等的.

1253. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上可微分, 并且 $x_1 x_2 > 0$. 证明

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

证 设 $g(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 由于 $x_1 x_2 > 0$,

故 $x=0$ 在 (x_1, x_2) 之外. 从而 $g(x)$ 和 $F(x)$ 均在 $[x_1, x_2]$ 上可微, 且有

$$\begin{aligned} & [g'(x)]^2 + [F'(x)]^2 \\ &= \frac{1}{x^4} \{1 + [xf'(x) - f(x)]^2\} \neq 0 \end{aligned}$$

及

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

因此, 对于函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足哥西定理的条件. 故在 (x_1, x_2) 内至少存在一点 ξ , 使有

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即

$$\frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

化简整理, 即得

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

1254. 证明 若函数 $f(x)$ 于有穷的区间 (a, b) 内可微分,

但无界，则其导函数 $f'(x)$ 于区间 (a, b) 内也无界。
逆定理不真；举出例子。

证 在开区间 (a, b) 内，由于导函数存在，因此， $f(x)$ 在 (a, b) 内连续。

现在假定 $|f'(x)| \leq N$ ($a < x < b$)，即 $f'(x)$ 是有界的。取定 $c \in (a, b)$ 。则按有限增量公式可知，对任何 $a < x < b$ ，均有

$$|f(x) - f(c)| = |x - c| |f'(\xi)| \leq N(b - a),$$

其中 ξ 在 c 与 x 之间，从而属于 (a, b) 。

因为，

$$|f(x) - f(c)| \geq |f(x)| - |f(c)|,$$

所以，

$$|f(x)| \leq |f(c)| + N(b - a).$$

此与 $f(x)$ 是无界的条件相矛盾，所以 $f'(x)$ 是无界的。

反之不一定正确。例如，函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

在 $(0, \frac{1}{2})$ 内有界，但其导函数却是无界的。

注意，在无限区间内无界的函数的导函数可能有界。例如，函数

$$f(x) = \ln x$$

在 $(1, +\infty)$ 内无界，但其导函数 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1,$

$+\infty)$ 内却是有界的。

1255. 证明: 若函数 $f(x)$ 于有穷或无穷的区间 (a, b) 内有
有界的导函数 $f'(x)$, 则 $f(x)$ 于 (a, b) 中一致连续.

证 设当 $x \in (a, b)$ 时, $|f'(x)| \leq M$. 对于任给的

$\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 -$

$x_2| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)|$$

$$= |x_1 - x_2| \cdot |f'(\xi)| \leq M |x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

(ξ 在 x_1 与 x_2 之间),

于是, $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

1256. 证明: 若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微
分, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在

$X_1 > 0$, 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

今在 $(X_1, +\infty)$ 内任取一点 a , 则当 $x > a$ 时,
由有限增量公式可得

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| \cdot |f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} |x - a|.$$

由于

$$|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)|,$$

所以,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \frac{\varepsilon}{2} |x - a|.$$

再取 $X_2 > a$, 使 $\frac{|f(a)|}{X_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $x > X_2$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} \right| &\leq \frac{|f(a)|}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|x - a|}{x} \\ &< \frac{|f(a)|}{X_2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

1257. 证明: 若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分且当

$$x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = o(x);$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

证 由条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 易得对于任意常数 $a > x_0$, 均有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \left(1 + \frac{a}{x-a} \right) - \frac{f(a)}{x-a} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

于是, 对于 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \max\{n, x_0 + 1\}$ ($n = 1, 2, \dots$), 总存在 $b_n > a_n$, 使

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right| < \varepsilon_n.$$

由拉格朗日定理知, 存在 $x_n: a_n < x_n < b_n$, 使

$$f'(x_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n},$$

即

$$|f'(x_n)| < \varepsilon_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f'(x_n)| = 0.$$

由于 $x_n > a_n \geq n$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

1258. (a) 证明函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[x_0, X]$ 上有定义并且是连续的; (2) 于区间 (x_0, X) 内有有限的导函数 $f'(x)$; (3) 有有限或无限的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0 + 0),$$

则有有限或无穷的单侧导函数 $f'_+(x_0)$ 且

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

(6) 证明函数

$$f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \text{ 及 } f(1) = 0$$

有有限的极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x),$$

但是函数 $f(x)$ 没有单侧的导函数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 。

作这个事实的几何图解。

证 (a) 由有限增量公式, 有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x)$$

$$(0 \leq \theta \leq 1),$$

当 $\Delta x \rightarrow +0$ 时, $x_0 + \theta \Delta x \rightarrow x_0 + 0$ 。

由假设条件知 $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} f'(x_0 + \theta \Delta x) = f'(x_0 + 0)$, 所

以有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + 0),$$

即

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

(6) 当 $x \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

但是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x-1} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x-1} \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 皆不存在.

$y = f(x)$ 的图形

如图 2.38 所示.

当 $x \rightarrow 1-0$ 时,

$$f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2};$$

当 $x \rightarrow 1+0$ 时,

$$f(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

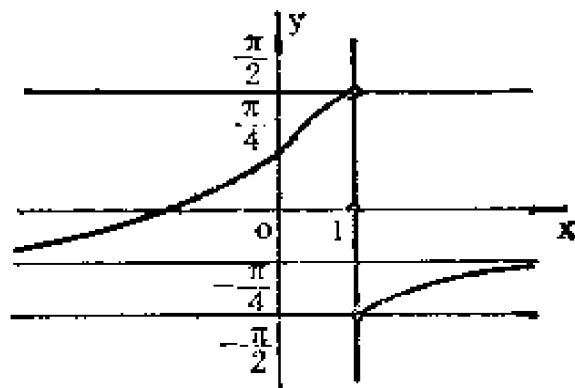


图 2.38

即 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的第一类不连续点, 即在 $x = 1$ 处 $f(x)$ 产生跳跃, 所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处无导数.

1259. 证明: 若当 $a < x < b$ 时, $f'(x) = 0$, 则当
 $a < x < b$ 时, $f(x) = \text{常数}$.

证 在 (a, b) 内取一定点 x_0 , 则当 $a < x < b$ 时, 按有限增量公式可得

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间. 由于 $f'(c) = 0$, 故

$$f(x) - f(x_0) = 0,$$

即

$$f(x) = f(x_0) = \text{常数}.$$

1260. 证明: 导函数为常数

$$f'(x) = k$$

的唯一函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是线性函数:

$$f(x) = kx + b.$$

证 $[f(x) - kx]' = f'(x) - k = k - k = 0$,

于是,

$$f(x) - kx = b \quad (b \text{ 为常数}).$$

故 $f(x)$ 必为线性函数: $f(x) = kx + b$. 证完.

1261. 设 $f^{(n)}(x) = 0$, 则函数 $f(x)$ 有什么性质?

解 由 $f^{(n)}(x) = 0$, 于是 $f^{(n-1)}(x) = c$ (c 为常数).

再由1260题的结果得知

$$f^{(n-2)}(x) = cx + b.$$

假设

$$f^{(k)}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1},$$

并令

$$\Phi(x) = f^{(k-1)}(x) - \left(a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \cdots \right)$$

$$+ \frac{1}{n-k} a_{n-k-1} x^{n-k}),$$

则有 $\Phi'(x) = f^{(k)}(x) - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-k-1} x^{n-k-1}) = 0$.

由1259题知 $\Phi(x) = b_0$, 并记 $a_0 = b_1, \frac{1}{2}a_1 = b_2, \cdots$,

$\frac{1}{n-k} a_{n-k-1} = b_{n-k}$, 则有

$$f^{(k-1)}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-k} x^{n-k}.$$

依归纳法便有

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1},$$

它是 $n-1$ 次多项式, 其中 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 是常数, 而且是任意的.

1262. 证明: 满足方程

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{常数})$$

的唯一函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数:

$$y = Ce^{\lambda x},$$

其中 C 为任意常数.

$$\begin{aligned} \text{证 } (ye^{-\lambda x})' &= y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} = \lambda ye^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

于是,

$$ye^{-\lambda x} = C \quad (C \text{ 为常数}),$$

即

$$y = Ce^{\lambda x}.$$

1263. 检验函数

$$f(x) = \arctan \frac{x+a}{1-ax}$$

及

$$g(x) = \arctan x$$

于范围：(1) $ax < 1$ 及 (2) $ax > 1$ 内有相同的导函数。

推出这些函数间的关系。

解 当 $ax < 1$ 或 $ax > 1$ 时，

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{1-ax+a(x+a)}{(1-ax)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2},$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

故有

$$f'(x) = g'(x) \quad (ax < 1 \text{ 或 } ax > 1).$$

因此

$$f(x) - g(x) = C_1, \text{ 当 } ax < 1 \text{ 时.} \quad (1)$$

$$f(x) - g(x) = C_2, \text{ 当 } ax > 1 \text{ 时.} \quad (2)$$

下面确定常数 C_1 与 C_2 。设 $a > 0$ ($a < 0$ 情形可类似地讨论)。

在(1)中令 $x \rightarrow -\infty$, 得

$$-\arctan \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2} = C_1,$$

故 $C_1 = \arctan a$ 。因此

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+a}{1-ax} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a \quad (ax < 1).$$

在 (2) 中令 $x \rightarrow +\infty$, 得

$$-\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{a} - \frac{\pi}{2} = C_2,$$

故 $C_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a - \pi$. 因此

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+a}{1-ax} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a - \pi$$

$$(ax > 1).$$

1264. 证明下列恒等式:

$$(a) \quad 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x,$$

当 $|x| \geq 1$;

$$(b) \quad 3 \operatorname{arc} \cos x - \operatorname{arc}(3x - 4x^3) = \pi, \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

证 (a) 当 $|x| \geq 1$ 时, 由于

$$\begin{aligned} & \left(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} \right)' \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\ & \quad \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = 0, \end{aligned}$$

故

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{1+x^2} = C_1, \quad \text{当 } x \geq 1 \text{ 时};$$

$$2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = C_2, \text{ 当 } x < -1 \text{ 时.}$$

下面确定常数 C_1 与 C_2 .

令 $x = \sqrt{3}$, 代入前一式, 得 $C_1 = \pi$;

令 $x = -\sqrt{3}$, 代入后一式, 得 $C_2 = -\pi$.

从而当 $|x| \neq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & 2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \begin{cases} \pi, & \text{当 } x > 1 \text{ 时;} \\ -\pi, & \text{当 } x < -1 \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

而当 $|x| = 1$ 时, 上式仍然成立. 于是, 当 $|x| \geq 1$ 时, 有

$$2 \arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x.$$

(6) 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$\begin{aligned} & [3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3)]' \\ &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \\ &\quad \cdot (3-12x^2) = 0, \end{aligned}$$

故有

$$3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = C$$

$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

其中 C 为常数. 令 $x=0$, 代入上式, 即可求出 $C=\pi$. 于是

$$3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

由于上式左端的函数在 $x=\frac{1}{2}$ 左连续, 在 $x=-\frac{1}{2}$ 右连续, 分别取极限即知上式当 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=-\frac{1}{2}$ 时也成立. 于是

$$3 \arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left(|x| \leq \frac{1}{2}\right).$$

1265. 证明: 若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的; (2) 于此线段内有无穷的导函数 $f'(x)$; (3) 非线性函数, 则于区间 (a, b) 内至少能找到一点 c , 满足

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

作出这个事实的几何解释.

证 当 $a \leq x \leq b$ 时, 设

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

易知 $F(a) = F(b) = 0$, 且当 $a < x < b$ 时, $F(x) \neq 0$ (因为 $f(x)$ 为非线性函数). 设在 c_1 ($a < c_1 < b$) 点, $F(c_1) \neq 0$, 不妨设 $F(c_1) > 0$. 在区间 $[a, c_1]$

与 (c_1, b) 上分别应用拉格朗日定理, 可知存在

$$\begin{aligned}\xi_1 \in (a, c_1) \quad \text{使} \quad F'(\xi_1) &= \frac{F(c_1) - F(a)}{c_1 - a} \\ &= \frac{F(c_1)}{c_1 - a} > 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_2 \in (c_1, b) \quad \text{使} \quad F'(\xi_2) &= \frac{F(b) - F(c_1)}{b - c_1} \\ &= -\frac{F(c_1)}{b - c_1} < 0.\end{aligned}$$

因而,

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2)$$

由此可知:

当 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$ 时, 由 (1),

$$|f'(\xi_1)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|;$$

当 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ 时, 由 (2),

$$|f'(\xi_2)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

于是命题得证.

这个事实的几何意义是: 对于一条非直线的连续

曲线段（线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线），在曲线上至少存在一点 c ，使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点， $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的弦的斜率的绝对

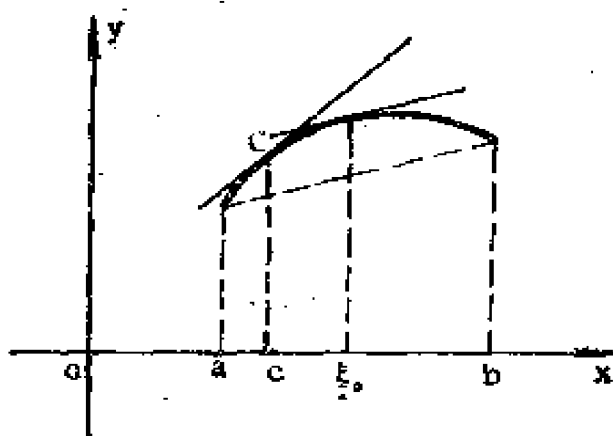


图 2.39

值，换句话说，此切线比此弦“陡”，如图2.39所示。

1266. 若函数 $f(x)$: (1) 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导函数 $f''(x)$ 及 (2) $f'(a) = f'(b) = 0$ ，则在区间 (a, b) 内至少存在一点 c ，满足

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证 令

$$K = \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

用反证法，即设 $|f''(x)| < K$ ($a < x < b$) .

对于函数 (x_0 是 $[a, b]$ 中任意固定的一点)

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

及

$$G(x) = (x - x_0)^2,$$

两次应用哥西定理^{*}，即得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$+ \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(\xi), \quad (1)$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间 (即 $x_0 \leq \xi \leq x$), x 为 $[a, b]$ 中任意点, 特别, 在 (1) 式中取

$$x_0 = a, x = \frac{a+b}{2},$$

并利用已知条件 $f'(a) = 0$, 则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a < c_1 < \frac{a+b}{2}$.

于是,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

同理在 (1) 式中取 $x_0 = b$, $x = \frac{a+b}{2}$, 并利用已知条件 $f'(b) = 0$, 则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_2),$$

其中 $\frac{a+b}{2} < c_2 < b$.

于是

$$\left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

因此,

$$\begin{aligned}
|f(b) - f(a)| &\leq \left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
&\quad + \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^2}{4} K = |f(b) - f(a)|,
\end{aligned}$$

这是不可能的。所以，在区间 (a, b) 内至少存在一点 c ，使

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

*) 仅考虑 $x > x_0$ ($x < x_0$ 时可类似地讨论) 令

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

$$G(x) = (x - x_0)^2,$$

那么有 $F(x_0) = G(x_0) = 0$,

$$F'(x) = f'(x) - f'(x_0) \quad (\text{记为 } F_1(x)),$$

$$G'(x) = 2(x - x_0) \quad (\text{记为 } G_1(x)),$$

并且 $F'(x_0) = G'(x_0) = 0$, (即 $F_1(x_0) = G_1(x_0) = 0$),

但当 $x \neq x_0$, $G'(x) \neq 0$, 而

$$F_1'(x) = F''(x) = f''(x), \quad G_1'(x) = G''(x) = 2.$$

应用哥西定理, 得

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F_1(c) - F_1(x_0)}{G_1(c) - G_1(x_0)} \\
&= \frac{F_1'(c)}{G_1'(c)} = \frac{f''(c)}{2},
\end{aligned}$$

此处 $c \in (x_0, x)$, 而 $c \in (x_0, x)$, 从而知 $c \in (x_0, x)$.

因此有

$$F(x) = \frac{1}{2}G(x)f''(\xi)$$

也即有公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi),$$

其中 $x_0 < \xi < x$ (以后即将看到, 这就是所谓的台劳公式, 这里就顺便给了一个关于二阶的台劳公式的另一种推证方法.)

1267. 汽车从某点开始行驶, 于 t 秒钟内走完了路程, 于此时间内经过了距离 s 米. 证明汽车运动的加速度的绝对值在某瞬间不小于 $\frac{4s}{t^2}$ 米/秒².

证 利用1266题的结果即可得证. 此时

$$s = f(t),$$

$$f(t) - f(0) = s, \quad t - 0 = t.$$

故 $a = \left. \frac{d^2 s}{dt^2} \right|_{t=t_1}$ 的绝对值

$$|a| \geq \frac{4s}{t^2}.$$

§7. 函数的增大与减小. 不等式

1° 函数的增大和减小 若当

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \text{ 时, } f(x_2) > f(x_1)$$

(或当 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$), 则称函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上 增大 (或对应地减小).

若可微分的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上增大(或减小),

则当

$$a \leq x \leq b \text{ 时, } f'(x) \geq 0$$

[或对应地当 $a \leq x \leq b$ 时, $f'(x) \leq 0$].

2° 函数增大(或减小)的充分条件 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的, 并且在其内有正的(或负的)导函数 $f'(x)$, 则函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 内增大(或对应地减小).

求下列函数在严格意义上的单调(增大或减小)的区间:

1268. $y = 2 + x - x^2$

解 $y' = 1 - 2x$.

当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1269. $y = 3x - x^3$.

解 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1-x)(1+x)$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1270. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

$$1271. \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x+100} \quad (x \geqslant 0).$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{-x+100}{2\sqrt{x}(x+100)^2}.$$

当 $0 < x < 100$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $100 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

$$1272. \quad y = x + \sin x.$$

$$\text{解} \quad y' = 1 + \cos x \geqslant 0.$$

当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 函数增大.

$$1273. \quad y = x + |\sin 2x|.$$

$$\text{解} \quad y' = 1 + 2 \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} \cos 2x$$

$$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}; \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right).$$

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$ 时, $y' < 0$, 函数

减小,

其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

$$1274. \quad y = \cos \frac{\pi}{x}.$$

解 $y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}.$

当 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi.$

$0 < \frac{\pi}{x} < \pi$ 时, 即 $x > 1$, $x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k} \right)$ 及

$x \in \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2} \right)$ 时, $y' > 0$, 所以函数

增大 ($k=1, 2, \dots$).

同理, 当 $x \in \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1} \right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k}, \right.$

$\left. -\frac{1}{2k+1} \right)$ 时, $y' < 0$, 函数减小 ($k=1, 2, \dots$).

1275. $y = \frac{x^2}{2^x}.$

解 $y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}.$

当 $-\infty < x < 0$ 及 $-\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时, $y' < 0$,

函数减小;

当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时, $y' > 0$, 函数增大.

1276. $y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x \geq 0).$

解 $y' = x^{n-1} e^{-x} (n-x).$

当 $x \in (0, n)$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $x \in (n, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

解 $y' = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $-\infty < x < -1$ 及 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 0$ 及 $1 < x < +\infty$ 时, $y' > 0$, 函数增大.

1278. 若 $x > 0$, $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$ 及 $f(0) = 0$.

解 $f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x$
 $= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \ln x \right) \quad (x > 0).$

令 $f'(x) = 0$, 得

$$\sin \left(\ln x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解上述方程得

$$x = e^{-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi}, \quad x = e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}$$

或 $x = e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, \quad x = e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi}$
($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

当 $x \in (e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi})$ 时, $f'(x) > 0$,

函数增大；

当 $x \in (e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi})$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数减小。

1279. 证明：内接于圆的正 n 边形，当边的数目 n 增加时，其周界 p_n 增加，而外切于此圆的正 n 边形的周界 P_n 则减小。利用这点来证明，当 $n \rightarrow \infty$ 时， p_n 及 P_n 有相同的极限。

证 如图2.40所示，
我们有

$$\begin{aligned} p_n &= 2n x \\ &= 2na \sin \alpha \\ &= 2na \sin \frac{\pi}{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n &= 2n y \\ &= 2na \operatorname{tg} \alpha \\ &= 2na \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

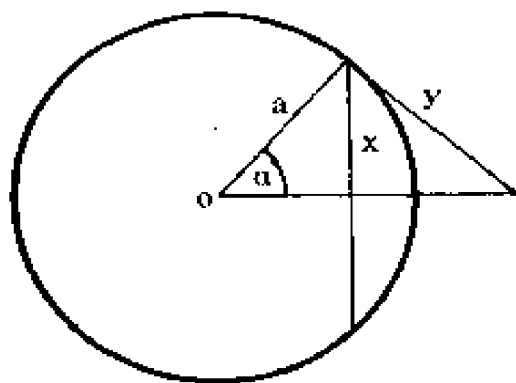


图 2.40

考虑 $f(x) = \frac{2a}{x} \sin \pi x$ 。易证当 x ($x > 0$) 很小时

有 $f'(x) < 0$ ，从而当 x 变小时 $f(x)$ 增大。所以，

$p_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 增大时， p_n 逐渐增大。同样，令

$g(x) = \frac{2a}{x} \operatorname{tg} \pi x$ ，利用 $x < \operatorname{tg} x$ (当 x 很小时，

$x > 0$)，可证得 $g'(x) > 0$ ，情形相反，当 x 变小

时, $g(x)$ 逐渐减小, 故 $P_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 变大时逐渐变小. 总之, 有 $p_n < p_{n+1}$ 及 $P_{n+1} < P_n$, 并且显然有 $p_{n+1} < P_{n+1}$. 于是

$$p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n,$$

故 $\{P_n\}$ 是有界减数列, $\{p_n\}$ 是有界增数列, 从而它们的极限都存在, 但

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - p_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi a \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right) = 0, \end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$

1280. 证明: 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

于区间 $(-\infty, -1)$ 及 $(0, +\infty)$ 内增大.

证 设 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$, 则

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right].$$

由于当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$. 因此要

看 y' 为正或为负, 只需看 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ 的正负性.

再设 $z = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$, 则

$$z' = -\frac{1}{x(1+x)^2} > 0, \quad x \in (-\infty, -1),$$

故当 $-\infty < x < -1$ 时 z 增大, 又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} z = 0$, 因而 $z > 0$. 于是, 在 $(-\infty, -1)$ 内 $y' > 0$. 因此, 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

在区间 $(-\infty, -1)$ 内增大.

同理可证, 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内增大.

1281. 证明: 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的 (就严格的意义而言!), 其中 x_0 为充分大的正数.

证 由于

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} \\ &= x^{n-1} \left(na_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right), \end{aligned}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right] = 0,$$

故存在 $x_0 > 0$, 使当 $|x| > x_0$ 时,

$$\left| \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right| < n|a_n|.$$

由此可知, 当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时 $P_n(x)$ 均保持定号 (例如, 若 $a_0 > 0$, 则当 $x_0 < x < +\infty$ 时, $P_n(x) > 0$), 故 $P_n(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内都是严格单调的. 证毕.

1282. 证明: 有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$$

$$(m+n \geq 1, m \neq n^*) \quad a_nb_m \neq 0)$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的 (就严格的意义而言!), 其中 x_0 为充分大的正数.

证 我们有

$$\begin{aligned} R'(x) &= \frac{1}{(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)^2} \{ (a_1 + 2a_2x \\ &\quad + \dots + na_nx^{n-1}) (b_0 + b_1x + \dots \\ &\quad + b_mx^m) - (b_1 + 2b_2x + \dots \\ &\quad + mb_mx^{m-1}) (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \} \\ &= \frac{1}{(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)^2} \{ (a_1b_0 \\ &\quad - a_0b_1) + 2(a_2b_0 - a_0b_2)x + \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{ (n-m+1)a_n b_{m-1} \\
& - (n-m-1)a_{n-1} b_m \} x^{m+n-2} \\
& + (n-m)a_n b_m x^{m+n-1} \} \\
= & \frac{x^{m+n-1}}{(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)^2} \left[(n-m)a_n b_m \right. \\
& + \frac{(n-m+1)a_n b_{m-1} - (n-m-1)a_{n-1} b_m}{x} \\
& \left. + \cdots + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{x^{m+n-1}} \right].
\end{aligned}$$

仿1281题之证法, 可知存在 $x_0 > 0$, 使当 $|x| > x_0$ 时上式右端方括弧内的式子与第一项 $(n-m)a_n b_m$ 同符号, 由此可知, 当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时 $R'_n(x)$ 均保持定号, 故 $R(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 中都是严格单调的.

*) 本题应加上条件 $m \neq n$ (原题上没有). 否则所述结论不成立. 例如, 若 $m=n$, $a_i = b_i$ ($i=0, 1, \cdots, n$), 则 $R(x) \equiv 1$, 它在 $(x_0, +\infty)$ 上显然不是严格单调的.

1283. 单调函数的导函数是否也必为单调的?

解 不. 例如函数

$$f(x) = x + \sin x,$$

在区间 $(0, +\infty)$ 内, 由于 $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$

(除 $x = (2n+1)\pi$, $n=0, 1, \cdots$), 所以它是单调增加的; 然而其导函数 $f'(x)$ 却不是单调的. 事实上由

于 $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f'(\pi) = 0$, $f'(\frac{3\pi}{2}) = 1$, 显见并

非是单调的.

1284. 证明: 若 $\varphi(x)$ 为单调增大的可微分的函数, 且当

$$x \geq x_0 \text{ 时, } |f'(x)| \leq \varphi'(x),$$

则当 $x \geq x_0$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)$.

对这个事实作几何的解释.

证 证法一:

作函数 $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$, 由拉格朗日定理知

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \psi'(\xi)(x - x_0) \quad (x_0 < \xi < x).$$

由 $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$ 知

$$\psi'(\xi) = \varphi'(\xi) - f'(\xi) \geq 0.$$

从而 $\psi(x) - \psi(x_0) \geq 0$ (当 $x \geq x_0$ 时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x) - f(x_0). \quad (1)$$

再令 $\psi_1(x) = \varphi(x) + f(x)$, 同理有 $\psi_1(x) - \psi_1(x_0) \geq 0$ (当 $x \geq x_0$ 时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x_0) - f(x). \quad (2)$$

结合 (1) 和 (2) 便得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq |f(x) - f(x_0)|.$$

证法二:

用反证法. 若有一点 $b > x_0$, 而使

$$|f(b) - f(x_0)| > \varphi(b) - \varphi(x_0).$$

设 $F(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)} (\varphi(x) - \varphi(x_0))$, 由于 $F(b) = F(x_0) = 0$, 所以根据洛尔定理, 得知存在点 $c \in (x_0, b)$ 使 $F'(c) = 0$, 即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)} \cdot \varphi'(c) = 0.$$

因而，有

$$|f'(c)| = \frac{|f(b) - f(x_0)|}{\varphi(b) - \varphi(x_0)} \varphi'(c) > \varphi'(c).$$

这与题设条件 $|f'(c)| \leq \varphi'(c)$ (对于一切 $x \geq x_0$ 而言) 相矛盾. 于是结论得证.

其几何意义就是: 若一单调上升曲线上各点的切线都比另一曲线上对应点的切线“陡”, 则此曲线上每条弦必比另一曲线上对应的弦“陡”. 如图 2.41 所示.

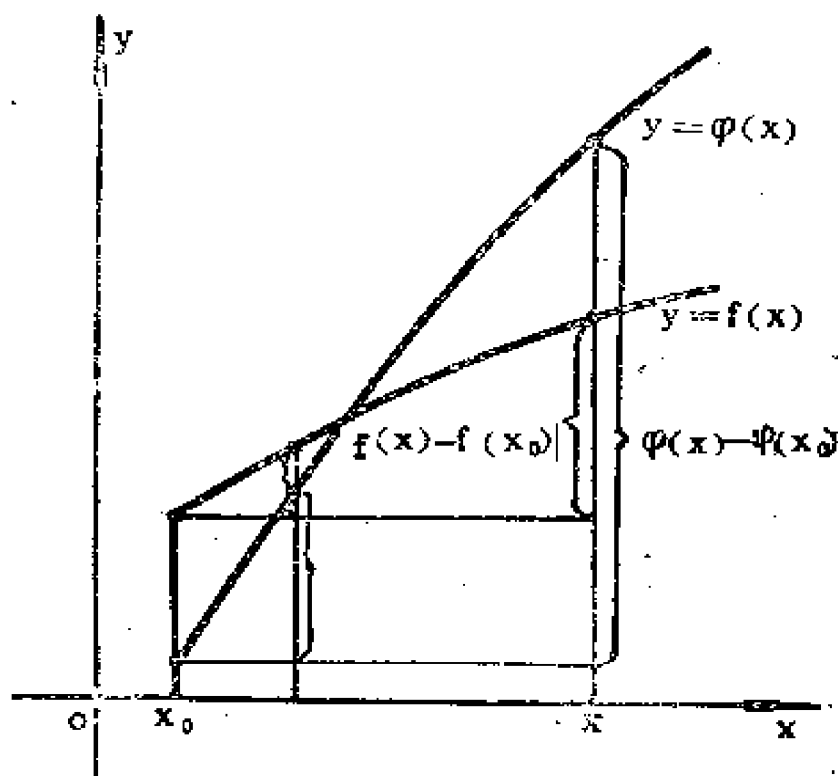


图 2.41

1285. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x < +\infty$ 内是连续的, 而且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数. 证明: 若 $f(a) < 0$, 则于区间 $(a, a - \frac{f(a)}{k})$ 内方程 $f(x) = 0$

有一而且仅有一实根.

证 由有限增量公式, 有

$$\begin{aligned} & f\left[a - \frac{f(a)}{k}\right] - f(a) \\ &= -\frac{f(a)}{k} \cdot f'(\xi) > -\frac{f(a)}{k} \cdot k = -f(a). \end{aligned}$$

于是, $f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) > 0$. 又 $f(a) < 0$, 故根据连续函数的介值定理知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 上至少有一实根. 又因为当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内严格单调上升, 由此可知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 内恰有一个实根.

1286. 若于某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内, 函数增量 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ 的符号与自变数增量 $\Delta x_0 = x - x_0$ 的符号相同, 函数 $f(x)$ 称为在 x_0 点增大.

证明: 若函数 $f(x)$ ($a < x < b$) 于有穷或无穷的区间 (a, b) 内的每一点增大, 则它在此区间内为增函数.

证 要证对任意两点 $x_1 < x_2$ ($a < x_1 < x_2 < b$), 都有 $f(x_1) < f(x_2)$. 对 $[x_1, x_2]$ 中每一点 c , 由假定都存在开区间 $\Delta_c = (c - \delta_c, c + \delta_c)$, 使当 $0 < |x - c| < \delta_c$ 时, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. 于是, 诸区间 $\{\Delta_c\}$ (c 取

遍 $[x_1, x_2]$) 形成 $[x_1, x_2]$ 的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理, 从 $\{\Delta_c\}$ 中可选出有限个, 设为 $\Delta_{c_1}, \Delta_{c_2}, \dots, \Delta_{c_m}$, 它们已经复盖了 $[x_1, x_2]$. 不妨设 $x_1 < c_1 < c_2 < \dots < c_m < x_2$, 而且可设诸 Δ_{c_i} 互不包含 (因若 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$, 则可将 Δ_{c_i} 舍去). 于是, 必有 $x_1 \in \Delta_{c_1}$ (因若 x_1 不属于 Δ_{c_1} , 而属于某 Δ_{c_j} , $j > 1$, 则显然有 $\Delta_{c_1} \subset \Delta_{c_j}$, 此与诸 Δ_{c_i} 互不包含矛盾). 另外, 易知 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$) 必有公共点 $\overline{x_i}$ (因若 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ 没有公共点, 则点 $c_i + \delta_{c_i}$ 必属于某 Δ_{c_j} , $j \neq i, j \neq i+1$. 若 $j < i$, 则 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$, 矛盾; 若 $j > i+1$, 则 $\Delta_{c_{i+1}} \subset \Delta_{c_j}$, 也矛盾). 显然可取公共点 $\overline{x_i}$ 满足 $c_i < \overline{x_i} < c_{i+1}$.

于是

$$f(c_i) < f(\overline{x_i}) < f(c_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

同理, 可知 $x_2 \in \Delta_{c_m}$. 于是, 我们有

$$f(x_1) < f(c_1) < f(c_2) < \dots < f(c_m) < f(x_2).$$

证完.

1287. 证明: 函数

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ 若 } x \neq 0 \text{ 及 } f(0) = 0,$$

于点 $x = 0$ 增大, 但在含这点的任何区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中并非增大的, 其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的数. 作出此函数的略图.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 1 > 0,
 \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点增大。又当 $x \neq 0$ 时,

$$f''(x) = 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x},$$

$$f''\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi \begin{cases} < 0, & n \text{ 为正整数;} \\ > 0, & n \text{ 为负整数;} \end{cases}$$

而

$$f'\left(-\frac{1}{2n\pi}\right) = 0,$$

故 $f(x)$ 在点 $x_n = -\frac{1}{2n\pi}$

($n = 1, 2, \dots$) 都达极大值。由于

$x_n = -\frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0$, 故

$f(x)$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 内不是增大的 (作无穷次振荡, 如图 2.42 所示)。

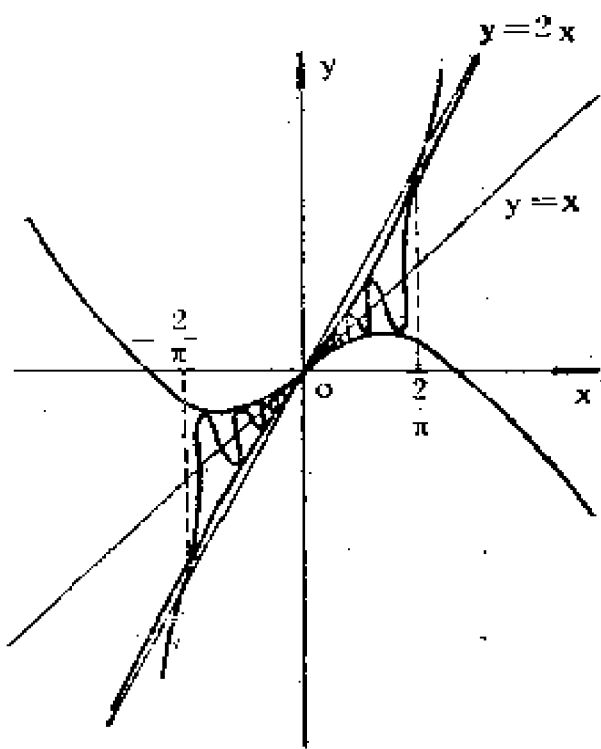


图 2.42

1288. 证明定理: 设 (1).

函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 可微分 n 次; (2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$); (3) 当 $x > x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 则当 $x > x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

证 设 $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, 则由于 $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 所以

$$F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x) > 0 \quad (x > x_0).$$

因此 $F^{(n-1)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的. 另外, 由条件 (2) 得

$$F^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) - \psi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

因此

$$F^{(n-1)}(x) > F^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的. 再由条件 (2), 知

$$F^{(n-2)}(x_0) = \varphi^{(n-2)}(x_0) - \psi^{(n-2)}(x_0) = 0,$$

故

$$F^{(n-2)}(x) > F^{(n-2)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

依此类推, 最后得

$$F(x) > F(x_0) = 0 \quad (x > x_0), \text{ 即}$$

$$\varphi(x) > \psi(x) \quad (x > x_0).$$

1289. 证明下列不等式:

(a) 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1 + x$;

(b) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$;

(B) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$;

(Г) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$;

(Д) 当 $x > 0$, $y > 0$ 及 $0 < \alpha < \beta$ 时,

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

作不等式 (a) — (Г) 的几何解释.

证 (a) 设 $f(x) = e^x - (1+x)$, 则当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以, $f(x) > f(0) = 0$ ($x > 0$), 即

$$e^x > 1+x \quad (x > 0).$$

同理可证, 当 $x < 0$ 时,

$$e^x > 1+x.$$

总之, 当 $x \neq 0$ 时,

$$e^x > 1+x.$$

此不等式的几何意义是, 曲线 $y = e^x$ 位于曲线 $y = 1+x$ 的上方. 如图2.43所示.

(б) 设 $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = \ln(1+x)$, 则

$$\varphi'(x) = 1, \quad \psi'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > \psi'(x)$, 即 $\varphi'(x) - \psi'(x) > 0$,
且有 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, 从而

$$\varphi(x) - \psi(x) > \varphi(0) - \psi(0) = 0 \quad (x > 0),$$

即

$$x - \ln(1+x) > 0 \quad (x > 0).$$

同理可证, 当 $x < 0$ 时,

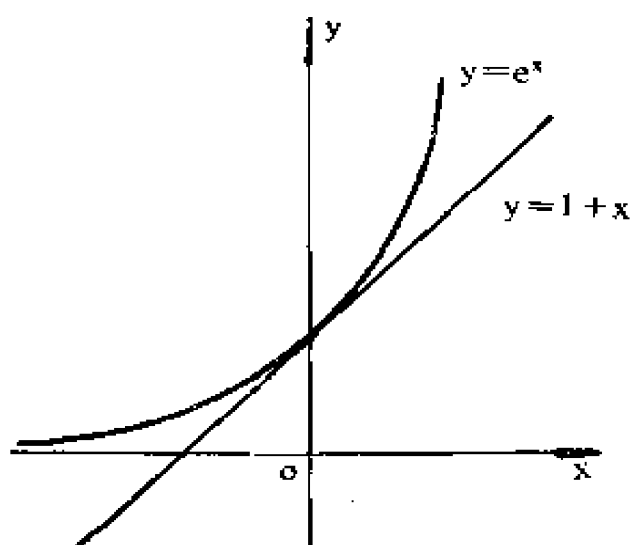


图 2.43

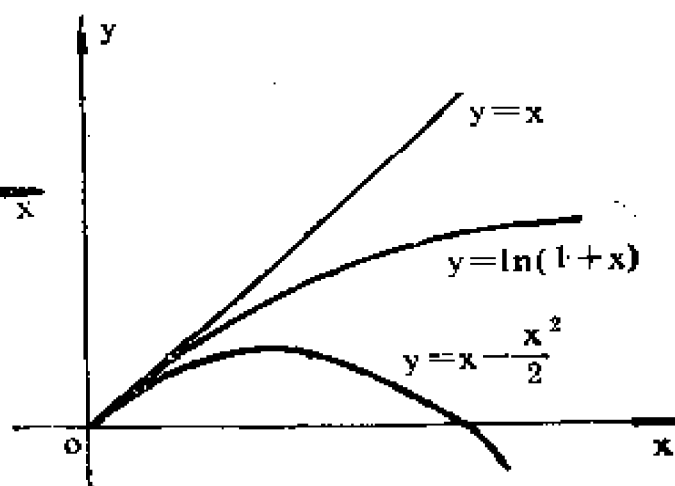


图 2.44

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x).$$

所以, 当 $x > 0$ 时,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

此不等式表示对数函数 $y = \ln(1+x)$ 的图形介于抛物线 $y = x - \frac{x^2}{2}$ 和直线 $y = x$ 之间 ($x > 0$)。如图 2.44 所示。

(B) 令 $F(x) = x - \sin x$, 则

$$F'(x) = 1 - \cos x > 0 \quad (\text{当 } x > 0, x \neq 2n\pi, \\ n = 1, 2, \dots \text{时}),$$

故 $F(x)$ 在 $x > 0$ 时是严格增大的。因此, 当 $x > 0$

时, 有

$$F(x) \geq F(0) = 0,$$

从而

$$x \geq \sin x \quad (x \geq 0).$$

其次再证, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ ($x \geq 0$). 设

$$\psi_1(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad \varphi_1(x) = \sin x,$$

则有

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0) = 0, \quad \psi_1'(0) = \varphi_1'(0) = 1.$$

又因 $\psi_1''(x) = -x$, $\varphi_1''(x) = -\sin x$, 于是, 当 $x \geq 0$ 时, 有

$$\varphi_1''(x) \geq \psi_1''(x).$$

利用1288题的结果得知,

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad (x \geq 0).$$

所以, 当 $x \geq 0$ 时,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

此不等式表示, 在 y 轴的右侧, 曲线 $y = \sin x$ 介于直线 $y = x$ 和曲线 $y = x - \frac{x^3}{6}$ 之间, 如图2.45所示.

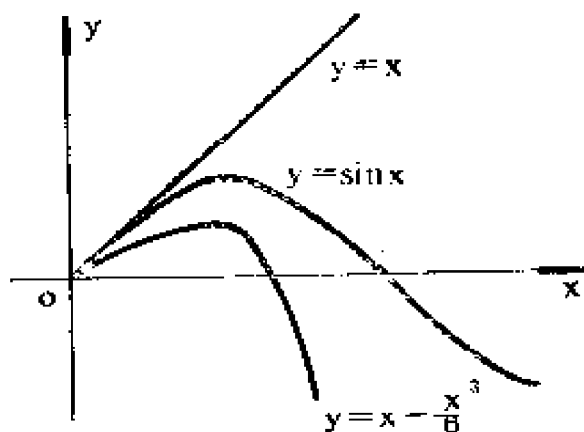


图 2.45

(r) 设 $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $\psi(x) = x + \frac{x^3}{3}$, 则有

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0;$$

$$\varphi'(x) = \sec^2 x, \quad \psi'(x) = 1 + x^2,$$

$$\varphi'(0) = \psi'(0) = 1;$$

$$\varphi''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, \quad \psi''(x) = 2x,$$

$$\varphi''(0) = \psi''(0) = 0;$$

$$\varphi'''(x) = 2(1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x),$$

$$\psi'''(x) = 2,$$

从而当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\varphi'''(x) > \psi'''(x)$.

于是利用1288题的结果得知

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}.$$

此不等式表示, 在

$(0, \frac{\pi}{2})$ 内, 曲线

$y = \operatorname{tg} x$ 在曲线 $y =$

$x + \frac{x^3}{3}$ 的上方. 如图2.46所示.

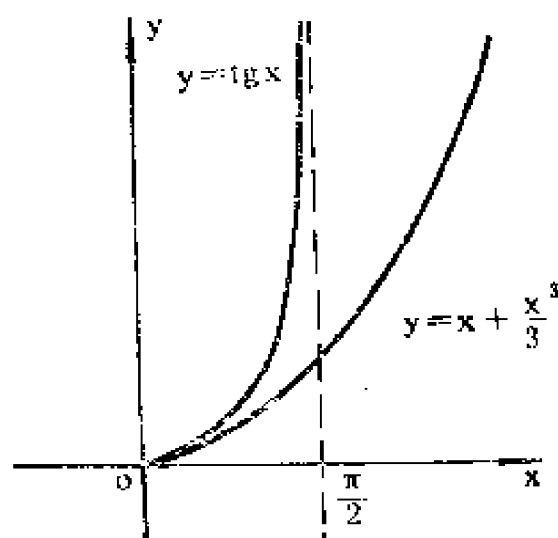


图 2.46

(r) 当 $x = y$ 时, 由 $0 < \alpha < \beta$ 知, 不等式

$$2^{\frac{1}{\alpha}} > 2^{\frac{1}{\beta}} \quad (x > 0, y > 0)$$

显然成立.

当 $x \neq y$, 且 $x > 0, y > 0$, 不妨设 $0 < \frac{y}{x} < 1$.

令 $a = \frac{y}{x}$, 为证不等式, 只需证明 $f(t) = (1+a^t)^{\frac{1}{t}}$ 严

格递减, 也即只要证明函数 $F(t) = \frac{1}{t} \ln(1+a^t)$ 严格递减. 实际上, 因为

$$F'(t) = \frac{a^t \ln a}{t(1+a^t)} - \frac{\ln(1+a^t)}{t^2}.$$

当 $a^t > 0$ 时, 有 $a^t - \frac{a^{2t}}{2} < \ln(1+a^t)$ ^{*}, 所以

$$F'(t) < \frac{a^t \ln a}{t(1+a^t)} - \frac{a^t - \frac{a^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于 $0 < a < 1$ 及 $t > 0$, 所以 $\ln a < 0$ 及 $a^t > a^{2t} > \frac{a^{2t}}{2}$. 从而 $F'(t) < 0$, 即 $F(t)$ 是严格递减, 从而当 $x \neq y$ 时, 不等式

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

也成立.

作 $f(t) = (1+a^t)^{\frac{1}{t}}$ 的图形, 如图2.47所示. 对于 $(0, +\infty)$ 内任意两个值 α, β ($\alpha < \beta$), 图形上对应

点的纵坐标却相应地减小

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

*) 利用本题 (6) 的结果。

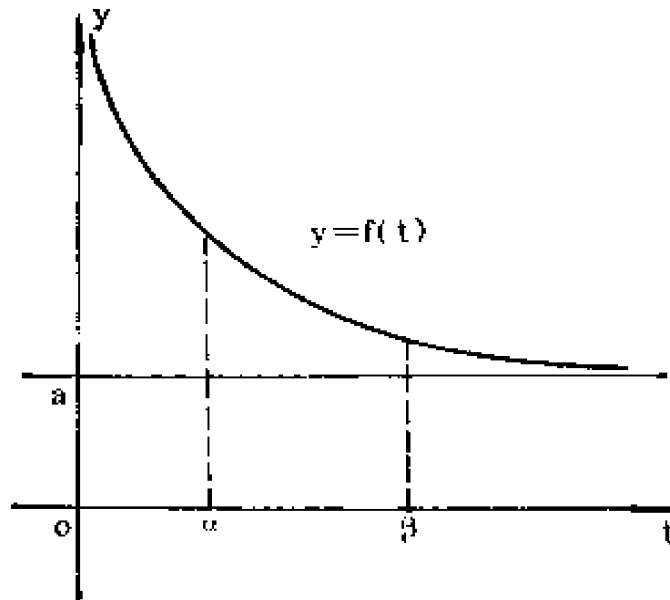


图 2.47

1290. 证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x,$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时成立。

证 不等式的后半部分于 1289 题 (B) 中已证明, 我们仅证其前半部分。

设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 显然有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$. 而

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x),$$

由于当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x > 0$ 及 $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} > x$, 于是在此区间内 $f'(x) < 0$. 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内是递减的. 因而, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

所以

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

1291. 证明当 $x > 0$ 时有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

证 由于当 $x > 0$ 时,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

严格增大 (利用1280题的结果), 并且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

所以,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \quad (x > 0).$$

同理可证，当 $x > 0$ 时， $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 严格递减，并且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e,$$

所以

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > e \quad (x > 0).$$

1292. 等差级数与等比级数的项的数目相同且有相同的首项与末项，它们的一切项都是正的。证明等差级数各项的和大于或等于 * 等比级数各项的和。

证 证法一：

设等差级数各项为 a_1, a_2, \dots, a_n ，公差为 d ；等比级数各项为 b_1, b_2, \dots, b_n ，公比为 q 。记其和为

$$\sigma = \sum_{k=1}^n a_k, \quad Q = \sum_{k=1}^n b_k.$$

当 $q = 1$ 时，由 $a_1 = b_1$ 及 $a_n = b_n$ 可知有 $\sigma = Q$ 。

当 $q < 1$ 时，由 $a_1 = b_1$ 及 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ， $b_n = b_1 q^{n-1}$ 且 $a_n = b_n$ ，得知

$$a_1 + (n-1)d = b_1 q^{n-1},$$

即

$$d = -\frac{1-q^{n-1}}{n-1} a_1 \quad (a_1 > 0).$$

那么有

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{k=1}^n \{a_1 + (k-1)d\} \\
&= \sum_{k=1}^n \left[a_1 - \frac{k-1}{n-1} \cdot (1-q^{n-1})a_1 \right] \\
&= a_1 \left[n - \frac{1}{n-1} (1-q^{n-1}) \sum_{l=0}^{n-1} l \right] \\
&= \frac{n}{2} a_1 (1+q^{n-1}),
\end{aligned}$$

$$Q = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

研究

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{a_1} (1-q)(\sigma-Q) \\
&= n(1-q)(1+q^{n-1}) - 2(1-q^n) \\
&= n(1-q+q^{n-1}-q^n) - 2(1-q^n) \\
&= (n-2)(1-q^n) - nq(1-q^{n-2}).
\end{aligned}$$

作函数

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= (n-2)(1-t^n), \\
\psi(t) &= nt(1-t^{n-2}),
\end{aligned}$$

则有 $\varphi(1) = \psi(1) = 0$, $\varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n-2)$.

但是

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= -n(n-1)(n-2)t^{n-2}, \\
\psi''(t) &= -n(n-1)(n-2)t^{n-3},
\end{aligned}$$

当 $0 < t < 1$ 时, 有 $\psi''(t) < \varphi''(t)$, 利用1288题的结果可得,

$$\psi(t) < \varphi(t) \quad (0 < t < 1),$$

即当 $q < 1$ 时, $\psi(q) < \varphi(q)$. 从而,

$$-\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

这就证明了 $\sigma > Q$.

当 $q > 1$ 时, 由 $a_n = b_n$ 得知

$$d = \frac{q^{n-1} - 1}{n-1} a_1 > 0.$$

又

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] = n a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d \\ &= \frac{n}{2} a_1 (1 + q^{n-1}), \end{aligned}$$

$$Q = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

与上述讨论相同, 有

$$\begin{aligned} &\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q) \\ &= (n-2)(q^n-1) - nq(q^{n-2}-1). \end{aligned}$$

作函数

$$\varphi(t) = (n-2)(t^n-1),$$

$$\psi(t) = nt(t^{n-2}-1),$$

则有

$$\varphi(1) = \psi(1) = 0, \quad \varphi'(1) = \psi'(1) = n(n-2).$$

而

$$\varphi''(t) = n(n-1)(n-2)t^{n-2},$$

$$\psi''(t) = n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $t \geq 1$ 时, 有 $\varphi''(t) \geq \psi''(t)$, 利用1288题结果有

$$\varphi(t) \geq \psi(t).$$

于是当 $q \geq 1$ 时, 便得 $\varphi(q) \geq \psi(q)$. 因而,

$$-\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q) = \varphi(q) - \psi(q) \geq 0.$$

从而完全证明了 $\sigma \geq Q$.

证法二:

设等差级数的公差为 d , 等比级数的公比为 q .

如果 $d = 0$, 易见两个级数叙列均为常数叙列, 因此其和相等.

如果 $d \neq 0$, 不妨设 $d \geq 0$ (否则把末项变为首项, 将叙列颠倒即成), 由于各项均为正的, 所以 $q \geq 0$.

设首项为 a , 则末项为 $a + nd = aq^n$. 考虑函数

$$f(x) = a + xd - aq^x.$$

由于 $f(0) = f(n) = 0$, 所以在 $(0, n)$ 内存在一点 c , 使得 $f'(c) = 0$, 而 $f''(x) = -aq^x \ln^2 q \leq 0$. 从而

$$f'(x) = d - aq^x \ln q$$

为一递减函数. 所以,

当 $x < c$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x > c$ 时, $f'(x) < 0$.

从而当 $0 \leq x \leq n$ 时, $f(x) \geq 0$, 其中等号当且仅当 $x = 0$ 及 $x = n$ 时成立. 特别是, 对于 $0 \leq k \leq n$, 有

$$f(k) = a + kd - aq^k \geq 0,$$

即

$$a + kd > aq^k.$$

于是,

$$\sum_{k=0}^n (a + kd) > \sum_{k=0}^n aq^k.$$

*) 原题要求证明“大于”. 实际应为“大于或等于”.

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geqslant 0,$$

其中 $x, a_k, b_k (k=1, 2, \dots, n)$ 为实数, 来证明哥西—布尼雅柯夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

证 由于

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) x + \sum_{k=1}^n b_k^2 \geqslant 0, \end{aligned}$$

对任何 x 都成立, 故上述二次式的判别式不能为正, 即

$$4 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leqslant 0,$$

也即,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1294. 证明：正数的算术平均数不大于这些数的平方的平均数，即是

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

证 利用1293题的结果，设

$$a_k = x_k, \quad b_k = \frac{1}{n},$$

则有

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

所以，

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

1295. 证明：正数的几何平均数不大于这些数的算术平均数，即是

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

证 设 $G_n = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$,

$$A_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

则有

$$(G_n)^n = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n, \quad nA_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

当 $n = 2$ 时，我们已有不等式

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

今假定 $n=k$ 时, 有

$$G_k \leq A_k,$$

我们来证 $n=k+1$ 时, 有

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= (x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} = [(G_k)^k \cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq (G_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq (A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}. \end{aligned}$$

如果我们设

$$f(x) = x^a - (1 - a + ax),$$

$$\text{由 } f'(x) = a(x^{a-1} - 1) \begin{cases} > 0, & \text{当 } 0 < x < 1; \\ = 0, & \text{当 } x = 1; \\ < 0, & \text{当 } x > 1, \end{cases}$$

故知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是严格递增的, 而在 $(1, \infty)$ 上是

严格递减的. 令 $a = \frac{1}{p}$, $1 - a = \frac{1}{q}$, 用 $\frac{a}{b}$ 代替 x ,

于是就有下列不等式:

$$\text{当 } a > 0, b > 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ 时}$$

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

$$\text{今 } A_k = a, x_{k+1} = b, p = \frac{k+1}{k} > 1, q = k+1 > 1,$$

11.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = 1,$$

所以,

$$(A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1}.$$

于是,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &\leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} (k A_k + x_{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1} (x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}) = A_{k+1}. \end{aligned}$$

从而有

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

按照数学归纳法得知不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

对于任何的自然数 n 均成立.

1296. 设 a 及 b 为二正数, 则由下之等式

$$\text{若 } s \neq 0, \Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b)$$

所定义之函数称为正数 a 及 b 之 s 阶平均数.

特别是, 当 $s = -1$ 时得调和平均数, 当 $s = 0$ 时得几何平均数 (试证之!); 当 $s = 1$ 时得算术平均数; 当 $s = 2$ 时得平方平均数.

证明: (1) $\min(a, b) \leq A_s(a, b) \leq \max(a, b)$;

(2) 当 $a \neq b$ 时, 函数 $A_s(a, b)$ 是变量 s 的增函数;

$$(3) \lim_{s \rightarrow -\infty} A_s(a, b) = \min(a, b);$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} A_s(a, b) = \max(a, b).$$

证 先证当 $s = 0$ 时得几何平均数. 由题设知

$$A_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} A_s(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} e^{\frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}},$$

研究 $f(x) = \ln \frac{a^x + b^x}{2}$ 在 $x = 0$ 点的导数, 有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \right\}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} f'(0) &= f'(x)|_{x=0} \\ &= \left[\frac{2}{a^x + b^x} \cdot \frac{1}{2} (a^x \ln a + b^x \ln b) \right] \Big|_{x=0} \\ &= \frac{1}{2} (\ln a + \ln b). \end{aligned}$$

因此求得

$$A_0(a, b) = e^{f'(0)} = e^{\frac{1}{2} (\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab},$$

此即几何平均数.

$$(1) \text{ 由于 } 2 [\min(a, b)]^s \leq a^s + b^s$$

$$\leq 2 [\max(a, b)]^s,$$

所以,

$$\min(a, b) \leq \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \max(a, b),$$

即

$$\min(a, b) \leq \mathcal{A}_s(a, b) \leq \max(a, b).$$

(2) 考虑 $\ln \mathcal{A}_s(a, b) = \frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \ln \mathcal{A}_s(a, b) \\ &= -\frac{1}{s^2} \ln \frac{a^s + b^s}{2} + \frac{a^s \ln a + b^s \ln b}{s(a^s + b^s)} \\ &= -\frac{1}{s^2(a^s + b^s)} \left[(a^s \ln a^s + b^s \ln b^s) \right. \\ & \quad \left. - (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2} \right]. \end{aligned}$$

由于 $a^s > 0$, $b^s > 0$, 参看1314题(B)的结果知

$$a^s \ln a^s + b^s \ln b^s > (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2},$$

所以, $\frac{d}{ds} \ln \mathcal{A}_s(a, b) > 0$, 即 $\ln \mathcal{A}_s(a, b)$ 是严格

增函数, 由于对数函数的严格单调增加性, 故知函数 $\mathcal{A}_s(a, b)$ 是变量 s 的严格增函数.

(3) 不妨设 $0 < a < b$. 于是

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \mathcal{A}_s(a, b)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow -\infty} a \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^s \right]^{\frac{1}{s}} = a = \min(a, b), \\
&\quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_s(a, b) \\
&= \lim_{s \rightarrow +\infty} b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^s + \frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{s}} = b = \max(a, b).
\end{aligned}$$

1297. 设 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 为可微分二次的函数及

$$M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k=0, 1, 2).$$

证明不等式:

$$M_1^2 \leq 2 M_0 M_2.$$

证 运用1266题解附注的公式 (对任何 h)

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2 \\
&\quad (x \leq \xi_1 \leq x+h), \tag{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2 \\
&\quad (x-h \leq \xi_2 \leq x), \tag{2}
\end{aligned}$$

(1) 减 (2), 得

$$\begin{aligned}
&f(x+h) - f(x-h) \\
&= 2 f'(x)h + \frac{h^2}{2} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)],
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
2f'(x)h &= f(x+h) - f(x-h) \\
&\quad - \frac{h^2}{2} [f''(\xi_1) - f''(\xi_2)].
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}2h|f'(x)| &\leq |2hf'(x)| \\&\leq |f(x+h)| + |f(x-h)| \\&\quad + \frac{h^2}{2}(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \\&\leq 2M_0 + h^2M_2,\end{aligned}$$

即

$$M_2h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geq 0.$$

由于此式对任何 h 都成立，故此二次式的判别式必非正：

$$4|f'(x)|^2 - 4M_2(2M_0) \leq 0,$$

即

$$|f'(x)|^2 \leq 2M_0M_2$$

由此可得

$$M_1^2 \leq 2M_0M_2.$$

证完.

§8. 凹凸性. 拐点

1° 凹的充分条件 若曲线 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 的一段，位于其任意一点的切线之上（或之下），则称这个可微分的函数 $y=f(x)$ 的图形于闭区间 $[a, b]$ 上是凹（或对应地，凸）的，在假设二阶导函数 $f''(x)$ 存在的情况下，当 $a < x < b$ 时不等式

$$f''(x) \geq 0 \quad [\text{或对应地 } f''(x) \leq 0]$$

成立，为图形是凹（或对应地，凸）的充分条件.

2° 拐点的充分条件 若函数的图形在某点的凹凸性改变, 则称此点为拐点.

若在点 x_0 , 或是 $f''(x_0) = 0$, 或是 $f''(x_0)$ 不存在, 且当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 变号, 则 x_0 便是拐点.

1298. 研究曲线

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

于 $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ 及 $C(0, 0)$ 诸点的凹凸性.

$$\text{解 } y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

于 $A(-1, 0)$ 点, $y'' = \frac{2}{9} > 0$, 故在该点附近曲线的图象是凹的;

于 $B(1, 2)$ 点, $y'' = -\frac{2}{9} < 0$, 故在该点附近曲线的图形是凸的;

于 $C(0, 0)$ 点附近, y'' 变号, 因此它是拐点. 在 C 点左边 ($x < 0$), $y'' > 0$, 曲线是凹的; 在 C 点右边 ($x > 0$), $y'' < 0$, 曲线是凸的. 注意, 当 $x = 0$ 时, y'' 不存在.

求下列函数的图象的凹或凸的区域及拐点:

1299. $y = 3x^2 - x^3$.

$$\text{解 } y' = 6x - 3x^2, \quad y'' = 6 - 6x.$$

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = 1$ 为拐点.

1300. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$

解 $y' = -\frac{2a^3x}{(a^2 + x^2)^2}, \quad y'' = -\frac{2a^3(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3}.$

当 $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点.

1301. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

解 $y' = 1 + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, \quad y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}.$

当 $-\infty < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $0 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = 0$ 是拐点 (注意, $x = 0$ 时, y'' 不存在).

1302. $y = \sqrt{1 + x^2}.$

解 $y' = x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y'' = (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$, 图形始终呈凹状. 无拐点.

1303. $y = x + \sin x.$

解 $y' = 1 + \cos x, \quad y'' = -\sin x.$

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y'' > 0$, 故图

形是凹的;

$x = k\pi$ 是拐点 ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1304. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

当 $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 是拐点.

1305. $y = \ln(1+x^2)$.

解 $y' = \frac{2x}{1+x^2}$, $y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x| < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $|x| > 1$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = \pm 1$ 是拐点.

1306. $y = x \sin(\ln x)$ ($x > 0$).

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$,

$$y'' = -\frac{\sqrt{2}}{x} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right).$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

当 $e^{2k\pi - \frac{3}{4}\pi} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{5}{4}\pi}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是

凸的;

$x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 是拐点 ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1307. $y = x^x$ ($x > 0$).

解 $y' = x^x(\ln x + 1)$, $y'' = x^x \left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 \right]$.

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图形始终是凹的.

1308. 证明曲线

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图形.

证 $y' = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$$y'' = \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y''=0$ 得 $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$,

$x_3 = 1$, 对应的函数值为 $y_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$,

$y_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$, $y_3 = 1$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 + \sqrt{3} & -2 - \sqrt{3} \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 0$$

所以拐点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$ 在一条直线上 (图 2.48),

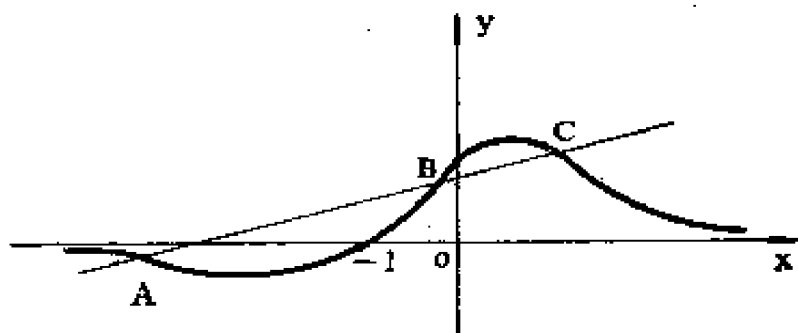


图 2.48

1309. 当如何选择参变数 h 时, “概率曲线”

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (h > 0)$$

有拐点 $x = \pm \sigma$?

解 $y' = \frac{-2h^3 x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$

$$y'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (4h^4 x^2 - 2h^2).$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

由于拐点为 $x = \pm \sigma$, 故有

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}, \text{ 即 } h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \quad (\sigma > 0).$$

1310. 研究摆线 (旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$$

的凹凸性.

$$\text{解} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= - \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3} \\ &= - \frac{\csc^2 \frac{t}{2}}{2 a(1 - \cos t)} < 0 \end{aligned}$$

$$(2k\pi < t < 2(k+1)\pi, \quad k=0, \pm 1, \dots),$$

故摆线始终呈凸状.

1311. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x < +\infty$ 中可微分二次, 并且:

$$(1) \quad f(a) = A > 0; \quad (2) \quad f'(a) < 0;$$

$$(3) \quad \text{当 } x > a, \quad f''(x) \leq 0.$$

证明: 在区间 $(a, +\infty)$ 内有而且仅有方程 $f(x) = 0$ 之一实根.

证 由于 $f'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续且当 $a < x < +\infty$ 时 $f''(x) \leq 0$, 故函数 $f'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的, 于是当 $a \leq x < +\infty$ 时, 必 $f'(x) \leq f'(a) < 0$; 由此又知函数 $f(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是严格减小的, 因此在 $(a, +\infty)$ 上至多有一点使 $f(x) = 0$, 即在 $(a, +\infty)$ 上方程 $f(x) = 0$ 至多有一 (实) 根.

下面再证明必有点 $a < x_0 < +\infty$ 存在, 使 $f(x_0) = 0$. 考虑函数 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ ($a \leq x < +\infty$), 则

$$F'(x) = f'(x) - f'(a), \quad F''(x) = f''(x),$$

$$(a \leq x < +\infty).$$

于是当 $a \leq x < +\infty$ 时 $F''(x) \leq 0$ ，从而 $F'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的，但 $F'(a) = 0$ ，故当 $a \leq x < +\infty$ 时， $F'(x) \leq F'(a) = 0$ ；由此又知 $F(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的，但 $F(a) = 0$ ，因此当 $a \leq x < +\infty$ 时，恒有 $F(x) \leq F(a) = 0$ 。

$$\text{令 } x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \text{ 由于 } f(a) > 0, f'(a) < 0,$$

故 $x^* > a$ 。很明显

$$\begin{aligned} F(x^*) &= f(x^*) - f(a) - f'(a) \left[-\frac{f(a)}{f'(a)} \right] \\ &= f(x^*), \end{aligned}$$

但上面已证必 $F(x^*) \leq 0$ ，故 $f(x^*) \leq 0$ 。于是，根据连续函数的中间值定理，知必有 $a < x_0 \leq x^*$ 存在，使 $f(x_0) = 0$ 。证毕。

注 上述证明的思路在几何上是明显的。函数 $F(x)$ 代表曲线 $y = f(x)$ （它是凸的）上的纵坐标与在点 $(a, f(a))$ 处的切线 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ 上的纵

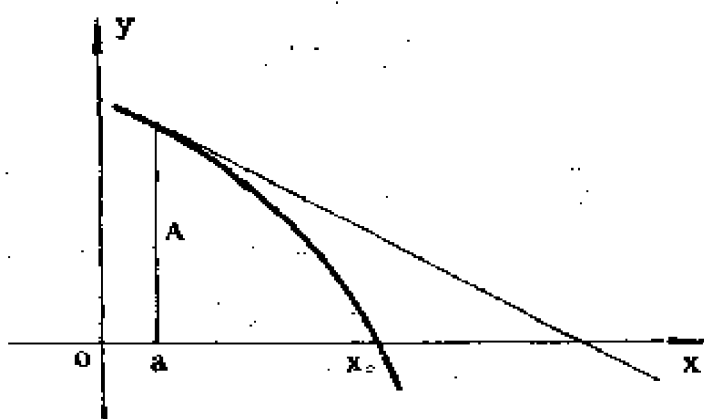


图 2.49

坐标之差, 点 $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ 即是此切线与 Ox 轴的交

点 (图2.49) .

1312. 若对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意二数 λ_1 与 λ_2 ($\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 有不等式:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(或对应地, 相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 上是凹(凸)的.

证明: 函数 $f(x)$ (1) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) \geq 0$, 则于 (a, b) 上是凹的; (2) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) \leq 0$, 则于 (a, b) 上是凸的.

证 证法一:

设 x_1, x_2 为 (a, b) 中任意两点, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$. 于是 $a < x_1 < x_2 < b$.

考虑 $0 \leq t \leq 1$ 上的函数 $F(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2] - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$. 显然,

$$F(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0,$$

$$F(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0.$$

利用中值定理得知: 当 $0 \leq t \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F'(t) &= (x_2 - x_1)f'[(1-t)x_1 + tx_2] \\ &\quad - [f(x_2) - f(x_1)] \\ &= (x_2 - x_1)\{f'[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(c)\}, \end{aligned}$$

其中 $x_1 < c < x_2$. 令 $t_0 = \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}$, 则 $0 < t_0 < 1$ 且

$c = (1-t_0)x_1 + t_0x_2$. 于是 $F'(t_0) = 0$. 此外, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 有

$$F''(t) = (x_2 - x_1)^2 f''[(1-t)x_1 + tx_2].$$

(1) 若 $f''(x) > 0$ ($a < x < b$). 由上式知 $F''(t) > 0$ ($0 \leq t \leq 1$), 故 $F'(t)$ 在 $0 \leq t \leq 1$ 上是严格增大的, 再注意到 $F'(t_0) = 0$, 即知: 当 $0 \leq t < t_0$ 时 $F'(t) < 0$; 当 $t_0 < t \leq 1$ 时, $F'(t) > 0$. 由此又知: 在 $0 \leq t \leq t_0$ 上 $F(t)$ 是严格减小的, 在 $t_0 \leq t \leq 1$ 上 $F(t)$ 是严格增大的; 由此, 再用 $F(0) = 0$, $F(1) = 0$, 即知: 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) < 0$. 特别 $F(\lambda_2) < 0$. 但 $F(\lambda_2) = f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) - \lambda_1f(x_1) - \lambda_2f(x_2)$, 故

$$f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) < \lambda_1f(x_1) + \lambda_2f(x_2).$$

由此可知 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的.

(2) 若 $f''(x) < 0$ ($a < x < b$), 则 $F''(t) < 0$ ($0 \leq t \leq 1$). 和 (1) 情形完全类似地可推知: 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) > 0$. 特别 $F(\lambda_2) > 0$, 由此即知

$$f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) > \lambda_1f(x_1) + \lambda_2f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸的.

证法二:

在 (a, b) 内任取两点 x_1 及 x_2 , 使 $a < x_1 < x_2 < b$, 并令 $t = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$, 则由 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 知: $x_1 < t < x_2$.

将函数 $f(x)$ 在 $x=t$ 点按1266题题解附注的公式展开, 得

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{1}{2}(x-t)^2 f''(\xi), (1)$$

其中 $a < t < \xi < x$ 或 $a < x < \xi < t$. 将 $x = x_1$ 及 $x = x_2$ 代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(t) + (x_1 - t)f'(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_1 - t)^2 f''(\xi_1), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(t) + (x_2 - t)f'(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x_2 - t)^2 f''(\xi_2), \end{aligned} \quad (3)$$

其中 ξ_1, ξ_2 分别是界于 x_1, t 及 x_2, t 之间的数. 以 λ_1 乘 (2) 式, λ_2 乘 (3) 式, 再相加, 得

$$\begin{aligned} &\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)f(t) + [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ &\quad - (\lambda_1 + \lambda_2)t]f'(t) + \frac{1}{2}[\lambda_1(x_1 - t)^2 f''(\xi_1) \\ &\quad + \lambda_2(x_2 - t)^2 f''(\xi_2)]. \end{aligned}$$

但 $t = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, 及 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 故

$$\begin{aligned} &[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)] - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \frac{1}{2}[\lambda_1(x_1 - t)^2 f''(\xi_1) + \lambda_2(x_2 - t)^2 f''(\xi_2)]. \end{aligned}$$

由于 $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $(x_1 - t)^2 \geq 0$, $(x_2 - t)^2 \geq 0$, 所以

$$[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)] - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

与 $f''(\xi_1)$ 、 $f''(\xi_2)$ 有同样的正负号.

当 $f''(x) \geq 0$ 时, 则

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

所以, 函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 上是凹的.

当 $f''(x) \geq 0$ 时, 则

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

所以, 函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 上是凸的.

1313. 证明: 函数

$$x^n (n > 1), e^x, x \ln x$$

于区间 $(0, +\infty)$ 上是凹的; 而函数

$$x^n (0 < n < 1), \ln x,$$

于区间 $(0, +\infty)$ 上是凸的.

证 (1) 设 $y = x^n$ ($n > 1$), 则

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}.$$

它在 $(0, +\infty)$ 上是大于零的, 因此图形是凹的.

但当 $0 < n < 1$ 时, 则 $y'' < 0$, 故此时图形是凸的.

(2) 对于函数 e^x , 其二阶导函数为 e^x , 它始终为正, 因此图形是凹的.

(3) 对于函数 $x \ln x$, 其二阶导函数为 $\frac{1}{x}$, 它在 $(0, +\infty)$ 内大于零, 因此图形是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$, 其二阶导函数为 $-\frac{1}{x^2}$, 它始终为负, 因此, 在 $(0, +\infty)$ 内图形是凸的.

1314. 证明下列不等式, 并解释其几何意义:

$$(a) \frac{1}{2}(x^n + y^n) \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, \quad (x > 0, y > 0,$$

$$x \neq y, n \geq 1);$$

$$(6) \frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y),$$

$$(B) x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \\ (x > 0, y > 0).$$

证 我们已知, 若函数 $f(x)$ 的图形在区间 (a, b) 内是凹的, 则对于 (a, b) 中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

于是, 利用1313题的结果, 我们有

(a) 设 $f(x) = x^n$, $(x > 0, n \geq 1)$, 则其图形是凹的. 于是, 对于任意两点 x 和 y , 得

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(6) 设 $f(x) = e^x$, 则在 $(-\infty, +\infty)$ 上图形是凹的. 于是, 对于任意两点 x 和 y , 得

$$\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(B) 设 $f(x) = x \ln x$, 则对于 $x > 0$ 图形是凹的. 于是, 对于任意两点 x 和 y , 得

$$x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是: 联接点 $(x, f(x))$ 及

$(y, f(y))$ 的弦的中点始终位于曲线上对应点 (具相同横坐标) 的上方.

1315. 证明有界的凸的函数处处连续, 并有左侧及右侧的导函数.

证 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的, 并设 x_0 为 (a, b) 内的任一点, 今证 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且有左侧及右侧的导数.

在点 x_0 附近取一邻域 $|x - x_0| < \delta$, 使得这邻域全部包含在 (a, b) 内, 并记

$$M = \min\{f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)\}.$$

设 $0 < |x - x_0| < \delta$. 记

$$t = \frac{|x - x_0|}{\delta},$$

则 $0 < t < 1$.

当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有

$$x = t(x_0 + \delta) + (1 - t)x_0$$

及

$$x_0 = \frac{1}{1+t} x + \frac{t}{1+t} (x_0 - \delta).$$

由于 $f(x)$ 为凸函数, 故有

$$\begin{aligned} f(x) &\geq t f(x_0 + \delta) + (1 - t) f(x_0) \\ &\geq t M + (1 - t) f(x_0) \end{aligned} \quad (1)$$

及

$$\begin{aligned} f(x_0) &\geq \frac{1}{1+t} f(x) + \frac{t}{1+t} f(x_0 - \delta) \\ &\geq \frac{f(x) + t M}{1+t}. \end{aligned} \quad (2)$$

由 (1), 得

$$f(x) - f(x_0) \geq -t[f(x_0) - M],$$

由 (2), 得

$$t[f(x_0) - M] \geq f(x) - f(x_0).$$

从而 $f(x_0) - M \geq 0$, 且

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq t[f(x_0) - M] \\ &= \frac{[f(x_0) - M]}{\delta} \cdot |x - x_0|. \end{aligned} \quad (3)$$

当 $x_0 - \delta \leq x \leq x_0$ 时, 类似地也可导出 (3) 式, 故当 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 时, (3) 式恒成立.

由此显然有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性.

记 $x = x_0 + h$, 则 (3) 式可改写为

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \\ &\leq \frac{|f(x_0) - M|}{\delta} \quad (0 < |h| \leq \delta). \end{aligned} \quad (4)$$

引进函数

$$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (-\delta \leq h \leq \delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$ 仍为凸函数, 且有 $\varphi(0) = 0$. 今取任意两数 t_1 及 t_2 , 设有 $0 < t_1 \leq t_2 \leq \delta$, 并改写为

$$t_1 = \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2 + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质, 有

$$\begin{aligned}\varphi(t_1) &\geq \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \varphi(0) \\ &= \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2),\end{aligned}$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} \geq \frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数 $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ 是一个严格单调下降函数. 如从 $h \rightarrow +0$ 方向看, 则函数 $F(h)$ 严格单调增大. 但由 (4) 可知 $|F(h)| \leq \frac{|f(x_0) - M|}{\delta}$, 即 $F(h)$ 在 $0 < |h| < \delta$ 有界, 故极限 $\lim_{h \rightarrow +0} F(h)$ 存在, 也即 x_0 的右侧导数

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

存在. 同理, 可证左侧导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中, 对于区间是否有穷无关紧要. 证毕.

注 本题不需假定凸函数有界, 证明中也未用到有界这个条件, 参看 E.C. Titchmarsh, The Theory

of Functions, §5.31. 若以较弱的不等式 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

$\geq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 作为凸函数的定

义, 则需加上凸函数有界这个条件, 才能推出它连续并且左、右导数都存在. 参看 G. Pólya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis, Vol. I, 70 题和 124 题.

1316. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内可微分二次, 且 $f''(\xi) \neq 0$, 其中 $a < \xi < b$. 证明: 在区间 (a, b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2 , 满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

证 不妨设 $f''(\xi) > 0$. 考察 $f'(\xi)$, 分两种情形:

(1) 若 $f'(\xi) = 0$, 则由 $f''(\xi) > 0$ 知 $f(\xi)$ 为极小值. 从而存在 $\delta > 0$, 在 $[-\delta + \xi, \xi + \delta]$ ($\subset (a, b)$) 上函数 $f(x)$ 在 ξ 的左侧单调下降, 在 ξ 的右侧单调上升. 如果 $f(-\delta + \xi) = f(\xi + \delta)$, 则取 $x_1 = -\delta + \xi$, $x_2 = \xi + \delta$, 就满足了题中的等式. 如果 $f(-\delta + \xi) < f(\xi + \delta)$, 则取 $x_1 = -\delta + \xi$, 而在 $[\xi, \xi + \delta]$ 上函数值 $f(x_1)$ 介于 $f(\xi)$ 与 $f(\xi + \delta)$ 之间. 由于 $f(x)$ 在 $[\xi, \xi + \delta]$ 上单调上升, 故存在 $x_2 \in (\xi, \xi + \delta)$, 使 $f(x_2) = f(x_1)$, 从而题中的等式成立. 如果 $f(-\delta + \xi) > f(\xi + \delta)$, 仿前也可取得两点 x_1 及 x_2 , 使 $f(x_1) = f(x_2)$. 这时题中的等式得证.

(2) 若 $f'(\xi) \neq 0$, 则设

$$F(x) = f(x) - f'(\xi)x,$$

从而有

$$F'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0,$$

且

$$F''(\xi) = f''(\xi) > 0.$$

对于函数 $F(x)$ ，应用上述 (1) 的推证方法，总存在两点 x_1 及 x_2 ，使 $F(x_1) = F(x_2)$ ，也即有

$$f(x_1) - f'(\xi)x_1 = f(x_2) - f'(\xi)x_2,$$

解得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

从而命题得证。

1317. 证明：若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分两次，且

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

则在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一点 ξ ，满足

$$f''(\xi) = 0.$$

证 用反证法。即若不存在 ξ ，使 $f''(\xi) = 0$ ，则当 $x > x_0$ 时，或者 $f''(x) > 0$ ，或者 $f''(x) < 0$ ，如果不是这样，即若存在点 a 与 b ，使得 $f''(a) < 0$ 及 $f''(b) > 0$ ，则由达布定理*可知，在 a 与 b 之间必有 c 存在，使得 $f''(c) = 0$ ，这与我们的反证假设矛盾。因此我们不妨设 $f''(x) > 0$ ，从而函数 $f(x)$ 的图象是凹的，位于其任一点曲线的切线的上方。

再由

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

与 $f(x)$ 的可微性，利用1237题的结果，即知：在 $(x_0, +\infty)$ 中至少存在一点 c_1 ，使

$$f'(c_1) = 0.$$

由 $f''(x) > 0$ 易知 $f'(x)$ 单调上升, 从而当 $x > c_1$ 时, $f'(x) > 0$. 取 $c_2 > c_1$, 则 $f'(c_2) > 0$.

过点 $(c_2, f(c_2))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线, 其方程为

$$Y(x) = f(c_2) + f'(c_2)(x - c_2).$$

易知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = +\infty,$$

而 $f(x) - Y(x) > 0$, 从而应有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

这与原设条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 矛盾. 同样, 对于 $f''(x) < 0$ 的情况也可推得以上结论.

于是, 在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一点 ξ , 使

$$f''(\xi) = 0.$$

*) 达布定理指: 若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内有有限的导函数, 且 $g'(a)g'(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少有一点 c , 使

$$g'(c) = 0.$$

其证法是: 不妨设 $g'(a) < 0$, $g'(b) > 0$, 则在 a 右边且与 a 充分近的点 x , 有 $g(a) > g(x)$; 在 b 左边且与 b 充分近的点 x , 有 $g(x) < g(b)$; 由此可知 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值必在 (a, b) 内某点 c 达到, 从而必有 $g'(c) = 0$.

在本题中, 可设 $g(x) = f'(x)$, 则由 $g'(a) = f''(a) < 0$ 及 $g'(b) = f''(b) > 0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在, 使 $g'(c) = 0$, 即 $f''(c) = 0$.

§ 9. 未定形的求值法

洛比塔第一法则 (未定形 $\frac{0}{0}$ 的求值法) 若 (1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 点的某邻域 U_* 内有定义并且是连续的 (此处 a 为数字或符号 ∞), 并且当 $x \rightarrow a$ 时, 这两个函数都趋近于零:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

(2) 在 a 点的邻域 U_* 内, 除 a 点而外, 在其余各点导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在, 并且当 $x \neq a$ 时, 二者不同时为零; (3) 有限或无穷的极限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

洛比塔第二法则 (不定形 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法) 若: (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二者都趋于无穷大;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

其中 a 为有限数或符号 ∞ ;

(2) 对于属于 a 点的邻域 U_* 而异于 a 的一切 x 值, 导

* 所谓 a 点的邻域 U_* 系指适合于不等式

(1) $|x - a| < \varepsilon$, 若 a 为一个数

及

(2) $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, 若 a 为符号 ∞ , x 的集合。

函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在, 并且当 $x \in U$, 及 $x \neq a$ 时,

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0.$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法, 可使未定形 $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 等的求值法化为前面两个类型的未定形:

$$\frac{0}{0} \text{ 与 } \frac{\infty}{\infty}$$

的求值法.

求出下列各式之值:

$$1318. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$$

$$1319. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x + \sin x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x + \cos x}{2} = 1.$$

$$1320. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

$$1321. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12\sec^2 4x - 12\sec^2 x}{12\cos 4x - 12\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\cos 4x + \cos x}{\cos^2 x \cos^2 4x} \right) = -2.$$

$$1322. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3\sec^2 3x}{\sec^2 x} = 3 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^2$$

$$= 3 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3\sin 3x} \right)^2 = \frac{1}{3}.$$

$$1323. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2 \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x \operatorname{tg} x + x^2 \sec^2 x}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2 \operatorname{tg}^2 x + 2x \operatorname{tg} x + x^2}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2\frac{x}{\operatorname{tg} x} + \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^2} = -\frac{1}{3}.$$

$$1324. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3 \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}} \sec^2 x}{4 \sin x \cos x} = \frac{1}{3}.$$

$$1325. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 + xe^x - 2e^x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x + xe^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + e^x + xe^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$1326. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sin t + t \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{t}{\sin t} \cos t} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$1327. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin 2x - 2 \operatorname{arc} \sin x}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin 2x - 2 \operatorname{arc} \sin x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left[\frac{4x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]}{6x} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 1.
\end{aligned}$$

1328. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{b}} \right).$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{b}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{b}}{1+\frac{x}{b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{x+a} - \frac{b}{x+b}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{(x+a)^2} - \frac{b}{(x+b)^2}}{3} \\
&= \frac{a-b}{3ab} \quad (ab \neq 0).
\end{aligned}$$

1329. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}.$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - \cos x \cdot a^{\sin x}) \ln a}{3x^2} \\
&= \frac{\ln a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + \sin x \cdot a^{\sin x} - \cos^2 x \cdot a^{\sin x} \ln a}{2x} \\
&= \frac{\ln a}{6} \lim_{x \rightarrow 0} (a^x \ln^2 a + \cos x \cdot a^{\sin x} + \sin x \cos x \cdot a^{\sin x} \ln a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin 2x \cdot a^{\sin x} \ln a - \cos^3 x \cdot a^{\sin x} \ln^2 a) \\
& = -\frac{\ln a}{6} \quad (a > 0).
\end{aligned}$$

1330. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

1331. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin bx \cos ax}{b \sin ax \cos bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$

*) 利用 1318 题的结果.

1332. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{tg} ax}{b \operatorname{tg} bx}$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sec^2 ax}{b \sec^2 bx} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \quad (b \neq 0).$$

1333. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x \cdot \sin(\sin x) + \sin x}{4x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x) + \cos x}{12x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{24x} \left[\cos x \sin(\sin x) + \frac{1}{2} \sin 2x \cos(\sin x) \right. \\
&\quad \left. + \sin 2x \cos(\sin x) + \cos^3 x \sin(\sin x) - \sin x \right] \\
&= \frac{1}{24} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin x \sin(\sin x) + \cos^2 x \cos(\sin x) \right. \\
&\quad \left. + 3 \cos 2x \cos(\sin x) - \frac{3}{2} \cos x \sin 2x \sin(\sin x) \right. \\
&\quad \left. - 3 \cos^2 x \sin x \sin(\sin x) + \cos^4 x \cos(\sin x) - \cos x \right) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

1334. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right]$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \operatorname{sh}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - \sin 2x}{\sin 2x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh} 2x \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - \cos 2x}{\cos 2x \operatorname{sh}^2 x + \sin 2x \operatorname{sh} 2x + \operatorname{ch} 2x \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} 2x + 2 \sin 2x}{-2 \sin 2x \operatorname{sh}^2 x + 3 \cos 2x \operatorname{sh} 2x + 3 \sin 2x \operatorname{ch} 2x + 2 \operatorname{sh} 2x \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (4 \operatorname{ch} 2x + 4 \cos 2x) (-4 \cos 2x \operatorname{sh}^2 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\sin 2x \operatorname{sh} 2x - 6\sin 2x \operatorname{sh} 2x + 6\cos 2x \operatorname{ch} 2x \\
& + 6\cos 2x \operatorname{ch} 2x + 6\sin 2x \operatorname{sh} 2x + 4\operatorname{ch} 2x \sin^2 x \\
& + 2\sin 2x \operatorname{sh} 2x)^{-1} \\
& = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

1335. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{ar sh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x},$

其中 $\operatorname{ar sh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

解
$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{ar sh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) - \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})}{\operatorname{sh} x - \sin x} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} \cdot \frac{\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{-\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} \right)}{\operatorname{sh} x + \sin x} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\sin x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}}{\operatorname{sh} x + \sin x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 \sin^2 x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}}{\sin x + \cos x} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

1336. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^e} \quad (e > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^e} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{ex^{e-1}} = 0.$

1337. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0.$

以上是就 n 为正整数的情形解得的, 若 n 不是正整数, 则

$$[n] < n < [n] + 1.$$

于是,

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} \quad (x > 1).$$

而左右两端当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 上面已证明它们的极限为零. 因此, 中间的极限也为零. 于是, 对于任意大于零的实数 a 和 n , 均有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0.$$

$$1338. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{50}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0. \quad *)$$

*) 利用 1337 题的结果.

$$1339. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{0.01x}} = 0. \quad *)$$

*) 利用 1337 题的结果.

$$1340. \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \ln^2 x}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{-1} = 0.$$

$$1341. \lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \ln x \quad (\varepsilon > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^\varepsilon \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} = 0.$$

$$1342. \lim_{x \rightarrow +0} x^x.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^{0^{*})} = 1.$$

*) 利用 1341 题的结果.

$$1343. \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x-1}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x-1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(x^x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x}.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0^{*}), \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1$$

及

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln^2 x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{2}{x} \ln x}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} (-2x \ln x) = 0,$$

故

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ (e^{x \ln x} - 1) \ln x \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot x \ln^2 x \right\} = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x-1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x} = e^0 = 1.$$

*) 利用 1341 题的结果.

$$1344. \lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1).$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +0} (e^{x^x \ln x} - 1).$$

利用 1342 题的结果, 有

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1,$$

故得

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{x^x \ln x} = 0,$$

从而有

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = -1.$$

$$1345. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}.$$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{k}{1+\ln x} \ln x = k \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = k,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}} = e^k.$$

$$1346. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

1347. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

1348. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}}{-2 \operatorname{csc}^2 2x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1 \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1}.$$

$$1349. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \operatorname{ctg} x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\csc x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\csc^2 x}{\operatorname{ctg} x}}{-\csc x \operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

$$1350. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln y)}{y}$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y \ln y} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = e^0 = 1.$$

$$1351. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{(1+2x)^2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}}$$

$$= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+2x)^2} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{2\pi x}{2x+1}} \quad e$$

$$= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{(1+2x)^3}}{\frac{2\pi}{(1+2x)^2} \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= -4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+2x) \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}$$

$$= 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

1352. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg}(x-a) \ln \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}(x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \sec^2 x}{\sec^2(x-a)} = \frac{2}{\sin 2a},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)} = e^{\frac{2}{\sin 2a}} \quad (a \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ 为整数}).$$

$$1353. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x - x \ln a) - \ln(b^x - x \ln b)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(a^x - 1) \ln a}{a^x - x \ln a} - \frac{(b^x - 1) \ln b}{b^x - x \ln b}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{a^x \ln^2 a (a^x - x \ln a) - (a^x - 1)^2 \ln^2 a}{(a^x - x \ln a)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{b^x \ln^2 b (b^x - x \ln b) - (b^x - 1)^2 \ln^2 b}{(b^x - x \ln b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\ln^2 a - \ln^2 b), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}}.$$

$$1354. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(x + 2)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$1355. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)\ln x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) + x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+1+\ln x} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$1356. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0.
 \end{aligned}$$

$$1357. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x) \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ln(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - x}{\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + (1+x) \ln(1+x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 + \ln(1+x)} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

1358. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (a^x \ln a - ax^{a-1}) = a^a (\ln a - 1).$

1359. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right] \\
&= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} \\
&= -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)^2} = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

1360. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right] - a^x \ln a}{2x} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + (a+x)^x \left[\frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2} \right] - a^x \ln^2 a \right\} \\
&= \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

1361. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x.$

解 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2 \arctg x} \cdot \frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(1+x^2) \arctg x} = -\frac{2}{\pi},
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1362. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\th x)^x.$

解 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\operatorname{th} x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{th} x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{th} x \operatorname{ch}^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh} 2x} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2 \operatorname{ch} 2x} \\
&= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \operatorname{sh} 2x} = 0,
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x = e^0 = 1.$$

1363. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\arcsin x) - \ln x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\arcsin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{2x^2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{\left(4x \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} \right) \arcsin x + 2x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{2(2 - 3x^2) \arcsin x + 2x \sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x \arcsin x + \frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}.$$

$$1364. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$1365. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} = -\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

$$1366. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \ln \operatorname{ch} x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x - \operatorname{th} x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{2} = -1, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1}.$$

$$1367. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{sh} x \left[\frac{1}{m} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{m}-1} - \frac{1}{n} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{n}-1} \right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = \frac{mn}{n-m} \quad (n \neq m),$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}} = \frac{mn}{n-m}.$$

$$1368. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$1369. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right].$$

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} &= x \left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + o \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] \\ &= x + \frac{1}{3} + o \left(\frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{3} + o(1), \\ \sqrt{x^2 + x + 1} &= x \left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + o \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] \\ &= x + \frac{1}{2} + o \left(\frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{2} + o(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(e^x + x)}{x} &= \frac{1}{x} \ln \left[e^x (1 + xe^{-x}) \right] \\
&= 1 + \frac{1}{x} \ln(1 + xe^{-x}) \\
&= 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \left(\text{这是由于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + xe^{-x}) = 0 \right).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \\
&= \left[x + \frac{1}{3} + o(1) \right] - \left[x + \frac{1}{2} + o(1) \right] \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\
&= \left[x + \frac{1}{3} + o(1) \right] - \left[x + \frac{1}{2} + o(1) + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\
&= -\frac{1}{6} + o(1),
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{6} + o(1) \right] = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

$$1370. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \right].$$

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)} = e^{o\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

及

$$x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}} = x^{-\frac{a}{x(x+a)}} = e^{-\frac{a}{x(x+a)} \ln x} = e^{o(\frac{1}{x})} = 1 + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

并注意到 $x^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 于是得

$$\begin{aligned} (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} &= (x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x+a}} \\ &= (x+a) \cdot x^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x}} x^{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}} \\ &= x^{\frac{1}{x}} \left\{ (x+a) \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] - x \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \right\} \\ &= x^{\frac{1}{x}} \{ (x+a+o(1)) - (x+o(1)) \} \\ &= x^{\frac{1}{x}} [a+o(1)], \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \right] \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ x^{\frac{1}{x}} [a+o(1)] \right\} = a. \end{aligned}$$

1371. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点 $(0,0)$ ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$), 且在此有斜角 α , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \operatorname{tg} \alpha^*.$

*) 所谓有斜角 α 是指在 $x = 0$ 点有 $f'(0) = \operatorname{tg} \alpha$, 注意到当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 以及 $f'(0)$ 存在, 如果再假定 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 则也可用洛比塔法则求得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{1} = f'(0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

1372. 若当 $x \rightarrow +0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点 $(0, 0)$ $\left[\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0 \right]$, 并且当 $0 < x < \varepsilon$ 时, 此曲线完全是在两直线 $y = -kx$ 及 $y = kx$ ($k \neq \infty$) 所组成的锐角之内, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

证 当 $x \rightarrow +0$ 时, 有 $x \ln x \rightarrow 0$. 按题设应有

$$-kx \leq f(x) \leq kx \quad (k > 0, 0 < x < \varepsilon),$$

而当 $x > 0$ 且很小时, 有 $\ln x < 0$, 故

$$kx \ln x \leq f(x) \ln x \leq -kx \ln x,$$

从而有

$$e^{kx \ln x} \leq e^{f(x) \ln x} \leq e^{-kx \ln x}.$$

当 $x \rightarrow +0$ 时, 不等式两端均趋于 $e^0 = 1$, 注意到 $e^{f(x) \ln x} = x^{f(x)}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

1373. 证明: 若函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 存在, 则

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

证 当 $h \rightarrow 0$ 时, $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \rightarrow 0$ 及 $h^2 \rightarrow 0$, 且分子、分母(视为 h 的函数)都有导数, 又注意到分母的导数 $2h \neq 0$ ($h \rightarrow 0$ 但 $h \neq 0$), 故对

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ 可用洛比塔法则,

并且继续运算, 最后得证

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right] \\ &= \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x). \end{aligned}$$

1374. 研究运用洛比塔法则于下列各例的可能性:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)};$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}}.$$

解 (a) 分子、分母分别求导数, 得商为

$$\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

此函数当 $x \rightarrow 0$ 时, 极限不存在, 因此洛比塔法则不能适用. 但是, 原极限是存在的. 事实上, 函数

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x},$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$ 及 $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0.$$

(6) 分子、分母分别求导数, 得商为

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 上述函数的极限不存在, 因此洛比塔法则不能适用. 但是, 原极限是存在的, 事实上, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

(B) 如果运用洛比塔法则, 就有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5e^{-2x} \sin x - 2xe^{-x^2} \sin^2 x + e^{-x^2} \sin 2x}{-2e^{-x} \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} e^{-x} + xe^{-x^2+x} \sin x - e^{-x^2+x} \cos x \right) = 0. \end{aligned}$$

这个结果是错误的. 事实上, 若取 $x_n = n\pi + \frac{3\pi}{4}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty, \text{ 对于数列 } \{x_n\}, \text{ 原式的分母 } e^{-x_n} \cdot (\cos x_n + \sin x_n) = \sqrt{2} e^{-x_n} \sin\left(x_n + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} e^{-(n\pi + \frac{3\pi}{4})}$$

$\cdot \sin(n+1)\pi = 0$, 而分子不为零, 此时原式的极限不存在, 从而对于 $x \rightarrow +\infty$, 原式的极限不存在. 原因

是在求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且

极限为零, 但其导函数在点列 $x^{(n)} = n\pi$ ($n=1, 2, \dots$) 上两者同时出现了零点. 因此, 一方面本题不符合运用洛比塔法则的条件; 另一方面也不允许在求极限过程中, 用 $\sin x$ 作除数, 上、下同时约分后再求极限.

(v) 如果运用洛比塔法则, 就有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\cos 2x}{e^{\sin x} [1+\cos 2x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x} [2\cos^2 x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\sin x} \left[1+\frac{1}{2\cos x} (x+\sin x \cos x) \right]}. \end{aligned}$$

由于

$$e^{\sin x} \geq e^{-1}, \quad x+\sin x \cos x \geq x-1,$$

故当 $x \gg 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| e^{\sin x} \left[1 + \frac{1}{2 \cos x} (x + \sin x \cos x) \right] \right| \\ & \geq e^{-1} \left[\frac{1}{2 |\cos x|} (x-1) - 1 \right] \\ & \geq e^{-1} \left[\frac{1}{2} (x-1) - 1 \right] \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

从而得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x) e^{\sin x}} = 0.$$

这个结果是错误的. 事实上, 对于不同的数列:

$$x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 及 } x_n'' = 2n\pi \quad (n=1, 2, \dots),$$

让 $n \rightarrow +\infty$, 则分别取不同的极限 $\frac{1}{e}$ 及 1, 从而原极限是不存在的. 原因与 (B) 的情况类似, 只是注意到 $\cos x$ 在 $x^{(n)} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 的点列上 ($n=1, 2, \dots$) 取值为

零. 因此, 本题不符合运用洛比塔法则的条件; 当然也不允许在中间过程里, 用 $\cos x$ 作除数, 上、下约分后再求极限.

1375. 设有一弓形, 其弦为 b , 矢为 h , 又有内接于此弓形之内的等腰三角形. 若当 R 不变时弓形的弧趋于零, 求弓形面积与内接等腰三角形面积之比. 利用所得之结果推出计算弓形面积之近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

解 如图 2.50 所示. $AB=b$, $DC=h$, $\angle AOB=\alpha$, $\triangle ABC$ 为内接等腰三角形, 其面积为

$$\frac{1}{2}bh = R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right).$$

弓形面积为

$$\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin \alpha).$$

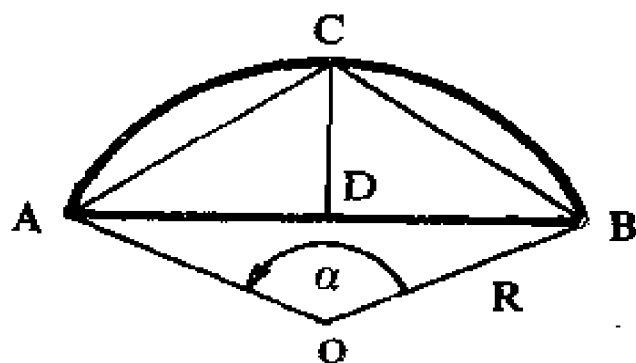


图 2.50

当弧长趋于零时, α 趋于零. 于是, 弓形面积与内接等腰三角形面积之比为

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin \alpha)}{\lim_{\alpha \rightarrow 0} R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \right)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{4} \sin \frac{\alpha}{4}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2}{\frac{3\alpha}{4} \cdot \frac{\alpha}{4}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

由此得弓形面积的近似公式为

$$S \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{2}{3}bh.$$

§10. 台 劳 公 式

1° 台劳局部公式 若 (1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x - x_0| < \varepsilon$ 内有定义; (2) 于此邻域内有一直到 $(n-1)$ 阶的导函数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) n 级导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 于 x_0 点存在, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n), \quad (1)$$

其中
$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

特例, 当 $x_0 = 0$ 时, 有:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(|x|^n). \quad (2)$$

在所示的条件下, (1) 式是唯一的.

从台劳局部公式(2), 得出下列五个重要的展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \\ &\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n); \end{aligned}$$

$$V. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- 2° 台劳公式 若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义;
 (2) 在此闭区间上有连续的导函数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$;
 (3) 当 $a < x < b$ 时, 有有限值的导函数 $f^{(n)}(x)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日余项公式), 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(x-a))}{(n-1)!} (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n$$

$$(0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西余项公式).

1376. 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

表成二项式 $x+1$ 的正整数乘幂多项式.

$$\begin{aligned} \text{解 } P'(x) &= 3 + 10x - 6x^2, & P'(-1) &= -13. \\ P''(x) &= 10 - 12x, & P''(-1) &= 22. \\ P'''(x) &= -12, & P'''(-1) &= -12. \\ P^{(4)}(x) &= 0, & P(-1) &= 5. \end{aligned}$$

按台劳公式有

$$P(x) = P(-1) + \frac{P'(-1)}{1!} (x+1)$$

$$+ \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + R_4(x),$$

这里 $R_4(x) = 0$ ，即展开式中的余项为零，将上述结果代入，即得

$$P(x) = 5 - 15(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3,$$

按变数 x 的正整数乘幂，写出下列函数的展开式至含有指出阶数的项：

1377. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$ 等于甚么?

解
$$\begin{aligned} \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} &= (1+x+x^2) \cdot \frac{(1+x)}{1+x^3} \\ &= (1+x)(1+x+x^2) \cdot [1-x^3+o(x^6)] \\ &= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4). \\ f^{(4)}(0) &= 4! \cdot (-2) = -48. \end{aligned}$$

1378. $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ ，则

$$f'(x) = \frac{60(1+x)^{99}(1+6x)}{(1-2x)^{41}(1+2x)^{61}},$$

$$f''(x) = \frac{60(1+x)^{98}(65+728x+2196x^2+48x^3)}{(1-2x)^{42}(1+2x)^{62}},$$

而

$$f(0) = 1, f'(0) = 60, f''(0) = 3900.$$

所以，按台劳公式就有

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} = 1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2).$$

1379. $\sqrt[m]{a^n+x}$ ($a>0$) 到含 x^2 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt[m]{a^n+x}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{m}(a^n+x)^{\frac{1-m}{m}},$$

$$f''(x) = -\frac{(1-m)(a^n+x)^{\frac{1-2m}{m}}}{m^2},$$

而

$$f(0) = a, f'(0) = \frac{1}{m}a^{1-m}, f''(0) = -\frac{1-m}{m^2}a^{1-2m}.$$

于是

$$\sqrt[m]{a^n+x} = a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2).$$

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = 3x(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x)=3(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$+\frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$-\frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

从而

$$f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=\frac{1}{3}, f'''(0)=6,$$

于是,

$$\sqrt{1-2x+x^3}=\sqrt[3]{1-3x+x^2}$$

$$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o(x^3).$$

1381. e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项.

$$\text{解 } e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} \\
& + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} + o(x^5) \\
& = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时, 令 $\frac{e^x-1}{x} = 1 + \Delta$, 则有

$$\Delta = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

其中 Δ 也很小, 于是,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{e^x-1} &= \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1+\Delta} \\
&= 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \Delta^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

注意到

$$\Delta^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4),$$

$$\Delta^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

$$\Delta^4 = \frac{x^4}{16} + o(x^4),$$

则得

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$$

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sqrt[3]{\sin x^3} &= \left[x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15}) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \left(-\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} \left(-\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right)^2 + o(x^{12}) \right] \\ &= x - \frac{7}{18} x^7 - \frac{1}{3240} x^{13} + o(x^{13}). \end{aligned}$$

1384. $\ln \cos x$ 到含 x^6 的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \ln \cos x &= -\frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^6 x) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^6 + o(x^6) \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).$$

其中用到: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow 0$), 故 $o(\sin^6 x)$ 可换为 $o(x^6)$.

1385. $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(x^4) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3 + o(x^4) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

1386. $\operatorname{tg} x$ 到含 x^5 的项.

解 当 x 很小时, 有

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \Delta, \end{aligned}$$

其中 $\Delta = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ 很小, 易见 $\Delta^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$.

于是,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right) \frac{1}{1 - \Delta} \\ &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(1 + \Delta + \Delta^2 + o(x^4)\right) \\
& = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right) \\
& \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) \\
& = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

1387. $\ln \frac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项.

$$\begin{aligned}
\text{解 } \ln \frac{\sin x}{x} &= \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x} \\
&= \ln \left[1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \right] \\
&= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).
\end{aligned}$$

1388. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开式的前三项.

解 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$

$$f(1)=1, f'(1)=\frac{1}{2}, f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

于是,

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

1389. 将函数 $f(x) = x^x - 1$ 按照 $(x-1)$ 的正整数幂展开到含有 $(x-1)^3$ 的项.

解 $f'(x) = x^x (1 + \ln x),$

$$f''(x) = x^x (1 + \ln x)^2 + x^{x-1},$$

$$f'''(x) = x^x (1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1}(1 + \ln x)$$

$$+ x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x} + \ln x\right).$$

$$f(1)=0, f'(1)=1, f''(1)=2, f'''(1)=3.$$

于是,

$$x^x - 1 = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3$$

$$+ o((x-1)^3).$$

1390. 于点 $x=0$ 的邻域中, 用二阶抛物线近似地代替函数

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

解 $y \Big|_{x=0} = a, y' \Big|_{x=0} = \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_{x=0} = 0,$

$$y'' \Big|_{x=0} = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \Big|_{x=0} = \frac{1}{a}.$$

于是,

$$a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2).$$

1391. 按分式 $\frac{1}{x}$ 的正整数乘幂展开函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$

($x > 0$) 到含 $\frac{1}{x^3}$ 的项.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}\right) + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x^2} - x = x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} - x \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

1392. 求函数 $f(h) = \ln(x+h)$ ($x > 0$) 按增量 h 的正整数乘幂展开到含 h^n 的项 (n 为自然数).

$$\begin{aligned} \text{解 } \ln(x+h) &= \ln\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \\ &= \ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{nx^n} + o(h^n). \end{aligned}$$

1393. 设:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \cdots \\ &\quad + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) \quad (0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

证 按题设, 我们有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h),$$

其中 $0 < \theta < 1$.

又因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在, 故

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}). \end{aligned}$$

比较上面两式, 得

$$\begin{aligned} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h) &= \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}), \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \theta \cdot \frac{f^{(n)}(x + \theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} \\ = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + n! \frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{由于 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x + \theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} = f^{(n+1)}(x) \neq 0,$$

故由上式知 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ 存在, 并且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{\frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = \frac{1}{n+1}.$$

1394. 估计下列近似公式的绝对误差:

$$(a) \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1;$$

$$(b) \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2};$$

$$(c) \quad \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad \text{当 } |x| \leq 0.1;$$

$$(r) \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1.$$

解 用拉格朗日余项公式估计误差:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

(a) 由 $f(x) = e^x$ 及 $0 \leq x \leq 1$, 得

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} \leq e.$$

于是, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

(b) 由 $f(x) = \sin x$, 得

$$\left| f^{(5)}(\theta x) \right| = \left| \sin\left(\theta x + \frac{5}{2}\pi\right) \right| \leq 1.$$

于是, 当 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$\left| R_4(x) \right| \leq \frac{1}{5!} |x|^5 \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}.$$

(B) 由 $f(x) = \operatorname{tg} x$, 得

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24 \sin x}{\cos^5 x} - \frac{8 \sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{16}{\cos^2 x} + \frac{120 \sin^2 x}{\cos^6 x},$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{32 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{240 \sin x}{\cos^5 x} + \frac{720 \sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

因为 $f^{(5)}(x)$ 是偶函数, 又当 $0 \leq x \leq 0.1$ 时, $f^{(6)}(x) \geq 0$, 所以, $f^{(5)}(x)$ 在 $x = \pm 0.1$ 处达到最大值, 注意到

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

及

$$\cos^2 0.1 = 1 - \sin^2 0.1 > 0.9,$$

$$\left| f^{(5)}(x) \right| \leq \frac{16}{0.9} + \frac{120 \times 0.1^2}{0.9^3} < 20.$$

于是,

$$\left| R_5(x) \right| \leq \frac{0.1^5}{5!} \times 20 < 2 \times 10^{-6}.$$

(r) 由 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 及 $0 \leq x \leq 1$, 得

$$|f'''(x)| = \frac{3}{8} \left| \frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{3}{8}.$$

于是, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|R_2(x)| \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{16}.$$

1395. 近似公式

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

对于怎样的 x 准确到 0.0001,

解 误差 $\triangleq \leq \frac{|x|^4}{4!}$. 按题设需 $\frac{|x|^4}{4!} \leq 0.0001$, 于是

$$|x| \leq 0.222(\text{弧度}) = 12^\circ 43'.$$

1396. 利用台劳公式近似地计算:

(a) $\sqrt[3]{30}$; (б) $\sqrt[3]{250}$; (в) $\sqrt[5]{4000}$;

(г) \sqrt{e} ; (д) $\sin 18^\circ$; (е) $\ln 1.2$;

(ж) $\operatorname{arctg} 0.8$; (з) $\arcsin 0.45$; (и) $(1.1)^{1.2}$,

并估计误差.

解 (a) $\sqrt[3]{30} = 3 \left(1 + \frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx 3 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} \left(\frac{1}{9} \right)^2 \right] \approx 3.1072;$$

$$\Delta < 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{3!} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \approx 2.54 \times 10^{-4}.$$

$$(6) \quad \sqrt[5]{250} = 3 \left(1 + \frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\approx 3 \left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2!} \left(\frac{7}{243}\right)^2 \right]$$

$$\approx 3.0171;$$

$$\Delta < \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{7}{243}\right)^3 \approx 1.6 \times 10^{-6}.$$

$$(B) \quad \sqrt[12]{4000} = 2 \left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{12}}$$

$$\approx 2 \left(1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{128}\right) \approx 1.9960;$$

$$\Delta < \left(\frac{3}{128}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{128}} \approx 5.3 \times 10^{-4}.$$

$$(r) \quad \sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$+ \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 1.64872;$$

$$\Delta = \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{8!} \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \dots < \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\approx 1.6 \times 10^{-6}.$$

$$(л) \quad \sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^5 \approx 0.309017,$$

$$\Delta < \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^7 \approx 6 \times 10^{-8}.$$

$$(е) \quad \ln 1.2 = \ln(1 + 0.2) \approx 0.2$$

$$- \frac{1}{2} (0.2)^2 + \frac{1}{3} (0.2)^3 - \frac{1}{4} (0.2)^4$$

$$+ \frac{1}{5} (0.2)^5 - \frac{1}{6} (0.2)^6 + \frac{1}{7} (0.2)^7 \approx 0.182321;$$

$$\Delta < \frac{1}{8} (0.2)^8 \approx 3.2 \times 10^{-7}.$$

$$(ж) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0.8 \approx 0.8 - \frac{1}{3} (0.8)^3 + \frac{1}{5} (0.8)^5$$

$$- \frac{1}{7} (0.8)^7 + \dots - \frac{1}{39} (0.8)^{39}$$

$$\approx 0.67474 (\text{弧度}) \approx 38^\circ 39' 35'';$$

$$\Delta < \frac{1}{41} (0.8)^{41} \approx 2.5 \times 10^{-6}.$$

$$(з) \quad \operatorname{arc} \sin 0.45 \approx 0.45 + \frac{1}{2 \cdot 3} (0.45)^3$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} (0.45)^5 + \dots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13} (0.45)^{13}$$

$$\approx 0.46676 (\text{弧度}) \approx 26^\circ 44' 37''$$

$$\Delta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15} (0.45)^{15}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17} (0.45)^{17} + \cdots$$

$$\leq \frac{1}{15} (0.45)^{15} [1 + (0.45)^2$$

$$+ \cdots] \leq \frac{1}{15} (0.45)^{15} \cdot \frac{1}{1 - (0.45)^2}$$

$$\approx 5.25 \times 10^{-7}.$$

(H) 事实上, 只需计算 $\ln 1.1$.

$$\ln 1.1 = \ln(1 + 0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2}$$

$$+ \cdots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953.$$

取五项, 所以 $(1.1)^{1.2} = e^{1.2 \ln 1.1} \approx e^{1.2 \times 0.0953}$
 $\approx 1.12117.$

$$\Delta = \frac{1}{4!} e^{1.2 \times 0.09530} (0.0953 \times 1.2)^4 \leq 7.9 \times 10^{-6}.$$

1397. 计算:

(a) e 准确到 10^{-9} ; (b) $\sin 1^\circ$ 准确到 10^{-8} ;

(B) $\cos 9^\circ$ 准确到 10^{-5} ; (r) $\sqrt{5}$ 准确到 10^{-4} ;

(A) $\log_{10} 11$ 准确到 10^{-5} .

$$\text{解 (a)} \quad \Delta = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots$$

$$\begin{aligned} &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

要 $\Delta < 10^{-9}$, 只需 $n!n > 10^9$, 即只需 $n \geq 11$. 于是,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} \approx 2.718281828.$$

$$(6) \quad \Delta < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-8}$, 只需 $\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1} < 10^{-8}$, 即只需 $n \geq 3$. 于是,

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \approx 0.01745241.$$

$$(B) \quad \Delta < \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$, 只需 $\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n} < 10^{-5}$, 即只需 $n \geq 3$.

于是,

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 \approx 0.98769.$$

$$(F) \quad \sqrt{5} = 2 \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta < \frac{2 \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-4}$, 只需 $\frac{2(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < 10^{-4}$, 即只需 $n \geq 4$. 于是,

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &\approx 2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2! \cdot 2^2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \right] \\ &\approx 2.2361. \end{aligned}$$

$$(A) \log_{10} 11 = 1 + \log_{10} (1 + 0.1),$$

$$\Delta < \frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$, 只需 $\frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1} < 10^{-5}$, 即只需 $n \geq 4$.

于是,

$$\begin{aligned} \log_{10} 11 &\approx 1 + \left[0.1 - \frac{1}{2} (0.1)^2 + \frac{1}{3} (0.1)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (0.1)^4 \right] \cdot \frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139. \end{aligned}$$

利用展开式 $1 - V$, 求下列极限:

$$1398. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right]}{x^4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{4 \cdot 2!}\right)x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

1399. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right) \cdot \left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right) - x(1+x)\right]}{x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

1400. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$.

解
$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = -\frac{1}{4}.$$

1401. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}).$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \right. \\ & \quad \left. - \left(1 - \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

1402. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right].$

解
$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \right. \\ & \quad \left. - x^3 \left(1 + \frac{1}{2x^6} - \frac{1}{8x^{12}} + o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

1403. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0).$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln a} + e^{-x \ln a} - 2}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} \left[\left(1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2) \right) - 2 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +0} [\ln^2 a + o(1)] = \ln^2 a \quad (a > 0).
 \end{aligned}$$

$$1404. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$1405. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!}x + o(x)}{1 + o(x^2)} = 0.
 \end{aligned}$$

$$1406. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{72} + o(x^3) \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} + o(x^2) \right] = \frac{1}{3}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 求出无穷小量 y 的形如 Cx^n (C 为常数) 的主项, 假设:

$$1407. y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x).$$

$$\text{解} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + \dots.$$

从而

$$y = \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{2}{15} \sin^5 x + \frac{1}{35} \sin^7 x + o(\sin^7 x) \right)$$

$$- \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{3!} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5!} \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{7!} \operatorname{tg}^7 x + o(\operatorname{tg}^7 x) \right)$$

$$= \left[\left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^3 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{15} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7) \right)^5 \\
& + \frac{1}{35} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7) \right)^7 \Big] \\
& - \left[\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right) \right. \\
& - \frac{1}{3!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right)^3 \\
& + \frac{1}{5!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right)^5 \\
& \left. - \frac{1}{7!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right)^7 + o(x^7) \right] \\
& = \frac{x^7}{30} + o(x^7),
\end{aligned}$$

故 y 的主项为 $\frac{x^7}{30}$.

1408. $y = (1+x)^x - 1$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y &= e^{x \ln(1+x)} - 1 = e^{x \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]} - 1 \\
&= e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right] + o\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) - 1 \\
&= x^2 + o(x^2),
\end{aligned}$$

故主项为 x^2 .

$$1409. y = 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= 1 - e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} = 1 - e^{\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 1} \\ &= 1 - e^{-\frac{x}{2} + o(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) + o\left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) \right] \\ &= \frac{x}{2} + o(x), \end{aligned}$$

故主项为 $\frac{x}{2}$.

1410. 当选择怎样的系数 a 与 b 时, 量

$$x - (a + b \cos x) \sin x$$

对于 x 为 5 阶无穷小?

$$\text{解 } x - (a + b \cos x) \sin x$$

$$= x - a \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right]$$

$$- \frac{b}{2} \left[2x - \frac{1}{3!} (2x)^3 + \frac{1}{5!} (2x)^5 + o(x^5) \right]$$

$$= (1 - a - b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3} \right) x^3$$

$$- \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15} \right) x^5 + o(x^5).$$

要此量对于 x 为 5 阶无穷小, 当且仅当

$$\begin{cases} 1-a-b=0, \\ \frac{a}{6}+\frac{2b}{3}=0. \end{cases}$$

解之, 得 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$.

1411. 当 $|x|$ 为小量时, 推出下列各式的简单的近似公式:

$$(a) \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} \quad (R>0);$$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}; \quad (B) \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right];$$

$$(r) \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)}.$$

解 (a) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} = \frac{1}{R^2} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{R} \right)^{-2} \right]$

$$\approx \frac{1}{R^2} \left[1 - 1 + \frac{2x}{R} \right] = \frac{2x}{R^3};$$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{2x}{1+x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx \left[1 + \frac{2x}{3(1-x)} \right] - \left[1 - \frac{2x}{3(1+x)} \right]$$

$$\approx \frac{4x}{3(1-x^2)} \approx \frac{4}{3}x;$$

$$(B) \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right] \approx \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 - \frac{nx}{100} \right) \right] = \frac{nA}{100};$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right)} &= \frac{\ln 2}{\frac{x}{100} - \frac{x^2}{20000} + \dots} \\
 &\approx \frac{\ln 2}{\frac{x}{100}} = \frac{100 \ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}.
 \end{aligned}$$

1412. 当 x 的绝对值为小量时, 推出形如

$$x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

且准确到 x^5 项的近似公式.

把这个公式用于小角度的弧长的近似求法.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad x &= \alpha \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right] \\
 &\quad + \beta \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \right] \\
 &= (\alpha + \beta)x - \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right)x^3 \\
 &\quad + \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right)x^5 + o(x^5)
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } (1 - \alpha - \beta)x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right)x^3$$

$$- \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right)x^5 + o(x^5) = 0.$$

要此近似公式准确到 x^5 项, 当且仅当

$$\begin{cases} 1 - \alpha - \beta = 0, \\ \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} = 0. \end{cases}$$

解之, 得 $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$.

于是, 近似公式为

$$x \approx \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \operatorname{tg} x;$$

弧长 = 中心角 \times 半径, 设中心角为 x , 半径为 R , 则

弧长 = $Rx \approx \frac{2R}{3} \sin x + \frac{R}{3} \operatorname{tg} x$, 此即小角度的弧长的

近似公式.

1413. 估计下面的契比协夫法则的相对误差: 圆弧近似地等于等腰三角形两腰的和, 此等腰三角形是立于弧所对的弦上, 并且高为此弓形之矢的 $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

解 如图 2.51 所示

$$BC = R \sin \alpha, \quad BC^2 = R^2 \sin^2 \alpha = \frac{R^2}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}} EC = \sqrt{\frac{4}{3}} R (1 - \cos \alpha),$$

$$DC^2 = \frac{4}{3} R^2 (1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= R^2 \left(2 - \frac{8}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} \cos 2\alpha \right).$$

于是, $BD^2 = BC^2 + DC^2$

$$= R^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3} \cos \alpha + \frac{1}{6} \cos 2\alpha \right)$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 \left\{ \frac{5}{2} - \frac{3}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{24} \alpha^4 - \frac{1}{720} \alpha^6 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \left(1 - 2\alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha^4 - \frac{4}{45} \alpha^6 \right) \right\} + o(\alpha^7) \\
&= R^2 \left(\alpha^2 - \frac{1}{90} \alpha^6 \right) + o(\alpha^7) = R^2 \alpha^2 \left[1 - \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right] \\
&= R^2 \alpha^2 (1 - \Delta),
\end{aligned}$$

其中 $\Delta = \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^5)$.

$$\begin{aligned}
BD &= R\alpha \sqrt{1 - \Delta} \\
&= R\alpha \left[1 - \frac{1}{2} \Delta + o(\Delta^2) \right] \\
&= R\alpha \left[1 - \frac{1}{180} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right],
\end{aligned}$$

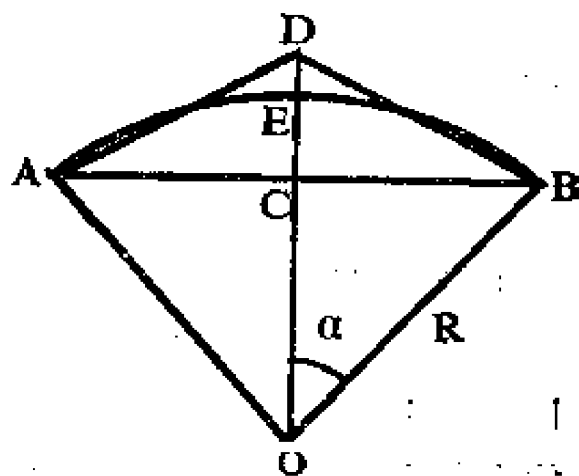


图 2.51

从而得

$$\begin{aligned}
|\widehat{BE} - BD| &= \left| R\alpha - R\alpha \left[1 - \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5) \right] \right| \\
&= \frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^6).
\end{aligned}$$

因此，所求的相对误差为

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\widehat{AB} - (AD + DB)}{\widehat{AB}} \right| &= \left| \frac{2\widehat{BE} - 2BD}{2\widehat{BE}} \right| \\
&= \frac{|\widehat{BE} - BD|}{\widehat{BE}} = \frac{\frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^6)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5).
\end{aligned}$$

可见 α 愈小, 相对误差就愈小, 就愈精确.

§11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1° 有极值的必要条件 若函数于点 x_0 的双侧邻域中有定义, 并且对于某域: $0 < |x - x_0| < \delta$ 内的一切点 x , 有下列的不等式成立:

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值 (极大值或极小值).

在有极值的点导函数 $f'(x_0) = 0$ (假定它存在).

2° 有极值的充分条件 第一法则: 若 (1) 函数 $f(x)$ 于点 x_0 的某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内有定义并且是连续的, 且在 x_0 点, $f'(x_0) = 0$ 或不存在 (临界点); (2) $f(x)$ 在范围: $0 < |x - x_0| < \delta$ 内有有限值的导函数 $f'(x)$; (3) 导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号, 则函数 $f(x)$ 的性质用下表表示出来:

	导函数的符号		结 论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	无 极 值
II	+	-	极 大 值
III	-	+	极 小 值
IV	-	-	无 极 值

第二法则: 若函数 $f(x)$ 有二阶导函数 $f''(x)$, 并且在点 x_0 有下列条件成立:

$$f'(x_0) = 0 \text{ 与 } f''(x_0) \neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值，就是说：当 $f''(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f''(x_0) > 0$ 时，有极小值。

第三法则：设函数 $f(x)$ 于某区间 $|x - x_0| < \delta$ 内有导函数 $f'(x)$ ， \dots ， $f^{(n-1)}(x)$ ，并且在点 x_0 有导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 及

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k=1, \dots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

这时：(1) 若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值，就是说，当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时有极小值；(2) 若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值。

3° 绝对极值 在闭区间 $[a, b]$ 内，连续函数 $f(x)$ ，或于其临界点（就是导函数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点），或于所给闭区间的端点 a 和 b ，达到其最大（最小）值。

研究下列函数的极值：

1414. $y = 2 + x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$ ，令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$ 。由于 $y'' = -2 < 0$ ，所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时，函数 y 取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

1415. $y = (x-1)^3$.

解 由于 $y' = 3(x-1)^2 \geq 0$ （除 $x = 1$ 外），即函数始终上升，故函数 y 无极值。

1416. $y = (x-1)^4$.

解 $y' = 4(x-1)^3$ ，令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 。当 $x < 1$ 时 $y' < 0$ ，当 $x > 1$ 时 $y' > 0$ ，所以函数 y 当 $x = 1$

时取极小值

$$y = 0.$$

1417. $y = x^m(1-x)^n$ (m 及 n 为正整数) .

解 $y' = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m - (m+n)x]$, 由 $y' = 0$ 得

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \frac{m}{m+n}.$$

(1) 若 m 为偶数, 则

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$,

当 $x < 0$ 时, $y' < 0$,

所以在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$.

(2) 若 m 为奇数, 则 y' 在 $x = 0$ 邻近不变号, 故无极值.

(3) 不论 m 、 n 是奇数还是偶数时, 由于

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$,

当 $\frac{m}{m+n} < x < 1$ 时, $y' < 0$,

所以, 函数 y 在 $x = \frac{m}{m+n}$ 处有极大值

$$y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

(4) 同理, 容易得知: 若 n 为偶数时, 则当 $x = 1$ 时有极小值

$$y = 0.$$

若 n 为奇数, 则当 $x=1$ 时函数 y 无极值.

1418. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$.

解 $y' = -\sin x + \operatorname{sh} x$, 令 $y' = 0$ 得 $x=0$. 由于

$$y'' = -\cos x + \operatorname{ch} x, \quad y''(0) = 0,$$

$$y''' = \sin x + \operatorname{sh} x, \quad y'''(0) = 0,$$

$$y^{(4)} = \cos x + \operatorname{ch} x, \quad y^{(4)}(0) = 2 > 0,$$

所以, 当 $x=0$ 时有极小值 $y=2$.

1419. $y = (x+1)^{10}e^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(x+1)^9(9-x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x=-1$ 或 $x=9$.

由于

$$\text{当 } x < -1 \text{ 时, } y' < 0,$$

$$\text{当 } -1 < x < 9 \text{ 时, } y' > 0,$$

$$\text{当 } x > 9 \text{ 时, } y' < 0,$$

所以, 当 $x=-1$ 时有极小值 $y=0$; 当 $x=9$ 时有极大值

$$y = 10^{10}e^{-9} \approx 1234000.$$

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n 为自然数).

解 $y' = -\frac{1}{n!}e^{-x}x^n$, 令 $y' = 0$ 得 $x=0$.

(1) 若 n 为偶数, 由于 $y' < 0$ (除 $x=0$ 外), 故当 $x=0$ 时函数 y 无极值.

(2) 若 n 为奇数, 则

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } y' > 0,$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } y' < 0,$$

所以, 当 $x=0$ 时有极大值 $y=1$.

1421. $y = |x|$.

解 当 $x=0$ 时, 得 $y=0$, 又在 $x=0$ 的邻域内对于任意 $x \neq 0$, 恒有 $y = |x| > 0$, 所以, 当 $x=0$ 时函数有极小值 $y=0$. 注意, $y'|_{x=0}$ 不存在.

1422. $y = x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{2}{3}}$.

解 $y' = \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$, 令 $y'=0$ 得 $x = \frac{1}{3}$. 因为

当 $x < 0$ 时, $y' > 0$,

当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 时, $y' > 0$,

当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x=0$ 时无极值; 当 $x = \frac{1}{3}$ 时有极大值

$$y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{27}} \approx 0.529;$$

当 $x=1$ 时有极小值 $y=0$.

1423. 函数

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

(n 为自然数), 其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续及 $\varphi(x_0) \neq 0$. 研究此函数在点 $x = x_0$ 的极值.

解 由于 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 点连续且 $\varphi(x_0) \neq 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的充分小邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内与 $\varphi(x_0)$

同号. 于是, $f(x)$ 的符号与 n 的奇偶性有关.

(1) 若 n 为奇数, 则经过 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的值变号, 所以在 $x=x_0$ 时没有极值.

(2) 若 n 为偶数, 则 $(x-x_0)^n \geq 0$ ($x \neq x_0$). 因而当 $\varphi(x_0) \geq 0$ 时, 则 $f(x) \geq f(x_0) = 0$

$$(0 < |x - x_0| < \delta),$$

所以, 当 $x=x_0$ 时有极小值 $f(x_0)=0$.

当 $\varphi(x_0) \leq 0$ 时, 则 $f(x) \leq f(x_0) = 0$

$$(0 < |x - x_0| < \delta),$$

所以, 当 $x=x_0$ 时有极大值 $f(x_0)=0$.

1424. 设:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)},$$

及 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点, 就是说

$$P_1(x_0) = 0, Q(x_0) \neq 0.$$

证明: $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'(x_0)$.

证 因为

$$f''(x) = \frac{P'_1(x)Q^2(x) - 2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^4(x)},$$

于是

$$f''(x_0) = \frac{P'_1(x_0)}{Q^2(x_0)}.$$

由于 $Q^2(x_0) \geq 0$, 所以有

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'(x_0).$$

1425. 可否断定下面的事实: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大

值, 则在此点某充分小邻域内, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧上升, 而右侧下降?

解 不能断定. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 2 & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

$$\text{则 } f(x) - f(0) = -x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \leq 0$$

$$(x \in (-\delta, \delta), x \neq 0).$$

所以在 $x=0$ 点有极大值 $f(0)=2$.

易知

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} - 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \quad (x \neq 0).$$

故在 $x=0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负, 故在 $x=0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$ 都是振荡的(时上升时下降).

1426. 已给函数

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ 当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

证明: 虽然

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 有极小值.

作出此函数的图形.

证 在 1225 题中已证 $f^{(n)}(0) = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$.

由于

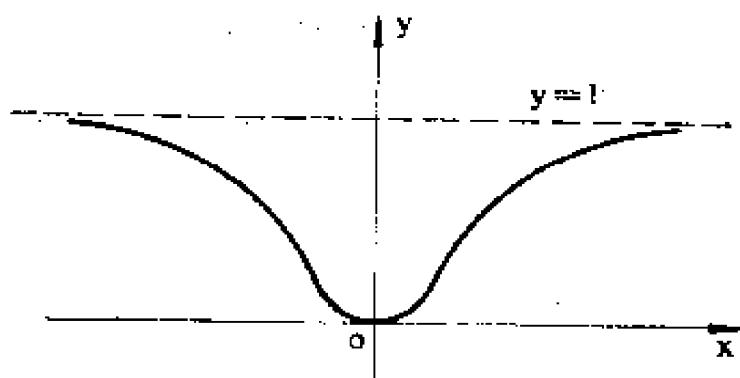


图 2.52

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x) = \frac{4-6x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

又过 $x=0$ 点 $f'(x)$ 从负变到正, 故 $f(0)=0$ 为极小值.

令 $f''(x)=0$ 解得拐点 $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$. 又由

$$f(x) = f(-x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

知, $f(x)$ 为偶函数, $y=1$ 为渐近线 (图 2.52).

1427. 研究下列函数的极值:

(a) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right)$ 及 $f(0) = 0$;

(b) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right)$ 及 $f(0) = 0$.

作出这些函数的图形.

解 由于 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{2}$, $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq \sqrt{2}$ 及 $e^{-\frac{1}{|x|}} >$

0, 所以对于 (a) 和 (6) 均有 $f(x) \geq f(0)$ ($x \neq 0$), 故当 $x=0$ 时均有极小值 $f(0)=0$. 对于 $x \neq 0$, (a) 和 (6) 均存在 $f'(x)$, 但易知 $f'(x)=0$ 无解, 因而无其它极值.

它们的图形分别如图 2.53 及图 2.54 所示.

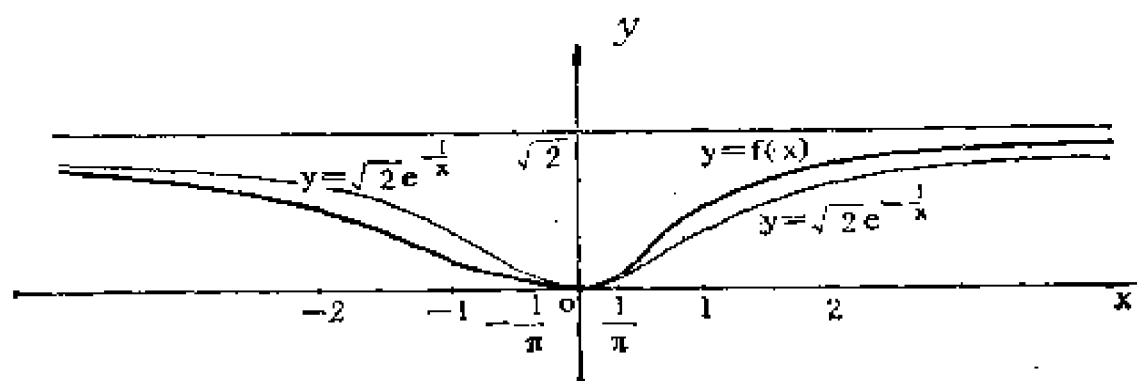


图 2.53

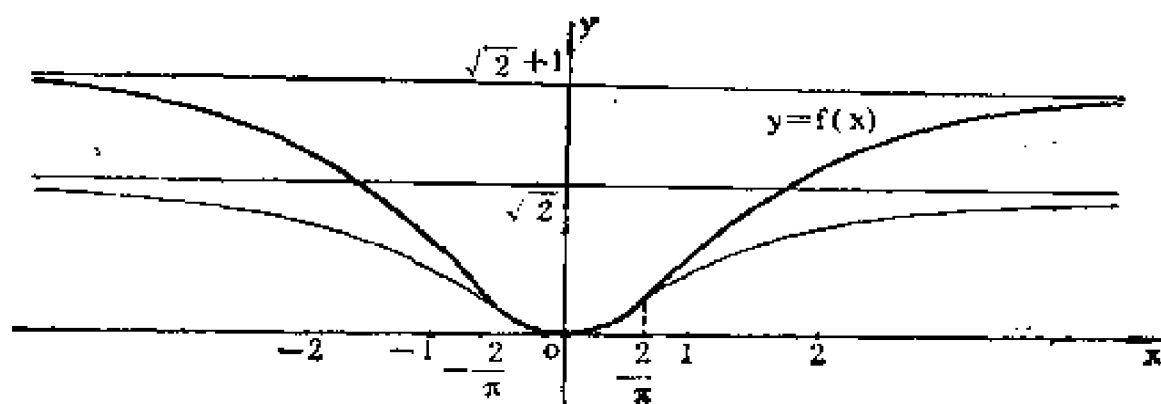


图 2.54

1428. 已给函数

$$f(x) = |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right) \text{ 当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

研究此函数于点 $x=0$ 处的极值, 并作出此函数的图形.

解 由于当 $x \neq 0$ 时, 恒有 $f(x) > f(0)$, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $f(0) = 0$, 其图形如图 2.55 所示, 它对称于 Oy 轴, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$.

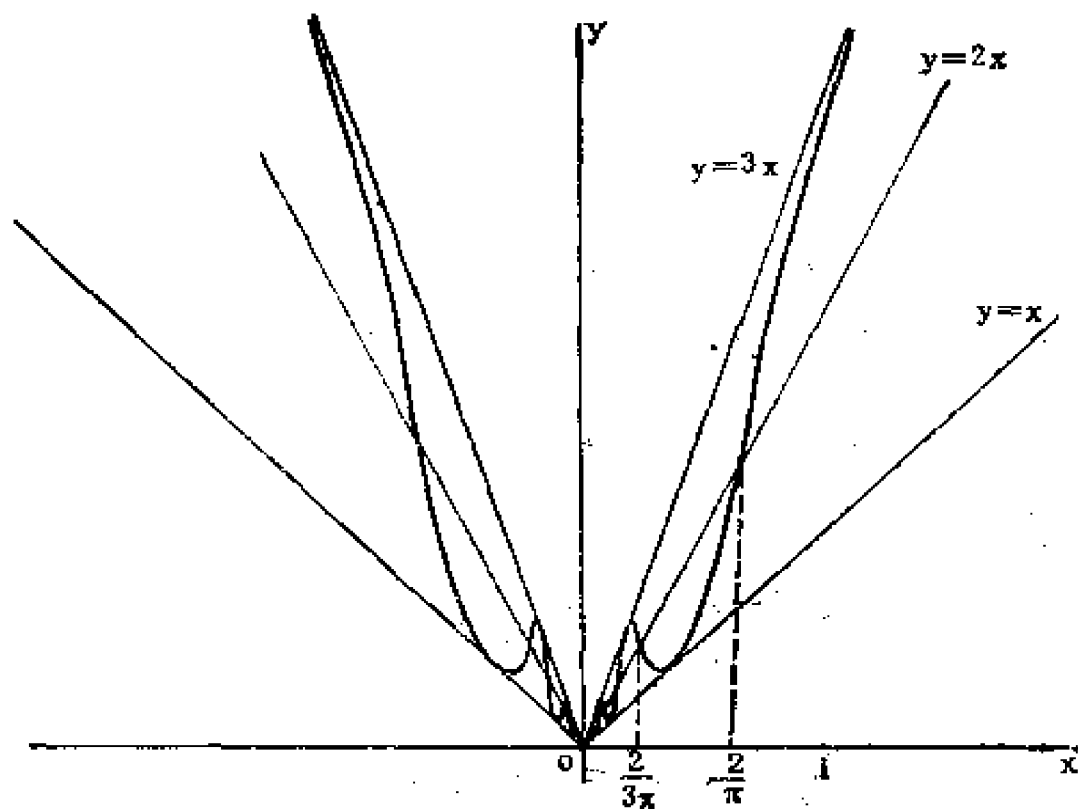


图 2.55

求下列函数的极值:

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

解 $y' = 3x^2 - 12x + 9$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 3 . 因为 $y'' = 6x - 12$, $y''(1) = -6 < 0$, $y''(3) = 6 > 0$, 所以,

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$;

当 $x = 3$ 时有极小值 $y = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 - 4$
 $= -4$.

1430. $y = 2x^2 - x^4$.

解 $y' = 4x - 4x^3$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$ 或 0 , 因为

$$y'' = 4 - 12x^2, \quad y''(-1) = -8 < 0,$$

$$y''(0) = 4 > 0, \quad y''(1) = -8 < 0,$$

所以,

当 $x = -1$ 时有极大值 $y = 1$;

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

1431. $y = x(x-1)^2(x-2)^3.$

解 $y' = (x-1)(x-2)^2(6x^2 - 10x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = 1, \quad 2 \quad \text{或} \quad \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

因为

$$\text{当 } x < \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \text{ 时, } y' < 0,$$

$$\text{当 } \frac{5 - \sqrt{13}}{6} < x < 1 \text{ 时, } y' > 0,$$

$$\text{当 } 1 < x < \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \text{ 时, } y' < 0,$$

$$\text{当 } \frac{5 + \sqrt{13}}{6} < x < 2 \text{ 时, } y' > 0,$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } y' > 0,$$

所以,

$$\text{当 } x = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \approx 0.23 \text{ 时有极小值 } y \approx -0.76;$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时有极大值 } y = 0;$$

当 $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \approx 1.43$ 时有极小值 $y \approx -0.05$;

当 $x = 2$ 时无极值.

1432. $y = x + \frac{1}{x}$.

解 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$,

当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$,

当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极大值 $y = -2$;

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 2$.

1433. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时, $y' < 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极小值 $y = -1$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

1434. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

解 $y' = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{7}{5}$. 因为

当 $-1 < x < \frac{7}{5}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > \frac{7}{5}$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = \frac{7}{5}$ 时有极小值 $y = -\frac{1}{24}$.

1435. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

解 $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为

当 $0 < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $1 < x < 2$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

其次, 由于函数 y 的值不为负数, 故当 $x = 0$ 及 $x = 2$ 时, 有边界的极小值 $y = 0$.

1436. $y = x\sqrt[3]{x-1}$.

解 $y' = \frac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{3}{4}$. 因为

当 $x < \frac{3}{4}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > \frac{3}{4}$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = \frac{3}{4}$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2} \approx -0.46$.

此外, 对于 $y' \rightarrow \infty$ 的点也可能有极值, 但在此题中, 当 x 经过 1 时, 导数不变号, 故当 $x=1$ 时无极值.

1437. $y = xe^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(1-x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x=1$. 因为

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$.

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x=1$ 时有极大值 $y = e^{-1} \approx 0.368$.

1438. $y = \sqrt{x} \ln x$.

解 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = e^{-2}$. 因为

当 $0 < x < e^{-2}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > e^{-2}$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = e^{-2} \approx 0.135$ 时有极小值 $y = -\frac{2}{e} \approx -0.736$.

又因当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$, 而

$$y = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \ln x = 0,$$

所以, 当 $x \rightarrow +0$ 时有边界的极大值 $y = 0$.

1439. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x=1$ 或 e^2 . 因为

当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $1 < x < e^2$ 时, $y' > 0$,

当 $e^2 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$,

所以,

当 $x=1$ 时有极小值 $y=0$;

当 $x=e^2 \approx 7.389$ 时有极大值 $y=\frac{4}{e^2} \approx 0.541$.

1440. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$.

解 $y' = -\sin x (1 + 2\cos x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = k\pi$ 或

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \text{ 因为}$$

$$y'' = -\cos x - 2\cos 2x,$$

$$y'' \Big|_{x=k\pi} = (-1)^{k+1} - 2 < 0,$$

$$y'' \Big|_{x=\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi} = \frac{1}{2} + 1 > 0.$$

所以,

当 $x = k\pi$ 时有极大值 $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$;

当 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{4}$.

1441. $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$.

解 当 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \dots)$ 时, $\sin x = 0$, 所以此时有极大值 $y = 10$;

当 $x = (k + \frac{1}{2})\pi (k=0, \pm 1, \dots)$ 时, $|\sin x| = 1$,

所以此时有极小值 $y=5$.

1442. $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$

解 $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x=1$. 因为

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$;

所以, 当 $x=1$ 时有极大值 $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.439$.

1443. $y = e^x \sin x.$

解 $y' = e^x(\sin x + \cos x)$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k=0, \pm 1, \dots).$$

因为

$$y'' = 2e^x \cos x,$$

$$y'' \Big|_{x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi} > 0$$

$$y'' \Big|_{x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi} < 0,$$

所以, 当 $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$;

当 $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极大值 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$.

1444. $y = |x| e^{-(x+1)}.$

解 当 $x < 0$ 时, $y = -x e^{x-1}$, $y' = -(x+1) e^{x-1}$.

令 $y'=0$ 得 $x=-1$. 因为

当 $x<-1$ 时, $y'>0$,

当 $-1<x<0$ 时, $y'<0$,

所以, 当 $x=-1$ 时有极大值 $y=e^{-2}\approx 0.135$.

又当 $0<x<1$ 时, 有

$$y=xe^{x-1}, \quad y'=(x+1)e^{x-1}>0,$$

所以, 当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$.

而当 $x>1$ 时, 有

$$y=xe^{1-x}, \quad y'=(1-x)e^{1-x}<0,$$

所以, 当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

求下列函数的最大值和最小值:

1445. $f(x)=2^x$, 在闭区间 $[-1, 5]$ 上.

解 由于 $f(x)=2^x$ 单调上升, 故最小值和最大值分别为

$$m=2^{-1}=\frac{1}{2} \text{ 及 } M=2^5=32.$$

1446. $f(x)=x^2-4x+6$, 在闭区间 $[-3, 10]$ 上.

解 $f'(x)=2x-4$, $f''(x)=2$,

令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$.

由于 $f''(2)=2>0$, 所以

当 $x=2$ 时有极小值 $f(2)=2$. 因为这是唯一的极小值, 因此也就是最小值, 即 $m=2$.

又由于 $f''(x)>0$, 曲线呈凹状, 所以在端点取得最大值, 从而,

$$M=\max\{f(-3), f(10)\}=66.$$

1447. $f(x)=|x^2-3x+2|$, 在闭区间 $[-10, 10]$ 上.

解 由于 $f(x) \geq 0$, 故对于在区间 $[-10, 10]$ 上能使 $f(x) = 0$ 的点取得最小值. 由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得 $x = 1, 2$. 即当 $x = 1, 2$ 时, 函数取得最小值

$$m = 0.$$

其次, $f'(x) = (2x - 3)\operatorname{sgn}(x^2 - 2x + 3)$,

当 $1 < x < \frac{3}{2}$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $\frac{3}{2} < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$,

所以, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4}$, 于是

$$M = \max \left\{ f\left(\frac{3}{2}\right), f(-10), f(10) \right\} = 132.$$

1448. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 在闭区间 $[0.01, 100]$ 上.

解 利用 1432 题结果知 $f(x)$ 当 $x = 1$ 时有极小值 $f(1) = 2$.

由于在此闭区间 $[0.01, 100]$ 上 $f(1)$ 为唯一的极小值, 因此也是最小值, 即

$$m = 2.$$

其次, 最大值

$$M = \max \{ f(0.01), f(100) \} = 100.01.$$

1449. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, 在闭区间 $[-1, 1]$ 上.

解 $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5 - 4x}} < 0$.

因此函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调下降, 所以, 最

小值和最大值分别为

$$m=f(1)=1, M=f(-1)=3.$$

求下列函数的下界(\inf)与上界(\sup):

1450. $f(x)=xe^{-0.01x}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$,
于是,

$$\inf \{f(x)\} = 0.$$

其次, 求极值判断得知, 当 $x=100$ 时, 函数 $f(x)$ 取极大值, 并且是唯一的极值, 即为最大值. 于是,

$$\sup \{f(x)\} = f(100) = \frac{100}{e} \approx 36.8.$$

1451. $f(x) = (1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})e^{-x}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 由1420题知, $f'(x) \leq 0$, 即 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 1$. 于是,

$$\inf \{f(x)\} = 0, \sup \{f(x)\} = 1.$$

1452. $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 于是,

$$\inf \{f(x)\} = 0.$$

容易验证, 当 $x = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时函数 $f(x)$ 有极大值, 并且只有一个极值, 因而就是最大值. 于是,

$$\begin{aligned} \sup \{f(x)\} &= f(\sqrt{\sqrt{2}-1}) \\ &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) \approx 1.2. \end{aligned}$$

1453. $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内.

解 可以求得, 函数的最小值和最大值分别为

$$m = f\left(\pm \sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067,$$

$$M = f(0) = 1.$$

于是,

$$\inf\{f(x)\} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067,$$

$$\sup\{f(x)\} = 1.$$

1454. 求函数 $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x < \xi < +\infty$ 内的下界与上界, 作出下列函数的图形:

$$m(x) = \inf_{x < \xi < +\infty} f(\xi) \text{ 及 } M(x) = \sup_{x < \xi < +\infty} f(\xi).$$

解 由于 $f(-3)$, $f(1)$ 分别是函数 $f(\xi)$ 的极小值和极大值, 又 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = 0$, 于是,

$$\text{当 } -\infty < x \leq -3 \text{ 时, } m(x) = f(-3) = \frac{1}{6},$$

$$\text{当 } -3 < x \leq -1 \text{ 时, } m(x) = \frac{1+x}{3+x^2},$$

$$\text{当 } -1 < x < +\infty \text{ 时, } m(x) = 0;$$

$$\text{当 } -\infty < x \leq 1 \text{ 时, } M(x) = f(1) = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } 1 < x < +\infty \text{ 时, } M(x) = \frac{1+x}{3+x^2}.$$

$m(x)$ 及 $M(x)$ 的图形分别如图 2.56 及图 2.57 所示.

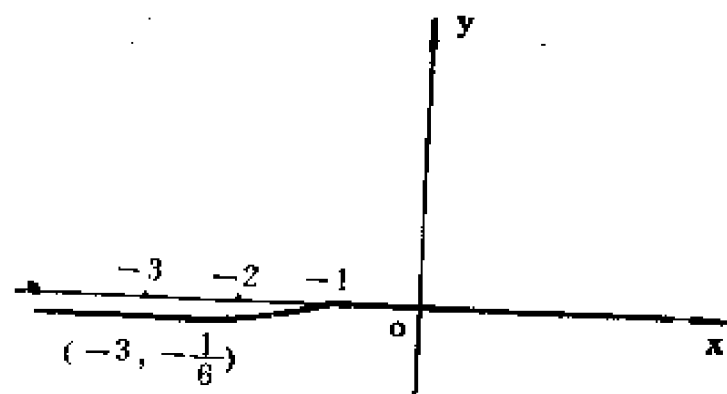


图 2.56

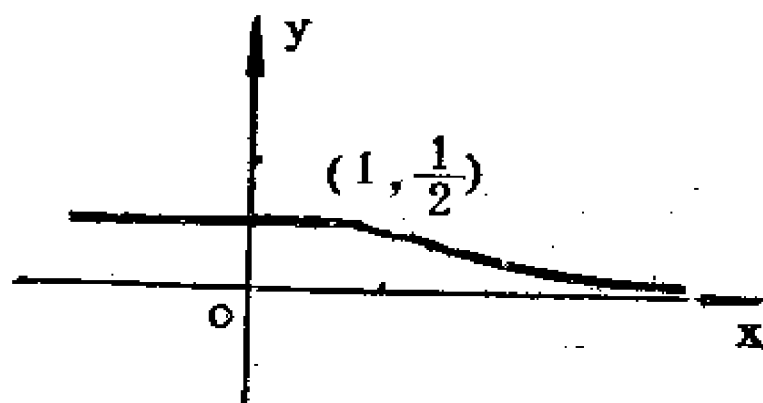


图 2.57

1455. 求以下各叙列的最大项:

(a) $\frac{n^{10}}{2^n} \quad (n=1, 2, \dots);$

(b) $\frac{\sqrt{n}}{n+10000} \quad (n=1, 2, \dots);$

(c) $\sqrt[n]{n} \quad (n=1, 2, \dots).$

解 (a) 经判断知当 $x = \frac{10}{\ln 2}$ 时, $f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$ 有极大值, 并且是唯一的极值. 从而, 最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^N-1}, \frac{N^{10}}{2^N}, \frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中 $N = \left\lfloor -\frac{10}{\ln 2} \right\rfloor = 14$. 于是

$$\begin{aligned}\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) &= \max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}}, \frac{14^{10}}{2^{14}}, \frac{15^{10}}{2^{15}}\right) = \frac{14^{10}}{2^{14}} \\ &\approx 1.77 \times 10^7.\end{aligned}$$

(6) 经判断知当 $x=10000$ 时 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+10000}$ 有

极大值, 并且是唯一的极值. 于是, 最大项

$$\max\left(\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right) = f(10000) = \frac{1}{200}.$$

(B) 经判断知当 $x=e$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ($x>0$) 有极大值, 并且是唯一的极值. 于是, 最大项

$$\max(\sqrt[n]{n}) = \max(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}) = \sqrt[3]{3} \approx 1.44.$$

1456. 证明下列不等式:

(a) 当 $|x| \leq 2$ 时, $|3x - x^3| \leq 2$;

(6) 若 $0 \leq x \leq 1$ 及 $p > 1$, 则 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$;

(B) 当 $m > 0$, $n > 0$ 及 $0 \leq x \leq a$ 时,

$$x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n};$$

(1) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a$ ($x > 0, a > 0, n > 1$);

$$(A) |a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

证 (a) 设 $f(x) = 3x - x^3$, 经判断知, 在 $|x| \leq 2$ 上, 其最小值和最大值分别为

$$m = f(-1) = -2, \quad M = f(1) = 2,$$

而边界函数值为 $f(-2) = 2, f(2) = -2$. 于是,

$$|3x - x^3| \leq 2.$$

(6) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 经判断知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$ 为 $0 \leq x \leq 1$ 上的唯一的极小值, 而边界值 $f(0) = f(1) = 1$, 所以

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq x + (1-x) = 1.$$

(B) 设 $f(x) = x^m(a-x)^n$, 经判断知 $f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 为 $0 \leq x \leq a$ 上的唯一的极大值, 所以 $x^m(a-x)^n \leq \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m$

$$\cdot \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}.$$

(r) 设 $f(x) = \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$, 经判断知 $f(a) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为

满足 $x > 0$ 的唯一的极小值, 而边界值 $f(+0) = f(+\infty) = 1$, 所以

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a} \leq 1.$$

由于 $x+a > 0$, 于是

$$\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n+a^n} \leq x+a.$$

$$(II) \quad a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \sin(x+\varphi),$$

其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 所以恒有

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2+b^2}.$$

1457. 求多项式

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间 $[-2, 1]$ 上“与零的差”, 就是求

$$E_p = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

解 $P'(x) = 2(x-1)(2x^2+2x-1).$

令 $P'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, 所以

$$E_p = \max \left\{ |P(-2)|, |P(1)|, \right.$$

$$\left. \left| P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \right|, \left| P\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \right| \right\}$$

$$= \left| P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \frac{9+6\sqrt{3}}{4} \approx 4.85.$$

1458. 应当选择怎样的系数 q , 使多项式

$$P(x) = x^2 + q$$

在闭区间 $[-1, 1]$ 上与零的差最小, 即

$$E_p = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min.$$

解 $P'(x) = 2x$, 令 $P'(x) = 0$ 得 $x = 0$, 所以

$$E, = \max \{ |P(0)|, |P(1)|, |P(-1)| \} \\ = \max \{ |q|, |1+q| \}.$$

当 $|q| = |1+q|$ 时, $E,$ 最小. 解之, 得

$$q = -\frac{1}{2}.$$

1459. 数

$$\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

称为函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上的绝对差.

求函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的绝对差.

解 由于

$$f(x) - g(x) = x^2 - x^3,$$

$$f'(x) - g'(x) = 2x - 3x^2,$$

从而令 $f'(x) - g'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $\frac{2}{3}$. 又因

$$f''(x) - g''(x) = 2 - 6x,$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) - g''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 4 = -2 < 0,$$

所以, 当 $x = \frac{2}{3}$ 时 $f(x) - g(x)$ 取极大值; 又由于当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) - g(x) \geq 0$, 所以绝对差

$$\Delta = f\left(\frac{2}{3}\right) - g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}.$$

1460. 于闭区间 $[x_1, x_2]$ 上用线性函数

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

近似地代替函数

$$f(x) = x^2,$$

使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对差 (参阅上题) 为最小, 并求此最小的绝对差.

解 由于

$$f(x) - g(x) = x^2 - [(x_1 + x_2)x + b],$$

$$f'(x) - g'(x) = 2x - (x_1 + x_2),$$

从而令 $f'(x) - g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. 又因

$$f''(x) - g''(x) = 2 > 0,$$

故当 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 时, $f(x) - g(x)$ 取极小值. 于是,

$$\begin{aligned} \Delta &= \max \left\{ \left| f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| f(x_1) - g(x_1) \right|, \left| f(x_2) - g(x_2) \right| \right\} \\ &= \max \left\{ \left| b + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right|, \left| b + x_1 x_2 \right| \right\}. \end{aligned}$$

要 Δ 为最小, 需

$$\left| b + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right| = \left| b + x_1 x_2 \right|.$$

解之得

$$b = -\frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2).$$

此时

$$g(x) = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2),$$

而最小的绝对差

$$\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2.$$

1461. 求函数

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$$

的极小值.

解 $y = 2|x|$ 及 $y = |1+x|$ 的图形如图 2.58 所示, 它们的交点是 $A(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 及 $B(1, 2)$. 从而

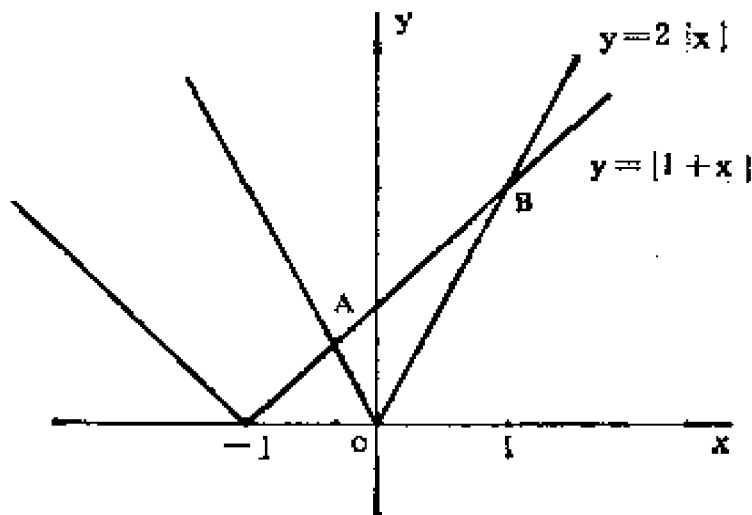


图 2.58

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leq x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leq x \leq 1, \\ -2x, & -\infty < x \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

确定下列各方程实根的数目，并定这些根所在的范围：

1462. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ ，则 $f(x)$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数，且有

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x = 1$ 或 3 。

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时，由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f'(x) > 0, f(1) = -6 < 0,$$

故在区间 $(-\infty, 1)$ 内方程无实根。

当 $x \in (1, 3)$ 时，由于

$$f'(x) < 0, f(3) = -10 < 0,$$

故在 $(1, 3)$ 内也无实根。

当 $x \in (3, +\infty)$ ，由于

$$f'(x) > 0, f(3) = -10 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故在 $(3, +\infty)$ 内方程有且仅有一实根。

1463. $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + h$ ，则

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x = -1$ 或 3 。由于

$$f(-1) = 5 + h, f(3) = -27 + h,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故当 $h < -5$ 时， $f(-1) < 0$ ， $f(3) < 0$ ，且

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 3),$$

$$f'(x) > 0, x \in (3, +\infty),$$

因此, 有且仅有一实根位于 $(3, +\infty)$ 内.

当 $-5 \leq h \leq 27$ 时, $f(-1) \geq 0$, $f(3) \leq 0$, 导数 $f'(x)$ 的符号变化同上, 于是, 有三个实根, 分别位于 $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ 及 $(3, +\infty)$ 内.

当 $h > 27$ 时, $f(3) > 0$, $f(-1) > 0$, 因此, 有且仅有一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

1464. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$

解 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$, 则

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \\ f(-1) = -31 < 0, \quad f(1) = -15 < 0,$$

并且

$$f'(x) < 0, \quad x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) > 0, \quad x \in (-1, +\infty),$$

故有两实根, 分别位于 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内.

1465. $x^5 - 5x = a.$

解 设 $f(x) = x^5 - 5x - a$, 则

$$f'(x) = 5x^4 - 5.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \\ f'(x) > 0, \quad x \in (-\infty, -1), \quad x \in (1, +\infty),$$

$$f'(x) < 0, \quad x \in (-1, 1),$$

$$f(-1) = 4 - a, \quad f(1) = -4 - a,$$

故当 $a \leq -4$ 时, $f(-1) \geq 0$, $f(1) \geq 0$. 因此, 有且仅

有一实根，位于 $(-\infty, -1)$ 内；当 $-4 \leq a \leq 4$ 时， $f(-1) \geq 0$ ， $f(1) \leq 0$ ，此时有三个实根，分别位于 $(-\infty, -1)$ ， $(-1, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内；当 $a > 4$ 时， $f(-1) \leq 0$ ， $f(1) \leq 0$ 。因此，有且仅有一实根位于 $(1, +\infty)$ 内。

1466. $\ln x = kx$.

解 当 $k=0$ 时，方程显然仅有一个根 $x=1$ 。因此，不妨设 $k \neq 0$ 。令 $f(x) = \ln x - kx$ ($x > 0$)，则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - k,$$

令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x = \frac{1}{k}$ 。由于

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

故曲线的图形始终呈凸状。

当 $x \in (0, \frac{1}{k})$ 时， $f'(x) > 0$ ；

当 $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$ 时， $f'(x) < 0$ 。

又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} - 1,$$

故当 $k > \frac{1}{e}$ 时， $f\left(\frac{1}{k}\right) < 0$ ，此时方程无根。

当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时， $f\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ ，

因此,方程有两个实根,分别位于 $(0, \frac{1}{k})$ 和 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 内.

当 $-\infty < k < 0$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, f(1) = -k > 0, f'(x) = \frac{1}{x} - k > 0,$$

故此时方程有且仅有一实根位于 $(0, 1)$ 内.

1467⁺. $e^x = ax^2$ ($a > 0$).

解 对于函数 $f(x) = e^x - ax^2$, 有 $f(0) = 1 > 0$; 又因 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 故总存在充分大的正数 x_0 , 使 $f(-x_0) < 0$. 由函数 $f(x)$ 的连续性得知在 $(-x_0, 0)$ 中, 从而在 $(-\infty, 0)$ 中至少有 $f(x) = 0$ 的一个实根. 而当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) = e^x - 2ax > 0$, 即函数严格单调上升. 因此, $f(x) = 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时只有唯一的根.

对于 $x > 0$ 的情况, 为求方程 $e^x = ax^2$ 的根, 只需求方程 $x = \ln a + 2 \ln x$ ($a > 0, x > 0$) 的根. 设

$$g(x) = x - \ln a - 2 \ln x,$$

则有

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}.$$

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 2$.

当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$,

所以, $g(2) = \ln \frac{e^2}{4a}$ 为极小值. 又因 $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, 因此,

当 $g(2) > 0$, 即 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 无根.

当 $g(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 有唯一的根.

当 $g(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 有二个根, 它们分别位于 $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 内.

综上所述, 方程 $e^x = ax^2$ 根的情况如下:

当 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时有唯一的根, 位于 $(-\infty, 0)$ 内;
当 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, 有两个根, 一根为 2, 一根位于 $(-\infty, 0)$ 内; 当 $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ 时有三个根, 分别位于 $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 内.

1468. 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $\sin^3 x \cdot \cos x = a$.

解 当 $a = 0$ 时, 方程显然有实根 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ 或 π . 因此, 不妨设 $a \neq 0$. 令 $f(x) = \sin^3 x \cos x - a$, 则

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a,$$

$$f(0) = f(\pi) = -a,$$

并且

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

当 $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 时, $f'(x) < 0$.

于是, 当 $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程有两个实根位于

$(0, \pi)$ 内; 当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程无实根.

1469. $\operatorname{ch} x = kx$.

解 设 $f(x) = \operatorname{ch} x - kx$, 则

$$f'(x) = \operatorname{sh} x - k.$$

令 $f'(x) = 0$, 得唯一驻点 x_0 , 它适合 $k = \operatorname{sh} x_0$.

由于 $f''(x) = \operatorname{ch} x > 0$, 故曲线图形呈凹状, 且在 $x = x_0$ 达最小值. 显然 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, 因此, 我们

只需考虑 $f(x_0)$ 的符号. 而

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - kx_0 = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0.$$

先设 $k > 0$, 于是 $x_0 > 0$. 引进辅助函数

$$g(x) = \operatorname{ch} x - x \operatorname{sh} x,$$

方程 $g(x) = 0$, 即 $\operatorname{cth} x = x$ 的(唯一)正根 $\xi \approx 1.2^*$.

由于

$$g'(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x = -x \operatorname{ch} x,$$

因此假如 $x > 0$, 则 $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调下降.

若 $k > \operatorname{sh} \xi$, 即 $\operatorname{sh} x_0 > \operatorname{sh} \xi$. 由于 $\operatorname{sh} x$ 是严格增大的, 故必 $x_0 > \xi$. 从而有

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0 < \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \xi = 0.$$

因此, 方程 $f(x) = 0$ 恰有两个实根. 由于

$$f(\xi) = \operatorname{ch} \xi - k\xi < \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \xi = 0,$$

$$f(0) = 1,$$

故两根分别位于 $(0, \xi)$ 及 $(\xi, +\infty)$ 内.

若 $k = \operatorname{sh} \xi$, 则 $\operatorname{sh} x_0 = \operatorname{sh} \xi$, 从而 $x_0 = \xi$. 因此, $f(x_0) = 0$, 此时方程 $f(x) = 0$ 恰有一实根 x_0 .

若 $0 < k < \operatorname{sh} \xi$, 则 $\operatorname{sh} x_0 < \operatorname{sh} \xi$, 从而 $x_0 < \xi$. 因此 $f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0 > \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \xi = 0$,

故方程 $f(x) = 0$ 无实根.

若 $k = 0$, 显然方程 $f(x) = 0$ 无根.

若 $k < 0$, 则可令 $x = -t$, 于是得

$$\operatorname{ch} t = -kt \quad (-k > 0).$$

通过按上述的方法讨论该方程的根, 易知当 $\operatorname{sh} \xi < -k$ 时, 原方程有两实根, 分别位于 $(-\xi, 0)$ 及 $(-\infty, -\xi)$ 内, 其中 ξ 满足 $\operatorname{cth} \xi = \xi$ (≈ 1.2). 而当 $-\operatorname{sh} \xi < k < 0$ 时, 方程无实根.

综上所述, 若 $|k| > \operatorname{sh} \xi \approx 1.50$, 方程有两实根 x_1 及 x_2 , 满足 $0 < |x_1| < \xi, \xi < |x_2| < +\infty$; 若 $|k| = \operatorname{sh} \xi$, 方程只有一个实根 ($k = \operatorname{sh} \xi$ 时, 根为 ξ , $k = -\operatorname{sh} \xi$ 时, 根为 $-\xi$). 若 $|k| < \operatorname{sh} \xi$, 则方程无实根.

*) 方程根的近似解法见本章§15.

1470. 在什么条件下方程

$$x^3 + px + q = 0$$

有: (a) 一个实根; (b) 三个实根.

在平面 (p, q) 上描绘对应的范围.

解 设 $f(x) = x^3 + px + q$, 则 $f'(x) = 3x^2 + p$.

若 $p \geq 0$, 则 $f'(x) \geq 0$ ($x \neq 0$), 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$

上是严格增大的,并且显然 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 故 $f(x)=0$ 有唯一实根.

若 $p < 0$. 令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$. 在 $(-\infty, x_2]$ 和 $[x_1, +\infty)$ 上 $f(x)$ 严格增大, 在 $[x_2, x_1]$ 上 $f(x)$ 严格减小.

因此, 若 $f(x_1)f(x_2) \geq 0$, 则方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根. 若 $f(x_2) > 0, f(x_1) < 0$, 则方程 $f(x)=0$ 恰有三个实根.

由于

$$f(x_1) = -\frac{p}{3} \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} + p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} + q,$$

$$f(x_2) = \frac{p}{3} \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} - p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}} + q,$$

故 $f(x_1)f(x_2) \geq 0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0,$$

此即方程仅有一实根的条件 (前面 $p \geq 0$ 的情形可合并到此条件中去).

而 $f(x_1) < 0$ 及 $f(x_2) > 0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

此即方程有三实根的条件.

如图2.59所示,
曲线

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

的左右上方是方程仅有一实根的 (p, q) 域, 以阴影表之; 而曲线的下方则是方程有三实根的 (p, q) 域, 以不具阴影表之.

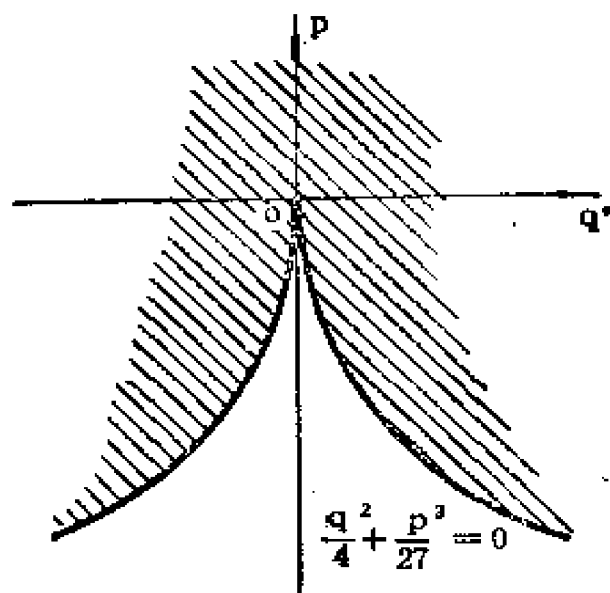


图 2.59

§12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y=f(x)$ 的图形, 必须: (1) 确定此函数的存在域; 并研究函数在其存在域之边界上各点之性质; (2) 查明图形的对称性和周期性; (3) 求出函数的不连续点及连续的区间; (4) 确定函数的零值点及同号区间; (5) 求出极值点及查明函数上升和下降的区间; (6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间; (7) 若有渐近线存在则求出渐近线; (8) 指出函数图形的各种特性.

作出下列函数的图形:

1471. $y=3x-x^3$.

解 $y'=3-3x^2$, 令 $y'=0$ 得 $x=-1$ 或 1 .

$y''=-6x$, 令 $y''=0$ 得 $x=0$.

列表

x		-1		0		1	
y'	-	0	+	+	+	0	-
y''	+	+	+	0	-	-	-
y	\searrow	极小点	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow

当 $x = -1$ 时,

$$y = -2;$$

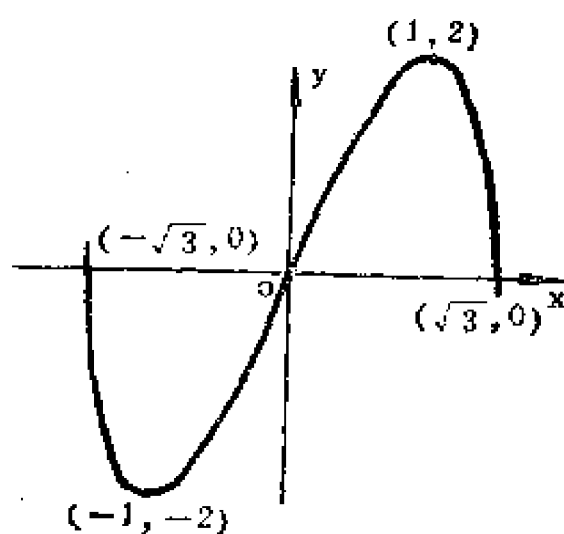
$$x = 0, \pm\sqrt{3}$$

时, $y = 0$;

$$x = 1 \text{ 时, } y = 2.$$

图形对称于原点

如图 2.60 所示.



1472. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}.$

解 以 $-x$ 替代 x , y

图 2.60

值不变, 故图形对称于 Oy 轴.

$$\text{零点处: } x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1.65.$$

$$y' = 2x - 2x^3, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0, \text{ 或 } \pm 1.$$

$$y'' = 2 - 6x^2, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

列表

x		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
y'	-	0	+	+	+	0	-
y''	+	+	+	0	-	-	-
y	\searrow	极小点	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow

当 $x=0$ 时, $y=1$;

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 时, } y = \frac{23}{18};$$

$$x=1 \text{ 时, } y = \frac{3}{2}$$

(图 2.61).

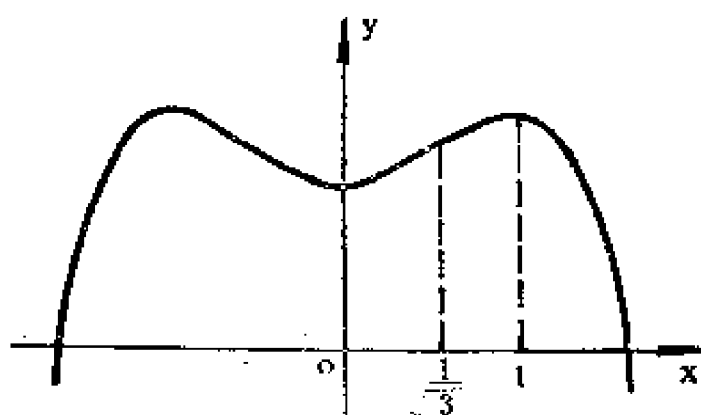


图 2.61

1473. $y = (x+1) \cdot (x-2)^2.$

解 $y' = 3x(x-2)$, 令 $y' = 0$ 得 $x=0$ 或 2 ;

$y'' = 6x-6$, 令 $y'' = 0$ 得 $x=1$.

列表

x		0		1		2	
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x=0$ 时, $y=4$;

$x=1$ 时, $y=2$;

$x=2, -1$ 时, $y=0$

(图 2.62).

1474. $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}.$

解 显见图形对称于 Oy 轴.

零点处: $x = \pm \sqrt{2}.$

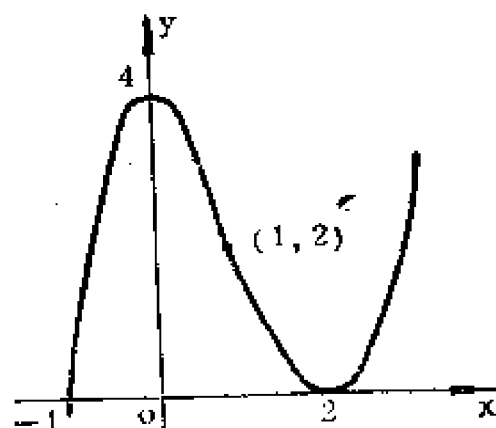


图 2.62

$$y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $\pm\sqrt{2+\sqrt{5}} \approx \pm 2.06$.

$$y'' = -\frac{2(3x^8 - 20x^6 - 12x^4 + 12x^2 + 1)}{(1 + x^4)^3},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 2.67$ 或 ± 0.77 . 经判别知它们为拐点, 又因

$$y'' \Big|_{x=0} = -2 < 0, \text{ 故有极大值 } y = 2;$$

$$y'' \Big|_{x = \pm \sqrt{2+\sqrt{5}}} > 0, \text{ 故有极小值 } y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\approx -0.12.$$

渐近线为 $y = 0$. 事实上, 它的斜率和截距分别为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{x(1 + x^4)} = 0, \text{ 它在 } y \text{ 轴上的截距为}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{1 + x^4} = 0.$$

如图 2.63 所示.

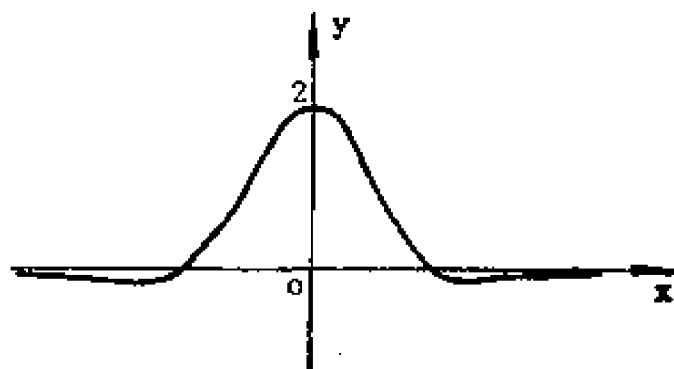


图 2.63

$$1475. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

解 零点处: $x = -1$ 及 $x = 1$.

渐近线: $x = 2$, $x = 3$ 和 $y = 1$.

$$y' = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2}, \quad y'' = \frac{2(5x^3 - 21x^2 + 15x + 17)}{(x^2 - 5x + 6)^3}.$$

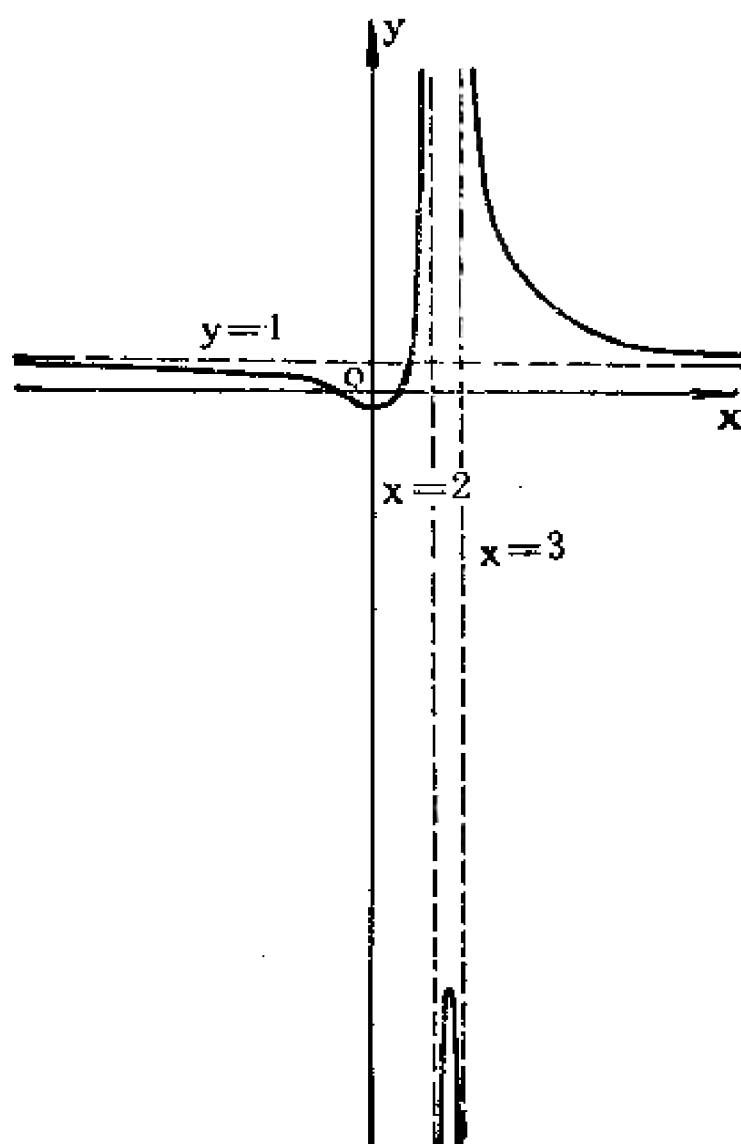


图 2.64

令 $y' = 0$ 得 $x \approx 0.42$, $x \approx 2.38$. 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.586$.

经判别知: $y|_{x \approx 0.42} \approx -0.20$ 为极小值,

$y|_{x \approx 2.38} \approx -19.80$ 为极大值;

$x \approx -0.586$,

$y \approx -0.07$ 为拐点.

由于

$$y = 1 - \frac{3}{x-2} + \frac{8}{x-3},$$

故可用图形相加法作出函数的图形 (图 2.64).

1476. $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}.$

解 零点处: $x=0$. 不连续点: $x=-1$ 及 $x=1$.

渐近线: $y=0$. $x=-1$ 和 $x=1$.

$$y' = \frac{2x^2 + x + 1}{(1+x)^2(1-x)^3},$$

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 5x + 1)}{(1+x)^3(1-x)^4},$$

$y'=0$ 无实根, 无极值点. 令 $y''=0$ 得 $x \approx -0.22$, 经判别知它为拐点, 此时 $y = -0.20$.

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降 (图 2.65)

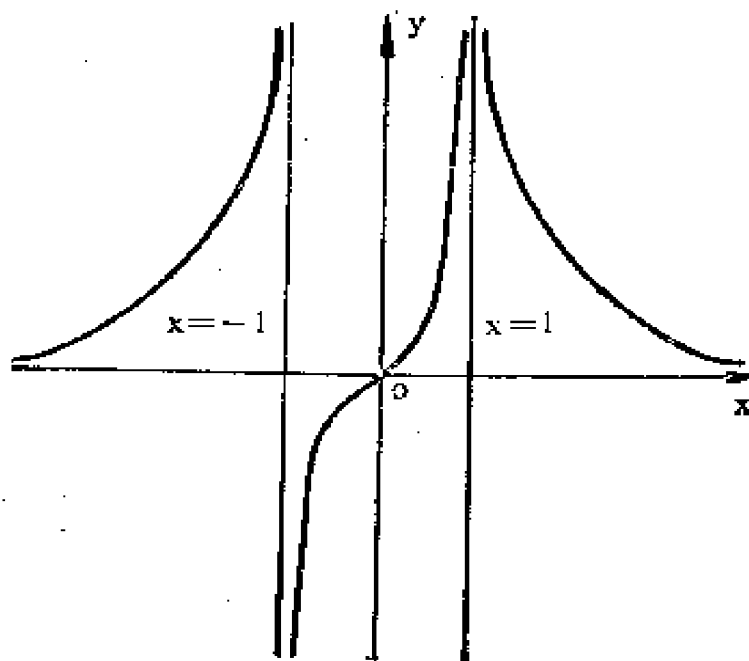


图 2.65

$$1477. \quad y = \frac{x^4}{(1+x)^3}.$$

解 零点处: $x=0$. 不连续点: $x=-1$.

斜渐近线: $y=x-3$, 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3.$$

垂直渐近线: $x=-1$.

$$y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}.$$

令 $y'=0$, 得 $x=0$, 或 $x=-4$.

$$y'' = -\frac{12x^2}{(1+x)^5}.$$

当 $x < -1$ 时, $y'' < 0$, 图形呈凸状;

当 $x > -1$ 时, $y'' > 0$, 图形呈凹状;

$$\text{又 } y'' \Big|_{x=-4} < 0,$$

故当 $x=-4$ 时有极大值

$$y = -9\frac{13}{27};$$

由于 y' 经过 $x=0$ 从负变到正, 故当 $x=0$ 时取得极小值 $y=0$ (图2.66)

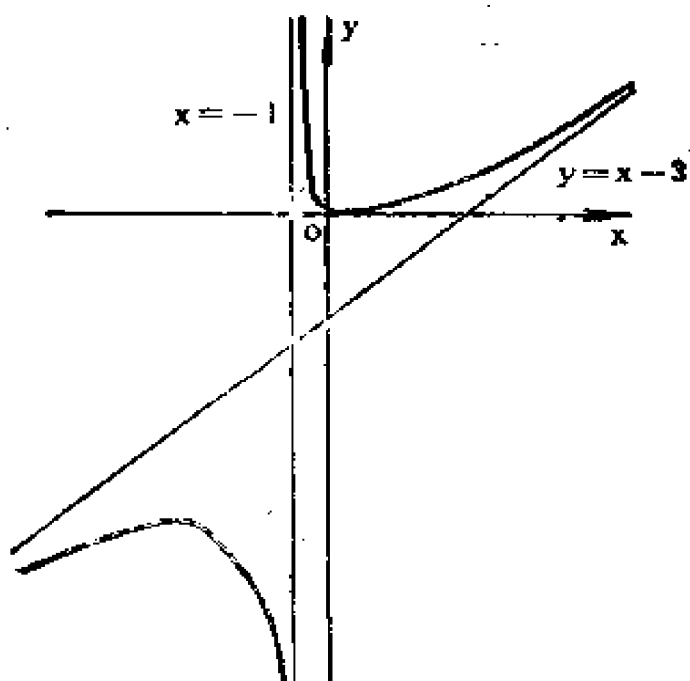


图 2.66

1478. $y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^3.$

解 零点处: $x = -1.$

垂直渐近线: $x = 1;$ 又

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 1,$$

故还有水平渐近线为 $y = 1.$

$$y' = -\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -1;$$

$$y'' = -\frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x = -1 \text{ 或 } -4.$$

列表

x		-4		-1		1	
y'	-	-	-	0	+	∞	-
y''	-	0	+	0	+	∞	+
y	\searrow	拐点	\searrow	极小点	\nearrow	不连续点	\searrow

当 $x = -4$ 时,

$$y = \frac{81}{625};$$

$x = -1$ 时,

$$y = 0;$$

$x = 0$ 时,

$$y = 1$$

(图2.67).

1479. $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}.$

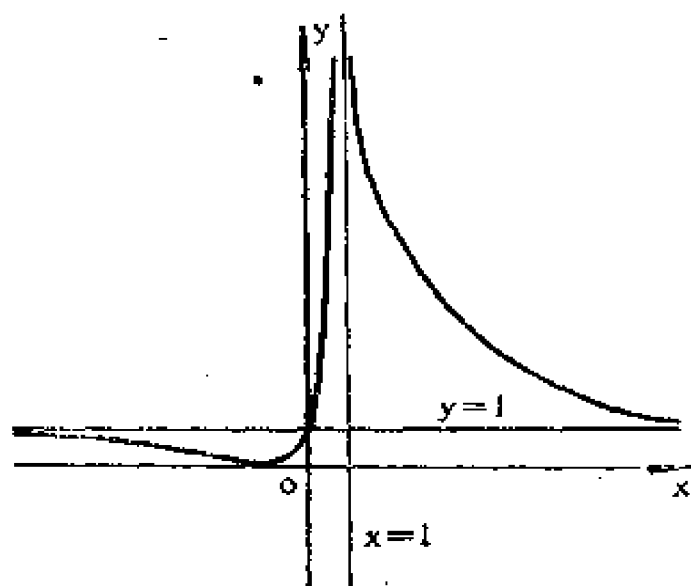


图 2.67

解 零点处: $x=0$ 及 $x=1$.

垂直渐近线: $x=-1$;

斜渐近线: $y=x-3$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3.$$

$$y' = \frac{x(x^2 + 3x - 2)}{(x+1)^3}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

$$y'' = \frac{10x - 2}{(x+1)^4}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{5}.$$

列表

x		$-\frac{\sqrt{17}+3}{2}$		-1		0		$\frac{1}{5}$		$\frac{\sqrt{17}-3}{2}$	
y'	+	0	-	∞	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	∞	-	-	-	0	+	+	+
y	\nearrow	极大点	\searrow	不连续点	\nearrow	极大点	\searrow	拐点	\searrow	极小点	\nearrow

当 $x = -\frac{\sqrt{17}+3}{2} \approx -3.56$ 时, 有极大值

$$y = -\frac{34\sqrt{17}+142}{32} \approx -8.82;$$

当 $x = 0$ 时, 有极大值 $y = 0$;

当 $x = \frac{\sqrt{17}-3}{2} \approx 0.56$ 时, 有极小值

$$y = \frac{34\sqrt{17}-142}{32} \approx -0.06;$$

当 $x = \frac{1}{5}$ 时, $y = -\frac{1}{45}$ (图2.68).

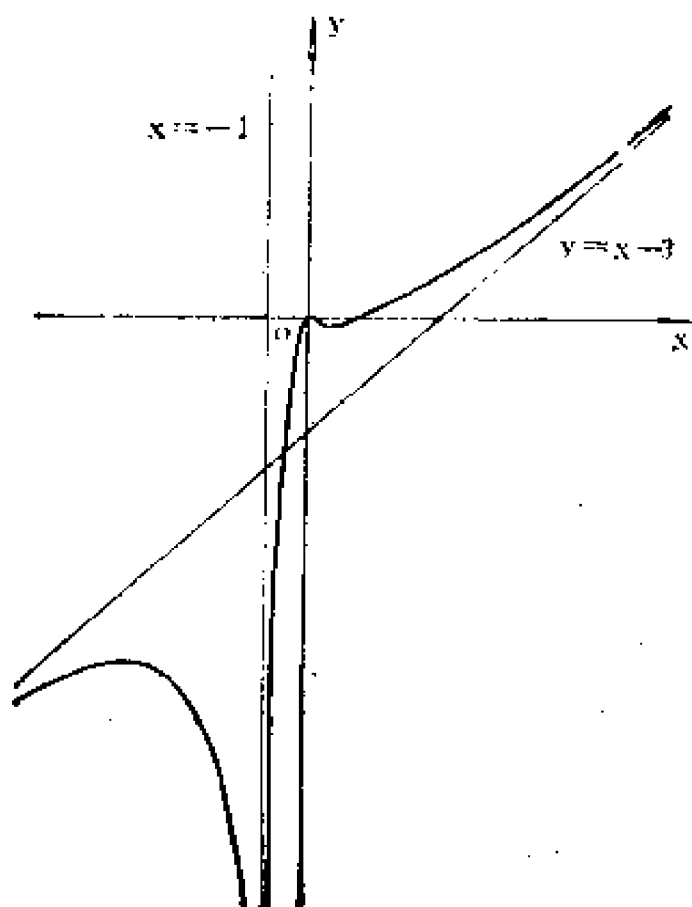


图 2.68

1480. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}.$

解 零点处: $x=0$. 间断点: $x=-1$ 及 $x=1$.

渐近线: $x=-1$, $x=1$ 及 $y=0$.

以 $-x$ 替代 x , y 的绝对值不变, 符号改变, 故图形关于原点对称.

$$y' = \frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}, \text{ 令 } y'=0, \text{ 无实根.}$$

$$y'' = \frac{12x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}, \text{ 令 } y''=0, \text{ 得 } x=0.$$

经判别知: 无极值, $x=0$ 为拐点 (图2.69).

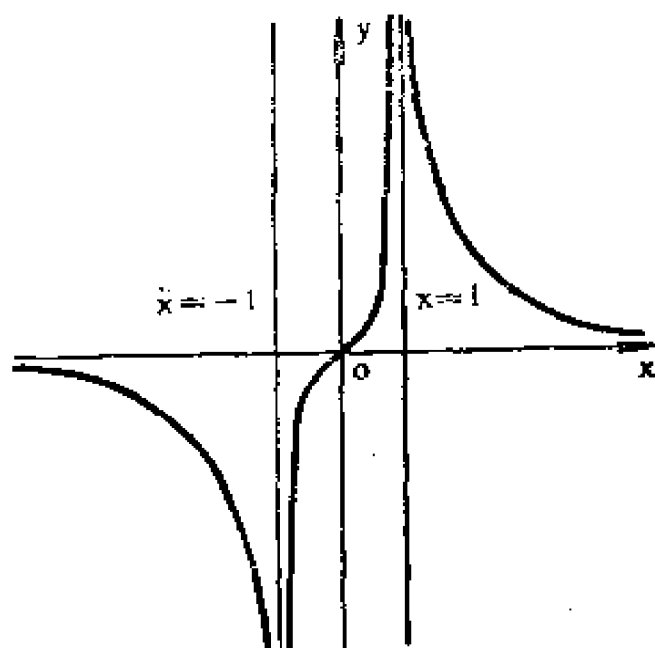


图 2.69

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	\searrow	间断点	\nearrow	拐点	\nearrow	间断点	\searrow

1481. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$

解 零点处: $x = -1$, 间断点: $x = 1$.

垂直渐近线: $x = 1$;

斜渐近线: $y = x + 5$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 5.$$

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, \quad \text{令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -1 \text{ 或 } 5.$$

$$y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}, \text{ 令 } y''=0 \text{ 得 } x=-1.$$

列表

x		-1		1		5	
y'	+	0	+	∞	-	0	+
y''	-	0	+	∞	+	+	+
y	\nearrow	拐点	\nearrow	间断点	\searrow	极小点	\nearrow

当 $x=-1$ 时, $y=0$;

当 $x=5$ 时, $y=13\frac{1}{2}$ (图 2.70).

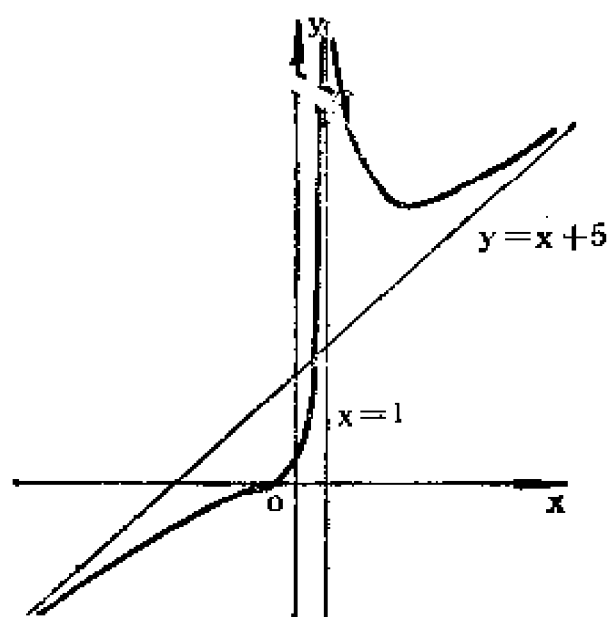


图 2.70

1482. $y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}.$

解 垂直渐近线: $x=-1$;

斜渐近线: $y=x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{x^6 + 4x^3 - 24x^2}{(x^3 + 1)^2},$$

$$y'' = \frac{-6x^5 + 96x^4 + 12x^2 - 48x}{(x^3 + 1)^3},$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 0, 2$ 及 $x \approx -2.4$.

$y'' \Big|_{x=2} > 0$, 故当 $x = 2$ 时有极小值 $y = 2\frac{2}{3}$;

$y'' \Big|_{x \approx -2.4} < 0$; 故

当 $x \approx -2.4$ 时有极大值 $y \approx -3.2$.

经判别知: 当 $x = 0, 0.752, 16.000$ 时有拐点. 渐近线 $y = x$ 与曲线交于点 $(8, 8)$, 如图 2.71 所示.

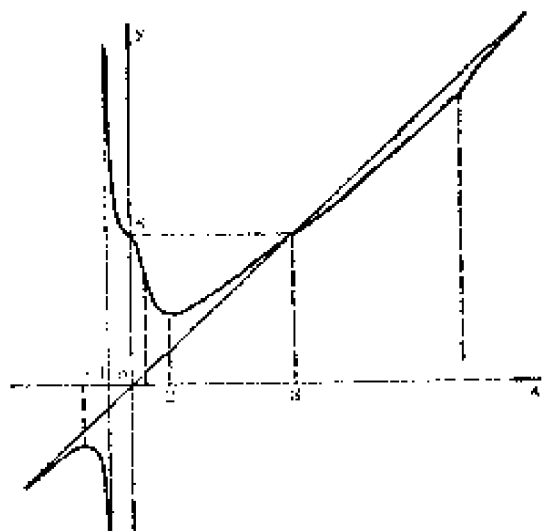


图 2.71

$$1483. \quad y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

解 图形对于 Oy 轴对称.

$$\text{零点处: } x = \pm \frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79.$$

$$y' = \frac{4(3x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x^2)^2},$$

$y' = 0$ 无实根, 无极值点.

$$y'' = \frac{4(24x^6 - 42x^4 + 45x^2 - 15)}{3x^4(1-x^2)^3},$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$, 经判别, 此为拐

点, 相应纵坐标 $y = -2\frac{2}{3}$.

渐近线: $x=0$, $x=-1$, $x=1$ 和 $y=0$.

当 $x > 0$ 时, y'

> 0 , 曲线上升.

当 $0 < x < 0.71$ 时, $y'' < 0$, 图形呈凸状.

当 $0.71 < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 图形呈凹状.

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 图形呈凸状.

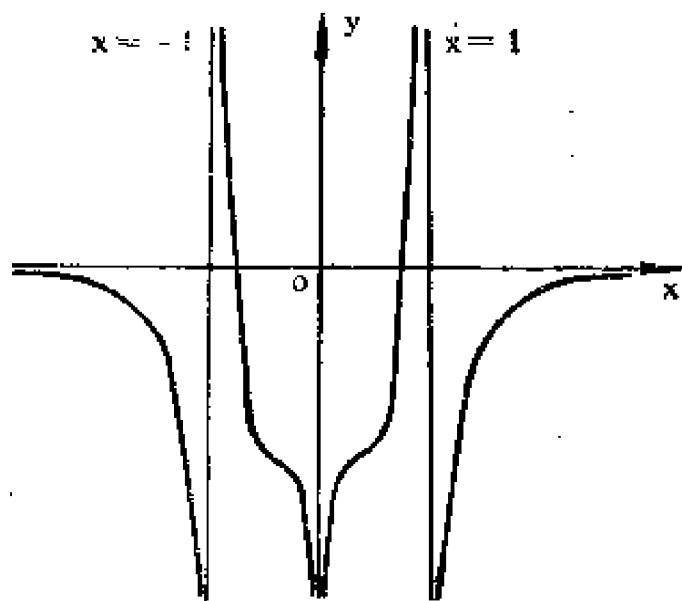


图 2.72

图形如图 2.72 所示.

1484. $y = (x-3)\sqrt{x}$.

解 存在域: $0 \leq x < +\infty$.

零点处: $x=0$ 和 $x=3$.

$$y' = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x=1;$$

$$y'' = \frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0 \quad (0 < x < +\infty),$$

所以图形始终是凹的。

由于 $y'' > 0$, 故当 $x=1$ 时有极小值 $y=-2$;
当 $x=0$ 时, 由 $\lim_{x \rightarrow 0+} y' = -\infty$ 知, 曲线在 x

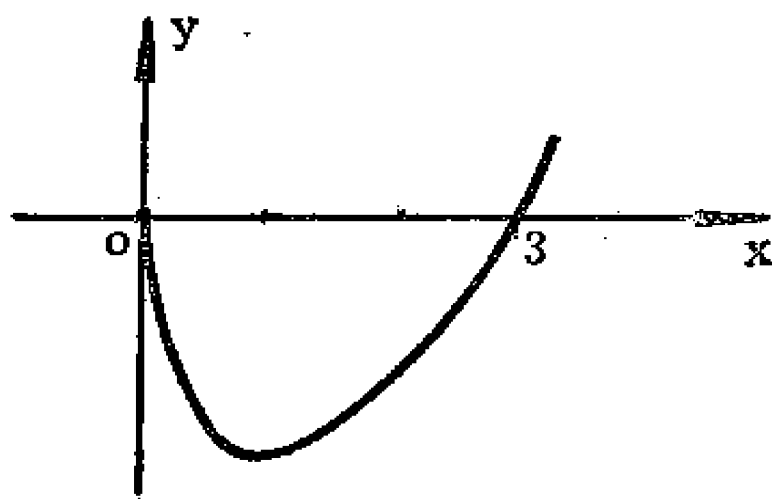


图 2.73

$= 0$ 点与 y 轴相切, 易见它有边界极大值 $y=0$ 。

图形如图 2.73 所示。

1485. $y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}.$

解 存在域: 需 $8 - x^2 \geq 0$, 即 $|x| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.83$.

零点处: $x=0$ 和 $x = \pm 2\sqrt{2}$.

图形关于坐标原点及坐标轴对称。

下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x=2.$$

$$y'' = \frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 2\sqrt{3} \text{ 或 } x = 0.$$

然而点 $x = 2\sqrt{3}$ 不在存在域内，对于 $x = 0$ 来说，如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一支曲线的话，则也可理介为拐点，同样由第四象限到第二象限的那个分支也有同样情况，故曲线呈双纽状。

当 $0 < x < 2$ 时， $y > 0$ ，

当 $2 < x < 2\sqrt{2}$ 时， $y' < 0$ ，故当 $x = 2$ 时，有极大值 $y = 4$ 。当 $x = 2\sqrt{2}$ 及 $x = 0$ 时，显然有极小值 $y = 0$ 。

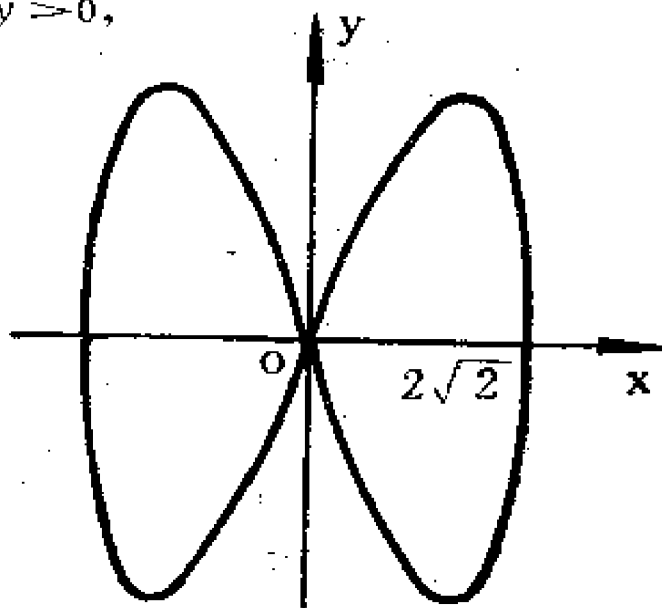


图 2.74

前者是边界的极小值，而且曲线在 $x = 2\sqrt{2}$ 处以 $x = 2\sqrt{2}$ 为垂直切线。图形如图 2.74 所示。

1486. $y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 。

解 存在域： $1 \leq x \leq 2$ 及 $3 \leq x < +\infty$ 。

零点处： $x = 1$ ， $x = 2$ 和 $x = 3$ 。

图形关于 Ox 轴对称。下面就第一象限讨论之：

$$y' = \frac{3x^2 - 12x + 11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得}$$

$$x = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \approx 1.42 \text{ 经判别此时有极大值 } |y| = \frac{1}{3}$$

$$\cdot \sqrt{12} \approx 0.62.$$

令 $y'' = 0$ 解得 $x \approx 3.468$ ，经判别是拐点。

当 $x > 3$ 时,
 $y' > 0$, 曲线上升.

当 $x = 1$,
 2 和 3 时有边界的极小值 $y = 0$
 且 $y' = \infty$ (图
 2.75).

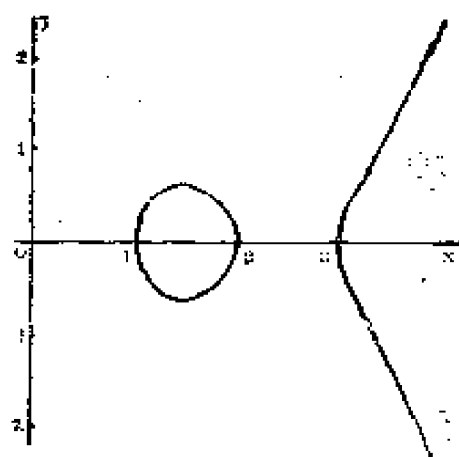


图 2.75

1487. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

解 零点处: $x = -1$ 和 $x = 1$. 又当 $x = 0$ 时, $y = 1$.

渐近线: $y = x - \frac{1}{3}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -\frac{1}{3}.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2}}, \quad \text{令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = \frac{-8}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}, \quad \text{当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y'' = \infty.$$

列表

x		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
y'	+	∞	+	0	-	∞	+
y''	+	∞	-	-	-	∞	-
y	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow	极小点	\nearrow

当 $x = -\frac{1}{3}$ 时,

有极大值 $y \approx 1.06$;

当 $x = 1$ 时, 有极小值 $y = 0$.

图形如图 2.76 所示

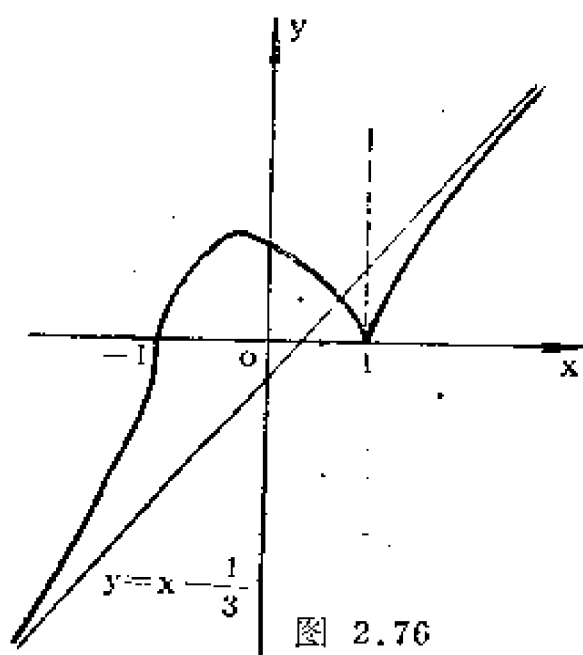


图 2.76

1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}.$$

当 x 经过 $x = 0$ 时, y' 由负变正, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $y = -1$, 且 $y'_{x=0^-} = -\infty$, $y'_{x=0^+} = +\infty$, 又当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$. 同时, $y' = 0$ 和 $y = 0$ 均无实根, 故知图形是向下凹的, 且以 $y = 0$ 为渐近线 (图 2.77).

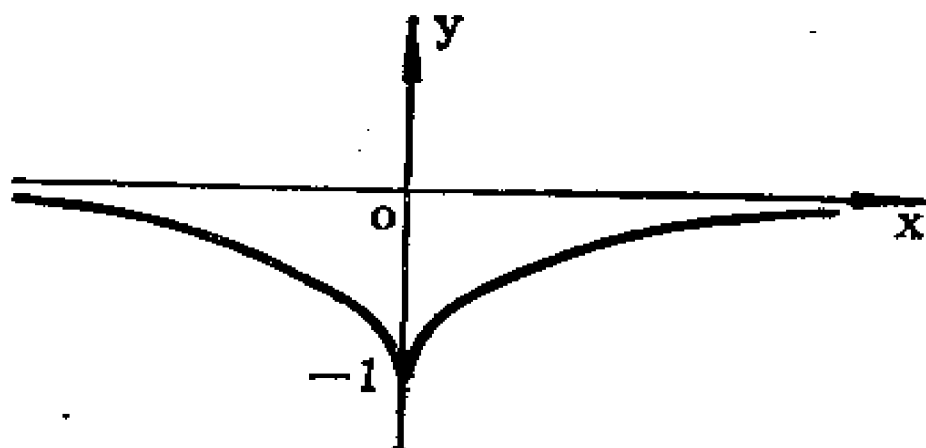


图 2.77

1489. $y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

解 以 $-x$ 替代 x , y 变成 $-y$, 故图形关于坐标原点对称.

渐近线: $y = 0$.

零点处: $x = 0$.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}} - (x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}}, \text{ 当 } x = \pm 2 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x+2)^{\frac{4}{3}} - (x-2)^{\frac{4}{3}}}{(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 0.$$

列表

x		-2		0		2	
y'	-	∞	+	+	+	∞	..
y''	-	∞	-	0	+	∞	+
y	\searrow	最小点	\nearrow	拐点	\nearrow	最大点	\searrow

当 $x = -2$ 时, 有
最小值 $y = -\sqrt[3]{16}$;

当 $x = 2$ 时, 有最
大值 $y = \sqrt[3]{16}$.

图形如图 2.78 所
示.

1490. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

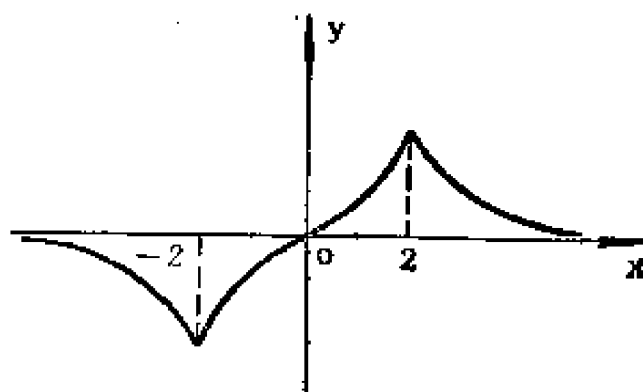


图 2.78

$$y' = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \right], \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0;$$

当 $x = \pm 1$ 时, $y' = \infty$.

$$y'' = -\frac{2}{9} \left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{5}{2}}} \right] < 0,$$

图形始终呈凸状.

当 $x = \pm 1$ 时, 取得最小值 $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$.

当 $x = 0$ 时, 有极大值 $y = 2$.

图形如图 2.79 所示.

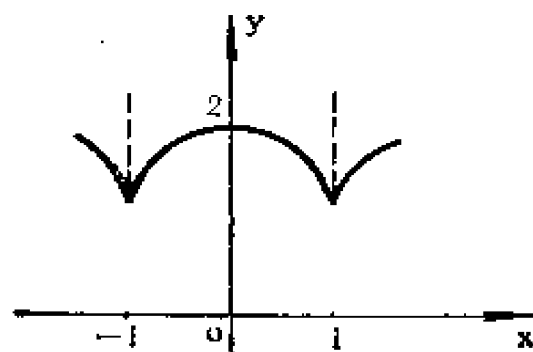


图 2.79

1491. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

间断点: $x = \pm 1$.

$$y' = \frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \pm \sqrt{3}. \text{ 当}$$

$x = \pm 1$ 时, $y' = \infty$.

$$y'' = -\frac{2x(x^2-9)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \pm 3.$$

列表

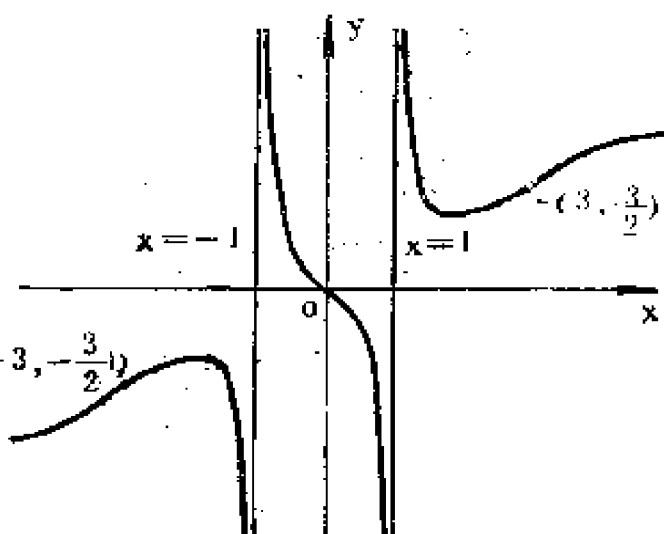
x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	+	+	+	0	-	∞	-	-	-	∞	-	0	+	+	+
y''	+	0	-	-	-	∞	+	0	-	∞	+	+	+	0	-
y	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow	间断点	\searrow	拐点	\searrow	间断点	\searrow	极小点	\nearrow	拐点	\nearrow

渐近线: $x =$
 $-1, x = 1.$

当 $x = \pm \sqrt{3}$
 时, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$

$\approx \pm 1.38;$

当 $x = \pm 3$ 时,
 $y = \pm 1 \frac{1}{2}.$



图形如图 2.

图 2.80

80所示.

1492. $y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}.$

解 存在域: $|x| \geq 1$ 及孤立点 $x = 0$. 图形关于 Oy 轴
 对称, 且位于 Ox 轴的上方. 渐近线: $y = \pm \frac{x}{2}.$

$$y' = \frac{2x^5 - 3x^3 + 2x}{(2x^2 - 1)^2 \sqrt{x^2 - 1}}, \quad y'' = \frac{1}{(2x^2 - 1)^3 (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cdot (-6x^4 + 3x^2$$

$$+ 2). \text{ 当 } x > 1$$

时, $y > 0,$

$y'' < 0,$ 故曲

线上升, 图形

呈凸状.

又当 $x =$

± 1 时, 有边

界的极小点

$y = 0$ (图 2.81).

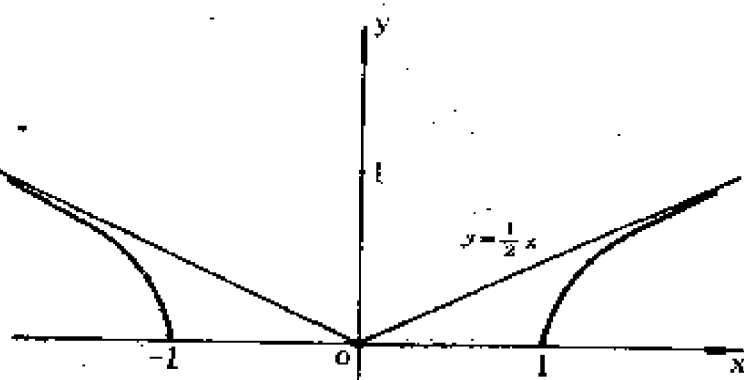


图 2.81

$$1493. \quad y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

解 存在域: $x > 0$.

渐近线: $x = 0$ 及 $y = x + \frac{3}{2}$.

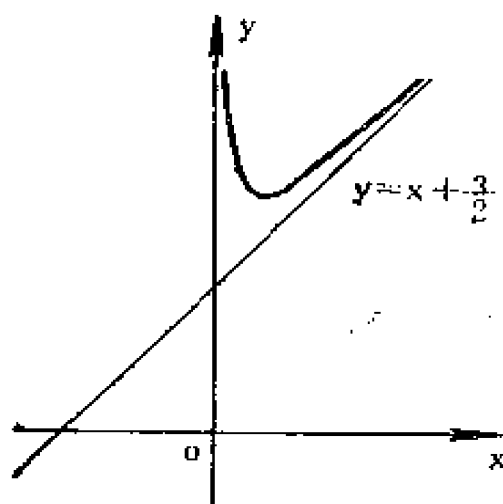
$$y' = \frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{2}.$$

$$y'' = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

故图形是凹的.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 有极小值

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.60.$$



图形如图2.82所示.

图 2.82

$$1494. \quad y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}.$$

解 存在域: $x \geq 0$ 及 $x < -3$.

$$\text{零点处: } x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx 4.30.$$

斜渐近线: $y = \frac{5}{2} - 2x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -2.$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

水平渐近线: $y = -\frac{1}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x - 1} \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow -3} y = \infty$,
故垂直渐近线为
 $x = -3$.

$$\begin{aligned}
 y' &= -1 + \\
 &\frac{\sqrt{x(2x+9)}}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -4$;

$$y'' = \frac{27}{4(x+3)^2 \sqrt{x(x+3)}}$$

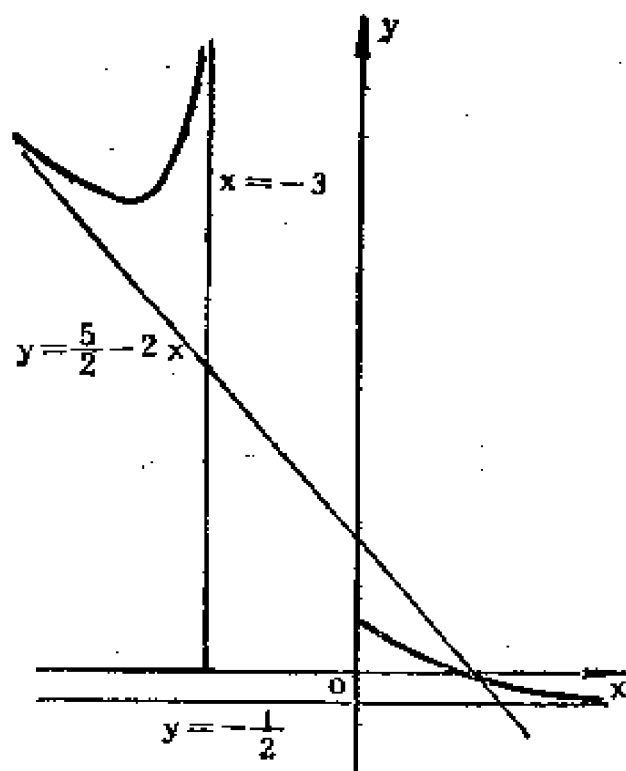


图 2.83

> 0 ，故图形呈凹状。

当 $x = -4$ 时有极小值 $y = 13$ 。

当 $x = 0$ 时有边界极大值 $y = 1$ 。

图形如图 2.83 所示。

1495. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

解 零点处: $x = 0$ 。

垂直渐近线: $x = -1$ 。

$$y' = \frac{x+2}{3(x+1)^2 \sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -2$ 。当 $x = 0$ 时 $y' = \infty$ 。

$$y'' = -\frac{2(x^2+4x+1)}{9x(x+1)^2 \sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -2 \pm \sqrt{3}$ 。

经判别:

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$;

当 $x = -2$ 时有极大值 $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1.59$ 。

拐点:

$x = -(2 - \sqrt{3}) \approx -0.27$, 此时 $y \approx 0.46$;

$x = -(2 + \sqrt{3})$

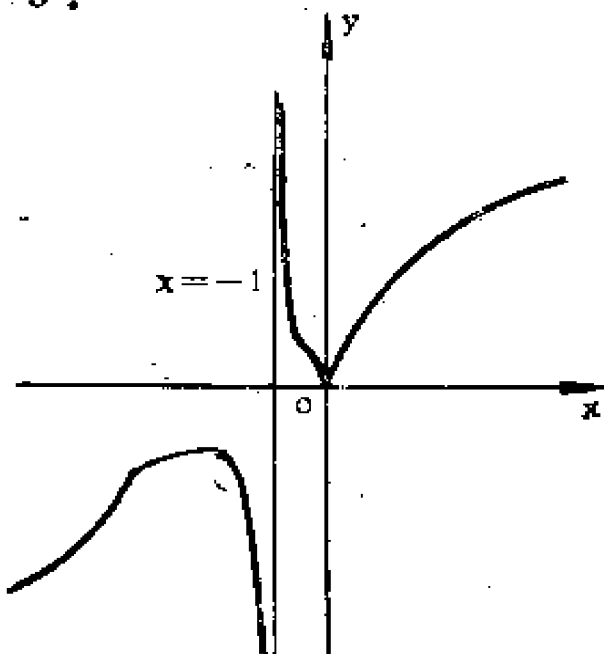


图 2.84

≈ -3.73 , 此时 $y \approx -1.72$.

图形如图 2.84 所示.

1496. $y = \sqrt{\frac{x^4 + 3}{x^2 + 1}}.$

解 图形关于 Oy 轴对称, 函数值始终是正的.

渐近线: $y = \pm x$.

$$y' = \frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 ± 1 .

$$y'' = \frac{-x^8 + 20x^6 + 18x^4 + 36x^2 - 9}{(x^4+3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x \approx \pm 0.47$ 或 ± 4.58 , 经判别均为拐点:

当 $x \approx \pm 0.47$ 时, $y \approx 1.14$;

当 $x \approx \pm 4.58$ 时, $y \approx 4.55$.

当 $x = 0$ 时有极大值 $y = \sqrt{3} \approx 1.73$;

当 $x = \pm 1$ 时有极小值 $y = \sqrt{2} \approx 1.41$.

图形如图 2.85 所示.

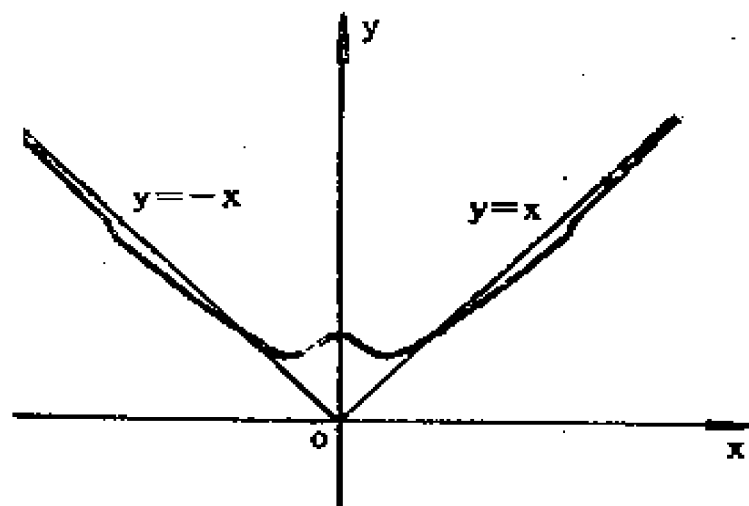


图 2.85

1497. $y = \sin x + \cos^2 x$.

解 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $0 \leq x \leq 2\pi$ 内的图形讨论如下:

零点处: $x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.21\pi$ 及

$x = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.79\pi$.

$y' = \cos x(1 - 2\sin x)$, 令 $y' = 0$ 得

$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ 及 $\frac{3\pi}{2}$;

$y'' = -\sin x - 2\cos 2x$, 令 $y'' = 0$ 得

$4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$,

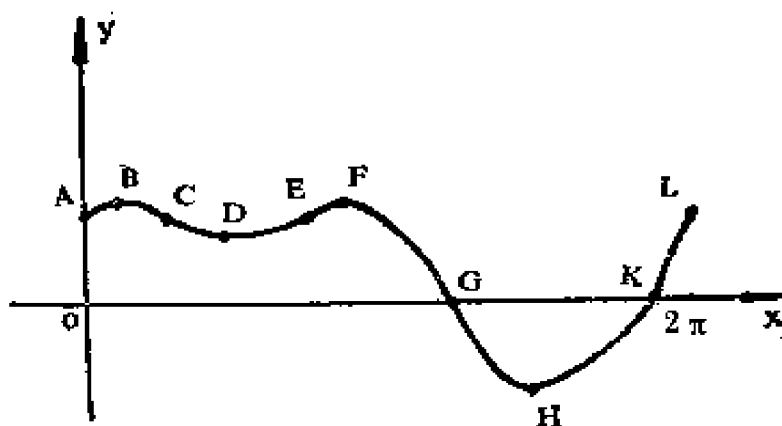


图 2.86

解之得

$x_1 = \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$, 此时 $y_1 \approx 1.13$;

$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$, 此时 $y_2 \approx 1.13$;

$$x_3 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8}, \text{ 此时 } y_3 \approx 0.055;$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8}, \text{ 此时 } y_4 \approx 0.055,$$

经判断: $x_1 \approx 0.32\pi$, $x_2 \approx 0.68\pi$, $x_3 \approx 1.20\pi$,
 $x_4 \approx 1.80\pi$ 均为拐点;

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时有极小值 $y = 1$;

当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时有极小值 $y = -1$;

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, 有极大值 $y = 1\frac{1}{4}$.

如图 2.86 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(0, 1), B\left(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{4}\right), C(0.32\pi, 1.13),$$

$$D\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), E(0.68\pi, 1.13),$$

$$F\left(\frac{5}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right), G(1.20\pi, 0.055), H\left(\frac{3}{2}\pi, -1\right),$$

$$K(1.80\pi, 0.055) \text{ 和 } L(2\pi, 1).$$

1498. $y = (7 + 2\cos x)\sin x$.

解 图形关于原点对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内的图形讨论如下:

零点处: $x = 0$ 或 $\pm\pi$.

$y' = 7\cos x + 2\cos 2x$, 令 $y' = 0$ 得

$$2\cos 2x + 7\cos x = 0,$$

解之得

$$x = \arccos \frac{1}{4} \approx 0.42\pi,$$

$$x = -\arccos \frac{1}{4}$$

$$\approx -0.42\pi.$$

$$y'' = -7\sin x - 4\sin 2x,$$

令 $y'' = 0$ 得

$$\sin x(7 + 8\cos x) = 0,$$

解之得

$$x_1 = 0, \text{ 此时 } y_1 = 0;$$

$$x_{2,3} = \pm \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$$

$$\approx \pm 0.84\pi, \text{ 此时 } y_{2,3} \approx \pm 2.54;$$

$$x_{4,5} = \pm \pi, \text{ 此时 } y_{4,5} = 0.$$

经判别: 点 x_1, x_2, x_3, x_4 和 x_5 均为拐点;

$$\text{当 } x = -\arccos \frac{1}{4} \text{ 时有极小值 } y = -\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7.3;$$

$$\text{当 } x = \arccos \frac{1}{4} \text{ 时有极大值 } y = \frac{15}{8}\sqrt{15} \approx 7.3.$$

图形如图 2.87 所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0.42\pi, 7.3), B(0.84\pi, 2.54), C(\pi, 0);$$

$$A'(-0.42\pi, -7.3), B'(-0.84\pi, -2.54),$$

$$C'(-\pi, 0).$$

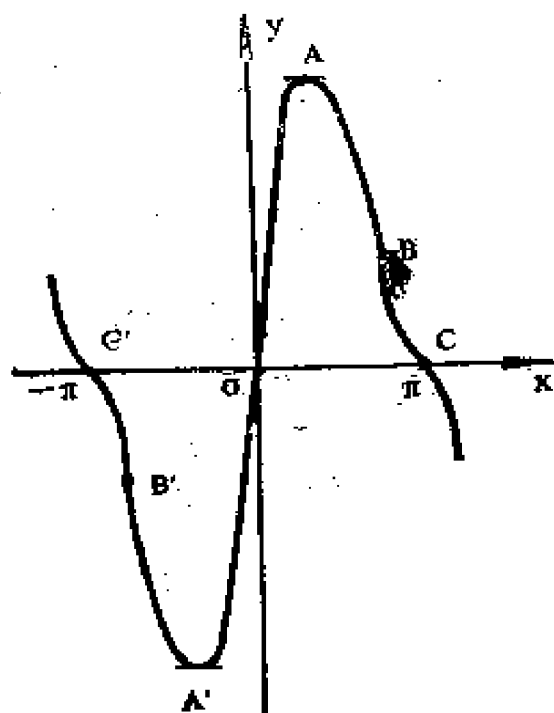


图 2.87

1499. $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x.$

解 图形关于坐标原点对称, 函数的周期 $T=2\pi$, 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

零点处: $x=0$ 或 $\pm\pi$.

$y' = \cos x + \cos 3x$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4};$$

$$y'' = -\sin x - 3$$

$$\sin 3x,$$

令 $y'' = 0$ 得

$$x_1 = 0,$$

$$y_1 = 0;$$

$$x_{2,3} =$$

$$\pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx$$

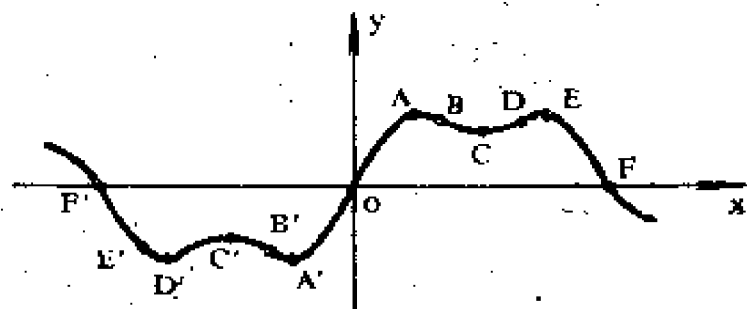


图 2.88

$$\pm 0.37\pi, y_{2,3} = \pm \frac{4}{27}\sqrt{30} = \pm 0.81;$$

$$x_{4,5} = \pm \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \approx \pm 0.63\pi,$$

$$y_{4,5} = \pm \frac{4}{27}\sqrt{30} = \pm 0.81;$$

$$x_{6,7} = \pm \pi, y_{6,7} = 0.$$

经判别: 点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 和 x_7 均为拐点;

$$\text{极小值: 当 } x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \text{ 时, } y = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx$$

$$-0.94;$$

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = \frac{2}{3};$$

$$\text{极大值: 当 } x = -\frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = -\frac{2}{3};$$

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ 时, } y = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0.94.$$

图形如图 2.88 所示, 图中主要点的坐标:

$$A\left(\frac{\pi}{4}, 0.94\right), B(0.37\pi, 0.81), C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right),$$

$$D(0.63\pi, 0.81), E\left(\frac{3\pi}{4}, 0.94\right) \text{ 和 } F(\pi, 0);$$

点 A', B', C', D', E', F' 和点 A, B, C, D, E, F 关于原点对称.

$$1500. \quad y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

$$\text{零点处: } x = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62\pi.$$

$$y' = -\sin x + \sin 2x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \pi.$$

$$y'' = -\cos x + 2\cos 2x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.18\pi, y_{1,2} \approx 0.63;$$

$$x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.70\pi, y_{3,4} \approx -0.44.$$

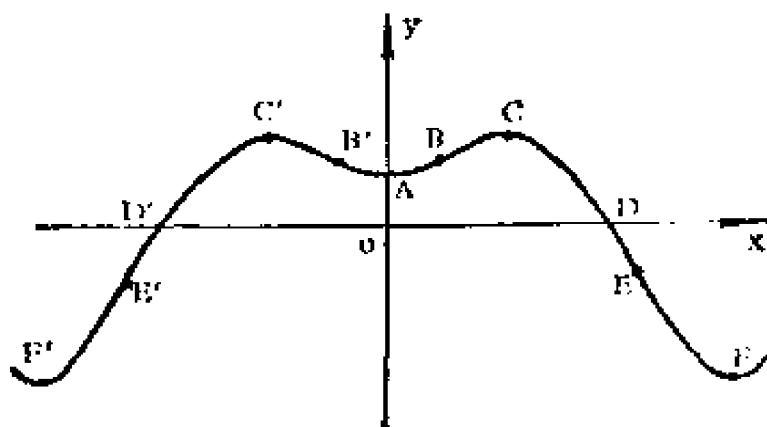


图 2.89

经判别：点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点，

当 $x=0$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}$ ；

当 $x=\pm\pi$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{2}$ ；

当 $x=\pm\frac{\pi}{3}$ 时有极大值 $y=\frac{3}{4}$ 。

图形如图 2.89 所示，图中主要点的坐标：

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right), B(0.18\pi, 0.63), C\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right),$$

$$D(0.62\pi, 0), E(0.70\pi, -0.44), F\left(\pi, -\frac{3}{2}\right);$$

点 B', C', D', E', F' ，与点 B, C, D, E, F 关于 Oy 轴对称。

1501. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称。

由于

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(3 + \cos 4x),$$

故函数的周期 $T = \frac{\pi}{2}$ ，在一周期 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 内讨论图形。

$$y' = -\sin 4x, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \pm \frac{\pi}{4}.$$

$$y'' = -4\cos 4x, \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{8},$$

$$y_{1,2} = \frac{3}{4}.$$

经判别：点 x_1 和 x_2 均为拐点；

当 $x = 0$ 时有极大值 $y = 1$ ；

当 $x = \pm \frac{\pi}{4}$ 时有极小值 $y = \frac{1}{2}$ 。

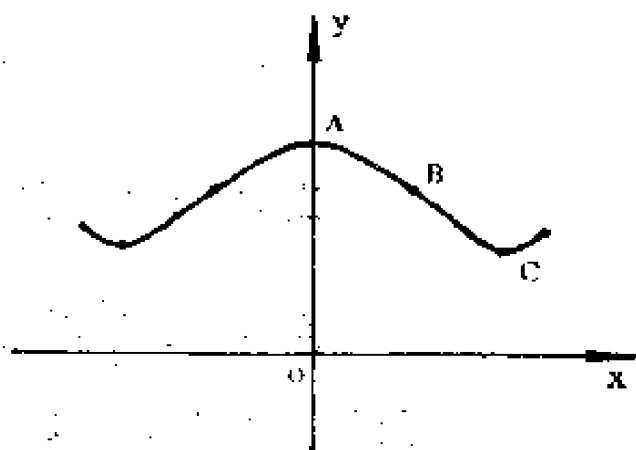


图 2.90

图形如图 2.90 所示，图中主要点的坐标：

$$A(0, 1), B\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right) \text{ 和 } C\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

1502. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称。

由于

$$y = \sin x \sin 3x = -\left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}, \text{ 故函数的周期}$$

$T = \pi$ ，在一周期 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 内讨论图形。

零点处： $x = 0$ 或 $\pm \frac{\pi}{3}$ 。

$y' = 2\sin 4x - \sin 2x$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}.$$

$y'' = 8\cos 4x - 2\cos 2x$, 令 $y'' = 0$ 得

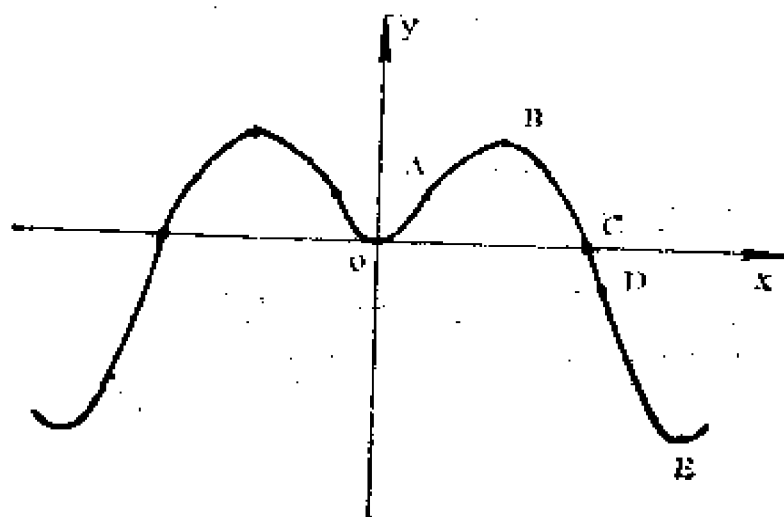


图 2.91

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.11\pi,$$

$$y_{1,2} \approx 0.29;$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.36\pi,$$

$$y_{3,4} \approx -0.24.$$

经判别：点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点；

极小值：当 $x = 0$ 时 $y = 0$,

当 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, $y = -1$;

极大值：当 $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0.21\pi$ 时, $y = \frac{9}{16}$.

图形如图2.91所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0.11\pi, 0.29), B(0.21\pi, \frac{9}{16}), C(\frac{\pi}{3}, 0),$$

$$D(0.36\pi, -0.24), E(\frac{\pi}{2}, -1).$$

1503. $y = \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}.$

解 利用 $\sin(\pi + x) = -\sin x$, 易知函数的周期 $T = \pi$.
在一周期 $0 \leq x \leq \pi$ 内讨论
图形.

不连续点: $x = \frac{3\pi}{4}.$

零点处: $x = 0$ 或 $\pi.$

渐近线: $x = \frac{3\pi}{4}.$

$$y' = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin^2(x + \frac{\pi}{4})} > 0,$$

无极值, 函数图形上升.

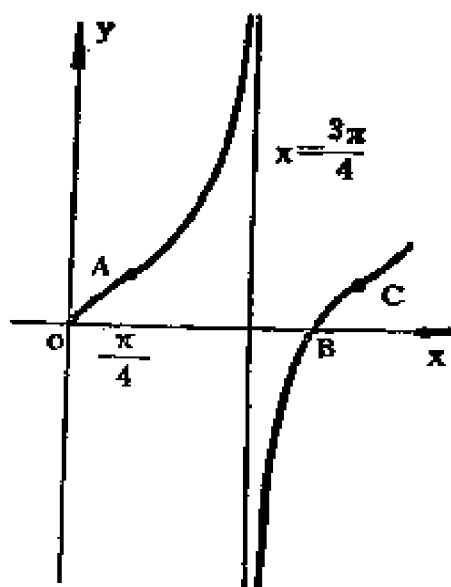


图 2.92

$$y'' = -\frac{2\sin \frac{\pi}{4} \cos(x + \frac{\pi}{4})}{\sin^3(x + \frac{\pi}{4})}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \frac{\pi}{4}, \text{ 对应的}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 经判别为拐点.}$$

图形如图2.92所示, 图中主要点的坐标:

$$A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B(\pi, 0) \text{ 和 } C\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

1504. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$

解 图形关于Oy轴对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

零点处: $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

渐近线: $x = \pm \frac{\pi}{4}$

及 $x = \pm \frac{3\pi}{4}$.

$$y' = \frac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2 2x},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $\pm \pi$;

$$y'' = \frac{1}{\cos^3 2x} [3\cos x \cos^2 2x + 4\sin 2x \sin x (1 +$$

$$2\cos^2 x)], \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

经判别: 当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$;

当 $x = \pm \pi$ 时有极大值 $y=-1$;

点 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 均为拐点, 此时 $y=0$.

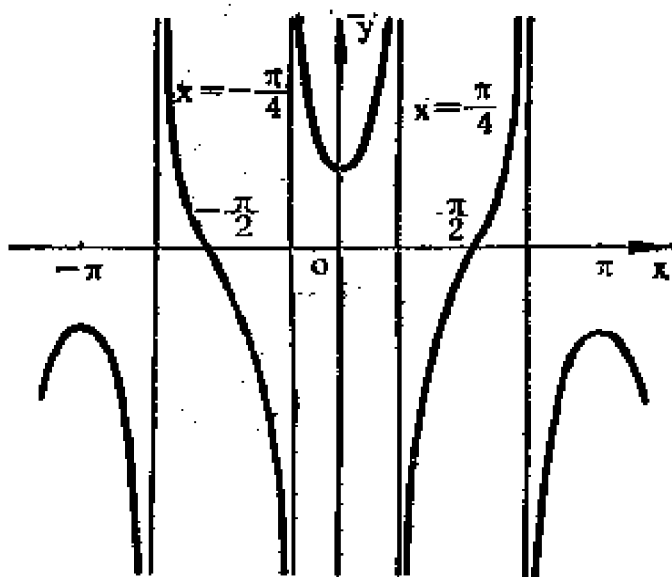


图 2.93

当 $0 < x < \pi$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $-\pi < x < 0$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

图形如图 2.93 所示.

1505. $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

解 零点处: $x = 0$ 及 $x \approx \pm 0.37\pi, \dots$

对称中心: $(k\pi, 2k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

渐近线: $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

$y' = 2 - \sec^2 x$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ 或 } x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

经判别: 当 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 时, 有极大值 $y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$;

当 $x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ 时, 有极小值

$$y = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$y'' = -2\sec^2 x \operatorname{tg} x,$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = k\pi$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

经判别此为拐点.

图形如图 2.94 所示

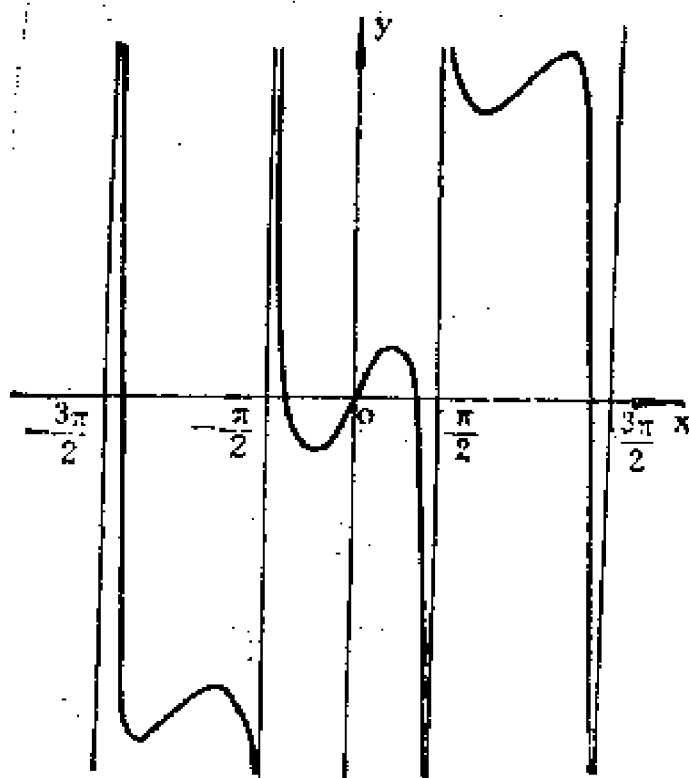


图 2.94

(仅描绘从 $-\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$ 区间内的图形)。

1506. $y = e^{2x-x^2}$.

解 函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴的上方.

$y = e^{-(x-1)^2+1}$, 于是图形关于直线 $x=1$ 对称.

渐近线: $y=0$.

$$y' = (2 - 2x)$$

$$\cdot e^{2x-x^2}, \text{ 令}$$

$$y' = 0 \text{ 得 } x =$$

1, 经判别知此时

有极大值 $y=e$;

$$y'' = 2(2x^2 - 4x$$

$$+ 1)e^{2x-x^2}, \text{ 令}$$

$$y'' = 0 \text{ 得 } x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 经判别为拐点, } y = \sqrt{e}$$

≈ 1.65 .

图形如图2.95所示, 图中各点的位置:

$$A(0, 1), B\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right), C(1, e),$$

$$D\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right).$$

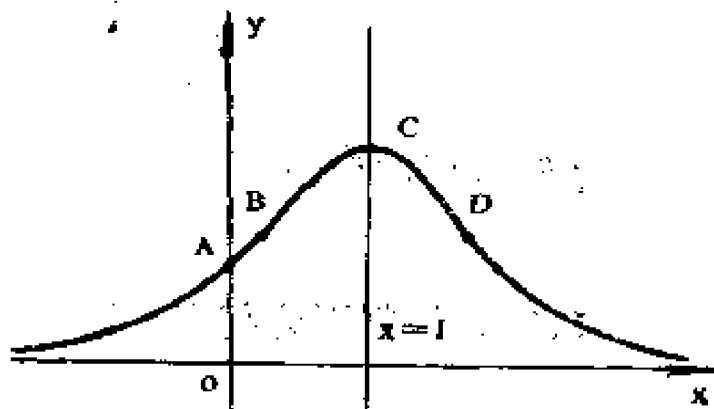


图 2.95

1507. $y = (1+x^2)e^{-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 在 Ox 轴的上方.

渐近线: $y=0$.

$$y' = -2x^3e^{-x^2}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x=0, \text{ 经过 } x=0 \text{ 点,}$$

导数 y' 从正变负, 所以当 $x=0$ 时取极大值 $y=1$.

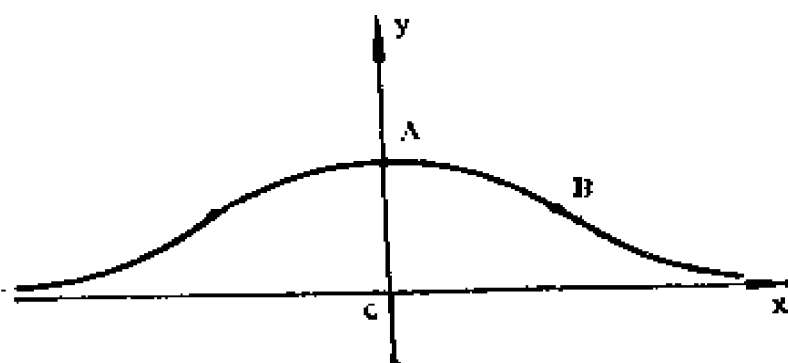


图 2.96

$$y'' = 2x^2 e^{-x^2} (2x^2 - 3), \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm$$

$$1.22, \text{ 经判别为拐点, 而 } y = \frac{5}{2} e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.56.$$

图形如图2.96所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0, 1), B(1.22, 0.56).$$

1508. $y = x + e^{-x}.$

解 $y' = 1 - e^{-x},$ 令 $y' = 0$ 得 $x = 0, y = 1.$

$y'' = e^{-x} > 0,$ 图形向上凹, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 1.$

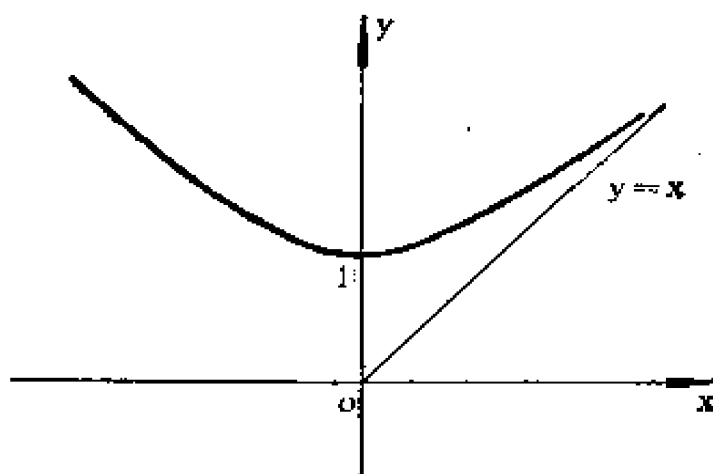


图 2.97

斜渐近线: $y=x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = 0.$$

图形如图2.97所示.

1509. $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}.$

解 零点处: $x=0$.

渐近线:

$y=0$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时).

$$y' = -x^{-\frac{1}{3}} e^{-x} \left(x - \frac{2}{3} \right),$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{2}{3}$, 当 $x=0$ 时, $y' = \infty$.

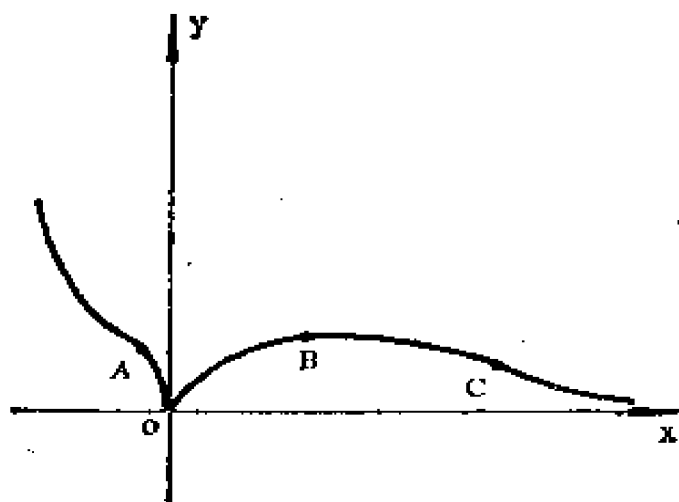


图 2.98

经判别: 当 $x=0$ 有极小值 $y=0$, 且 $(0,0)$ 点为尖点.

当 $x = \frac{2}{3}$ 时有极大值 $y = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.39$.

由此可知函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴上方.

$$y'' = \frac{1}{9} e^{-x} x^{-\frac{4}{3}} (9x^2 - 12x - 2), \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得}$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{6}}{3} \approx -0.15, \quad y_1 \approx 0.34,$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{6}}{3} \approx 1.48, y_2 \approx 0.30,$$

经判别均为拐点:

图形如图2.98所示, 图中主要点的坐标:

$$A(-0.15, 0.34), B(\frac{2}{3}, 0.39), C(1.48, 0.30).$$

1510. $y = \frac{e^x}{1+x}.$

解 当 $x < -1$ 时, 函数值为负的,

当 $x > -1$ 时, 函数值为正的.

不连续点: $x = -1$. 垂直渐近线: $x = -1$.

又水平渐近线: $y = 0$ (当 $x \rightarrow -\infty$ 时). 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

经判别知此时有极小值

$$y = 1.$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3},$$

当 $x < -1$ 时, $y'' < 0$, 故

图形是凸的;

当 $x > -1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

图形如图2.99所示.

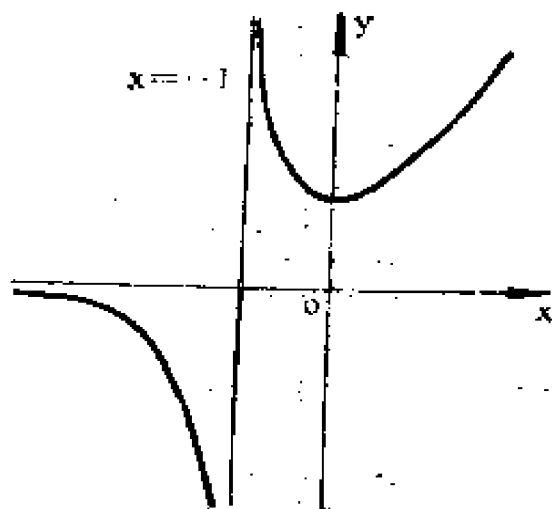


图 2.99

1511. $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$

解 图形关于 Oy 轴对称.

零点处: $x = 0$.

函数值不为负.

当 $x = 0$ 时有最小值 $y = 0$.

渐近线: $y = 1$.

$$y' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

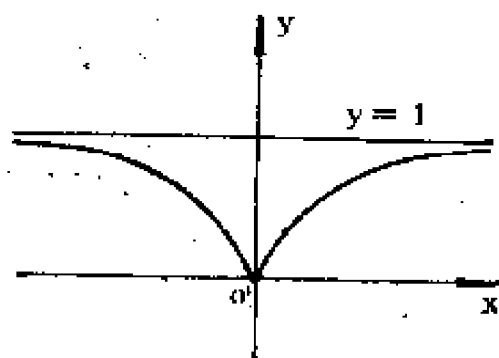


图 2.100

当 $x < 0$, $y' < 0$; 当 $x > 0$, $y' > 0$.

$$y'' = \frac{e^{-x^2}(1-3x^2-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2})}{(1-e^{-x^2})\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

令 $g(t) = 1 - 3t - e^{-t} + 2te^{-t}$ ($0 \leq t < +\infty$), 易证 $g(t) \leq 0$. 于是, 对于 $x \neq 0$, 恒有 $y'' < 0$, 即图形呈凸状, 而 $(0,0)$ 点为尖点 (图 2.100).

1512. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

解 存在域: $x > 0$.

零点处: $x =$

1.

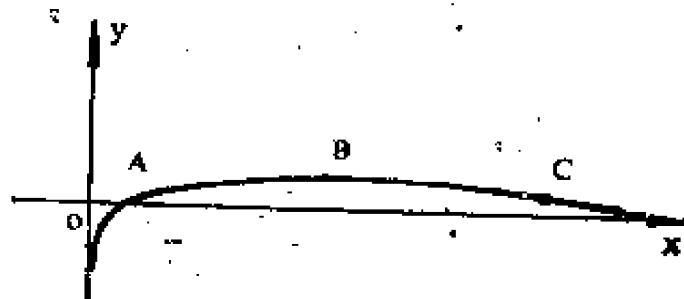


图 2.101

渐近线: $x = 0$ ($x \rightarrow +0$), $y = 0$ ($x \rightarrow +\infty$).

$$y' = \frac{2 - \ln x}{2x^2}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^2 \approx 7.39.$$

经判别知此时有极大值 $y = \frac{2}{e} \approx 0.74$.

$$y'' = \frac{3\ln x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.33,$$

经判别此为拐点, 此时 $y = \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.70$.

图形如图 2.101 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(1, 0), B(7.40, 0.74), C(14.33, 0.70).$$

1513. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 由于 $\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

故图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \text{ 故图形始终上升, 无极大值}$$

点.

$$y'' = \frac{-x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 0,$$

在此点切线斜率为 $k = 1$.

经判别此为拐点, 此时 $y = 0$.

图形如图 2.102 所示.

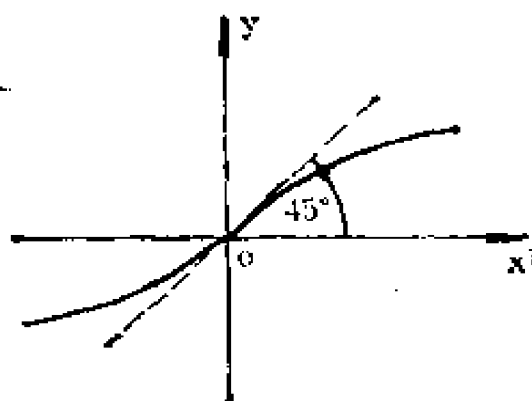


图 2.102

1514. $y = \sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x=0$.

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

$$y'' = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

当 $x < 0$ 时, 由对称性知图形是凸的.

于是得知 $O(0,0)$ 为拐点, 在此点切线斜率为 $k=1$.

从而, 函数图形始终上升, 如图 2.103 所示.

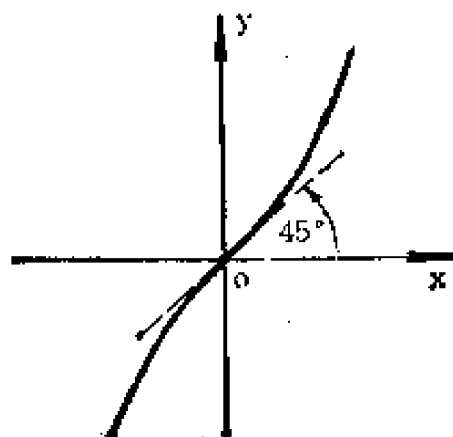


图 2.103

1515. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x=0$.

存在域: $|x| < 1$.

渐近线: $x = \pm 1$.

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$> 0 \quad (|x| < 1),$$

故图形始终上升.

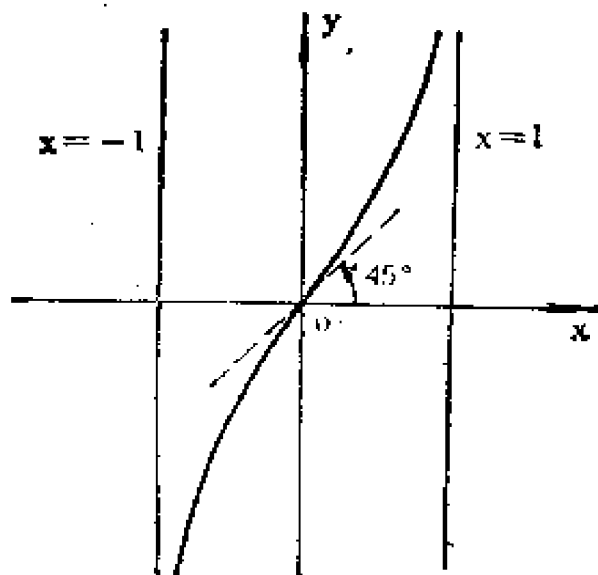


图 2.104

$$y'' = \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $y'' \leq 0$, 故图形是凸的,

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y'' \geq 0$, 故图形是凹的, $O(0,0)$ 为拐点处, 在此点切线斜率为 $k=1$.

图形如图 2.104 所示.

1516. $y = x + \arctg x$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

渐近线: $y = x - \frac{\pi}{2}$, $y = x + \frac{\pi}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - kx) = -\frac{\pi}{2}, \quad b_2 =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \frac{\pi}{2}.$$

$$y' = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0,$$

故图形始终上升, 无
极值点.

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$, 判
别知为拐点, 在此点切线
斜率为 $k=2$.

图形如图 2.105 所示.

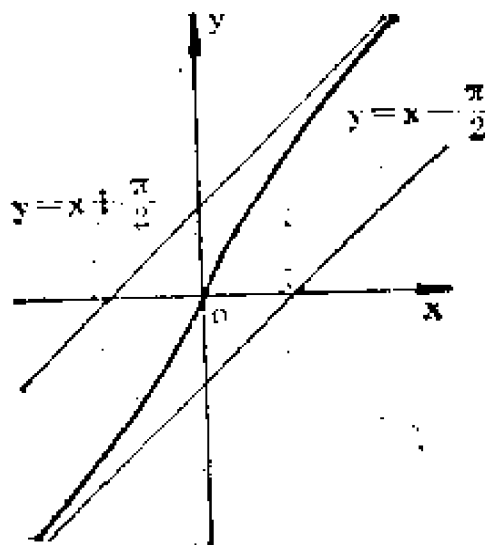


图 2.105

1517. $y = \frac{x}{2} + \arctg x$.

解 零点处: $x \approx -5.95$.

渐近线: $y = \frac{x}{2} + \pi$. 事实上,

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{x}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x \right) - \frac{1}{2}x \right] = \pi;$$

同法还可得渐近线 $y = \frac{x}{2}$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时).

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \pm 1.$$

当 $x < -1$ 及当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

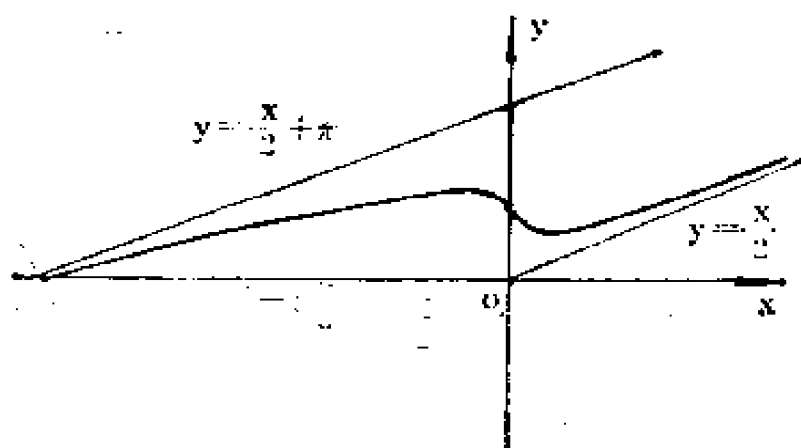


图 2.106

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降;

故当 $x = 1$ 时有极小值 $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1.285$, 当 $x = -1$

时有极大值 $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1.856$.

$$y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 0.$$

当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的.

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

从而有拐点 $x = 0$, 此时 $y = \frac{\pi}{2}$, $y' = -\frac{1}{2}$.

图形如图 2.106 所示.

1518. $y = x \operatorname{arctg} x$.

解 零点处: $x = 0$.

图形关于 Oy 轴对称.

函数值不为负, 故图形始终在 Ox 轴上方.

渐近线:

$$y = -\frac{\pi}{2}x - 1$$

(当 $x \rightarrow -\infty$ 时);

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1$$

(当 $x \rightarrow +\infty$ 时).

$$y' = \frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x,$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 图

形下降; 当 $x > 0$ 时,

$y' > 0$, 图形上升, 故当 $x = 0$ 时, 有极小值 $y = 0$.

$y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$, 图形是凹的.

图形如图 2.107 所示.

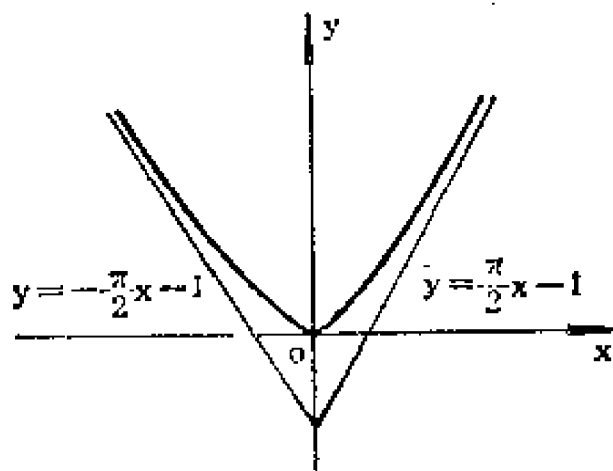


图 2.107

1519. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

解 零点处：

$$x = 0.$$

图形关于坐标原点对称。

渐近线：

$y = 0$. 事实上，

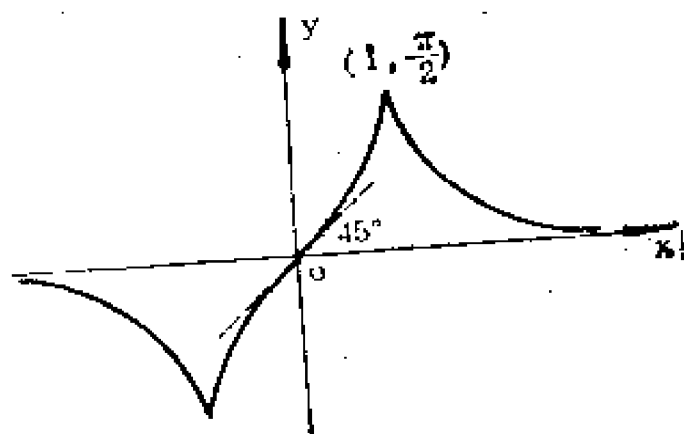


图 2.103

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{2 \operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} \quad (|x| \neq 1).$$

当 $|x| < 1$ 时, $y' > 0$, 图形上升,

当 $|x| > 1$ 时, $y' < 0$, 图形下降,

当 $x = 1$ 时, 直接从定义出发, 可得

$$y'_-(1) = 1, \quad y'_+(1) = -1,$$

故点 $(1, \frac{\pi}{2})$ 为角点, 且当 $x = 1$ 时有最大值 $y = \frac{\pi}{2}$.

利用对称性可知点 $(-1, -\frac{\pi}{2})$ 也为角点, 且当

$x = -1$ 时有最小值 $y = -\frac{\pi}{2}$;

$$y'_-(-1) = -1, \quad y'_+(-1) = 1.$$

当 $x=0$ 时, $y'=1$.

又点 $x=0$ 为拐点.

图形如图 2.103 所示.

1520. $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$

解 零点处:

$$x=0.$$

图形关于 Oy

轴对称.

函数值不为
负, 故图形始终
在 Ox 轴上方.

渐近线: $y=\pi$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi.$$

$$y' = \frac{2}{1+x^2} > 0 \quad (x > 0), \text{ 图形上升.}$$

当 $x=0$ 时, 直接从定义出发, 得

$$y'_+(0) = 2.$$

由对称性知, $y'_-(0) = -2$, 且当 $x < 0$ 时, 图形下降, 故当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$. 此点为角点.

$$y'' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} < 0 \quad (x > 0), \text{ 图形是凸的.}$$

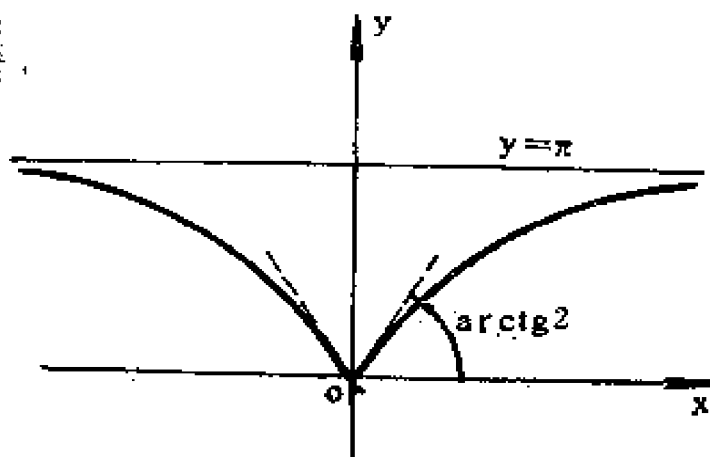


图 2.109

由对称性知, 当 $x < 0$ 时, 图形也是凸的.
图形如图 2.109 所示.

1521 $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点处: $x = -2$.

不连续点: $x = 0$.

渐近线: $y = x + 3$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3 + x + o\left(\frac{1}{x}\right) - x \right] = 3.$$

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 2$ 或 -1 .

当 $0 < x < 2$ 时, $y' < 0$, 图形下降,

当 $-1 < x < 0$ 时,

$y' < 0$, 图形下降,

当 $x < -1$ 及 $x > 2$ 时,

$y' > 0$, 图形上升;

故当 $x = -1$ 时有极

大值 $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

当 $x = 2$ 时有极小值

$y = 4\sqrt{e} \approx 6.59$.

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4} \right).$$

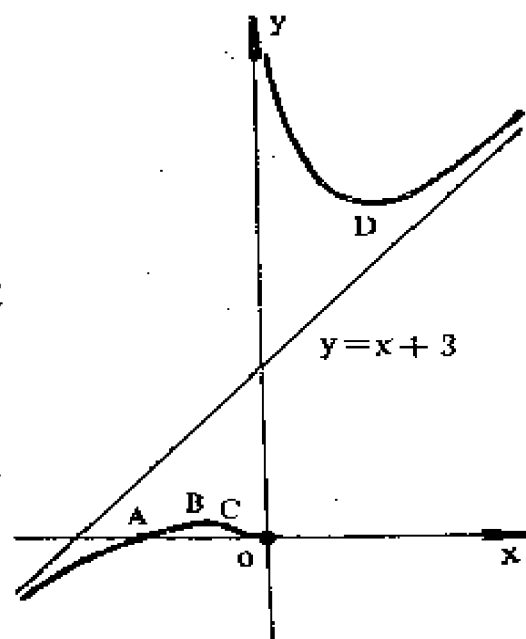


图 2.110

令 $y'' = 0$ 得 $x = -\frac{2}{5}$,

当 $x < -\frac{2}{5}$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的,

当 $x > -\frac{2}{5}$ ($x \neq 0$) 时, $y'' > 0$, 图形是凹的,

故该点是拐点, 此时 $y = \frac{8}{5}e^{-\frac{8}{2}} \approx 0.13$.

又 $\lim_{x \rightarrow 0-} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} y = +\infty$.

图形如图 2.110 所示. 图中各点的位置:

$A(-2, 0)$, $B(-1, 0.37)$,

$C(-0.40, 0.13)$, $D(2, 6.59)$.

1522. $y = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

解 存在域: $|x| \geq 1$. 图形关于 Oy 轴对称.

渐近线: $y = 1$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}] = 1.$$

当 $x = \pm 1$ 时有
边界的极大值 $y =$
 $2\sqrt{2} \approx 2.67$.

$$y'_+(1) = -\infty,$$

$$y'_-(-1) = +\infty.$$

$$y'(x) =$$

$$2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

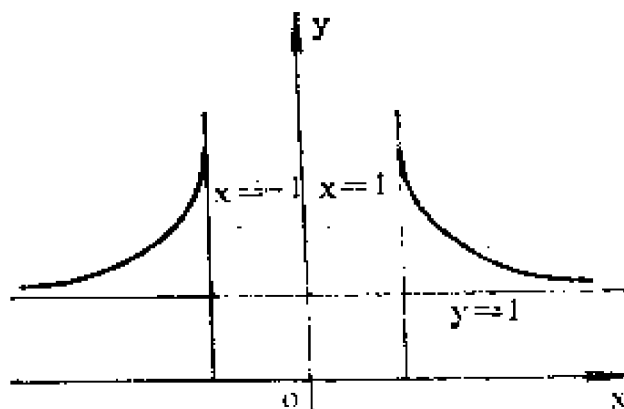


图 2.111

$$\cdot \ln 2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right),$$

故当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

$x > 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

$$y''(x) = (\ln 2)^2 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right.$$

$$\left. - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2 + \ln 2 \cdot 2\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \right) > 0, \text{ 故图形呈凹状.}$$

图形如图2.111所示.

1523. $y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}.$

解 存在域: $x < 1$ 及 $x > 2$.

与坐标轴的交点: $(0, \ln 2)$ 及 $(\frac{1}{3}, 0)$.

渐近线: $y = 0$; 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x =$$

$\frac{1 - \sqrt{10}}{3} \approx -0.72$ (另一根不在存在域内), 经判别

知当 $x \approx -0.72$ 时有极大值 $y \approx 1.12$.

$$y'' = \frac{-6x^5 + 15x^4 - 30x^2 + 30x - 13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2}, \text{ 令 } y'' = 0$$

得 $x \approx -1.49$. 判别知为拐点, 此时 $y \approx \ln 2.7$.

当 $x < -1.49$ 时, $y'' > 0$, 图形是凹的.

当 $x > 2$ 时,

$y'' < 0$, 图形是凸的.

当 $x \rightarrow 1-0$

及 $x \rightarrow 2+0$ 时,

$y \rightarrow -\infty$.

图形如图

2.112所示.

图中主要点

的坐标: $A(-1.49, \ln 2.7)$,

$B(-0.72, 1.12), C(0, \ln 2), D(\frac{1}{3}, 0)$.

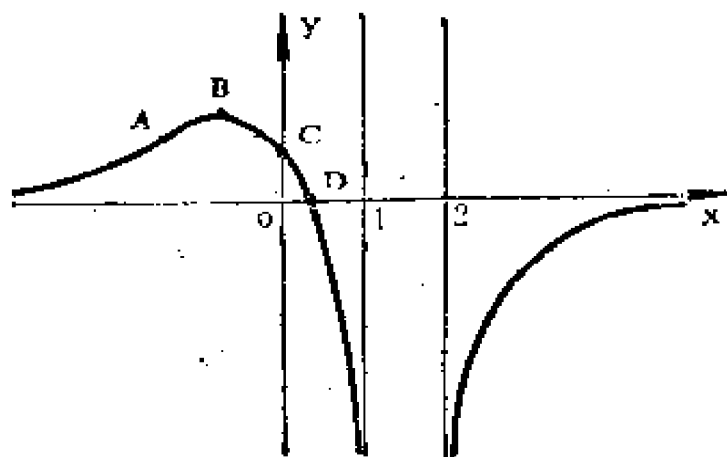


图 2.112

1524. $y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

解 存在域: $|x| \leq a$.

与坐标轴交点: $(0, -a)$ 及 $(0.67a, 0)$.

当 $x = -a$ 时有边界的极小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$.

当 $x=a$ 时有边界的极大值 $y=\frac{\pi}{2}a$.

$y' = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} > 0$ (当 $|x| < a$ 时), 故图形单

调上升. 又

$$y'_-(a) = +\infty, \quad y'_+(-a) = 0.$$

$$y'' = \frac{a(a+x)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

> 0 ($|x| < a$), 故图形是凹的.

图形如图 2.113 所示.

图中主要点的坐标:

$$A\left(-a, -\frac{\pi}{2}a\right),$$

$$B(0, -a), C(0.67a, 0), D\left(a, \frac{\pi}{2}a\right).$$

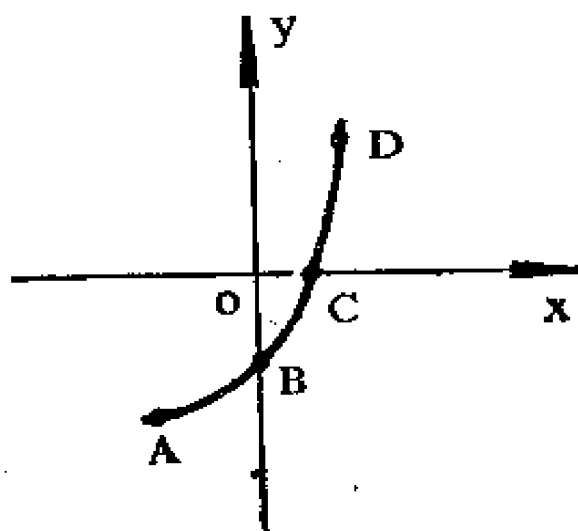


图 2.113

1525. $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}.$

解 存在域: $\left| \frac{1-x}{1-2x} \right| \leq 1$, 两端平方之, 解得

$$x \leq 0 \text{ 或 } x \geq \frac{2}{3}.$$

渐近线: $y = \frac{\pi}{3}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arccos \frac{1-x}{1-2x}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x}{1-2x} = \frac{\pi}{3}.$$

当 $x=0$ 时有边界的极小值 $y=0$,

当 $x=\frac{2}{3}$ 时有边界的极大值 $y=\pi$.

$$y' = - \frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}} \cdot (1-2x)^2} \cdot (9x-12x^2-1), & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时;} \\ \frac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}} \cdot (1-2x)^2} \cdot (12x^2-9x+1), & \text{当 } x \geq \frac{2}{3} \text{ 时.} \end{cases}$$

当 $x \leq 0$
时, $y'' < 0$, 图
形是凸的;

当 $x \geq \frac{2}{3}$ 时,
 $y'' > 0$, 图形是
凹的.

又当 $x < 0$
时, $y' < 0$, 图

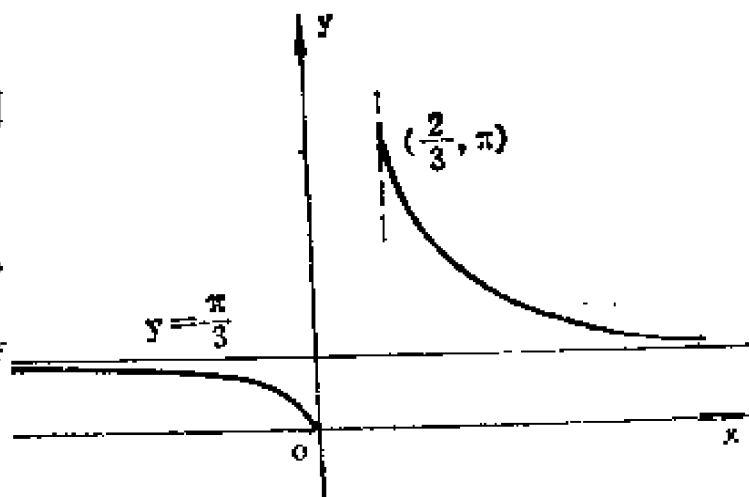


图 2.114

形下降;

当 $x > \frac{2}{3}$ 时, $y' < 0$, 图形也下降;

$$y'_-(0) = -\infty, \quad y'_+\left(\frac{2}{3}\right) = -\infty.$$

图形如图 2.114 所示.

1526. $y = x^x$.

解 一般只讨论 $x > 0$. 函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴的上方.

$$y' = x^x(1 + \ln x).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$. 经判别知此时有极小值

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692.$$

$$y'' = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0, \text{ 图形是凹的.}$$

当 $x \rightarrow +0$ 时有边界值 $y = 1$ (利用洛比塔法则求得).

图形如图 2.115 所示.

1527. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解 一般只讨论 $x > 0$.

渐近线: $y = 1$. 事

实上,

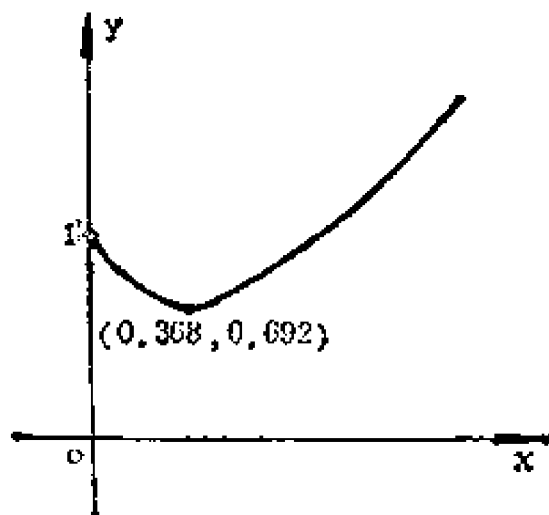


图 2.115

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}-1} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

当 $x = +0$ 时有边界的最小值 $y = 0$.

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x). \quad \text{令 } y' = 0 \text{ 得 } x = e.$$

当 $x < e$ 时, $y' > 0$, 图形上升,

当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

当 $x = e$ 时有极大值 $y = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$.

$$y'' = x^{\frac{1}{x}-4}(1 - 2\ln x + \ln^2 x - 3x + 2x\ln x), \quad \text{令 } y'' = 0 \text{ 得 } x \approx e^{1.48}$$

(≈ 4.39).

当 $0 < x < e^{1.48}$ 时, $y'' < 0$,
图形是凸的.

当 $x > e^{1.48}$ 时, $y'' > 0$, 图

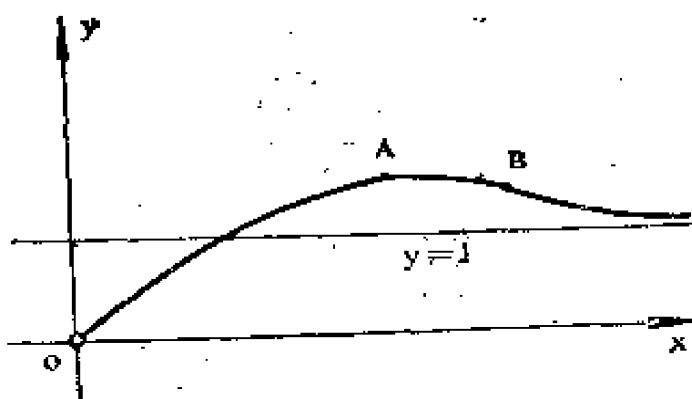


图 2.116

形是凹的, 故 $x = e^{1.48}$ 是拐点, $y \approx 1.402$.

图形如图 2.116 所示. 图中各点位置:

$A(e, 1.445)$, $B(4.39, 1.402)$.

1528. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 存在域: $x > -1$, $x \neq 0$, 函数值为正的, 故图形在 Ox 轴上方.

$$y' = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left[\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right].$$

易证 $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) < 0$, 故 $y' < 0$, 从而图形下降.

渐近线: $x = -1$ 和 $y = 1$.

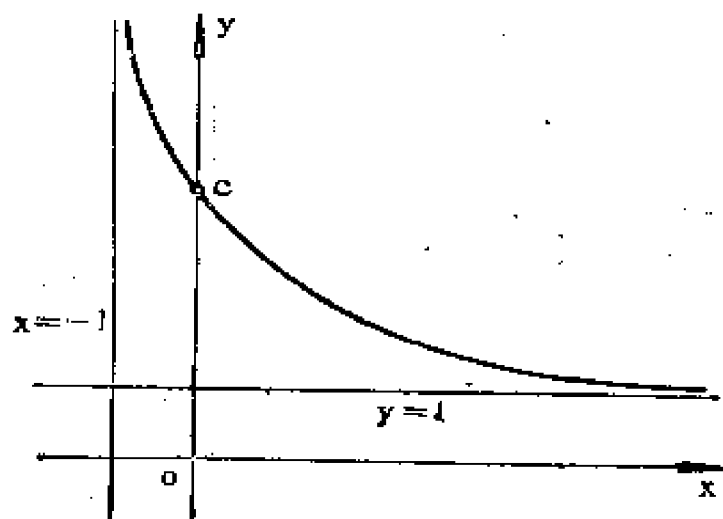


图 2.117

图形是凹的。\$x=0\$ 为可移去不连续点。

图形如图 2.117 所示。

1529. $y = x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \quad (x > 0).$

解 $y' = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x + x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] > 0,$

易证 $\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} > 0 \quad (x > 0)$, 故 $y' > 0$, 从而图形上升。

当 $x \rightarrow +0$ 时, 有边界的最小值 $y = 0$ 。

渐近线: $y = e \left(x - \frac{1}{2} \right)$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right]}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= -e \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right. \\
&\quad \left. + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x+1} \right] = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

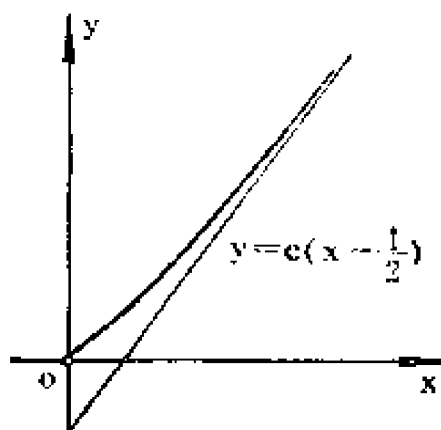


图 2.118

图形如图 2.118 所示.

1530. $y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$ (不研究凸凹性).

解 函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴的上方. 图形关于 Oy 轴对称.

不连续点: $x = 1$ 及 $x = -1$.

$$y' = \frac{2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} (3-x^2)}{(1-x^2)^2 (1+x^2)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pm\sqrt{3}$.

经判别:

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = e$;

当 $x = -\sqrt{3}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$;

当 $x = \sqrt{3}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$.

渐近线: $y = 0$; $x = -1$ 及 $x = 1$;

图形如图 2.119 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(0, e), B(\sqrt{3}, 0.15), C(-\sqrt{3}, 0.15).$$

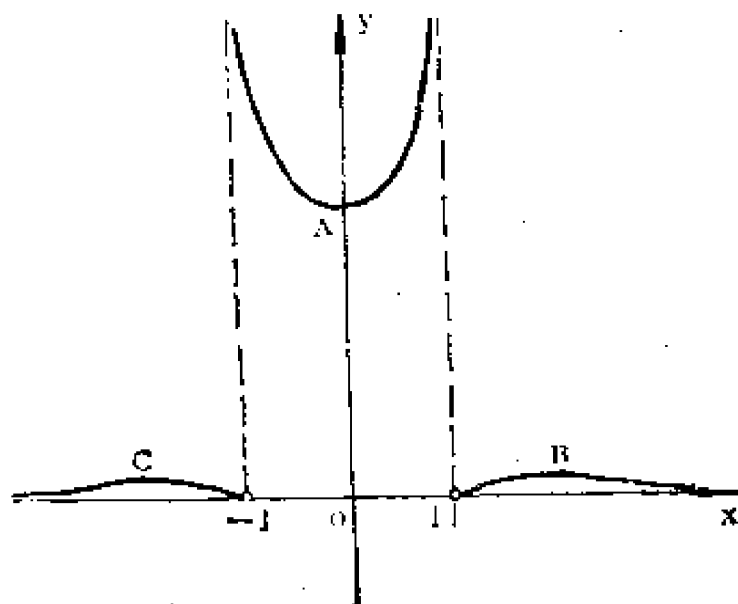


图 2.119

作出下列参数方程所表示的曲线:

$$1531. \quad x = \frac{(t+1)^2}{4}, \quad y = \frac{(t-1)^2}{4}.$$

解 先把此参数方程化成直角坐标系下的方程.

$$\sqrt{x} = \frac{|t+1|}{2}, \quad \sqrt{y} = \frac{|t-1|}{2}.$$

当 $t \geq 1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}$, $\sqrt{y} = \frac{t-1}{2}$. 相减得

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \quad (x \geq 1, x > y); \quad (1)$$

当 $t \leq -1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{-t-1}{2}$, $\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$, 因而

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 \quad (y \geq 1, y > x); \quad (2)$$

当 $-1 \leq t \leq 1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}$, $\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$, 相加得

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1). \quad (3)$$

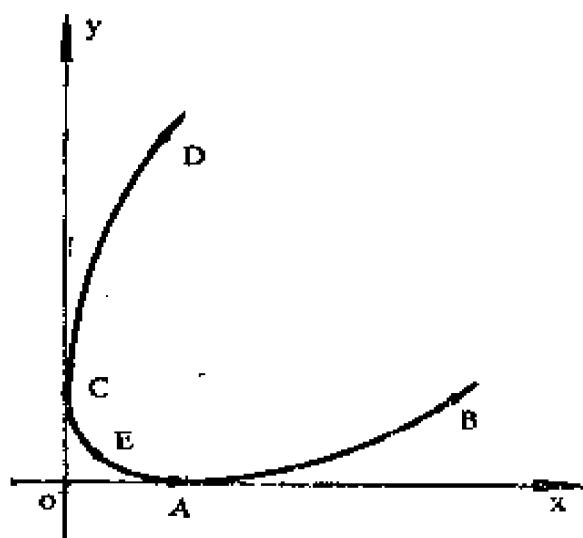
由方程(1), (2)及
(3) 即得所给曲线的图
形. 图形关于 $y = x$ 对
称, 如图 2.120 所示.

图中主要点的坐标:

$A(1, 0)$, $B(4, 1)$,

$C(0, 1)$, $D(1, 4)$,

$E\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.



1532. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

图 2.120

解 $x'_t = 2(1-t)$, $y'_t = 3(1-t^2)$. 令 $x'_t = 0$, $y'_t = 0$,
得 $t = \pm 1$.

作下表:

t 的区间	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 -3	由 $+\infty$ 下降到 -2
$(-1, 1)$	+	+	由 -3 上升到 1	由 -2 上升到 2
$(1, +\infty)$	-	-	由 1 下降到 $-\infty$	由 2 下降到 $-\infty$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3}{2}(1+t) \quad (t \neq 1)$. 令 $\frac{dy}{dx} = 0$ 得

$t = -1$, 此时 $x = -3$, $y = -2$.

由于 $t = 1 \pm \sqrt{1-x}$, 故存在域为 $x \leq 1$, 且图形有两
支, 又因 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1-t)}$, 故当 $t > 1$ 时图形呈凸状, 而
当 $t < 1$ 时图形呈凹状.

当 $x = 0$ 时, $t = 0$ 或 $t = 2$, 此时 $y = 0$ 或 $y = -2$.

当 $y = 0$ 时, $t = 0, +\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$, 此时 $x = 0, 0.464$ 或 -6.464 .

图形如图 2.121 所示. 图中主要点的坐标:

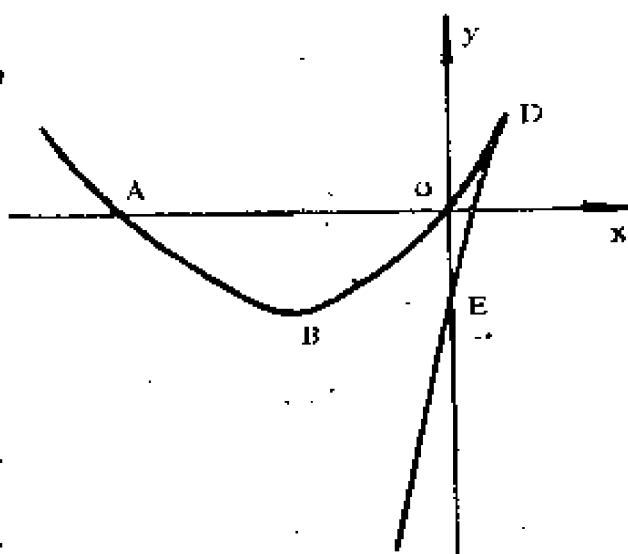


图 2.121

$A(-6.464, 0), B(-3, -2), D(1, 2), E(0, -2)$.

1533. $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}$.

解 $x'_t = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, y'_t = -\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}$. 考虑 $x'_t = 0$,

$y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ 的 t 值: $t = 0, \pm 1$ 及 2.

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{1}{2}$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\frac{1}{2}$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, 1)$	-	-	由 0 下降到 $-\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(1, 2)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 4	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{2}{3}$
$(2, +\infty)$	+	-	由 4 上升到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2},$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 及 $(4, +\infty)$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0$, 因而

曲线下降.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t-1)^3(t^4+3t^2+4t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}, \text{ 令 } \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ 得 } t$$

≈ -0.33 , 经判别此时对应于拐点 $(-0.08, 0.30)$.

令 $\frac{dx}{dy} = 0$ 得 $t = 0, 2$ 及 -1 , 其中当 $t = 0$ 及 2 时有垂直切线, 切点为 $(0, 0)$ 及 $(4, \frac{2}{3})$. 当 $t = -1$ 时, $x = -\frac{1}{2}$,

此为垂直渐近线. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} y = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t}{t^2-1} = \infty.$$

斜渐近线为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{x}{2} \right) = -\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t+2)}{2(t+1)} = -\frac{3}{4}.$$

又当 $x \rightarrow +\infty$, 即当 $t \rightarrow 1+0$ 时, $y \rightarrow +\infty$ 或当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0$;

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 即当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0$ 或当 $t \rightarrow 1-0$ 时, $y \rightarrow -\infty$.

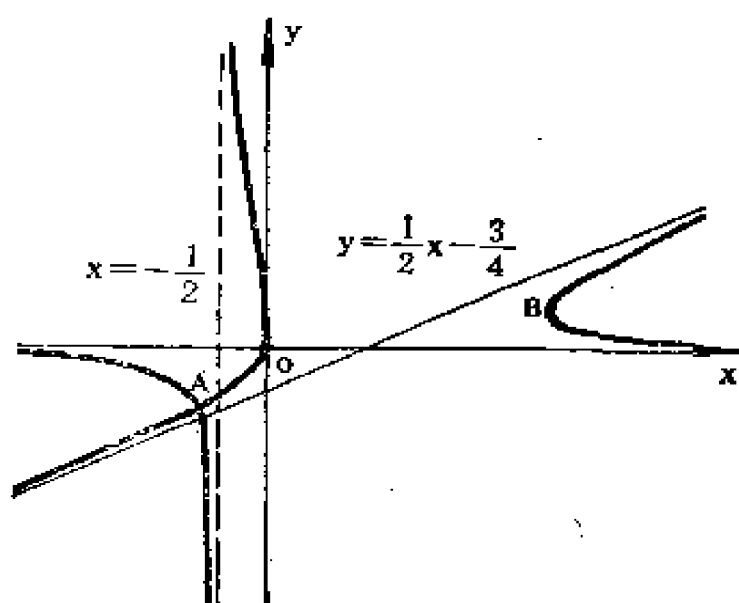


图 2.122

总之, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ 或 0 , $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ 或 $-\infty$.

图形如图 2.122 所示. 图中主要点的坐标:

$$A\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right), B\left(4, \frac{2}{3}\right).$$

1534. $x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{1}{1+t^2}.$

解 由于以 $-t$ 换 t , x 及 y 值不变, 故只须考虑 t 的正值. 又因 $t^2 = \frac{x}{1+x}$, 故 $x \geq 0$ 或 $x \leq -1$.

$$x'_t = \frac{2t}{(1-t^2)^2}, y'_t = \frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 < 0, \text{ 曲线下降.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}, \text{ 当 } |t| < 1 \text{ 时图形呈凹状, 当}$$

$|t| > 1$ 时图形呈凸状.

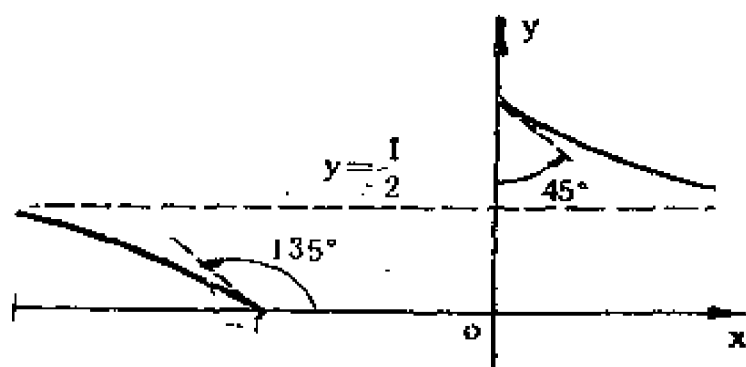


图 2.123

考虑 $x'_t = 0$, $y'_t = 0$ 及 x_t , y_t 趋于 ∞ 的 t 值:

$t = 0, t = 1$.

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(0, 1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 1 下降到 $\frac{1}{2}$
$(1, +\infty)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 -1	由 $\frac{1}{2}$ 下降到 0

渐近线为 $y = \frac{1}{2}$. 事实上

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}.$$

在点 $(-1, 0)$ 处 ($t = +\infty$), $\frac{dy}{dx} = -1$; 而在点 $(0, 1)$

处 ($t = 0$) 仍有 $\frac{dy}{dx} = -1$, 这说明在这两点处的切线均

与 Ox 轴成 135° 的角, 这两点且为边界极值点.

图形如图 2.123 所示.

1535. $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}.$

解 $x'_t = \frac{e^t - 1}{e^t},$

$y'_t = \frac{2(e^{2t} - 1)}{e^{2t}},$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2(e^t + 1)}{e^t},$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{e^t - 1}.$

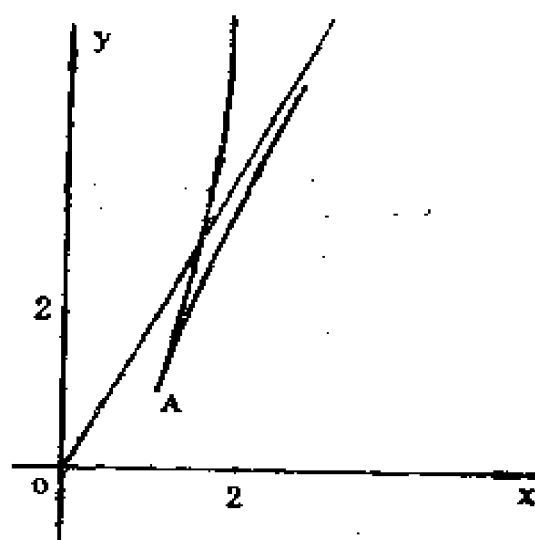


图 2.124

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图 形
$(-\infty, 0)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 1	由 $+\infty$ 下降到 1	+	+	上升, 凹状
$(0, +\infty)$	+	+	由 1 上升到 $+\infty$	由 1 上升到 $+\infty$	+	-	上升, 凸状

渐近线: $y = 2x$. 事实上, 有

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [(2t + e^{-2t}) - 2t - 2e^{-t}] = 0.$$

当 $t = 0$ 时, 对应于曲线上的点 $A(1, 1)$. 此点的导数

$\frac{dy}{dx} = 4$. 当 $t = -\ln 2$ 时, 曲线与渐近线相交, 图形如图 2.124 所示.

1536. $x = a \cos 2t$, $y = a \cos 3t$ ($a > 0$).

解 由于 $a \cos 2(t + 2\pi) = a \cos 2t$ 及 $a \cos 3(t + 2\pi) = a \cos 3t$, 因此, 我们只须考虑 t 在 $(0, 2\pi)$ 内变化时, x 及 y 的变化情况.

$$x'_t = -2a \sin 2t,$$

$$y'_t = -3a \sin 3t.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin 3t}{2 \sin 2t}.$$

考虑 $x'_t = 0$, $y'_t = 0$ 的值:

$$t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \text{ 及 } 2\pi.$$

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(0, \frac{\pi}{3})$	-	-	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 a 下降到 $-a$	+	上升
$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	-	+	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 $-a$ 上升到 0	-	下降
$(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$	+	+	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 上升到 a	+	上升
$(\frac{2\pi}{3}, \pi)$	+	-	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 a 下降到 $-a$	-	下降

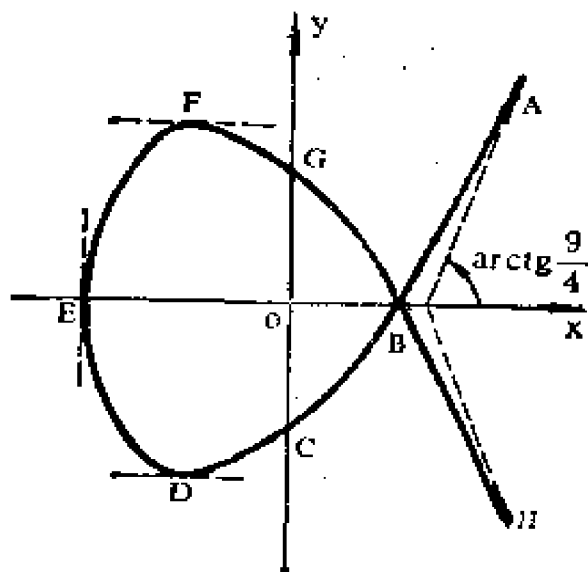


图 2.125

$\left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$	-	+	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 上升到 a	-	下 降
$\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$	-	-	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 a 下降到 0	+	上 升
$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$	+	-	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 下降到 $-a$	-	下 降
$\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$	+	+	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 $-a$ 上升到 a	+	上 升

当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0$, 此时 $x = -\frac{a}{2}$, $y = -a$;

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = \infty$ (t 从小于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = -\infty$; 从大于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = +\infty$), 此时 $x = -a$, $y = 0$;

当 $t = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0$, 此时 $x = -\frac{a}{2}$, $y = a$;

当 $t = \pi$ 时, 利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}$, 此时 $x = a$, $y = -a$;

当 $t = 0$ 时, 利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4}$, 此时 $x = a$, $y = a$.

图形如图 2.125 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(a, a), B\left(\frac{a}{2}, 0\right), C\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2}, -a\right), E(-a, 0), F\left(-\frac{a}{2}, a\right),$$

$$G(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a), H(a, -a).$$

1537. $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t.$

解 $\sqrt{x} = \cos^2 t, \sqrt{y} = \sin^2 t$, 相加即得

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$$

图形如图 2.126 所示*).

*) 参看 1531 题.

1538. $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}.$

解 当 $t > 0$ 时, x 及 y 才有意义.

当 $0 < t \leq 1$ 时, 令 $t' = \frac{1}{t}$, 则 $t' \geq 1$, 且 $x = -\frac{\ln t'}{t'}, y = -t' \ln t'$, 所以, 图形关于直线 $x + y = 0$ 对称.

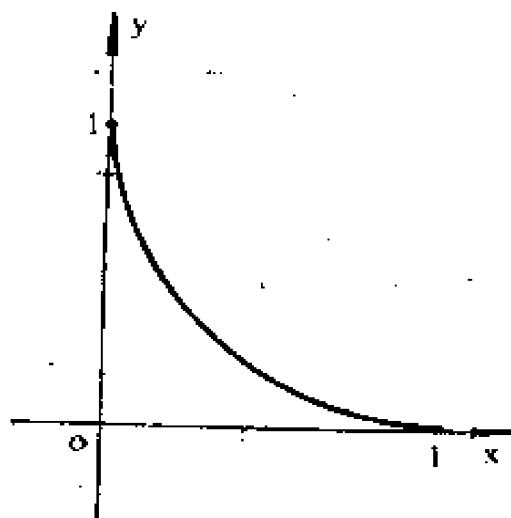


图 2.126

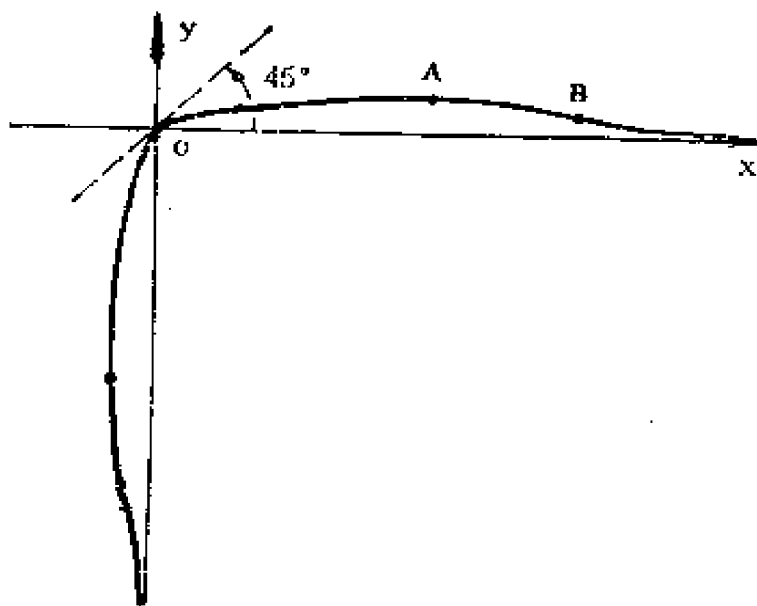


图 2.127

以下讨论图形的极值点，凹凸性及拐点，不妨设 $t \geq 1$ ：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln^2 t - 4}{t^3(1 + \ln t)^2}.$$

令 $1 - \ln t = 0$ ，得 $t = e$ 。经判别此时图形有极大值点： $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$ 。

令 $2\ln^2 t - 4 = 0$ ，得 $t = e^{\sqrt{2}}$ ，相应的点 $B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ 为图形的拐点。

当 $1 \leq t \leq e^{\sqrt{2}}$ ，即当 $0 \leq x \leq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时，图形呈凸状。当 $t \geq e^{\sqrt{2}}$ ，即当 $x \geq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时，图形呈凹状。

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	-	+	由 0 下降到 $-\frac{1}{e}$	由 $-\infty$ 上升到 $-e$	-	下降
$\left(\frac{1}{e}, e\right)$	+	+	由 $-\frac{1}{e}$ 上升到 e	由 $-e$ 上升到 $\frac{1}{e}$	+	上升
$(e, +\infty)$	+	-	由 e 上升到 $+\infty$	由 $\frac{1}{e}$ 下降到 0	-	下降

曲线通过点 $(0, 0)$ ，在此点切线的倾角为 45° 。

水平渐近线为 $y = 0$ 。事实上，

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t}}{1} = 0.$$

垂直渐近线为 $x = 0$. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow +0} y = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\ln t}{t} = -\infty.$$

图形如图 2.127 所示.

1539. $x = \frac{a}{\cos^3 t}, \quad y = a \operatorname{tg}^3 t \quad (a > 0).$

解 将此参数方程化为直角坐标系下的方程:

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

显然, $|x| \geq a$. 且图形对于两坐标轴都对称, 故只须考虑在第一象限部分的函数图形. 由于

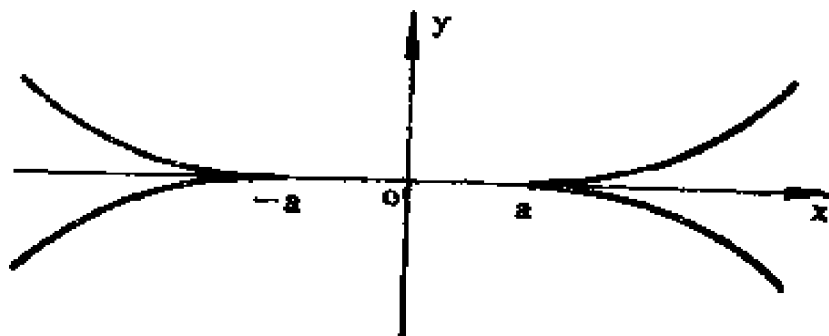


图 2.128

$$y' = x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}, \quad y'' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} (y^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}).$$

而当 $x > 0, y > 0$ 时, 有 $x > y$. 从而有

$$y' > 0, \quad y'' > 0,$$

故图形上升且呈凹状.

在 $(a, 0)$ 点的切线的倾角为 0° . 图形如图 2.128 所示.

1540. $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ ($a > 0$).

解 当 t 用 $-t$ 换时, x 的大小不变符号相反, 而 y 却不变, 故图形对于 Oy 轴对称.

$$x'_t = a(\operatorname{ch} t - 1), \quad y'_t = a \operatorname{sh} t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t + 1}{e^t - 1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4e^{2t}}{a(e^t - 1)^4}.$$

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图 形
$(-\infty, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0	-	-	下 降
$(0, +\infty)$	+	+	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 上升到 $+\infty$	+	-	上 升

当 $t \rightarrow -0$ 时, $x \rightarrow -0$, $\frac{dy}{dx} \rightarrow -\infty$;

当 $t \rightarrow +0$ 时, $x \rightarrow +0$, $\frac{dy}{dx} \rightarrow +\infty$. 因此在 $(0, 0)$ 点的切线垂直于 Ox 轴.

图形如图 2.129 所示.

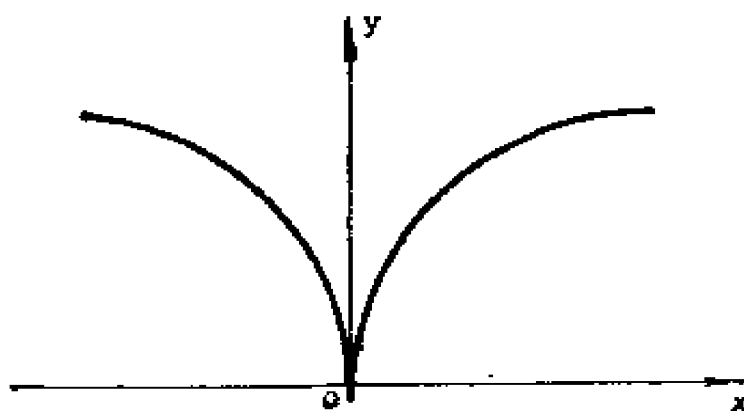


图 2.129

把下列曲线方程变成参数式，然后作出这些曲线：

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$).

解 设 $y = tx$ ，代入方程，并消去 x^2 ，即得

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$x'_t = \frac{6a(\frac{1}{2} - t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

考虑 $x'_t = 0$ ， $y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于无穷的 t 值：

$$t = -1, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ 及 } \sqrt[3]{2}.$$

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 0 上升到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{2a}$
$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$	-	+	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 上升到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$	-	-	由 $\sqrt[3]{2a}$ 下降到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)},$$

当 $t=0$ 时, $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$; 当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$x=0, y=0, \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)} = \infty. \text{ 这说明,}$$

坐标原点是曲线的
二重点. 曲线的一
支与 Ox 轴相切,
一支与 Oy 轴相切.

渐近线: $x+y$
 $+a=0$. 事实上,

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} \\ &= -1, \end{aligned}$$

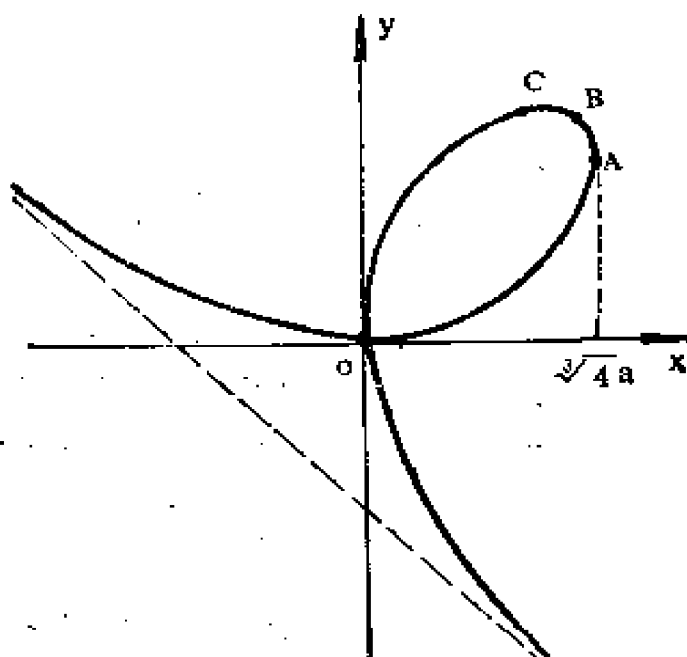


图 2.130

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2 + 3at}{1+t^3} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{6at + 3a}{3t^2} = -a.$$

图形如图 2.130 所示. 图中主要点的坐标:

$$\begin{aligned} A(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}), B\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right), \\ C(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}). \end{aligned}$$

1542. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

解 显见曲线关于两坐标轴对称,同时关于直线 $y=x$ 对称.

设 $x=ty$, 则当 $y \neq 0$ 时, 得

$$y = \pm \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}.$$

根据对称性, 不妨限于考察方程

$$\begin{cases} x = t\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}, \\ y = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

由于 $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y$, 故曲线界于纵轴正半轴与直线 $y=x$ 之间, 由此根据对称性即可作出全部图形. 当 t 由 0 连续变到 1 时, 曲线上的点 $(0,1)$ 连续变化到点 $(1,1)$. 由于

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}} + \sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}} \cdot \frac{t^2(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{t^4+1}{t^2+1}} \cdot \frac{t(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2}.$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 得 $t = 0, \sqrt{\sqrt{2}-1}$. 相应地, 有

$$x = 0, y = 1; x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71, y \approx 1.10.$$

经判别知, 当 $x = 0$ 时 y 取得极小值; 当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,

y 取得极大值. 类似地, 当 $y=0$ 时, x 取得极小值 $x=-1$; 当 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, x 取得极大值 $x\approx 1.10$.

由对称性即得知: 当 $x=0$ 时, 有极小值 $|y|=1$; 当 $|x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 有极大值 $|y|\approx 1.10$; 当 $y=0$ 时有极小值 $|x|=1$; 当 $|y|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 有极大值 $|x|\approx 1.10$.

值得注意的是, 当 $t=1$ 时即在点 $(1, 1)$ 处, $\frac{dy}{dx}=-1$, 因而曲线在点 $(1, 1)$ 光滑联接.

原点 $(0, 0)$ 是一个孤立点, 再计算几点的坐标 ($0\leq t\leq 1$):

t	0	0.2	0.4	0.6	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0.8	0.9	1
x	0	0.20	0.42	0.65	0.71	0.83	0.94	1
y	1	1.02	1.06	1.09	1.10	1.08	1.04	1

曲线与两坐标轴的交点为 $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 及 $(0, -1)$, 如图 2.131 所示.

1543. $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

解 设 $y=tx$, 代入原方程, 即得

$$x = \frac{1-t^3}{t^2},$$

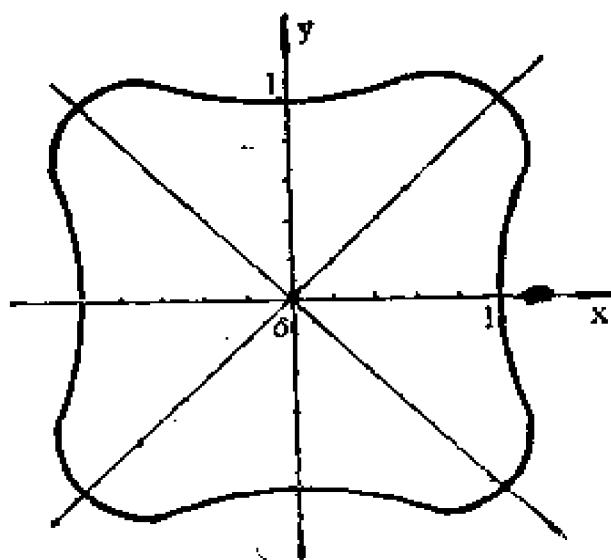


图 2.131

$$y = \frac{1-t^3}{t} \quad (t \neq 0),$$

$$x'_t = -\frac{2+t^3}{t^3}, \quad y'_t = -\frac{1+2t^3}{t^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}.$$

令 $x'_t = 0$, $y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ , 得

$$t = -\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0.$$

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	-	+	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	-	下降
$(-\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 上升到 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	+	上升
$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$	+	-	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $+\infty$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 下降到 $-\infty$	-	下降
$(0, +\infty)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	+	上升

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t = -\sqrt[3]{2}} = \infty, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = 0,$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1.$$

图形通过点 $A(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{2}})$, $B(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}})$

及 $O(0,0)$ 。如图 2.132 所示。

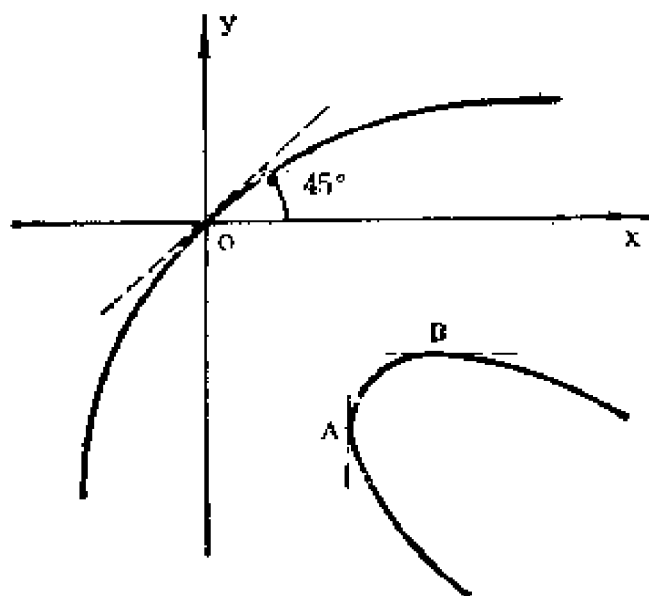


图 2.132

1544. $x^y = y^x$ ($x > 0$, $y > 0$).

解 由方程显见直线 $y=x$ 是图形的一部分。对于 $y \neq x$ 的部分，图形显然关于直线 $y=x$ 对称。

设 $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$ ，则 $y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$ ，即当 $x \neq y$ 时，曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \\ y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}. \end{cases}$$

由条件 $x > 0$, $y > 0$ 知， t 满足 $-1 < t < +\infty$ ，
由于

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} y = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = 1;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y = +\infty,$$

故直线 $x=1$ 和 $y=1$ 是曲线的渐近线. 又因

$$\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} y = e,$$

故点 (e, e) 是曲线上的二重点. 由于

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}} \left[\frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \right],$$

$$\frac{dx}{dt} = (1+t)^{\frac{1}{t}} \left[-\frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} \right],$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 + \frac{t^2}{t - (1+t)\ln(1+t)} \right].$$

容易证明:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

并且当 $t \in (0, +\infty)$, 从而 $x \in (1, e)$ 时, 恒有 $\frac{dy}{dx} < 0$.

事实上, 设

$$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t],$$

则 $g(0) = 0$, 并且容易证明

$$g'(t) = 2t - \ln(1+t) > 0,$$

$$(1+t)\ln(1+t) - t > 0.$$

从而, 有

$$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t] > 0,$$

即

$$\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} > 1.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 - \frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t)-t} \right] < 0.$$

由对称性知, 对于 $t \in (-1, 0)$, 也有 $\frac{dy}{dx} < 0$. 而当 $t = 0$ 时, 有

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

所以, 曲线始终是单调下降的, 并呈凹状, 无极值和拐点. 对应于 t 的变化范围 0 至 1.

计算几点坐标如下:

t	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-0.9	$t \rightarrow -1$
x	e	3.05	3.59	4.50	7.48	12.9	$x \rightarrow +\infty$
y	e	2.44	2.15	1.84	1.49	1.29	$y \rightarrow 1$

综上所述, 曲线的图形由两部分组成, 一部分是直线, 另一部分是对称于直线 $y = x$ 的曲线 (图 2.133).

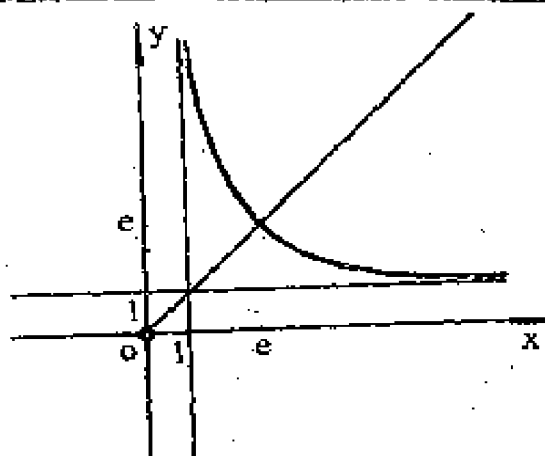


图 2.133

1545. 作出曲线 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$ 的图形.

解 显见曲线的图形关于两坐标轴是对称的, 故只须在第一象限 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 范围内进行讨论. 考虑渐近线:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1})}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \left(\operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \operatorname{ch} x \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 x + 1}{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = 1.
\end{aligned}$$

为求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x)$, 令

$$u = y - x = \ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}) - x.$$

因为

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} e^u &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}}{e^x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}}}{e^x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1})}{e^x \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = 1,
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0.$$

因此, 直线 $y = x$ 是原曲线的渐近线.

因为当 $y = 0$ 时 $\operatorname{ch} y$ 取最小值 $\operatorname{ch} y = 1$, 所以, x 必须满足

$$\operatorname{ch}^2 x \geqslant 2 \text{ 或 } |x| \geqslant \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88,$$

并且当 $y = 0$ 时, $|x| = \ln(1 + \sqrt{2})$.

曲线方程也可表示成

$$(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y)(\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y) = 1,$$

从而令

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = t,$$

则

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{1}{t}.$$

所以, 对于第一象限部分的曲线方程可表示为

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \frac{t + \frac{1}{t}}{2}, \\ \operatorname{ch} y = \frac{\frac{1}{t} - t}{2}, \end{cases} \quad (0 < t \leq \sqrt{2} - 1).$$

由原方程知

$$2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y \cdot y' = 0$$

或

$$y' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y} > 0.$$

因而, 曲线是单调上升的.

又由于

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \cdot y' \cdot \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y)^2} \\ &= \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y)^3}, \end{aligned}$$

而

$$(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y)$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{ch}^2 y) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x \\
& = \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{sh}^2 y - \operatorname{sh}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) \\
& = \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) \\
& = (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) (\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) \\
& = -(\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) < 0.
\end{aligned}$$

于是, $y'' < 0$ 恒成立. 所以, 曲线呈凸状.

计算几点的坐标如下:

t	$\sqrt{2}-1$	0.4	0.3	0.2	0.1	$t \rightarrow 0$
x	$\ln(1+\sqrt{2})$	0.92	1.07	1.61	2.31	$x \rightarrow +\infty$
y	0	0.33	0.93	1.53	2.23	$y \rightarrow +\infty$

曲线形状如图 2.134 所示.
作出下列用极坐标 (φ, r) ($r \geqslant 0$) 表示的函数的图形:

1546. $r = a + b \cos \varphi$
($0 < a \leqslant b$).

解 当 $a = b$ 时,
 $r = a(1 + \cos \varphi)$,

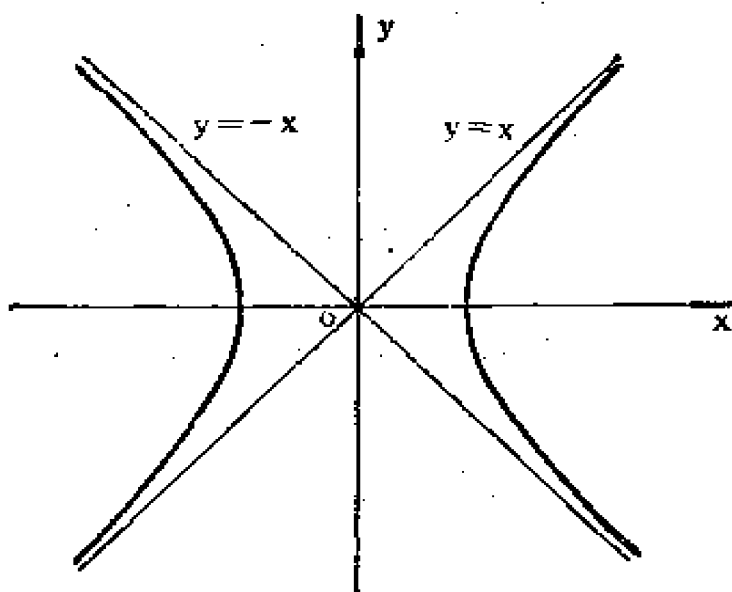


图 2.134

这就是心脏线, 如图 2.135 所示.

当 $0 < a < b$ 时, 其几何轨迹叫做蚶线, 由于 $r(-\varphi) = r(\varphi)$, 故图形关于极轴对称. 由于当 $r \geqslant 0$ 时,

$|\varphi| \leq \alpha \doteq \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$, 故当 $\varphi = 0$ 时 r 有极大值 $r = a + b$; 当 $\varphi = \pm \alpha$ 时 r 有边界的极小值 $r = 0$. 又由于 $r' = -b \sin \varphi < 0$, 故当 φ 由 0 变到 α 时, r 由 $a + b$ 变到 0.

当 $r < 0$ 时, $\alpha < |\varphi| \leq \pi$, 仿照上述讨论, r 由 0 下降到 $a - b$.

极点 O 为二重点, 如图 2.136 所示. 如果不考虑 $r < 0$, 则极点 O 不是二重点.

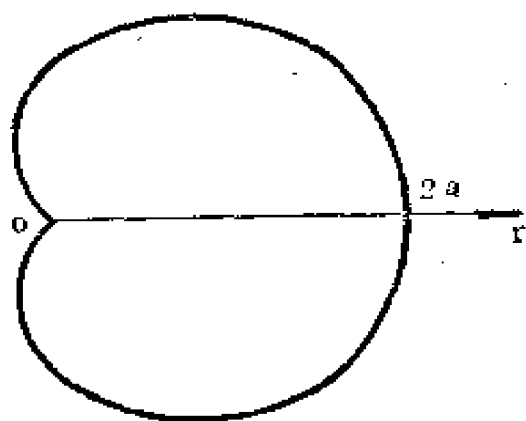


图 2.135

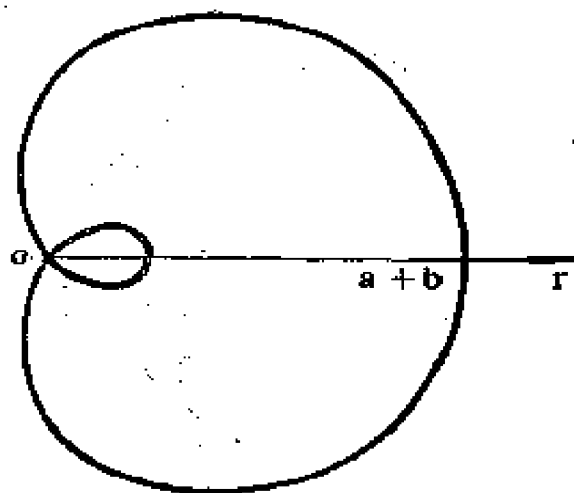


图 2.136

1547. $r = a \sin 3\varphi$ ($a > 0$).

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$, 故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数.

函数的存在域为:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}; \quad \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi; \quad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$

为此, 只要讨论 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ 即可.

$$r' = 3a \cos 3\varphi \begin{cases} \geq 0, & \varphi \in (0, \frac{\pi}{6}), \\ < 0, & \varphi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}), \end{cases}$$

故当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时 r 有极大值 $r = a$; 当 $\varphi = 0$ 及 $\frac{\pi}{3}$ 时,

r 有极小值 $r = 0$.

射线 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi =$

$\frac{5\pi}{6}$ 及 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 为

图形的三对称轴.

曲线在点 O 自交且为三重点, 整个图形有三个形状相同的瓣. 如图 2.

137 所示.

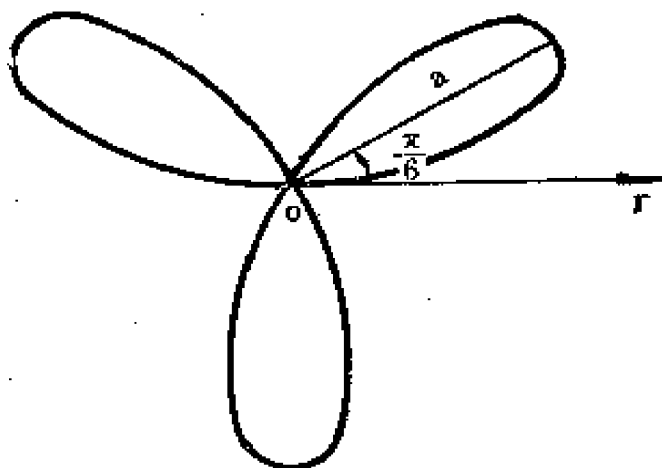


图 2.137

1548. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} \quad (a > 0).$

解 由于 $r(\varphi + \frac{2\pi}{3}) = r(\varphi)$, 故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周

期的函数. 显然图形关于极轴对称.

函数的存在域为:

$$|\varphi| < \frac{\pi}{6} \text{ 及 } \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}.$$

为此只要讨论 $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ 即可.

$$r' = \frac{3a \sin 3\varphi}{2(\cos 3\varphi)^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} < 0, & \varphi \in \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right), \\ > 0, & \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \end{cases}$$

故当 $\varphi = 0$ 时有极小值 $r = a$. 当 φ 由 0 单调地增大到 $\frac{\pi}{6}$ 时, r 由 a 单调地增大到 $+\infty$, 在这种意义上,

$\varphi = \frac{\pi}{6}$ 为曲线的渐近线. 同样地 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 也为渐近线.

由周期性可知, 当 $\varphi = \pm \frac{2\pi}{3}$ 时有极小值 $r = a$.

$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi = \pm \frac{5\pi}{6}$ 均为曲线的渐近线.

最后还要研究在点 $(a, 0)$ 附近的状况, 为此, 只要考虑在该点切线的斜率:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi},$$

再以 $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{3a \sin 3\varphi}{2(\cos 3\varphi)^{\frac{3}{2}}}$ 代入上式, 即得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3a \sin 3\varphi \sin \varphi + 2a \cos \varphi \cos 3\varphi}{2a \sin 3\varphi \cos \varphi - 2a \sin \varphi \cos 3\varphi}.$$

于是,

$$\left. \operatorname{tg} \alpha \right|_{\varphi=0} = \infty,$$

即在 $(a, 0)$ 点曲线的切线垂直于极轴. 如图 2.138 所示.

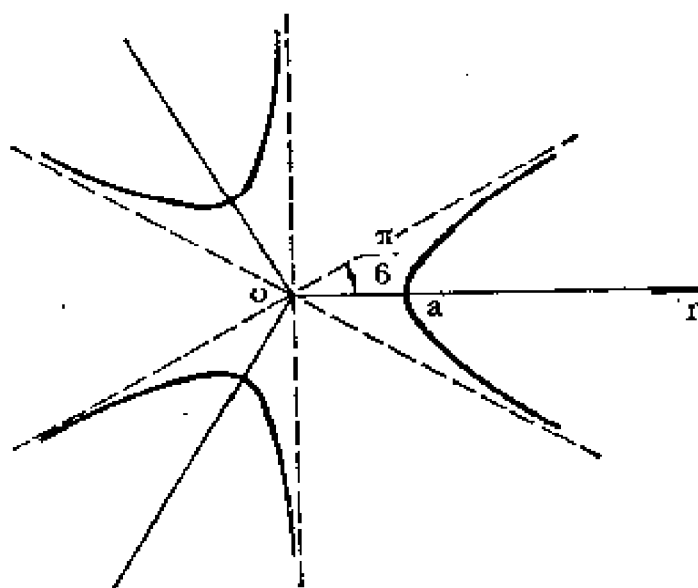


图 2.138

1549. $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$, 其中

$$\varphi > 1 \ (a > 0).$$

解 由于

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1} r = \lim_{\varphi \rightarrow 1} a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a \operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \varphi} = 0,$$

从而曲线以 $\varphi = 1$ 为渐近线, 以极点为渐近点. 又

$$\frac{dr}{d\varphi} = a \cdot \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}(\varphi - 1) - \operatorname{th} \varphi}{(\varphi - 1)^2}$$

$$= a \cdot \frac{(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi}{(\varphi - 1)^2 \operatorname{ch}^2 \varphi},$$

当 $1 < \varphi < +\infty$ 时恒有 $(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi < 0$. 事实上,

令

$$y(\varphi) = (\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi,$$

则 $y(1) = -\frac{1}{2}\text{sh}2 < 0$, 而

$$y'(\varphi) = 1 - \text{ch}2\varphi < 0,$$

故有 $y(\varphi) \leq y(1) < 0$. 这就证明了当 $1 \leq \varphi < +\infty$ 时

恒有 $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, 即当 φ 增大时 r 单调减小.

为考察当 $r \rightarrow +\infty$ 时曲线的变化趋势, 令

$$y_1 = x \text{tg} 1, \quad y_2 = a \frac{\text{th}\varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi.$$

由于

$$y_2 - y_1 = a \frac{\text{th}\varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - x \text{tg} 1$$

$$= a \frac{\text{th}\varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - a \frac{\text{th}\varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \text{tg} 1$$

$$= a \frac{\text{th}\varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - a \frac{\text{th}\varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \text{tg} 1$$

$$= a \text{th}\varphi \cos \varphi \frac{\text{tg}\varphi - \text{tg} 1}{\varphi - 1},$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 1} (y_2 - y_1) &= \lim_{\varphi \rightarrow 1} a \text{th}\varphi \cos \varphi \frac{\text{tg}\varphi - \text{tg} 1}{\varphi - 1} \\ &= \frac{a \text{th} 1}{\cos 1}. \end{aligned}$$

于是, 在直角坐标系下, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时, 曲线

$$r = a \frac{\text{th}\varphi}{\varphi - 1} \text{ 以直线}$$

$$y = x \operatorname{tg} 1 + a \frac{\operatorname{th} 1}{\cos 1}$$

为渐近线.

计算几点的坐标如下表:

φ	1.2	1.4	$\frac{\pi}{2}$	1.6	1.8	2	2.5	π	5	$\frac{3\pi}{2}$	2π	10	$\varphi \rightarrow +\infty$
r	$4.15a$	$2.20a$	$1.59a$	$1.53a$	$1.17a$	$0.96a$	$0.65a$	$0.46a$	$0.24a$	$0.21a$	$0.18a$	$0.11a$	$r \rightarrow 0$

综上所述知, 曲线是螺状线, 如图 2.139 所示.

1550. $\cos \varphi = \frac{r-1}{r^2}.$

解 由方程容易判定, 曲线关于极轴对称. 因而只需在 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 范围内研究图形. 方程可化为

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}.$$

由于必有 $1-4\cos\varphi \geq 0$, 故角 φ 的最小值应为

$$\varphi = \arccos \frac{1}{4} \approx 75^\circ 30',$$

对应的 $r=2$. 由 $r>0$ 知曲线方程为

$$r = \frac{1 + \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \quad \left(\arccos \frac{1}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right); \quad (1)$$

$$r = \frac{1 - \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \right). \quad (2)$$

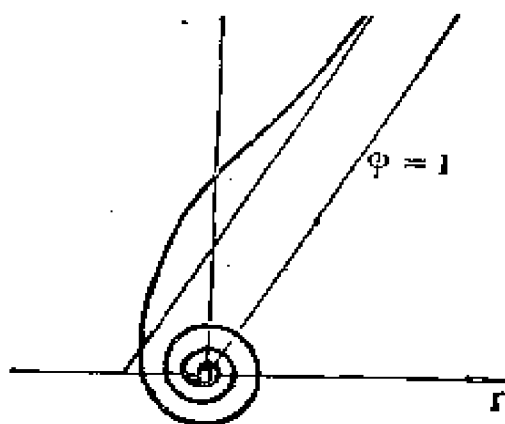


图 2.139

首先研究方程(1)所表示的曲线的图形. 因为随着 φ 增加, $2\cos\varphi$ 减小, $\sqrt{1-4\cos\varphi}$ 增大, 因而 r 随 φ 增加而单调增加, 事实上, 易证 $\frac{dr}{d\varphi} > 0$. 又

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{1 + \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = +\infty,$$

所以, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时有渐近线 $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 又由 $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$, 得

$$x = \frac{r-1}{r},$$

故当 $r \rightarrow +\infty$ 时 $x \rightarrow 1$, 即当 $r \rightarrow +\infty$ 时, 曲线与直线 $r = \frac{1}{\cos\varphi}$ 无限接近 (直角坐标系下 $x = 1$ 为渐近线).

再来研究拐点, 由

$$\frac{d\cos\varphi}{dr} = \frac{r^2 - 2r(r-1)}{r^4} = \frac{2-r}{r^3},$$

$$-\sin\varphi \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2-r}{r^3},$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^3}{r-2} \sin\varphi,$$

从而

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{3r^2(r-2) - r^3}{(r-2)^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r^3(2r^3-6r^2)}{(r-2)^3} \sin^2 \varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos \varphi \\
&= \frac{r^5(2r-6)}{(r-2)^3} \left[1 - \frac{(r-1)^2}{r^4} \right] + \frac{r^3}{r-2} \cdot \frac{r-1}{r^2} \\
&= \frac{r \{ (2r-6)[r^4 - (r-1)^2] + (r-2)^2(r-1) \}}{(r-2)^3}.
\end{aligned}$$

由 $r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$ 得 $2r^4 - 3r^2 + 8r - 6$

$= 0$, 经判别知: 拐点的 r 介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 1 之间.

再来研究方程(2). 由于

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1 - \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = 1,$$

事实上, 由 $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$ 也可得: 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $r =$

1. 因而点 $(1, \frac{\pi}{2})$ 是曲线上的点. 又

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\varphi} &= \frac{1}{(2\cos\varphi)^2} \left\{ (1-4\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} (-2\sin\varphi) \right. \\
&\quad \left. \cdot (2\cos\varphi) + 2\sin\varphi(1 - \sqrt{1-4\cos\varphi}) \right\} \\
&= \frac{2\sin\varphi[(1 - \sqrt{1-4\cos\varphi})\sqrt{1-4\cos\varphi} - 2\cos\varphi]}{(2\cos\varphi)^2 \sqrt{1-4\cos\varphi}} \\
&= \frac{2\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi} - (1-2\cos\varphi)]}{(2\cos\varphi)^2 \sqrt{1-4\cos\varphi}}. \tag{1}
\end{aligned}$$

容易证明: $f(\varphi) = \sqrt{1-4\cos\varphi} - (1-2\cos\varphi) \leq 0$. 事实上, 有

$$f'(\varphi) = 2 \sin \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{1-4 \cos \varphi}} - 1 \right) < 0 \quad \text{且} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

又因当 $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, (1) 的其它因子均为正, 故得

$\frac{dr}{d\varphi} < 0$, 即 r 随 φ 的增加而单调下降, 并且当 $\varphi = \pi$ 时达到极小值

$$r = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

事实上, $\frac{dr}{d\varphi}$ 经过 $\varphi = \pi$ 从负变到正.

计算几点的坐标列表如下:

φ	$75^{\circ}30'$	$76^{\circ}5'$	$77^{\circ}10'$	81°	84°	87°	$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$	90°	105°	140°	155°	180°
r	2	2.5	3	5	8.85	19.7	$r \rightarrow +\infty$	1	0.81	0.66	0.63	0.62

曲线如图 2.140

所示.

作出下列曲线族的图形 (a 表参变量):

1551. $y = x^2 - 2x + a.$

解 将方程变形:

$$\begin{aligned} y - (a-1) \\ = (x-1)^2. \end{aligned}$$

作平移

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' + (a-1), \end{cases}$$

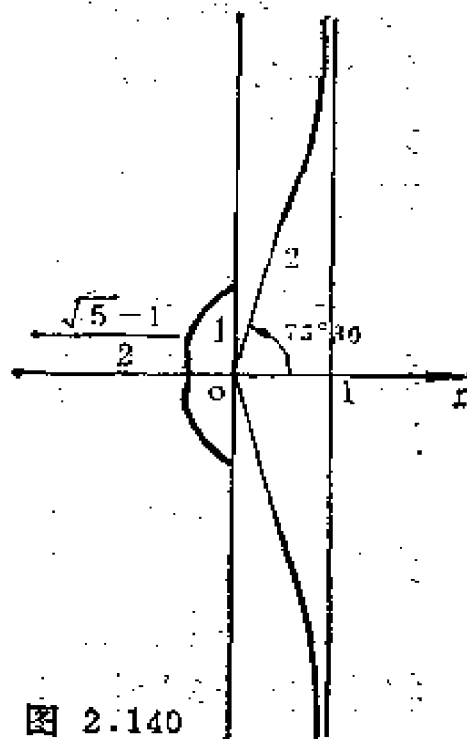


图 2.140

即得标准方程

$$y' = x'^2,$$

此为向上凹的抛物线。

当 $a > 1$ 时, 抛物线的顶点位于第一象限; 当 $a < 1$ 时, 抛物线的顶点位于第四象限; 当 $a = 1$ 时, 抛物线的顶点在 $(1, 0)$ 。不论 a 为何值, 此抛物线族的顶点位于直线 $x = 1$ 上, 如图 2.141 所示。

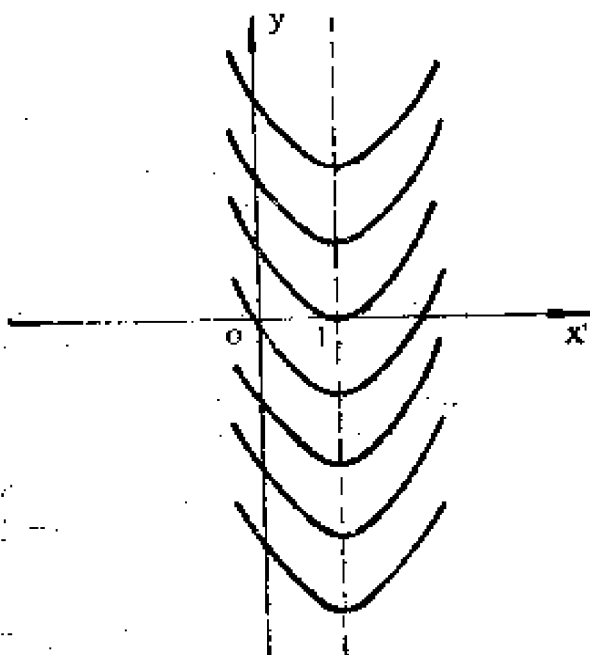


图 2.141

1552. $y = x + \frac{a^2}{x}.$

解 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$ 。当 $a \neq 0$ 时为双曲线族, 其图形可由

$$y = x \text{ 和 } y = \frac{a^2}{x}$$

相加而成, 它们均以直线

$$y = x \text{ 和 } x = 0$$

为渐近线。

当 $x = |a|$ 时, 有极小值 $y = 2|a|$; 当

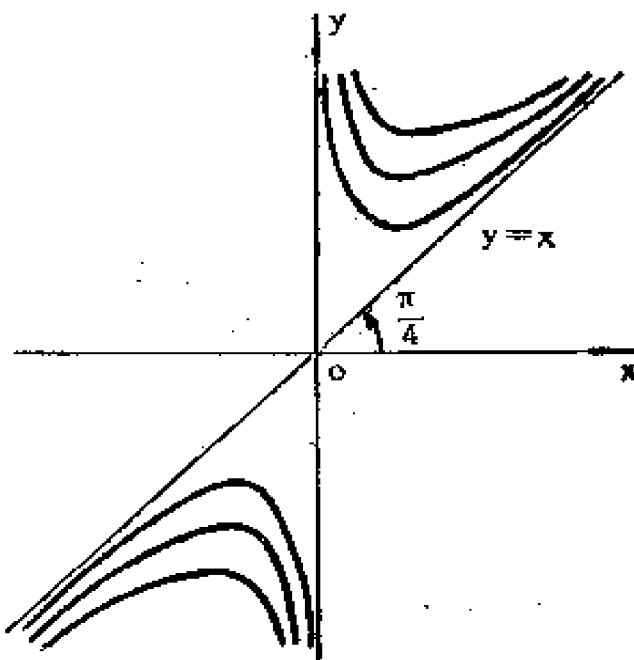


图 2.142

$x = -|a|$ ($a \neq 0$) 时有极大值 $y = -2|a|$, 如图 2.142 所示.

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

解 $y - x = \pm \sqrt{a(1-x^2)}$, 即 $(y-x)^2 + ax^2 = a$.

作仿射变换

$$\begin{cases} \xi_1 = -x + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$$

则原方程变形为

$$\xi_1^2 + a\xi_2^2 = a.$$

当 $0 < a < +\infty$ 时为椭圆族; 当 $-\infty < a < 0$ 时为双曲线族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$.

全族曲线均通过点 $(-1, -1)$ 及 $(1, 1)$.

$$y' = 1 \mp \frac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}. \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得}$$

$$x^2 = \frac{1}{1+a},$$

则 $1+a > 0$ 或 $a > -1$.

$$y'' = \mp \frac{a^2}{[a(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

当 $y \geq x$ 时上式取负号; 当 $y \leq x$ 时上式取正号.

于是, 当 $y \geq x$ 时, 有

$$(1) \text{ 若 } a > 0, \text{ 则当 } x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}} \text{ 时, 由于 } y'' < 0,$$

故取得极大值 $y = \sqrt{1+a}$.

若 $-1 < a < 0$, 则当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时也取得极大值 $y = -\sqrt{1+a}$.

当 $x = \mp 1$ 时取得边界极小值 $y = \mp 1$ ($a \neq 0$).

(2) 由于 $y'' < 0$, 故曲线是凸的.

当 $y \leq x$ 时, 有

(1) 若 $a > 0$, 当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y = -\sqrt{1+a}.$$

若 $-1 < a < 0$, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y = \sqrt{1+a}.$$

当 $x = \mp 1$ 时取得边界极大值 $y = \mp 1$.

(2) 由于 $y'' > 0$, 故曲线是凹的.

此外, 当 $a < 0$ 时, 曲线有渐近线, 容易求得它们为 $y = (1 \pm \sqrt{-a})x$.

椭圆族、双曲线族与直线已为大家所熟悉, 故图略.

1554. $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}.$

解 原方程可变形为

$$y - \frac{x}{2} = e^{-ax}.$$

因此, 若作仿射变换

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{x}{2} + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$$

则原方程化成标准形式

$$\xi_1 = e^{-ax/2}.$$

当 $a \neq 0$ 时, 表示一指数曲线族; 当 $a = 0$ 时, 表示直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$.

全族曲线均通过点 $(0, 1)$.

$$y' = \frac{1}{2} - ae^{-ax}. \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = \frac{1}{a} \ln 2a.$$

$$y'' = a^2 e^{-ax} > 0, \text{ 故曲线呈凹状.}$$

若 $a > 0$, 则当 $x = \frac{1}{a} \ln 2a$ 时有极小值

$$y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a);$$

若 $a \leq 0$, 则因 $y' > 0$, 故函数 y 是增大的.

现求渐近线: 当 $a > 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xe^{ax}} \right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = 0,$$

故渐近线为 $y = \frac{x}{2}$.

同法求得当 $a < 0$ 时, 渐近线也为 $y = \frac{x}{2}$, 然此时应考虑 $x \rightarrow -\infty$.

如图 2.143 所示.

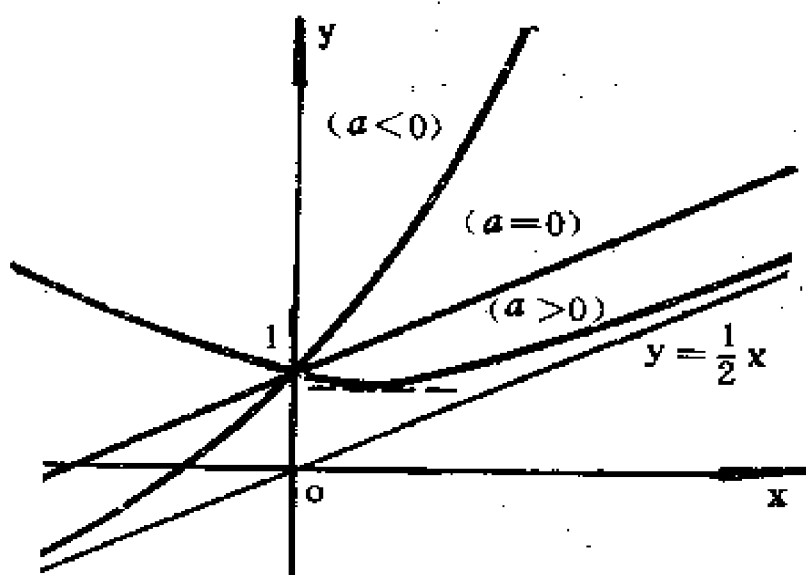


图 2.143

1555. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

解 全族曲线均通过原点.

$$y' = e^{-\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{x}{a} \right). \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得}$$

$$x = a.$$

$$y'' = e^{-\frac{x}{a}} \left(\frac{x}{a^2} - \frac{2}{a} \right). \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得}$$

$$x = 2a.$$

经判别知: 若 $a > 0$, 当 $x = a$ 时有极大值 $y = ae^{-1} \approx 0.37a$; 若 $a < 0$, 当 $x = a$ 时有极小值 $y = ae^{-1}$. 拐点 $x = 2a$, $y = 2ae^{-2} \approx 0.27a$.

容易求得: 渐近线为 $y = 0$. 与 1554 题类似, 当 $a > 0$ 时应考虑 $x \rightarrow +\infty$; 当 $a < 0$ 时应考虑 $x \rightarrow -\infty$.

又曲线族与直线 $y = x$ 在原点相切, 如图 2.144 所示.

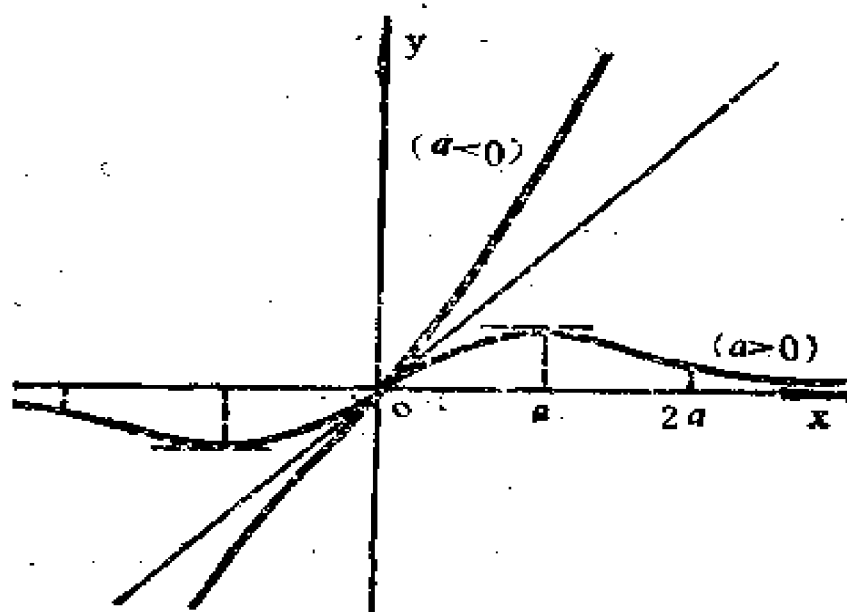


图2.144

§13. 函数的极大值与极小值问题

1556. 证明：若函数 $f(x)$ 不为负，则函数

$$F(x) = Cf^2(x) \quad (C > 0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点。

证 如果 x_0 为 $F(x)$ 的极大值点，则在 x_0 点附近有

$$F(x_0) \geq F(x) \quad (x \neq x_0) \quad (*)$$

即 $Cf^2(x_0) \geq Cf^2(x)$ 。根据 $C > 0$ ，以及 $f(x)$ 不为负，必有

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (x \text{ 在 } x_0 \text{ 附近, 且 } x \neq x_0)$$

这就证明了 x_0 点也为 $f(x)$ 的极大值点。反之，若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，则在 x_0 附近，有

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (x \neq x_0).$$

于是，

$$Cf^2(x_0) \geq Cf^2(x),$$

即(*)式成立. 这就证明了 x_0 点也为 $F(x)$ 的极大值点. 同样道理, 若 x_0 为极小值点时, 也可证明 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极小值点.

1557. 证明: 若当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 单调增加, 则函数

$$f(x) \text{ 与 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

证 设 x_0 点为 $f(x)$ 的极值点, 例如是极大值点, 则在 x_0 点附近有

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (x \neq x_0). \quad (1)$$

因为函数 $\varphi(x)$ 为单调增加的, 故也有

$$\varphi(f(x_0)) \geq \varphi(f(x)) \quad (x \neq x_0). \quad (2)$$

这就证明了 x_0 点也是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点. 反之也对, 因为由(2), 从 $\varphi(x)$ 的单调增加性质知必有(1). 另一种情形, 即设 x_0 点是极小值点时, 也可类似获证. 于是, 原命题得证.

1558. 二正数的和等于常数 a , 求此二正数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 相乘积的极大值.

解 设一正数为 x , 则按题设, 我们须求函数

$$f(x) = x^m(a-x)^n \quad (0 < x < a)$$

的极大值. 由于 $f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - (m+n)$

$x]$, 故若令 $f'(x) = 0$, 即得 $x = \frac{ma}{m+n}$. 当 $0 < x <$

$\frac{ma}{m+n}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $a > x > \frac{ma}{m+n}$ 时, $f'(x)$

≤ 0 . 因此, 当 $x = \frac{ma}{m+n}$ 时, $f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = -\frac{a^{m+n} m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

1559. 二正数的乘积等于常数 a , 求此二数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 之和的极小值.

解 设一正数为 x , 则按题设, 我们须求函数

$$f(x) = x^m + \left(\frac{a}{x}\right)^n \quad (0 < x < +\infty)$$

的极小值.

由于

$$f'(x) = \frac{mx^{m+n} - na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然, 在此点

的左边, $f'(x) < 0$, 而在此点的右边, 有 $f'(x) > 0$,

故知当 $x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}\right] = (m+n) \left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

1560. 取怎样的数为对数之底时有一个数, 它本身和它的对数相等?

解 解法一:

设所求之数为 a , 则对于 $0 < a < 1, 1 < a < +\infty$

及 $x > 0$ 时

$$\log_a x = x$$

或

$$a^x = x, \quad (1)$$

问题即为 a 取怎样的数, 上式才成立.

为研究使(1)式成立的 a 及相应的 x 的取值情况, 我们在直角坐标系内取曲线

$$\begin{cases} y = a^x, \\ y = x. \end{cases} \quad (2)$$

在交点处, 方程(1)与(2)等价(图2.145)

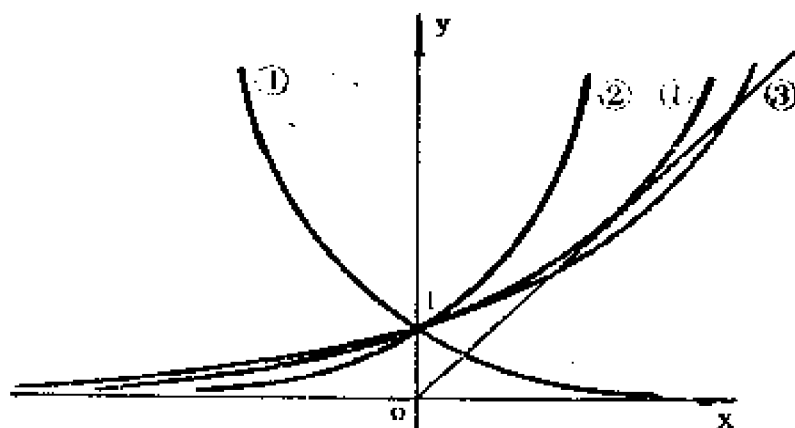


图 2.145

注意, 指数曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 是否有公共点, 就看其差

$$\Delta = f(x) = a^x - x$$

有无使 $\Delta = f(x) = 0$ 的点 x .

设 $y = a_0^x$ 与 $y = x$ 相切于一点 $(x_0, a_0^{x_0})$, 此时

$$f'(x_0) = 0,$$

即有

$$a_0^{x_0} \ln a_0 - 1 = 0. \quad (3)$$

从 $\Delta = 0$ 知有(1), 即

$$a_0^{x_0} - x_0 = 0. \quad (4)$$

由(3)和(4)可解得

$$a_0 = e^{\frac{1}{e}}, \quad x_0 = e. \quad (5)$$

当 $a > a_0$ 时, 易见 $y = a^x$ 比 $y = a_0^x$ 远离直线 $y = x$. 故此时无交点. 实际上, 注意到有 $a_0^x \geq x$, 并记 $g(a, x) = a^x$, 对于 $x \geq 0$, 只要 $a > a_0$ 就有 $a^x > a_0^x \geq x$, 也即 $g(a_0, x)$ 是 $g(a, x)$ 的极小值. 故当 $a > a_0$ 时, $y = a^x$ 与 $y = x$ 无交点. 而当 $0 < a \leq a_0$ 时(且要求 $a \neq 1$), 此时(2)有解, 从而(1)有解. 如图 2.145 中曲线 ①、②、③、④所示.

解法二:

设 $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$, 则由 $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ 得 $x = e$. 显然当 x 通过 e 时 $f'(x)$ 由正变负, 故知 $f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 为极大值. 从而 $0 < x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}}$.

因此, 当 $0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ 且 $a \neq 1$ 时, 有 $\log_a x = x$.

1561. 从面积为 S 的一切矩形中, 求其周界为最小者.

解 设矩形的一边长为 x , 则另一边长为 $\frac{S}{x}$, 周界长为

$$f(x) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right),$$

按题设, 我们须求其最小值.

由于 $f'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right)$, 故令 $f'(x) = 0$, 即得 $x = \sqrt{S}$. 由 $f''(\sqrt{S}) > 0$ 知此时 $f(x)$ 有极小值. 又由

于极值的唯一性，故此也为最小值。因此，所求的矩形为以 \sqrt{S} 为边的正方形。

1562. 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数，求有最大面积的直角三角形。

解 设一直角边为 x ，则按题设，另一直角边为 $\sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$ ，故直角三角形的面积为

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}.$$

利用极值的解法得：当 $x = \frac{a}{3}$ 时， $S(x)$ 值为极大值。

又由于极值的唯一性，故知当 $x = \frac{a}{3}$ 时， $S(x)$ 取最大

值。此时斜边为 $a - x = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$ ，它为直角边的两

倍，故此三角形的两锐角分别为 30° 及 60° 。

本题也可用 1556 题结论求得结果。事实上，令 $F(x) = 4S^2(x)$ ，则 $F(x)$ 与 $S(x)$ 有相同的极值点，对 $F(x)$ 求极值可得同样的结果。

1563. 当有怎样的长度大小时，容积为 V 的圆柱形闭合罐子有最小的表面积？

解 设底半径为 x ，则高为 $H = \frac{V}{\pi x^2}$ ，故圆柱的表面积为

$$S(x) = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2.$$

由于，

$$S'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2},$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. 由 $S''(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}) > 0$ 知, 当

$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, $S(x)$ 有极小值

$$S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值, 故知当底半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 而

高为 $\frac{V}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

1564. 在不超过半圆的已知弓形内嵌入有最大面积的矩形.

解 由图 2.146 知, 不妨设圆的半径为单位长度, 则

$$OA = \cos \varphi,$$

$$BC = \sin \alpha,$$

$$BA = \cos \alpha - \cos \varphi.$$

从而矩形面积为

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= 2BC \cdot BA \\ &= 2\sin \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi) \\ &= \sin 2\alpha - 2\sin \alpha \cos \varphi. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} S'(\alpha) &= 2\cos 2\alpha - 2\cos \alpha \cos \varphi = 4\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \\ &\cdot \cos \varphi - 2, \text{ 令 } S'(\alpha) = 0, \text{ 可得} \end{aligned}$$

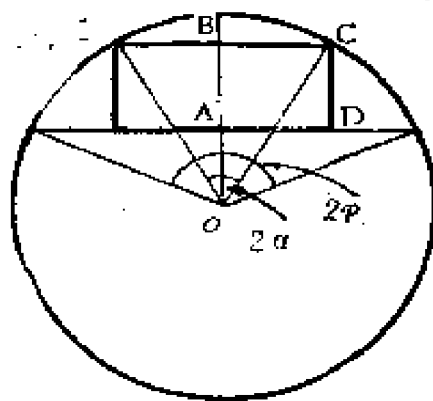


图 2.146

$$\cos \alpha = \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}.$$

注意到 $\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $\cos \varphi \leq \cos \alpha$, 于是有

$$\begin{aligned} S''(\alpha) &= -4\sin 2\alpha + 2\cos \varphi \sin \alpha \leq -4\sin 2\alpha \\ &\quad + 2\cos \alpha \sin \alpha = -3\sin 2\alpha < 0. \end{aligned}$$

这就说明

$$\alpha = \arccos \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}$$

是使 $S(\alpha)$ 达到极大值的点, 也就是说此时弓形内所对应的矩形面积最大.

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

中, 嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形.

解 如图 2.147 所示.

由于点 $M(x, y)$ 在椭圆上, 故适合方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ 解之,}$$

$$\text{得 } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是按题设, 求函数

$$f(x) = 4x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

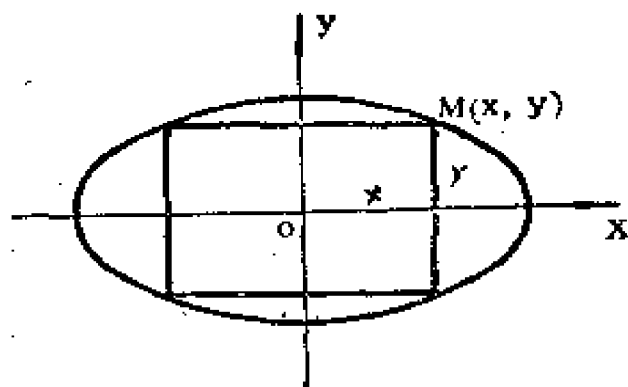


图 2.147

当 x 为何值时最大, 记 $C = \frac{a^2}{16b^2}$, 利用1556题的结果, $f(x)$ 与 $F(x) = Cf^2(x) = x^2(a^2 - x^2)$ 有相同的极值, 但 $F'(x) = 4x\left(\frac{a^2}{2} - x^2\right)$, 令 $F'(x) = 0$, 则 $x = 0$ (不

适合), $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. 当 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, 有 $F''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$= -4a^2 < 0$, 故 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 2ab$ 为最大面积. 此时矩形的

的边为 $a\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$.

1566. 在底边为 b 及高为 h 的三角形中, 嵌入有最大周长的矩形, 研究此问题有解的可能性.

解 如图2.148所示.

$AB = b, CD = h$. 由于

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}, \text{ 故}$$

$$x = \frac{b}{h}(h-y).$$

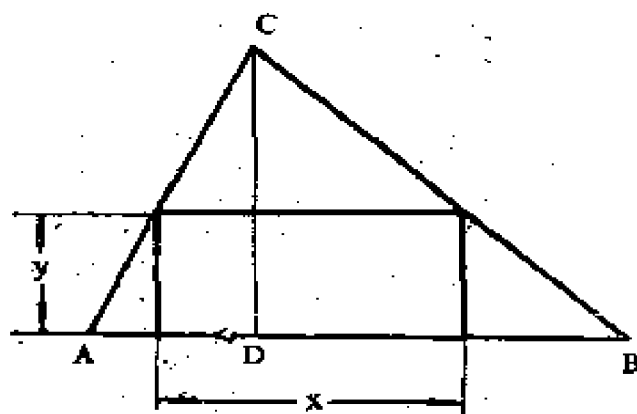


图 2.148

矩形的周长为

$$p = 2\left[y + \frac{b}{h}(h-y)\right] = 2\left[\left(1 - \frac{b}{h}\right)y + b\right].$$

显见, 当 $h = b$ 时, 周长 $p = 2b$ 为一定值; 当 $h > b$ 时, $p_y' > 0$, p 单调增加, 故当 $y = h$ 时有边界的极大值 $p = 2h$; 当 $h < b$ 时, $p_y' < 0$, p 单调减少, 理论上当 $y = 0$ 时有边界的极大值 $2b$. 但嵌入的矩形不允许边长为 0, 故当 $h < b$ 时嵌入的矩形有最大周长者是不存在

的，即此时问题无解。

1567. 从直径为 d 的圆形树干切出横断面为矩形的梁，此矩形的底等于 b ，高等于 h 。若梁的强度与 bh^2 成比例，问梁的尺寸为何时，其强度最大？

解 由于 $b^2 + h^2 = d^2$ ，故 $h^2 = d^2 - b^2$ ，从而考虑函数

$$f(b) = b(d^2 - b^2)$$

何时取最大值。

由于 $f'(b) = d^2 - 3b^2$ ，令 $f'(b) = 0$ 得 $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ 。

此时 $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$ ， $f''(b) = -6b < 0$ ， $f(b)$ 的值最大。因此，所求的矩形的底为 $\frac{d}{\sqrt{3}}$ ，高为 $d\sqrt{\frac{2}{3}}$ 。

1568. 于半径为 R 的半球中，嵌入有最大体积的底为正方形的直角平行六面体。

解 设底边之一半为 x ，则按题设，有

$$2x^2 + y^2 = R^2,$$

其中 y 为平行六面体高之一半。解之，得 $y = \sqrt{R^2 - 2x^2}$ ，由题意求函数

$$f(x) = 4x^2 y = 4x^2 \sqrt{R^2 - 2x^2}.$$

何时取最大值。

$$f'(x) = \frac{8x(R^2 - 3x^2)}{\sqrt{R^2 - 2x^2}}, \text{ 令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x =$$

$\frac{R}{\sqrt{3}}$ ，此时 $y = \frac{R}{\sqrt{3}}$ 。经判别可知， $f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ 值为最

大. 因此, 所求的直角平行六面体之底、宽、高分别为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}$, 而最大体积为

$$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4R^3}{3\sqrt{3}}.$$

1569. 于半径为 R 的球内嵌入有最大体积的圆柱.

解 设圆柱的底半径为 r , 高为 $2h$, 则有

$$r^2 + h^2 = R^2,$$

即 $h = \sqrt{R^2 - r^2}$. 按题设, 求函数

$$f(r) = 2\pi r^2 h = 2\pi r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$$

何时最大.

$$f'(r) = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \text{ 令 } f'(r) = 0 \text{ 得 } r = \sqrt{\frac{2}{3}} R,$$

此时 $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$, 且

$$f(r) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}} R\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

经判别可知此值即为柱体体积的最大值.

1570. 于半径为 R 的球内嵌入有最大表面积的圆柱.

解 如图2.149, 圆柱的表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi(R\cos\varphi)^2 + 4\pi(R\cos\varphi) \cdot (R\sin\varphi) \\ &= \pi R^2(1 + \cos 2\varphi) + 2\pi R^2 \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

由 $\frac{dS}{d\varphi} = 0$ 得 $\lg 2\varphi = 2$. 记其解为 $\varphi_0 = \frac{1}{2} \lg^{-1} 2$,

$\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. 于是 $\sin 2\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

又由于

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} &= -4\pi R^2 [2\sin 2\varphi + \cos 2\varphi]_{\varphi=\varphi_0} \\ &= -4\pi R^2 [2\sin 2\varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0] \\ &= -10\pi R^2 \sin 2\varphi_0 < 0, \end{aligned}$$

故此时表面积最大, 且最大表面积为

$$\begin{aligned} S &= \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \pi R^2 (1 + \sqrt{5}) \\ &\approx 0.81 \times 4\pi R^2. \end{aligned}$$

从而, 球内嵌入圆柱的最大表面积约为球面面积的 81%.

1571. 对于已知球作具有最小体积的外切圆锥.

解 设外切圆锥的底半径

为 x , 高为 h , 球的半径为 R , 则可求得 $h = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2}$,

于是, 外切圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2} = \frac{2}{3} \pi R \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2} \quad (x > 0).$$

由

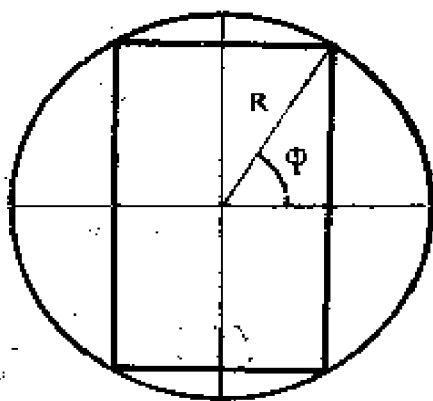


图 2.149

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3} \pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2} R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V \Big|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$,

圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设,

只须求函数

$$f(r) = r^4(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}} l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f(\sqrt{\frac{2}{3}} l)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}} l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最

大值为 $f(\sqrt{\frac{2}{3}} l) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h = \frac{R-r}{R}H$, 其中 $H = R \operatorname{tg} \alpha$ 是已知常数. 于是,

$$S = f(r) = 2\pi \left[r^2 + rH \left(1 - \frac{r}{R} \right) \right] \quad (0 \leq r \leq R),$$

$$f'(r) = 2\pi \left(2r + H - \frac{2r}{R}H \right).$$

令 $f'(r) = 0$, 得 $r = \frac{HR}{2(H-R)}$, 此值应在 0 与 R 之间, 即 $H > R$ 与 $\frac{R}{H} = \operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2}$. 经判别可知, 此时 $f(r)$ 为最大, 因此, 所求的圆柱当 $\operatorname{tg} \alpha < \frac{1}{2}$ 及 $r =$

$\frac{R}{2(1-\operatorname{tg} \alpha)}$ 时达到最

大值,

当 $\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{2}$ 即 $H \leq 2R$ 时, 由于 $f'(r) = \frac{2\pi}{R} [(2R-H)r + H(R-r)]$ 大于零,

因此, 当 $r = R$ 时, 达

到边界的极大值, 但是, 当 $r = R$ 时, 显然有 $h = 0$, 于是得到的解可以考虑作为一个扁平的圆柱, 它的两底都与已知圆锥的底重合, 而全表面积为 $2\pi R^2$.

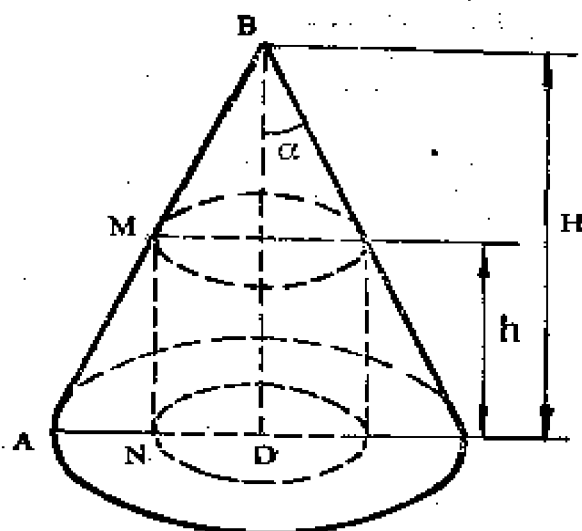


图 2.150

1574. 求从点 $M(p, p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 的最短距离.

解 按题设, 只须考虑函数

$$\begin{aligned} f(y) &= (x-p)^2 + (y-p)^2 = x^2 + 2p^2 - 2py \\ &= \frac{y^4}{4p^2} + 2p^2 - 2py \end{aligned}$$

的极值.

由于 $f'(y) = \frac{y^3 - 2p^3}{p^2}$, 令 $f'(y) = 0$ 得 $y = \sqrt[3]{2} \cdot p$, 此时 $x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} p$. 经判别可知, $f(\sqrt[3]{2} p)$ 为最小. 因此, 所求的最短距离为

$$\begin{aligned} \sqrt{f(\sqrt[3]{2})} &= p \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2} - 1\right)^2 + (\sqrt[3]{2} - 1)^2} \\ &= p (\sqrt[3]{2} - 1) \sqrt{\left[\frac{\sqrt[3]{4} - 2}{2(\sqrt[3]{2} - 1)}\right]^2 + 1} \\ &= p (\sqrt[3]{2} - 1) \sqrt{\frac{\sqrt[3]{2} + 2}{2}}. \end{aligned}$$

1575. 求从点 $A(2, 0)$ 到圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的最短与最长距离.

解 显见, 最短距离为 1, 最长距离为 3, 事实上, 用微分法也可解之, 只须求函数

$$(x-2)^2 + y^2 = 5 - 4x = f(x)$$

的极值.

由于 $f'(x) = -4 < 0$, 故 $f(x)$ 单调下降, 因此, 当 $x = -1$ 时, 有最大值 $\sqrt{f(-1)} = 3$; 而当 $x = 1$ 时有最小值 $\sqrt{f(1)} = 1$.

1576. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) 的经过顶点 $(0, -b)$ 的最大弦.

解 按题设, 我们须求函数

$$\begin{aligned} x^2 + (y+b)^2 &= x^2 + y^2 + 2by + b^2 \\ &= \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right) + y^2 + 2by + b^2 \\ &= \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 + 2by + (a^2 + b^2) = f(y) \end{aligned}$$

的最大值, 为此, 先求得 $f'(y) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y + 2b$.

令 $f'(y) = 0$, 得 $y = \frac{b^3}{a^2 - b^2} = \frac{b^3}{c^2}$ ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$),

此时

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^6}{c^4} = a^2 \left(1 - \frac{b^4}{c^4}\right),$$

或

$$x = \pm \frac{a}{c^2} \sqrt{c^4 - b^4} = \pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2} \quad \left(b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

经判别可知此时为最大值, 其值为

$$\sqrt{a^2 \left(1 - \frac{b^4}{c^4}\right) + \left(\frac{b^3}{c^2} + b\right)^2} = \frac{a^2}{c}.$$

此即最大弦长. 弦的一端点为 $(0, -b)$, 另一端点

为 $\left(\pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2}, \frac{b^3}{c^2}\right)$, 但必须 $b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, $\sqrt{a^2 - 2b^2}$

才有意义.

若 $b > -\frac{a}{\sqrt{2}}$, 则由于

$$\begin{aligned} f'(y) &= 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y + 2b > 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot (-b) + 2b \\ &= \frac{2a^2}{b} > 0, \end{aligned}$$

故当 $y=b$, $x=0$ 时, 取得弦长的边界最大值. 此时最大弦长为 $2b$.

1577. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的点 $M(x, y)$ 引切线, 此切线与坐标轴构成一个三角形, 使此三角形的面积为最小.

解 切线斜率为 $k = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, 于是切线方程为

$$Y - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x).$$

不失一般性, 可设点 M 在第一象限. 它在两坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x}$ 和 $\frac{b^2}{y}$. 因此, 所求三角形的面积为

$$\frac{a^2 b^2}{2xy} = \frac{a^3 b}{2x\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

按题设, 我们考虑函数

$$f(x) = x^2(a^2 - x^2)$$

的最大值. 为此, 先求得

$$f'(x) = 2a^2 x - 4x^3.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, 此时, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$. 经判别可

知 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 为最大值. 因此, 所求的点 M 为 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, 三角形面积的最大值为 ab .

1578. 一物体为直圆柱形, 其上端为半球形. 若此物体的体积等于 V , 问这物体的尺寸如何, 才有最小表面积?

解 设 r 为圆柱的底半径, h 为圆柱的高, 则按题设, 我们有

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \text{ 或 } h = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r,$$

故知其表面积为

$$S(x) = 3\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{V}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r \right) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

$$S'(r) = \frac{10}{3}\pi r - \frac{2V}{r^2}, \text{ 令 } S'(r) = 0, \text{ 得}$$

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$, 此时 $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$. 经判别可知 $S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值. 因此, 当 $r = h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时表面积最小.

1579. 露天水沟的横断面为等腰梯形. 若沟中流水的横断面等于 S , 水面的高等于 h , 问水沟侧边的倾角 φ 如何, 才使横断面被水浸湿的周长为最小?

解 浸湿周长 $l = a + 2h \csc \varphi$, 其中 a 为底边长, 而截面积

$$S = \frac{1}{2}(2a + 2h \cot \varphi)h = ah + h^2 \cot \varphi.$$

于是,

$$l = 2h \csc \varphi + \frac{S}{h} - h \cot \varphi.$$

由 $\frac{dl}{d\varphi} = -\frac{2h \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{h}{\sin^2 \varphi} = 0$, 得 $\cos \varphi = \frac{1}{2}$,

所以, $\varphi = 60^\circ$.

因为

$$\left. \frac{d^2 l}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=60^\circ} = \frac{2h \sin^3 \varphi - h \sin 2\varphi (1 - 2\cos \varphi)}{\sin^4 \varphi} \Big|_{\varphi=60^\circ} > 0,$$

所以, 当 $\varphi = 60^\circ$ 时, 横断面被水浸湿周长为最小.

1580. 设闭曲线所包图的面积为 S 及一圆周也包围同一的面积 S , 则闭曲线的长与圆周长之比为该曲线的“弯曲性”.

设等腰梯形 $ABCD$ ($AD \parallel BC$) 的底边 $AD = 2a$ 及锐角 $BAD = \alpha$, 问等腰梯形的形状如何, 才有最小的弯曲性?

解 设腰 $AB = CD = b$, 则梯形的周长为

$$l = 4a + 2b(1 - \cos \alpha),$$

梯形的面积为

$$S = (2a - b \cos \alpha) b \sin \alpha.$$

令 $S = \pi R^2$ 得

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{(2a - b \cos \alpha) b \sin \alpha},$$

相应的圆周长为

$$L = 2\pi R = 2\sqrt{\pi(2a - b \cos \alpha) b \sin \alpha}.$$

令弯曲性为 K ，则

$$K = \frac{1}{L} = \frac{2a + b(1 - \cos \alpha)}{\sqrt{\pi(2a - b \cos \alpha) b \sin \alpha}}.$$

由 $\frac{dK}{db} = 0$ ，得 $b = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 。可以验证，当 $AB = CD$

$= a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 时，具有最小的弯曲性，此时，梯形恰好

外切于某圆。

1581. 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形，才能使余下的部分，可卷成一漏斗，其容积为最大？

解 设余下部分的中心角为 x ，则漏斗（呈圆锥状）

底的周长为 Rx ，底半径为 $\frac{Rx}{2\pi}$ （ R 为原圆的半径），其

高 $h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2}$ ，其容积为

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2 \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

按题设，我们只须考虑当 x 为何值时，函数

$$f(x) = x^2(4\pi^2 - x^2)$$

的值最大。为此，先求得

$$f'(x) = 16\pi^2 x - 6x^3.$$

令 $f'(x) = 0$ ，要注意不允许 $x = 0$ ，得 $x = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}$ 。

经判别可知 $f\left(2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大。因此，所割去的扇形

的中心角应为 $2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

1582. 从南至北的铁路经过 B 城, 某工厂 A 距此铁路的最短距离为 a 千米, 距北面之 B 城 b 千米. 为了从 A 到 B 运输货物最经济, 从工厂建设一条侧轨, 若每吨货物沿侧轨运输的价格是每一千米 p 卢布, 而沿铁路为一千米 q 卢布 ($p > q$), 则侧轨应向铁路取怎样的角度 φ ?

解 所需运费为

$$\begin{aligned} M &= (b - a \operatorname{ctg} \varphi) q \\ &+ \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi} p \\ &= qb - aq \operatorname{ctg} \varphi \\ &+ pa \operatorname{csc} \varphi. \end{aligned}$$

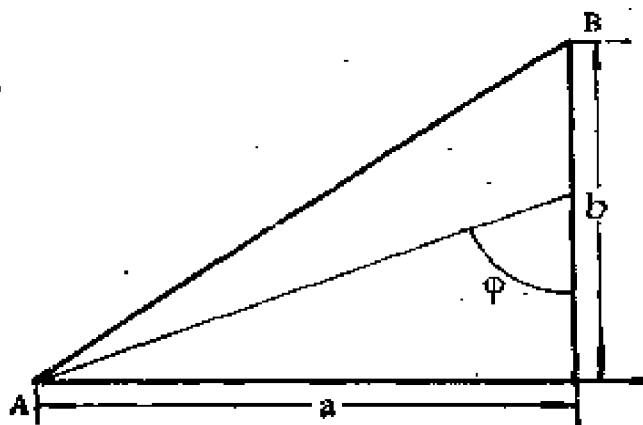


图 2.151

由 $\frac{dM}{d\varphi} = -\frac{aq}{\sin^2 \varphi} - \frac{ap \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 0$, 得 $\varphi_0 = \arccos \frac{q}{p}$. 又

$$\left. \frac{d^2 M}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = ap \frac{1}{\sin \varphi_0} > 0,$$

故当 $\arccos \frac{q}{p} \geq \arctg \frac{a}{b}$ 时, $\varphi_0 = \arccos \frac{q}{p}$, 相应

运费最省; 当 $\arccos \frac{q}{p} < \arctg \frac{a}{b}$ 时, $\varphi_0 = \arctg \frac{a}{b}$

运费最省 (图 2.151).

1583. 两船各以一定的速度 u 和 v 沿直线前进, 两者前进方向所成的角为 θ . 若于某时刻它们与其路线交点之距

离分别为 a 和 b ，求二船的最小距离。

解 设两船与路线交点的距离分别为 a, b 时的时刻 $t_0 = 0$ ，则时刻为 t 时两船的距离 s 适合下式：

$$s^2 = (a + ut)^2 + (b + vt)^2 - 2(a + ut)(b + vt)\cos\theta.$$

由 $2s \frac{ds}{dt} = 2(a + ut)u + 2(b + vt)v - 2(bu + 2uvt + av)\cos\theta = 0$ ，解得

$$t_1 = - \frac{au + bv - (av + bu)\cos\theta}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}.$$

于是，相应地有

$$\begin{aligned} s^2 &= (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) + 2[(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]t_1 + (u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta)t_1^2 \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta} \{ (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) \\ &\quad (u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta) - 2[(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]^2 + [(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]^2 \} \\ &= \frac{[(av - bu)\sin\theta]^2}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}. \end{aligned}$$

经检验可知，此时 s 最小：

$$s = \frac{|av - bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}.$$

又两船的最小距离也可在 $t_0 = 0$ 之前达到。类似地，

$$\text{可求得最小距离为 } s = \frac{|av + bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}.$$

总之，两船间的最小距离为

$$s = \frac{|av \mp bu| \sin \theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta}}.$$

1584. 在 A 与 B 二点处各有一光源, 其强度分别为 S_1 枝烛光与 S_2 枝烛光. 在线段 $AB = a$ 上求出最小照明的点 M .

解 设 $AM = x$, 则照度

$$I = \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{(a-x)^2}.$$

由 $\frac{dI}{dx} = -\frac{2S_1}{x^3} + \frac{2S_2}{(a-x)^3} = 0$ 得

$$S_2 x^3 = S_1 (a-x)^3.$$

解之, 得

$$x = a \left(1 + \sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}} \right)^{-1}.$$

经检验此时照度最小.

1585. 发光点位于半径为 R 与 r ($R > r$) 的二互不相交之球的连心线上, 并在此二球的外面, 此发光点的位置如何, 才可使二球表面上照明部分之和为最大?

解 设发光点离大球中心之距离为 x , 两球中心之距离为 a , 则按球冠面积公式推知照明部分面积之和为

$$S = 2\pi R \left(R - \frac{R^2}{x} \right) + 2\pi r \left(r - \frac{r^2}{a-x} \right),$$

式中 x 应满足 $R < x \leq a - r$. 由

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{x^2} - 2\pi r^2 \cdot \frac{1}{(a-x)^2} = 0$$

得

$$x = \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

又由 $x \leq a - r$ 可得

$$\frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}} a \leq a - r,$$

即

$$a \geq r + R\sqrt{\frac{R}{r}},$$

经检验此时照明面积最大。

当 $R + r \leq a < r + R\sqrt{\frac{R}{r}}$ 时, 显然有 $x = a - r$, 经

检验此时照明面积也为最大。

1586. 设圆桌面的半径为 a , 应当在圆桌面中央上面怎样高的地方安置电灯, 才可使其桌子边沿上的照度为最大?

解 如图2.152所示. 由物理学知, 照度 I 为

$$I = k \frac{\sin \varphi}{r^2} = k \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3}$$

(k 为常数). 考虑函数

$$f(r) = \frac{r^2 - a^2}{r^3} = \frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^3}$$

何时最大. $f'(r) = -\frac{4}{r^5}$

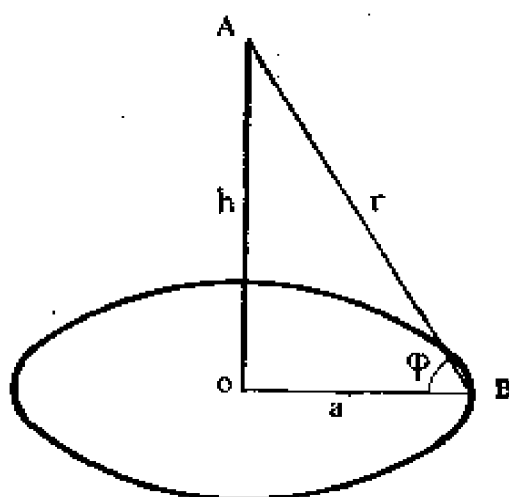


图 2.152

$+\frac{6a^2}{r^7}=\frac{6a^2-4r^2}{r^7}$, 令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{3}{2}}a$. 经判

别可知 $f\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此, 我们应在高 $h=$

$\sqrt{\frac{3}{2}a^2-a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 的地方安置电灯, 才可使桌子边沿上的照度为最大.

1587. 向宽为 a 米的河修建一宽为 b 米的运河, 二者成直角相交, 问能驶进这运河的船, 其最大的长度如何?

解 如图2.153所示, BC 的长度

$$l = a \csc \varphi + b \sec \varphi.$$

$$l' = \frac{b \sin^3 \varphi - a \cos^3 \varphi}{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi},$$

令 $l' = 0$ 得

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ 或}$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_0 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ 从而有}$$

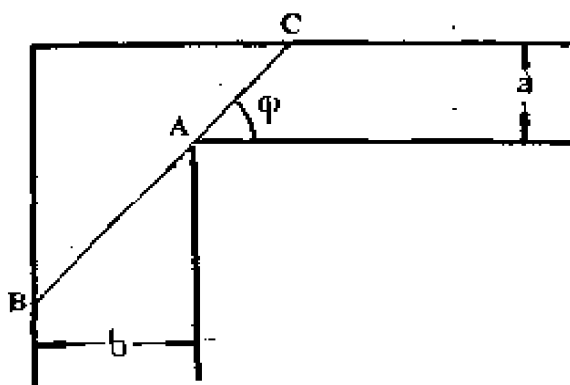


图 2.153

$$\csc \varphi_0 = \frac{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}, \sec \varphi_0 = \frac{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

$$l'' \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 3 \left(\frac{b}{\cos \varphi_0} + \frac{a}{\sin \varphi_0} \right) > 0,$$

因此, $l|_{\varphi=\varphi_0}$ 为最小值, 即船的最大长度为

$$l|_{\varphi=\varphi_0} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

1588. 船航行一昼夜的耗费由两部分组成: 固定部分等于 a

卢布，变动部分与速度的立方成比例增加。在怎样的速度 v 时，船航行为最经济？

解 设航行的全路程为 s ，速度为 v ，则总耗费

$$Q = (a + kv^3) \frac{s}{v} = \frac{as}{v} + skv^2.$$

由 $\frac{dQ}{dv} = 0$ 得 $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ ，经检验知，此时船航行最经济。

1589. 重量为 P 的物体位于粗糙的水平面上，须用力把物体从原位置移动。若物体摩擦系数等于 k ，问作用力对水平面的倾斜如何，才使所须的力量为最小？

解 设作用力 F 对水平面的倾角为 α ，则

$$F \cos \alpha = k(P - F \sin \alpha),$$

即

$$F = \frac{kP}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

令 $y = \cos \alpha + k \sin \alpha$ ，为使 F 最小，只要使 y 最大。

由 $y'_{\alpha} = -\sin \alpha + k \cos \alpha = 0$ 得 $\alpha_0 = \arctg k$ 。此时，

$$y''_{\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = -\cos \alpha_0 - k \sin \alpha_0 = -\sqrt{1+k^2} < 0.$$

即当 $\alpha_0 = \arctg k$ 时， y 为最大值，从而 F 为最小值，也即此时用力最省。

1590. 有一茶杯，其形状为半径为 a 的半球，于茶杯中放一长为 $l > 2a$ 的棒，求棒的平衡位置。

解 取球心为坐标原点. 当 $2a < l \leq 4a$ 时, 设棒的重心的纵坐标为 y , 棒对杯口所在平面的倾角为 φ , 则

$$y = -\left(2a\cos\varphi - \frac{l}{2}\right)\sin\varphi \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{2}).$$

当棒平衡时, y 最小, 为此, 求 y 的极值. 由 y'_{φ}

$$= -4a\cos^2\varphi - \frac{l}{2}\cos\varphi + 2a = 0 \text{ 得}$$

$$\cos\varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a} \quad (\text{负值不合适, 舍去}).$$

经检验知此时 y 取最小值. 即当 $\cos\varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$

时棒取平衡位置.

当 $l > 4a$ 时, 棒的重心必在半球心外, 于是此时棒失去平衡, 无平衡位置.

§14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线

1° n 阶相切 有两曲线 $y = \varphi(x)$ 及 $y = \psi(x)$, 若于点 x_0 ,

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

及 $\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0)$,

便说这两曲线于点 x_0 有 n 阶相切 (在严格的意义上讲!).

当 $x \rightarrow x_0$ 时在这种情形有:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O((x - x_0)^{n+1})$$

2° 曲率圆 圆周

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

与已知曲线 $y=f(x)$ 有不低于 2 阶的相切，此圆称为在对应点的曲率圆，这个圆的半径：

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为曲率半径，而量 $k = \frac{1}{R}$ 为曲率。

3°渐屈线 曲率圆中心 (ξ, η) (曲率中心)

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线。

1591. 选择直线

$$y=kx+b$$

的参数 k 与 b ，使它与曲线

$$y=x^3-3x^2+2$$

有高于二阶的相切。

解 要有高于二阶的相切，必须使 $y'' = 6x - 6 = 0$ ，即要 $x=1$ ；同时在 $x=1$ 时，两个一阶导数也应相等，即 $k = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$ 。

当 $x=1$ 时，代入方程 $x^3 - 3x^2 + 2 - y = 0$ ，得 $y=0$ 。由于直线 $y=kx+b$ 也须通过点 $(1, 0)$ ，故有 $0 = -3 \cdot 1 + b$ ，即 $b=3$ 。

因此，所求的直线为

$$y=3(1-x),$$

参数 $k=-3$ ， $b=3$ 。

1592. 应当怎样选择系数 a, b 和 c ，才能使抛物线

$$y = ax^2 + bx + c$$

于点 $x = x_0$ 与曲线 $y = e^x$ 有二阶的相切?

解 对于抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 在点 $x = x_0$ 有

$$y' \Big|_{x=x_0} = 2ax_0 + b, \quad y'' \Big|_{x=x_0} = 2a, \quad y''' = 0.$$

按假设, 应有

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = e^{x_0}, \\ 2ax_0 + b = e^{x_0}, \\ 2a = e^{x_0}, \end{cases}$$

解之, 得

$$a = \frac{1}{2}e^{x_0}, \quad b = e^{x_0}(1 - x_0), \quad c = e^{x_0}\left(1 - x_0 + \frac{x_0^2}{2}\right).$$

1593. 下列曲线与 Ox 轴在点 $x=0$ 相切的阶如何:

(a) $y = 1 - \cos x$; (б) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$;

(B) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$

解 (a) $y' = \sin x$, $y'' = \cos x$, 于是

$$y' \Big|_{x=0} = 0 \quad y'' \Big|_{x=0} = 1.$$

而对于 Ox 轴 $y = 0$, 始终有 $y' = 0$, $y'' = 0$. 因此, 曲线 $y = 1 - \cos x$ 与 Ox 轴有一阶的相切.

$$\begin{aligned} \text{(б)} \quad y' &= \sec^2 x - \cos x, \quad y'' = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x + \sin x, \\ y''' &= 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x + \cos x, \end{aligned}$$

于是 $y' \Big|_{x=0} = y'' \Big|_{x=0} = 0$, $y''' \Big|_{x=0} = 3 \neq 0$. 因此,

曲线 $y = \operatorname{tg} x - \sin x$ 与 Ox 轴有二阶的相切.

(B) $y' = e^x - 1 - x$, $y'' = e^x - 1$, $y = e^x$, 于是

$$y' \Big|_{x=0} = y'' \Big|_{x=0} = 0, \quad y''' \Big|_{x=0} = 1 \neq 0.$$

因此, 曲线 $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ 与 Ox 轴有二阶的相切.

1594. 证明曲线:

当 $x \neq 0$ 时, $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$; 当 $x = 0$ 时, $y = 0$

在点 $x = 0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

解 利用 1225 题的结果知, 对于任意自然数 n , 有

$$y^{(n)} \Big|_{x=0} = 0,$$

此即证明了所给的曲线在点 $x = 0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

1595. 求双曲线

$$xy = 1$$

在下列各点的曲率半径和曲率中心:

(a) $M(1, 1)$; (b) $N(100, 0.01)$.

解 $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$.

(a) 在点 $M(1, 1)$, $y = 1$, $y' = -1$, $y'' = 2$, 于是, 曲率半径

$$R = \frac{[1 + (-1)^2]^{\frac{3}{2}}}{2} = \sqrt{2},$$

曲率中心 (ξ, η) 为

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = 1 - \frac{-1(1+1)}{2} = 2,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

(6) 在点 $N(100, 0.01)$,

$$y = 0.01, \quad y' = -0.0001, \quad y'' = 0.000002.$$

与 (a) 相似, 代入公式, 近似地有

曲率半径 $R = 500000$ 和曲率中心 $(150, 500000)$.

求下列曲线的曲率半径:

1596. 抛物线 $y^2 = 2px$.

解 $y' = \frac{p}{y}$, $y'' = -\frac{p}{y^2}$ $y' = -\frac{p^2}{y^3}$. 于是, 曲率半径

$$\begin{aligned} R &= \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{p^2}{y^3}\right|} = \frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \\ &= p \left(1+\frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} = p \left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

1597. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 不妨设 $a > b$. 由于

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

于是, 曲率半径

$$R = \frac{\left(1+\frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2 |y|^3}} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} \\
&= \frac{a^3 b^3 \left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},
\end{aligned}$$

其中 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率。

1598. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

解 由于 $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$. 于是, 曲率半径

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2 |y|^3}} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} \\
&= \frac{(a^2 b^2 x^2 - a^4 b^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} \\
&= \frac{\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - a^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{(e^2 x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},
\end{aligned}$$

其中 $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ 为双曲线的离心率。

1599. 内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 。

解 由于 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $y'' = -\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$. 于是, 曲率

半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|} = \left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{2}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}\right| = 3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

1600. 椭圆 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\frac{b}{a} \left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}.$$

于是, 曲率半径为

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left(1 + \frac{b^2 \operatorname{ctg}^2 t}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{a^2 |\sin t|^3}} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab} \\ &= \frac{a^3 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2}{b} (1 - e^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

其中 e 为椭圆的离心率.

1601. 摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{tg} \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2a(1 - \cos t)}}{\frac{1}{a(1 - \cos t)}} = \frac{1}{4a \cos^4 \frac{t}{2}}.$$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4a \cos^4 \frac{t}{2}}} = 4a \left| \cos \frac{t}{2} \right| = 4a \sqrt{\frac{y}{2a}} = 2\sqrt{2ay}.$$

1602. 圆的渐伸线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$,

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{at \cos^3 t}.$$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a|t \cos^3 t|}} = a|t|.$$

1603. 证明二次曲线

$$y^2 = 2px - qx^2$$

的曲率半径与法线段的立方成比例。

证 曲线的曲率半径公式为

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段公式为

$$l = |y\sqrt{1+y'^2}|,$$

因此, $\frac{R}{l^3} = \frac{1}{|y^3 y''|}$. 下面求 $y^3 y''$:

因为 $y^2 = 2px - qx^2$, 故在等式两端分别对 x 求两次导数, 即得

$$2yy' = 2p - 2qx \text{ 或 } yy' = p - qx, \quad (1)$$

$$yy'' + y'^2 = -q. \quad (2)$$

以 y^2 乘 (2) 式两端, 并以 (1) 式及原二次曲线的表达式代入左右端, 即得

$$y^3 y'' + (p - qx)^2 = -q(2px - qx^2);$$

化简之, 最后得

$$y^3 y'' = -p^2.$$

因此, $\frac{R}{l^3} = \frac{1}{p^2}$ 为一常数. 证完.

1604. 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

解 设曲线的极坐标方程为 $r = r(\varphi)$, 则由

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

可求得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2r'r' - rr''}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3},$$

其中 $r' = \frac{dr}{d\varphi}$, $r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}$.

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'r'' - rr''|}.$$

求下列极坐标方程所表曲线的曲率半径:

1605. 阿基米德螺线 $r = a\varphi$.

解 由于 $r' = a$, $r'' = 0$. 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}.$$

1606. 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$.

解 由于 $r' = mae^{m\varphi} = mr$, $r'' = m^2r$. 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{r^3(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + m^2r^2} = r\sqrt{1+m^2}.$$

1607. 心脏形线 $r = a(1 + \cos\varphi)$.

解 $r' = -a\sin\varphi$, $r'' = -a\cos\varphi$.

$$\begin{aligned} R &= \frac{\{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi\}^{\frac{3}{2}}}{a^2(1+\cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3a^2(1+\cos\varphi)} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{2ar}. \end{aligned}$$

1608. 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

解 $r' = -\frac{a^2 \sin 2\varphi}{r}, r'' = -\frac{r^4 + a^4}{r^3},$

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = \frac{3a^4}{r^2}, (r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^6}{r^3}.$$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\frac{a^6}{r^3}}{\frac{3a^4}{r^2}} = \frac{a^2}{3r}.$$

1609. 在曲线 $y = \ln x$ 上求曲率最大的点.

解 由于 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$, 所以, 曲率半径为

$$R = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

按题设, 我们只须考虑函数

$$f(x) = \frac{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2}$$

当 x 取何值时达到最小值. 由于

$$f'(x) = \frac{2(1 + x^2)^2(2x^2 - 1)}{x^3}, \text{ 故令 } f'(x) = 0$$

求得正根 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x) > 0$. 因此, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,

$f(x)$ 取极小值. 又由于只有一个极小值, 故也是最小值.

这样一来, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{\ln 2}{2}$ 时, 曲率半径为最小, 也即曲率为最大. 因此, 所求的点为 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2})$.

1610. 三次抛物线 $y = \frac{kx^3}{6}$ ($0 \leq x < +\infty$, $k > 0$) 的最大曲率等于 $\frac{1}{1000}$, 求达到此最大曲率的点 x .

解 为方便起见, 令 $c = \frac{k}{6}$. 因为

$$y' = 3cx^2, \quad y'' = 6cx,$$

所以, 曲率

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6cx}{(1 + 9c^2x^4)^{\frac{3}{2}}} \quad (x \geq 0).$$

由 $\frac{dK}{dx} = 6c \frac{1 + 9c^2x^4(1 - 45c^2x^4)}{(1 + 9c^2x^4)^3} = 0$, 得

$$x_0^4 = \frac{1}{45c^2}.$$

可证 $\left. \frac{d^2K}{dx^2} \right|_{x=x_0} < 0$, 又根据条件, $K(x_0)$ 为 $K(x)$

的最大值，且有

$$K(x_0) = \frac{6c \sqrt[4]{\frac{1}{45c^2}}}{\left(1 + 9c^2 \cdot \frac{1}{45c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\sqrt{c} \sqrt[4]{\frac{1}{45}}}{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{10^3},$$

解之，得

$$c = \frac{18\sqrt{5}}{5^3 \times 10^6},$$

从而

$$x_0^2 = \frac{1}{\sqrt{45c}} = \frac{5^2 \times 10^6}{54}$$

或

$$x_0 = \sqrt{\frac{5^2 \times 10^6}{54}} \approx 680.$$

此即达到最大曲率的点。

求下列各曲线的渐屈线方程：

1611. 抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线。

解 由于 $y' = \frac{p}{y}$, $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$, 故曲率中心坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{p}{y}\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}} \\ &= x + \frac{y^2 + p^2}{p} = x + \frac{2px + p^2}{p} = 3x + p, \end{aligned}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = y - \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2},$$

即

$$x = \frac{\xi - p}{3}, \quad y^3 = -p^2 \eta. \quad (*)$$

由于 $y^6 = 8p^3 x^3$, 故将(*)式代入后, 消去 x 及 y , 即得渐屈线方程为

$$27p\eta^2 = 8(\xi - p)^3.$$

1612. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐屈线.

解 由于 $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$, 故曲率中心的坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = x - \frac{\frac{b^2 x}{a^2 y} \left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right)}{\frac{b^4}{a^2 y^3}} \\ &= x - \frac{b^2 x \cdot a^2 y^3 \cdot (a^4 y^2 + b^4 x^2)}{a^6 y^3 b^4} \\ &= x - \frac{xa^2 b^2 \left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 \right)}{a^4 b^2} \\ &= x - \frac{x \left(a^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 \right)}{a^2} = -\frac{c^2}{a^4} x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} = y - \frac{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}{\frac{b^4}{a^2 y^3}} \\
 &= y - \frac{y(a^4 y^2 + b^4 x^2)}{a^2 b^4} \\
 &= y - \frac{y a^2 b^2 \left(b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2\right)}{a^2 b^4} = -\frac{c^2}{b^4} y^3,
 \end{aligned}$$

即

$$c^2 y^3 = -b^4 \eta, \quad c^2 x^3 = a^4 \xi.$$

于是,

$$c^{\frac{4}{3}} y^2 = b^{\frac{8}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}, \quad c^{\frac{4}{3}} x^2 = a^{\frac{8}{3}} \xi^{\frac{2}{3}},$$

从而, 将 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{y^2}{b^2} = \frac{b^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$ 相加即得渐屈

线方程

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

其中 $c^2 = a^2 - b^2$. 它为一内摆线.

1613. 内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的渐屈线.

解 由于 $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $y'' = \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{1}{3}}$, 故曲率中心的坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

$$= x + \frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}} = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}}$$

$$= y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\xi + \eta &= (x + y) + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) \\ &= (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})\left[(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}) + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right] \\ &= (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi - \eta &= (x - y) - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}) \\ &= (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})\left[(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}) - 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right] \\ &= (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^3.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 (\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} &= (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^2 + (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^2 \\
 &= 2(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = 2a^{\frac{2}{3}}.
 \end{aligned}$$

此即所求的渐屈线方程，它仍为一内摆线。

1614. 曳物线 $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 的渐屈线。

解 先求 y' 和 y'' 。在等式

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

两端分别对 x 求导，得

$$1 = a \left(\frac{-1}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} \cdot \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{y'}{y} \right) + \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

化简得

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad (1)$$

再将 (1) 式两端分别对 x 求导并以 (1) 式代入，化简即得

$$y'' = \frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}.$$

于是，曲率中心的坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}}{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^2}}$$

$$=x+\sqrt{a^2-y^2},$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{\frac{a^2}{a^2-y^2}}{\frac{a^2 y}{(a^2-y^2)^2}}=\frac{a^2}{y}.$$

由于点 (x, y) 的坐标 x 和 y ，适合方程

$$x+\sqrt{a^2-y^2}=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

故

$$\xi=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

即

$$\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{\frac{\xi}{a}}. \quad (2)$$

将(2)式分子有理化，得

$$\frac{a^2-(a^2-y^2)}{y(a+\sqrt{a^2-y^2})}=e^{\frac{\xi}{a}},$$

即

$$\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}=e^{-\frac{\xi}{a}}. \quad (3)$$

(2)+(3)并除以2，即得

$$\frac{a}{y}=\operatorname{ch}\frac{\xi}{a},$$

从而得

$$\eta = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a},$$

此即所要求的渐屈线方程，它为一悬链线。

1615. 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ 的渐屈线。

解 利用直角坐标与极坐标的互化公式来求渐屈线方程. 首先, 我们有

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

两边对 x 求导得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{m(xy' - y)}{x^2 + y^2},$$

即

$$x + yy' = m(xy' - y). \quad (1)$$

解 (1) 式即得

$$y' = \frac{x + my}{mx - y}.$$

由 (1) 式再对 x 求导, 化简得

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{mx - y}.$$

以 y' 及 y'' 代入曲率中心的表达式中, 化简整理得

$$\xi = -my, \quad \eta = mx. \quad (2)$$

设 $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\Psi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{\xi}$, 于是由 (2) 式得

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = m^2(x^2 + y^2), \\ -\frac{\xi}{\eta} = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

(3) 式即 $\rho = mr = mae^{m\varphi}$, (4) 式即 $-\operatorname{ctg}\psi = \operatorname{tg}\varphi$ 或 $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$. 因此, 最后我们得到所求的渐屈线方程为对数螺线

$$\rho = mae^{m(\psi - \frac{\pi}{2})}.$$

1616. 证明摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线, 仅其位置与已知摆线不同而已.

证 由于

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = a(t - \sin t) \\ &\quad + \frac{\operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2})}{\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}} \\ &= a(t + \sin t), \end{aligned}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = a(\cos t - 1).$$

令 $t - \pi = \tau$, 即得

$$\xi = \pi a + a(\tau - \sin \tau), \quad \eta = -2a + a(1 - \cos \tau).$$

此仍为摆线, 显然, 只是位置与原摆线不同而已.

§15. 方程的近似解法

1° 比例法(弦位法) 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上连续及

$$f(a)f(b) < 0,$$

且当 $a < x < b$ 时, $f'(x) \neq 0$, 则方程

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

于区间 (a, b) 内有一个而且仅有一个实根 ξ . 可取下面的值作为此根的第一近似值:

$$x_1 = a + \delta_1,$$

式中
$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

更进而对于区间 (a, x_1) 或 (x_1, b) 中, 函数 $f(x)$ 在其两端异号的那一个区间运用这方法, 得到根 ξ 的第二近似值 x_2 , 由此类推, 对于第 n 近似值 x_n , 下列公式正确:

$$\left| x_n - \xi \right| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (2)$$

式中 $m = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

2° 牛顿法 (切线法) 若在闭区间 $[a, b]$ 内 $f''(x) \neq 0$ 及 $f(a)f''(a) > 0$, 则可取数值

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程 (1) 的根 ξ 的第一近似值 ξ_1 .

重复利用这个方法, 很快就得到趋近于根 ξ 的一系列近似值 ξ_n ($n = 1, 2, \dots$), 这些近似值的精确性可根据公式 (2) 来估计.

为了大略的确定方程的根, 最好可作函数 $y = f(x)$ 的图形.

利用比例法, 求下列方程的根 (精确到 0.001):

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续及 $f(0) = 2$, $f(1) = -3$, 且当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 6x \neq 0$. 因而所给方程在 $(0, 1)$ 内有且仅有一实根 ξ_1 . 现求之, 以 x_i 表示此根的第 i 次近似值, 则有

$$x_1 = 0 + \delta_1 = - \frac{f(0)}{f(1) - f(0)} (1 - 0) = 0.4;$$

又因 $f(0.4) = -0.336$, 故

$$x_2 = - \frac{f(0)}{f(0.4) - f(0)} (0.4 - 0) = 0.342;$$

$f(0.342) = -0.012$, 故

$$x_3 = - \frac{f(0)}{f(0.342) - f(0)} (0.342 - 0) = 0.340;$$

由于 $f(0.340) = -0.001$, $m_1 = \inf_{0 < x < 1} |f'(x)| = 3$, 因此, 如果取 0.340 作为此根的第三次近似值, 其误差为

$$|0.340 - \xi_1| \leq \frac{|f(0.340)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 0.340.

再求其它的根:

因为 $f(2) = -2$, $f(3) = 11$, 且当 $2 < x < 3$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故方程在 $(2, 3)$ 内有且仅有一实根 ξ_2 . 与求 ξ_1 的方法类似, 分别求得其各次的近似值为:

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f(3) - f(2)}(3 - 2) = 2.15;$$

$$x_2 = 2.15 - \frac{f(2.15)}{f(3) - f(2.15)}(3 - 2.15) = 2.22;$$

$$x_3 = 2.22 - \frac{f(2.22)}{f(3) - f(2.22)}(3 - 2.22) = 2.245;$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 2.245 - \frac{f(2.245)}{f(3) - f(2.245)}(3 - 2.245) \\ &= 2.256; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 2.256 - \frac{f(2.256)}{f(3) - f(2.256)}(3 - 2.256) \\ &= 2.260; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_6 &= 2.260 - \frac{f(2.260)}{f(3) - f(2.260)}(3 - 2.260) \\ &= 2.261; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_7 &= 2.261 - \frac{f(2.261)}{f(3) - f(2.261)} (3 - 2.261) \\
 &= 2.262.
 \end{aligned}$$

由于 $f(2.262) = 0.003$, $m_2 = \inf_{2 < x < 3} |f'(x)| = 6$, 因此, 如果取 2.262 作为 ξ_2 的第七次近似值, 其误差为

$$|2.262 - \xi_2| \leq \frac{|f(2.262)|}{m_2} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 2.262.

由于此方程为一个三次方程, 最后必然还有一实根.

因为 $f(-2) = 6$, $f(-3) = -7$, 且当 $-3 < x < -2$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故此根 ξ_3 介于 -3 和 -2 之间. 同上法求得其各次近似值为

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -3 - \frac{f(-3)}{f(-2) - f(-3)} (-2 + 3) \\
 &= -2.461;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.461) - f(-3)} (-2.461 + 3) \\
 &= -2.574;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 &= -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.574) - f(-3)} (-2.574 + 3) \\
 &= -2.596;
 \end{aligned}$$

$$x_4 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.596) - f(-3)} (-2.596 + 3)$$

$$= -2.601;$$

$$\begin{aligned} x_5 &= -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.601) - f(-3)} (-2.601 + 3) \\ &= -2.602. \end{aligned}$$

由于 $f(-2.602) = -0.004$, $m_3 = \inf_{-3 < x < -2} |f'(x)| = 6$,

因此, 如果取 -2.602 作为 ξ_3 的第五次近似值, 则其误差为

$$|-2.602 - \xi_3| \leq \frac{|f(-2.602)|}{m_3} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的第三个根的近似值为 -2.602 .

1618. $x^4 - x - 1 = 0$.

解 设 $f(x) = x^4 - x - 1$. 由于 $f(1) = -1$, $f(2) = 13$, 且当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(1, 2)$ 内有且仅有一实根 ξ_1 , 按 1617 题的方法, 依次求得该根的各次近似值为

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.07; \quad x_2 = 1.12; \quad x_3 = 1.156; \quad x_4 = 1.180; \\ x_5 &= 1.196; \quad x_6 = 1.205; \quad x_7 = 1.217; \\ x_8 &= 1.220; \quad x_9 = 1.221. \end{aligned}$$

由于 $f(1.221) = 0.002$, $m_1 = \inf_{1 < x < 2} |f'(x)| = 3$, 因此,

如果取 1.221 作为 ξ_1 的第九次近似值, 其误差为

$$|1.221 - \xi_1| \leq \frac{|f(1.221)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度。于是，所给方程的一近似根为 1.221。

又因 $f(-1)=1$, $f(-0.5)=-0.4375$, 且当 $-1 < x < -0.5$ 时 $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(-1, -0.5)$ 内有且仅有一实根 ξ_2 , 依次求得其各次近似值为

$$x_1 = -0.652; x_2 = -0.789; x_3 = -0.706;$$

$$x_4 = -0.719; x_5 = -0.723; x_6 = -0.724.$$

由于 $f(-0.724) = -0.001$, $m_2 = \inf_{-1 < x < -0.5} |f'(x)| = 1$, 因此, 如果取 -0.724 作为 ξ_2 的第六次近似值, 其误差为

$$|-0.724 - \xi_2| \leq \frac{|f(-0.724)|}{m_2} = 0.001,$$

已达到所需的精确度, 于是, 所给方程的另一近似根为 -0.724 .

由于 $f'(x) = 4x^3 - 1 = 0$ 只有一实根, 且 $f''(x) = 12x^2 > 0$ ($x \neq 0$), 故所给方程仅有二实根, 其余二根为一对共轭复根.

1619. $x - 0.1 \sin x = 2.$

解 设 $f(x) = x - 0.1 \sin x - 2$, 则 $f(2) = -0.091$,

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0.0237, \text{ 且当 } 2 < x < \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } f'(x) \neq 0,$$

故所给方程在 $(2, \frac{2\pi}{3})$ 内有且仅有一实根 ξ_1 , 依次求

得其各次近似值为

$$x_1 = 2.075; x_2 = 2.080; x_3 = 2.083; x_4 = 2.087.$$

由于 $f(2.087) = 0.00003$, $m_1 = \inf_{2 < x < \frac{3x}{2}} |f'(x)| = 1$
^{*)}

$-0.1 \cos 2 \approx 0.959$, 因此, 如果取 2.087 作为 ξ_1 的第四次近似值, 其误差为

$$|2.087 - \xi_1| \leq \frac{|f(2.087)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的近似根为 2.087(径).

又方程 $x - 0.1 \sin x = 2$ 与方程 $x - 2 = 0.1 \sin x$ 等价, 而曲线 $y = x - 2$ 与 $y = 0.1 \sin x$ 只有一个交点, 因此, 原方程只有一个实根.

*) 因 $f'(x) = 1 - 0.1 \cos x$, $f''(x) = 0.1 \sin x > 0$, 故 $m_1 = |f'(2)| = 1 - 0.1 \cos 2$. 以下同样情况不再说明.

1620. $\cos x = x^2$.

解 设 $f(x) = \cos x - x^2$, 则因 $f(-x) = f(x)$, 故原方程若有一根 ξ , 必有另一根 $-\xi$. 又曲线 $y = x^2$ 与 $y = \cos x$ 只有两个交点. 因此, 原方程有且仅有两个根 $\pm \xi$. 为此, 只需求一正根即可.

由于 $f(\frac{\pi}{4}) = 0.09$, $f(1) = -0.46$, 且当 $\frac{\pi}{4} < x < 1$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 内有且仅有一实根 ξ , 依次求得其各次的近似值为

$$x_1 = 0.821; x_2 = 0.828; x_3 = 0.826; x_4 = 0.825.$$

由于 $f(0.825) = -0.002$, $m = \inf_{\frac{\pi}{4} < x < 1} |f'(x)|$

$= \left| f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| = 2.278$, 因此, 如果取 0.825 作为 ξ 的第四次近似值, 其误差为

$$|0.825 - \xi| \leq \frac{|f(0.825)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度, 于是, 所给方程的二近似根为 ± 0.825 .

如果注意到 $f(0.824) = 0.002$, $f(0.825) = -0.002$, 因此, 取 ± 0.824 作为所给方程的二近似根, 也可保证所需的精确度.

利用牛顿法, 求下列方程的根 (精确到所指定的程度):

1621. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ (精确到 10^{-3}).

解 曲线 $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ 与 $y = 10x$ 共有两个交点. 因此, 所给方程共有两个实根.

设 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 10x$, 则因 $f(0.4) = 2.41$,

$f(0.5) = -0.75$, 且当 $0.4 < x < 0.5$ 时 $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(0.4, 0.5)$ 内有且仅有一实根. 又由于在 $[0.4, 0.5]$ 内 $f''(x) \neq 0$ 且 $f(0.4)f''(0.4) > 0$, 故利用牛顿法求近似根时, 切点应取 $(0.4, f(0.4))$. 依次求得其各次近似值为

$$x_1 = 0.4 - \frac{f(0.4)}{f'(0.4)} = 0.459;$$

$$x_2 = 0.459 - \frac{f(0.459)}{f'(0.459)} = 0.471;$$

$$x_3 = 0.471 - \frac{f(0.471)}{f'(0.471)} = 0.472.$$

今估计误差: $f(0.472) = -0.013$. 由于 $f'(x)$ 为增函数, 且为负的, 故 $m = \inf_{0.4 < x < 0.5} |f'(x)| = |f'(0.5)| = 25$. 此, 如果取 0.472 作为根的近似值, 其误差为

$$|0.472 - \xi| \leq \frac{|f(0.472)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 0.472.

现求第二个近似根, 由于 $f(10) = 0.001$, 故此根可能逼近 10. 现分别以 9.9 及 9.99 试之: $f(9.9) = -0.98$, $f(9.99) = -0.09$. 因此, $f(9.99) \cdot f(10) < 0$, 加以在 $(9.99, 10)$ 内 $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(9.99, 10)$ 内有且仅有一实根. 又因 $f(10)f''(10) > 0$ 及 $f''(x) \neq 0$, 故应用牛顿法求近似根时, 切点应选在 $(10, f(10))$ 处, 于是

$$x_1 = 10 - \frac{f(10)}{f'(10)} = 9.99999,$$

如果取 9.999 作为根的近似值, 则其误差显然已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的又一近似根为 9.999.

1622. $x \lg x = 1$ (精确到 10^{-4}).

解 曲线 $y = \lg x$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 只有一个交点. 因此, 所

给方程只有一个实根. 现确定其范围. 设 $f(x) = x \lg x - 1$, 由于 $f(2.506) = -0.0004$, $f(2.507) = 0.0005$, 且当 $2.506 < x < 2.507$ 时, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 故在 $(2.506, 2.507)$ 内有且仅有一实根, 切点选在 $(2.507, f(2.507))$. 依次求得其各次近似值为

$$x_1 = 2.5064; \quad x_2 = 2.5062.$$

由于 $f(2.5062) = 0.00002$, $m = \inf_{2.506 < x < 2.507} |f'(x)| = |f'(2.506)| = 0.84$, 因此, 如果取 2.5062 作为根的近似值时, 其误差为,

$$|2.5062 - \xi| \leq \frac{|f(2.5062)|}{m} < 0.0001,$$

已达到所需的精确度, 故所求的唯一近似根为 2.5062.

1623. $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ (精确到 10^{-3}) (二正根).

解 曲线 $y = \cos x$ 与 $y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ 的交点有无穷多个, 其中最小的三个正根分别记为 α, β, γ , 且

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi,$$

$$2\pi < \beta < \frac{5\pi}{2},$$

$$\frac{7\pi}{2} < \gamma < 4\pi.$$

现在我们将求 α 与 γ 两正根的计算方法叙述如下. 设 $f(x) = \cos x \operatorname{ch} x - 1$.

(1) 先求 α .

由于 $f(4.7) = -1.6812$, $f(4.8) = 4.3159$, 知 $4.7 < \alpha < 4.8$. 又因在 $(4.7, 4.8)$ 内 $f''(x) > 0$, 故切点应取在 $(4.8, f(4.8))$ 处, 依次求得 α 的各次近似值为

$$x_1 = 4.7345; \quad x_2 = 4.7301.$$

本题若采用 $\frac{|f(x_n)|}{m}$ 估计误差, 由于 m 本身也需估计, 而且繁琐, 今用比例法与牛顿法联合使用求根的近似值. 设以右上角带“'”的 x_i' 表示用比例法求出的第 i 次近似根, 则有

$$\begin{aligned} x_1' &= 4.7 - \frac{f(4.7)}{f(4.8) - f(4.7)} (4.8 - 4.7) \\ &= 4.7280, \end{aligned}$$

从而知

$$4.7280 < \alpha < 4.7345.$$

于是,

$$\begin{aligned} x_2' &= 4.7280 - \frac{f(4.7280)}{f(4.7345) - f(4.7280)} (4.7345 \\ &\quad - 4.7280) = 4.7300. \end{aligned}$$

因此,

$$4.7300 < \alpha < 4.7301.$$

取 4.730 作为 α 的近似值, 即可保证所需的精确度, 于是, 所给方程的一正根的近似值为 4.730.

(2) 再求 γ .

由于 $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -1$, $f(11) \approx 133$, 故知 $\frac{7\pi}{2} < \gamma < 11$. 切点取在 $(11, f(11))$ 处, 分别用比例法及牛顿法求得

$$x_1' = 10.9956, \quad x_1 = 10.9956,$$

因而取 10.996 作为 γ 的近似值, 即可保证所需的精确度. 于是, 所给方程的又一正根的近似值为 10.996.

1624. $x + e^x = 0$ (精确到 10^{-5}).

解 设 $f(x) = x + e^x$, 则 $f'(x) = 1 + e^x > 0$, $f''(x) = e^x > 0$. 由于 $f(0) = 1$, $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, 故在 $(-1, 0)$ 内所给方程有且仅有一实根, 切点选在 $(0, f(0))$ 处. 依次求得此根的各次近似值为

$$x_1 = -0.5; \quad x_2 = -0.56631; \quad x_3 = -0.567132; \\ x_4 = -0.567145.$$

由于

$$|x_4 - \xi| \leq \frac{|f(-0.567145)|}{m} = \frac{|f(-0.567145)|}{1 + e^{-1}} \\ < 10^{-5},$$

故取 -0.56715 作为根的近似值, 即可保证所需的精确度.

由于曲线 $y = e^x$ 与 $y = -x$ 只有一个交点, 故上述近似根 -0.56715 即为所给方程的唯一近似根.

1625. $x \operatorname{th} x = 1$, (精确到 10^{-6}).

解 设 $f(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{x}$, 则因曲线 $y = \operatorname{th} x$ 与 $y = \frac{1}{x}$

仅有两个交点，故所给方程仅有二实根。又因在 $x \tanh x$ 中以 $-x$ 代 x ，其值不变，故方程的二实根为 $\pm \xi$ 。

由 $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{x^2} > 0$ ，知 $f(x)$ 是增函数。

又因 $f(1) = -0.2384$ ， $f(2) = 0.4640$ ，故所给方程在 $(1, 2)$ 内有且仅有一实根。又

$$f''(x) = -\frac{2\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} - \frac{2}{x^3} < 0 \quad (x > 0),$$

因此切点应选为 $(1, f(1))$ 。仍以 x'_i 及 x_i 分别表示用比例法及牛顿法求得的根的第 i 次近似值；重复使用，即得

$$x'_1 = 1.339, \quad x_1 = 1.168,$$

故 $1.168 < \xi < 1.339$ 。

$$x'_2 = 1.2032, \quad x_2 = 1.1989,$$

有 $1.1989 < \xi < 1.2032$ 。

$$x'_3 = 1.1996796, \quad x_3 = 1.1996781.$$

故 $1.1996781 < \xi < 1.1996796$ 。

于是，取 ± 1.199678 作为根的近似值，即可保证所需的精确度。

1626. 求方程

$$\operatorname{tg} x = x$$

最小的三个正根（精确到0.001）。

解 由 $y = \operatorname{tg} x$ 及 $y = x$ 的图形知方程有正根，且有无穷个，只求其最小三正根，设 $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ 。

(1) 由于 $f'(x) = \operatorname{tg}^2 x > 0$ ， $f''(x) = 2\operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x$

> 0 ($x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$) 及 $f(\frac{4\pi}{3})f(\frac{23\pi}{16}) < 0$, 故在

$(\frac{4\pi}{3}, \frac{23\pi}{16})$ 内所给方程有且仅有一实根 ξ_1 , 切点应

选在 $(\frac{23\pi}{16}, f(\frac{23\pi}{16}))$ 处. 依次求得其各次近似值为

$$x_1 = 4.4959; x_2 = 4.4933,$$

由于 $|f(4.4933)| = 0.0012$, $m = \inf_{\frac{4\pi}{3} < x < \frac{23\pi}{16}} |f'(x)|$
 $= \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{3} = 3$, 因此, 如果取 4.493 作为根 ξ_1 的近
 似值, 其误差为

$$|x_2 - \xi_1| \leq \frac{|f(4.4933)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一最小正近似根为 4.493.

(2) 再求第二个最小正根.

由于 $f(\frac{39\pi}{16}) < 0$, $f(\frac{79\pi}{32}) > 0$, 故在 $(\frac{39\pi}{16},$

$\frac{79\pi}{32})$ 内方程有且仅有一实根 ξ_2 . 又因在此区间内

$f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 故切点应选在 $(\frac{79\pi}{32},$

$f(\frac{79\pi}{32}))$ 处. 依次求得 ξ_2 的各次近似值为

$$x_1 = 7.7325; x_2 = 7.7258; x_3 = 7.7254,$$

由于 $|f(7.7254)| = 0.0083$, $m = \inf_{\frac{39\pi}{16} < x < \frac{79\pi}{32}} |f'(x)|$
 $= \operatorname{tg}^2 \frac{39\pi}{16} > 25$, 因此, 如果取 7.725 作为 ξ_2 的近似
 值, 其误差为

$$|x_3 - \xi_2| \leq \frac{|f(7.7254)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的第二个最小正根的近似值为 7.725.

(3) 最后求第三个最小正根.

由于 $f\left(\frac{111\pi}{32}\right) < 0$, $f\left(\frac{223\pi}{64}\right) > 0$, 故在
 $\left(\frac{111\pi}{32}, \frac{223\pi}{64}\right)$ 内方程有且仅有一实根 ξ_3 . 又因
 在此区间内 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 故切点应选在
 $\left(\frac{223\pi}{64}, f\left(\frac{223\pi}{64}\right)\right)$ 处, 依次求得 ξ_3 的各次近似值
 为

$$x_1 = 10.9233; \quad x_2 = 10.9086; \quad x_3 = 10.9041.$$

由于 $|f(10.9041)| = 0.014$, $m = \operatorname{tg}^2 \frac{111\pi}{32} = 102.78$.
 因此, 如果取 10.904 作为 ξ_3 的近似值, 其误差为

$$|x_3 - \xi_3| \leq \frac{|f(10.9041)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的第三个最小正

根的近似值为 10.904.

1627. 求方程

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

的二正根 (精确到 10^{-3}).

解 由 $y = \operatorname{ctg} x$ 与 $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 的图形知交点有无穷个, 我们只求其最小二正根 ξ_1 及 ξ_2 :

$$\frac{\pi}{2} < \xi_1 < \pi, \quad \frac{3\pi}{2} < \xi_2 < 2\pi.$$

(1) 先求 ξ_1 .

设 $f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$, 则在所考虑的区间内

$$f'(x) = -\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} < 0, \quad f''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} -$$

$\frac{2}{x^3} < 0$. 又因 $f(2.0708) = 0.0062$, $f(2.1708) = -0.0593$, 故切点应选在 $(2.1708, f(2.1708))$ 处. 用比例法与牛顿法联合求 ξ_1 . 重复应用, 即得

$$x'_1 = 2.0803, \quad x_1 = 2.0923,$$

故 $2.0803 < \xi_1 < 2.0923$.

$$x'_2 = 2.0815, \quad x_2 = 2.0816,$$

故取 2.081 作为 ξ_1 的近似值, 即可保证所需的精确度. 于是, 所给方程的一正根的近似值为 2.081.

(2) 再求 ξ_2 .

由于 $f(5.9324) = 0.0648$, $f(5.9424) = -0.0169$,

故

$$5.9324 \leq \xi_2 \leq 5.9424,$$

切点取 $(5.9424, f(5.9424))$.

用比例法及牛顿法各一次, 即得

$$x'_1 = 5.9403, \quad x_1 = 5.9404,$$

因此, 取 5.940 作为 ξ_2 的近似值, 即可保证所需的精确度. 于是, 所给方程的又一正根的近似值为 5.940.

И. И. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

高志顺 周学各 编
李天阶 邵品瑜 主审

山东科学技术出版社

Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(三)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

E. I. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(三)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 21 375印张 453千字
1979年11月第1版 1983年8月第3次印刷
印数: 131,601—168,200

书号13195·19 定价2.25元

出版说明

吉本多维奇 (B. H. ГИБНИКОВИЧ) 著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇编成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要

轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目 录

第三章 不定积分	1
§1. 最简单的不定积分.....	1
§2. 有理函数的积分法.....	93
§3. 无理函数的积分法.....	154
§4. 三角函数的积分法.....	219
§5. 各种超越函数的积分法.....	276
§6. 函数的积分法的各种例子.....	310
第四章 定积分	348
§1. 定积分作为和的极限.....	348
§2. 利用不定积分计算定积分的方法.....	378
§3. 中值定理.....	454
§4. 广义积分.....	470
§5. 面积的计算法.....	537
§6. 弧长的计算法.....	564
§7. 体积的计算法.....	580
§8. 旋转曲面表面积的算法.....	605
§9. 矩的计算法, 重心的坐标.....	618
§10. 力学和物理学中的问题.....	632
§11. 定积分的近似算法.....	645

第三章 不定积分

§1. 最简单的不定积分

1° 不定积分的概念 若 $f(x)$ 为连续函数及 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

式中 C 为任意常数.

2° 不定积分的基本性质:

$$(a) d\left[\int f(x) dx\right] = f(x) dx; \quad (b) \int d\Phi(x) = \Phi(x) + C;$$

$$(c) \int Af(x) dx = A \int f(x) dx \quad (A = \text{常数});$$

$$(d) \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

3° 最简积分表:

$$\text{I. } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C, \end{cases}$$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases}$$

$$\text{VI. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C;$$

$$\text{VII. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1); \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\text{VIII. } \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\text{IX. } \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\text{XIII. } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\text{XV. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

4° 积分的基本方法

(a) 引入新变数法 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则 $\int f(u) du = F(u) + C$, 式中 $u = \varphi(x)$.

(6) 分项积分法 若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则 $\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$

(B) 代入法 假设

$x = \varphi(t)$, 式中 $\varphi(t)$ 及其导函数 $\varphi'(t)$ 为连续的,

则得 $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$

(r) 分部积分法 若 u 和 v 为 x 的可微分函数,

则 $\int u dv = uv - \int v du.$

利用最简积分表, 求出下列积分*:

1628. $\int (3-x^2)^3 dx.$

* 本章在叙述习题及其解答过程中, 凡出现的函数, 无论是被积函数还是原函数, 均默认是在有意义的定义域上进行的. 例如最简积分表中 I 里当 $n \leq -2$ 时, 要求 $x \neq 0$; IV 中要求 $|x| \neq 1$; V 中要求 $|x| < 1$; 以及 VI 中, 当取负号时要求 $|x| > 1$; 等等, 就未加声明. 在题解中也有相当多的类似情况. 因此, 如无特别声明, 在一般情形下, 这些定义域是很容易被读者确定的, 此处就不再予以一一指明. ——题解编者注.

$$\begin{aligned}\text{解 } \int (3-x^2)^3 dx &= \int (27-27x^2+9x^4-x^6) dx \\ &= 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C.\end{aligned}$$

$$1629. \int x^2(5-x)^4 dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int x^2(5-x)^4 dx &= \int (625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6) dx \\ &= \frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C.\end{aligned}$$

$$1630. \int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx &= \int (1-6x+11x^2-6x^3) dx \\ &= x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.\end{aligned}$$

$$1631. \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx &= \int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right) dx \\ &= -\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C.\end{aligned}$$

$$1632. \int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right) dx.$$

$$\text{解 } \int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right) dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$$

$$1633. \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

$$1634. \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx &= \int (x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}) dx \\ &= \frac{4}{5} x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17} x\sqrt[4]{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C. \end{aligned}$$

$$1635. \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx &= \int (x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}) dx \\ &= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \left(1 + \frac{8}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3 \right) + C. \end{aligned}$$

$$1636. \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}) dx$$

$$= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4 x^{-\frac{1}{4}} + C = \frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}} + C.$$

$$1637. \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx \\ &= \int \left(2 - 2\sqrt[6]{72} x^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{9} x^{-\frac{1}{3}} \right) dx \\ &= 2x - \frac{12}{5} \sqrt[6]{72} x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{9} x^{\frac{2}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$1638. \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C. \end{aligned}$$

$$1639. \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= x - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

$$1640. \int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx$$

$$= -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$1641. \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1} \right) dx$$

$$= x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$1642. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

$$= \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

$$1643. \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx$$

$$= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right| + C.$$

$$1644. \int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int (2^x + 3^x)^2 dx &= \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.\end{aligned}$$

$$1645. \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx &= \int \left[2 \left(\frac{1}{5} \right)^x - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] dx \\ &= -\frac{2}{\ln 5} \left(\frac{1}{5} \right)^x + \frac{1}{5 \ln 2} \left(\frac{1}{2} \right)^x + C.\end{aligned}$$

$$1646. \int \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int (e^{2x} - e^x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C.\end{aligned}$$

$$1647. \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

$$1648. \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \sqrt{1 - \sin^2 x} dx &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx \\
 &= \int (\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x))(\cos x - \sin x) dx \\
 &= (\sin x + \cos x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C.
 \end{aligned}$$

$$1649. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int (\operatorname{csc}^2 x - 1) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

$$1650. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$1651. \int (a^{\operatorname{sh} x} + b^{\operatorname{ch} x}) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (a^{\operatorname{sh} x} + b^{\operatorname{ch} x}) dx = a^{\operatorname{ch} x} + b^{\operatorname{sh} x} + C.$$

$$1652. \int \operatorname{th}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{th}^2 x dx = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) dx = x - \operatorname{th} x + C.$$

$$1653. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{cth}^2 x dx = \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right) dx = x - \operatorname{cth} x + C.$$

1654. 证明: 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

证 由 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 得知 $F'(x) = f(x)$, 因而
 有 $F'(ax+b) = f(ax+b)$, 且 $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right]$
 $= F'(ax+b)$, 于是

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right] = f(ax+b),$$

所以

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

求出下列积分:

$$1655. \int \frac{dx}{x+a}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

$$1656. \int (2x-3)^{10} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int (2x-3)^{10} dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} (2x-3)^{11} + C \\ &= \frac{1}{22} (2x-3)^{11} + C. \end{aligned}$$

$$1657. \int \sqrt[3]{1-3x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt[3]{1-3x} dx &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C \\ &= -\frac{1}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$1658. \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} &= -\frac{1}{5} \cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + C. \end{aligned}$$

$$1659. \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) (5x-2)^{-\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{1}{2}}} + C. \end{aligned}$$

$$1660^{+*}. \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx &= \int (1-x)^{-\frac{3}{5}} dx \\ &= -\frac{5}{2} \sqrt[5]{(1-x)^2} + C. \end{aligned}$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

$$1661. \int \frac{dx}{2+3x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{2+3x^2} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

$$1662. \int \frac{dx}{2-3x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{2-3x^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}x}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}}x} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x\sqrt{3}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1663. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsin}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

$$1664. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left| x \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 1} \right| + C_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 - 2}| + C.$$

$$1665. \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx = -(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}) + C.$$

$$1666. \int (\sin 5x - \sin 5a) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (\sin 5x - \sin 5a) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5a + C.$$

$$1667. \int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}(2x + \frac{\pi}{4}) + C.$$

$$1668. \int \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$1669. \int \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{1 - \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$1670. \int \frac{dx}{1 + \sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x} &= \int \frac{dx}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\ &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

$$1671. \int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx \\ = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(2x+1) + \operatorname{sh}(2x-1)] + C. \end{aligned}$$

$$1672. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = 2 \operatorname{th} \frac{x}{2} + C.$$

$$1673. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = -2 \operatorname{cth} \frac{x}{2} + C.$$

用适当地变换被积函数的方法来求下列积分:

$$1674. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

$$1675. \quad \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx &= \frac{1}{3} \int (1+x^3)^{\frac{1}{3}} d(1+x^3) \\ &= \frac{1}{4} (1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$1676. \quad \int \frac{x dx}{3-2x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{3-2x^2} &= -\frac{1}{4} \int \frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} \\ &= -\frac{1}{4} \ln|3-2x^2| + C. \end{aligned}$$

$$1677. \quad \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)} + C. \end{aligned}$$

$$1678. \quad \int \frac{x dx}{4+x^4}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x dx}{4+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2} + C.$$

$$1679. \quad \int \frac{x^3 dx}{x^8-2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} &= \frac{1}{8} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= -\frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C.\end{aligned}$$

$$1680. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{1 + (\sqrt{x})^2} \\ &= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

$$1681. \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = - \int \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{x} + C.$$

$$1682. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = - \ln \left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right) + C \\ &= - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C.\end{aligned}$$

$$1683. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\
 &= -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C.
 \end{aligned}$$

$$1684. \int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -\frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sgn} x d\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.
 \end{aligned}$$

$$1685. \int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{2} \int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} d(x^2-1) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C.
 \end{aligned}$$

$$1686. \int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{24} \int (8x^3+27)^{-\frac{2}{3}} d(8x^3+27).$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt[3]{8x^3 + 27} + C.$$

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$

解 由 $x(1+x) > 0$ 知: $x > 0$ 或 $x < -1$.

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} &= 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} \\ &= 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C; \end{aligned}$$

当 $x < -1$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} &= - \int \frac{d(-(1+x))}{\sqrt{(-x)[- (1+x)]}} \\ &= -2 \int \frac{d(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}} \\ &= -2 \ln(\sqrt{-x} + \sqrt{-(1+x)}) + C. \end{aligned}$$

总之, 得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2 \operatorname{sgn} x \cdot \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) + C.$$

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

解 由 $x(1-x) > 0$ 知: $0 < x < 1$. 于是, 得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$= 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

$$1689. \int x e^{-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$1690. \int \frac{e^x dx}{2+e^x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{e^x dx}{2+e^x} = \int \frac{d(2+e^x)}{2+e^x} = \ln(2+e^x) + C.$$

$$1691. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctg(e^x) + C.$$

$$1692. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &= -\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}} \\ &= -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C. \end{aligned}$$

$$1693. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3} \ln^3 x + C.$$

$$1694. \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} &= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln(\ln x)} \\ &= \int \frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)} = \ln |\ln(\ln x)| + C. \end{aligned}$$

$$1695. \int \sin^5 x \cos x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

$$1696. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx &= - \int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d(\cos x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C. \end{aligned}$$

$$1697. \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= -\ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

$$1698. \int \operatorname{ctg} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{ctg} x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \\ &= \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

$$1699. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx \\ &= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x) \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x} + C. \end{aligned}$$

$$1700. \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx.$$

解 当 $|a| = |b| \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx \\ &= -\frac{1}{|a|} \int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{2|a|} \sin^2 x + C, \end{aligned}$$

当 $|a| \neq |b|$ 时,

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2}} \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2} + C \\ &= \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C. \end{aligned}$$

$$1701. \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}} &= - \int (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{4}} d(\operatorname{ctg} x) \\ &= - \frac{4}{3} \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + C. \end{aligned}$$

$$1702. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx \\ &= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1703. \int \frac{dx}{\sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx \\ &= \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1704. \int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.$$

$$1705. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} &= \int \frac{1}{\frac{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{th} \frac{x}{2}}} dx = \int \frac{d\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} \\ &= \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1706. \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} &= \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} \\ &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(e^x) + C. \end{aligned}$$

$$1707. \quad \int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx.$$

解 因为

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x &= (\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x)^2 - 2\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x \\ &= \operatorname{ch}^2 2x - \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 2x = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 2x}{2}, \end{aligned}$$

所以, 得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx &= \int \frac{\frac{1}{4} d(\operatorname{ch} 2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\operatorname{ch} 2x + \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}) + C_1 \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}\right) + C.
\end{aligned}$$

1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}.$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} &= \int (\operatorname{th} x)^{-\frac{2}{3}} d(\operatorname{th} x) \\
&= 3 \sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C.
\end{aligned}$$

1709. $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1+x^2} dx.$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1+x^2} dx &= \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) \\
&= \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2 + C.
\end{aligned}$$

1710. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arc} \sin x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(\operatorname{arc} \sin x)^2 \sqrt{1-x^2}} &= \int -\frac{d(\operatorname{arc} \sin x)}{(\operatorname{arc} \sin x)^2} \\
&= -\frac{1}{\operatorname{arc} \sin x} + C.
\end{aligned}$$

$$1711. \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx \\ &= \int [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]^{\frac{1}{2}} d[\ln(x + \sqrt{1+x^2})] \\ &= \frac{2}{3} \ln^{\frac{3}{2}}(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

$$1712. \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

$$1713. \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1714^+. \int \frac{x^{14} dx}{(x^6+1)^4}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{x^{14} dx}{(x^5+1)^4} &= \int \frac{x^{14} dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4} \\
&= -\frac{1}{5} \int (1+x^{-5})^{-4} d(1+x^{-5}) \\
&= \frac{1}{15} (1+x^{-5})^{-3} + C_1 = \frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3} + C_1 \\
&= \frac{(x^5+1)^3 - 3x^{10} - 3x^5 - 1}{15(x^5+1)^3} + C_1 \\
&= -\frac{3x^{10} + 3x^5 + 1}{15(x^5+1)^3} + C.
\end{aligned}$$

$$1715. \int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}.$$

解 当 $n = -2$ 时,

$$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x| + C,$$

当 $n \neq -2$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx &= \frac{2}{n+2} \int \frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2}} \\
&= \frac{2}{n+2} \ln\left(x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

$$1716^+. \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx &= \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.\end{aligned}$$

$$1717. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} &= \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right) + C.\end{aligned}$$

$$1718. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x dx}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{d(\cos 2x)}{\frac{1+\cos^2 2x}{2}} = -\frac{1}{2} \arctg(\cos 2x) + C.\end{aligned}$$

$$1719. \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ln 3 - \ln 2} \int \frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 1} \\
&= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| + C.
\end{aligned}$$

1720. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}.$

解
$$\begin{aligned}
&\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}} \\
&= 2\sqrt{1+x^2} + C.
\end{aligned}$$

用分项积分法计算下列积分:

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2 dx.$

解
$$\begin{aligned}
&\int x^2(2-3x^2)^2 dx = \int (4x^2 - 12x^4 + 9x^6) dx \\
&= \frac{4}{3}x^3 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{9}{7}x^7 + C.
\end{aligned}$$

1722. $\int \frac{1+x}{1-x} dx.$

解
$$\begin{aligned}
&\int \frac{1+x}{1-x} dx = \int \left(-1 + \frac{2}{1-x}\right) dx \\
&= -x - 2\ln|1-x| + C.
\end{aligned}$$

$$1723. \int \frac{x^2}{1+x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^2}{1+x} dx &= \int \left(x-1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| + C. \end{aligned}$$

$$1724. \int \frac{x^3}{3+x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^3}{3+x} dx &= \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{3+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|3+x| + C. \end{aligned}$$

$$1725. \int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx &= \int \left(1 + \frac{2x}{1+x^2} \right) dx \\ &= x + \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

$$1726. \int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx &= \int \frac{(x^2-2)-4x+6}{2-x^2} dx \\ &= \int \left(-1 - \frac{4x}{2-x^2} + \frac{6}{2-x^2} \right) dx \\ &= -x + 2\ln|2-x^2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1727. \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx &= \int \frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}} dx \\ &= \int \left[(1-x)^{-98} - 2(1-x)^{-99} + (1-x)^{-100} \right] dx \\ &= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C. \end{aligned}$$

$$1728. \int \frac{x^5}{x+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^5}{x+1} dx &= \int \left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|1+x| + C. \end{aligned}$$

$$1729. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} &= \int \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right] + C. \end{aligned}$$

$$1730. \int x\sqrt{2-5x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int x\sqrt{2-5x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left[-\frac{1}{5}(2-5x) + \frac{2}{5} \right] (2-5x)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \int \left[-\frac{1}{5}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{1}{2}} \right] dx \\
&= -\frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C \\
&= -\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

1731. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}} &= -\frac{1}{3} \int \frac{(1-3x)-1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}} dx \\
&= -\frac{1}{3} \int \left[(1-3x)^{-\frac{1}{3}} - (1-3x)^{-\frac{4}{3}} \right] dx \\
&= \frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}(1-3x)^{-\frac{1}{3}} + C \\
&= -\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C.
\end{aligned}$$

1732. $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int [(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \left[(1+x^2)^{\frac{4}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \right] d(1+x^2) \\
&= \frac{3}{14} (1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C \\
&= \frac{12x^2-9}{56} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.
\end{aligned}$$

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

解 $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C.$$

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$

解 $\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

1735. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

解 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} \right) dx$

$$= \arctan x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$1736. \int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)} &= \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+3} \right) dx \\ &= \frac{1}{10\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{5\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$1737. \int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)} &= \int \left(\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} \right) dx \\ &= \ln \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2} + C. \end{aligned}$$

$$1738. \int \frac{x dx}{x^4 + 3x^2 + 2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{x^4 + 3x^2 + 2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} \right) d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2+2} + C. \end{aligned}$$

$$1739. \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b).$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(a-b)^2} \int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{(a-b)^2} \int \left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} - \frac{2}{(x+a)(x+b)} \right] dx \\
&= -\frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} \right) - \frac{2}{(a-b)^2} \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} \\
&= -\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C.
\end{aligned}$$

1740. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (|a| \neq |b|).$

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \\
&= \frac{1}{a^2-b^2} \int \left(\frac{1}{x^2+b^2} - \frac{1}{x^2+a^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{a^2-b^2} \left(\frac{1}{b} \arctan \frac{x}{b} - \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) + C.
\end{aligned}$$

1741. $\int \sin^2 x dx.$

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.
\end{aligned}$$

1742. $\int \cos^2 x dx.$

$$\text{解} \quad \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$1743. \int \sin x \cdot \sin(x+a) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \sin x \cdot \sin(x+a) dx \\ &= \frac{1}{2} \int [\cos a - \cos(2x+a)] dx \\ &= \frac{x}{2} \cos a - \frac{1}{4} \sin(2x+a) + C. \end{aligned}$$

$$1744. \int \sin 3x \cdot \sin 5x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \sin 3x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C. \end{aligned}$$

$$1745. \int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx = \frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{5x}{6} + \cos \frac{x}{6} \right) dx \\ &= \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6} + C. \end{aligned}$$

$$1746. \int \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx.$$

$$\text{解} \quad \int \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \left[\sin\left(5x + \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) \right] dx \\
&= -\frac{1}{10} \cos\left(5x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + C.
\end{aligned}$$

1747. $\int \sin^3 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \sin^3 x dx &= \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x) \\
&= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + C.
\end{aligned}$$

1748. $\int \cos^3 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \cos^3 x dx &= \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) \\
&= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.
\end{aligned}$$

1749. $\int \sin^4 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx \\
&= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.
\end{aligned}$$

$$1750. \int \cos^4 x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) dx \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C. \end{aligned}$$

$$1751. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int (\operatorname{csc}^2 x - 1) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

$$1752. \int \operatorname{tg}^3 x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \int \operatorname{tg} x \cdot (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x dx \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C, \end{aligned}$$

其中第二个积分见1697题.

$$1753. \int \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x dx.$$

解 因为

$$\sin^2 3x \cdot \sin^3 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) \cdot \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)$$

$$= \frac{1}{8} (3\sin 2x - 3\cos 6x \cdot \sin 2x - \sin 6x + \sin 6x \cdot \cos 6x)$$

$$= \frac{3}{8} \sin 2x + \frac{3}{16} \sin 4x - \frac{1}{8} \sin 6x - \frac{3}{16} \sin 8x + \frac{1}{16} \sin 12x$$

所以，得

$$\int \sin^2 3x \cdot \sin^2 2x dx = -\frac{3}{16} \cos 2x - \frac{3}{64} \cos 4x$$

$$+ \frac{1}{48} \cos 6x + \frac{3}{128} \cos 8x - \frac{1}{192} \cos 12x + C.$$

$$1754. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

$$1755. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x} &= \int \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{\sin x} + C, \end{aligned}$$

其中第一个积分见1704题.

$$1756. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} \right) dx \\ &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + \int \frac{d(2x)}{\sin 2x} \\ &= -\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x| + C, \end{aligned}$$

其中第二个积分见1703题.

$$1757. \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx &= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \cos x dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) d(\sin x) \\ &= \ln |\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x + C. \end{aligned}$$

$$1758. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \sec^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C, \end{aligned}$$

$$1759. \int \frac{dx}{1 + e^x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = x - \ln(1+e^x) + C.$$

$$1760. \quad \int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx &= \int \left(1 + \frac{2e^x}{1+e^{2x}}\right) dx \\ &= x + 2 \operatorname{arctg}(e^x) + C. \end{aligned}$$

$$1761. \quad \int \operatorname{sh}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{sh}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \frac{x}{2} + C.$$

$$1762. \quad \int \operatorname{ch}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{ch}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{x}{2} + C.$$

$$1763. \quad \int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x dx &= 2 \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x dx = 2 \int \operatorname{sh}^2 x d(\operatorname{sh} x) \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{sh}^3 x + C. \end{aligned}$$

$$1764. \quad \int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 4x + \operatorname{ch} 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$$

$$1765. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} &= \int \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) dx \\ &= -(\operatorname{cth} x + \operatorname{th} x) + C. \end{aligned}$$

用适当的代换, 求下列积分:

$$1766. \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx.$$

解 设 $1-x=t$, 则 $x=1-t$, $dx=-dt$, 故得

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx &= - \int (1-t)^2 t^{\frac{1}{3}} dt \\ &= - \int \left(t^{\frac{1}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + t^{\frac{7}{3}} \right) dt \\ &= - \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7} t^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10} t^{\frac{10}{3}} + C \\ &= - \frac{3}{140} (9 + 12x + 14x^2) (1-x)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$1767. \int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$$

解 设 $1-5x^2=t$, 则 $x^2=\frac{1}{5}(1-t)$, 从而 $x^3 dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 d(x^2) = \frac{1}{10} (1-t) \left(-\frac{1}{5} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{50}(1-t)dt, \text{ 故得}$$

$$\begin{aligned}\int x^3(1-5x^2)^{10}dx &= -\frac{1}{50}\int(t^{10}-t^{11})dt \\ &= -\frac{1}{550}t^{11} + \frac{1}{600}t^{12} + C \\ &= -\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11} + C.\end{aligned}$$

$$1768. \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx.$$

解 设 $2-x=t$, 则 $x=2-t$, $dx=-dt$, 故得

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx &= -\int t^{-\frac{1}{2}}(2-t)^2 dt \\ &= -\int \left(4t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\right) dt \\ &= -8t^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x} + C.\end{aligned}$$

$$1769. \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

解 设 $1-x^2=t$, 则 $x^2=1-t$, 从而 $x^5 dx = \frac{1}{2}(x^2)^2$

$$d(x^2) = -\frac{1}{2}(1-t)^2 dt, \text{ 故得}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^2 dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int \left(t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}} \right) dt \\
 &= -t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} t^{\frac{5}{2}} + C \\
 &= -\frac{1}{15} (8 + 4x^2 + 3x^4) \sqrt{1-x^2} + C.
 \end{aligned}$$

1770. $\int x^5 (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$

解 设 $2-5x^3=t$, 则 $x^3=\frac{1}{5}(2-t)$, 从而

$$x^5 dx = \frac{1}{3} x^3 d(x^3) = -\frac{1}{75} (2-t) dt,$$

故得

$$\begin{aligned}
 \int x^5 (2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx &= -\frac{1}{75} \int t^{\frac{2}{3}} (2-t) dt \\
 &= -\frac{1}{75} \int \left(2t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{5}{3}} \right) dt = -\frac{2}{125} t^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{200} t^{\frac{8}{3}} + C \\
 &= -\frac{6+25x^3}{1000} (2-5x^3)^{\frac{5}{3}} + C.
 \end{aligned}$$

1771+. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx.$

解 设 $\sin x=t$, 则 $\cos^5 x dx = (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$
 $= (1-t^2)^2 dt,$

故得

$$\begin{aligned}\int \cos^6 x \sqrt{\sin x} dx &= \int (1-t^2)^2 t^{\frac{1}{2}} dt \\&= \int \left(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}} \right) dt \\&= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}} + C \\&= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x \right) \sqrt{\sin^3 x} + C.\end{aligned}$$

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$

解 设 $\cos^2 x = t$, 则 $\sin x \cos x dx = -\frac{1}{2} dt$, 故得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{t}{1+t} dt \\&= -\frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \ln(1+t) + C \\&= -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x) + C.\end{aligned}$$

1773. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

解 设 $\operatorname{tg} x = t$, 则 $\frac{1}{\cos^4 x} dx = (1+t^2) dt$, 故得

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$= \frac{1}{5} \lg^5 x + \frac{1}{3} \lg^3 x + C.$$

$$1774. \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

解 设 $1+\ln x=t$, 则 $\frac{\ln x dx}{x} = (1+\ln x-1)d(1+\ln x)$
 $= (t-1)dt$, 故得

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} &= \int t^{-\frac{1}{2}}(t-1)dt \\ &= \int \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(\ln x - 2)\sqrt{1+\ln x} + C. \end{aligned}$$

$$1775. \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$$

解 设 $e^{\frac{x}{2}}=t$, 则 $e^x=t^2$, $dx=\frac{2dt}{t}$, 故得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} &= 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = 2 \int \left(\frac{1-t}{t^2} + \frac{1}{1+t}\right)dt \\ &= -\frac{2}{t} - 2\ln t + 2\ln(1+t) + C \\ &= -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2\ln(1+e^{\frac{x}{2}}) + C. \end{aligned}$$

$$1776. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

解 设 $\sqrt{1+e^x}=t$, 则 $x=\ln(t^2-1)$, $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$,

故得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} &= 2 \int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + C \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C = x - 2\ln(1+\sqrt{1+e^x}) + C.\end{aligned}$$

1777. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

解 设 $\operatorname{arctg} \sqrt{x}=t$, 则 $dt=\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, 故得

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} &= 2 \int t dt = t^2 + C \\ &= (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 + C.\end{aligned}$$

运用三角的代换 $x=asint$, $x=atgt$, $x=a\sin^2 t$ 等等, 求下列积分 (参数为正的):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

解 由于被积函数的存在域为 $-1 < x < 1$, 因此可设

$x=\sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \cos^3 t, \quad dx = \cos t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C \\ &= \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.\end{aligned}$$

1779. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}.$

解 被积函数的存在域为 $x > \sqrt{2}$ 及 $x < -\sqrt{2}$, 分别考虑.

(1) 当 $x > \sqrt{2}$ 时, 可设 $x = \sqrt{2} \sec t$, 并限制 $0 <$

$t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{2 \sec^2 t}{\sqrt{2} \operatorname{tg} t}, \quad dx = \sqrt{2} \sec t \cdot \operatorname{tg} t \, dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}} &= 2 \int \sec^3 t \, dt = 2 \int \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+\sin t} + \frac{1}{1-\sin t} \right)^2 d(\sin t) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2} + \int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1-\sin t} - \frac{1}{1+\sin t} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right) + C_1 \\ &= \operatorname{tg} t \cdot \sec t + \ln(\sec t + \operatorname{tg} t) + C_1\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 2}) + C.$$

(2) 当 $x < -\sqrt{2}$ 时, 仍设 $x = \sqrt{2} \sec t$, 但限制 $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. 其余步骤与上相同, 注意到, 此时 $\sec t + \operatorname{tg} t < 0$, 因此在对数符号里要加绝对值, 即结果为 $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 2}| + C$.

总之, 当 $|x| > \sqrt{2}$ 时,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 2} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 2}| + C.$$

1780. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

解 被积函数的存在域为 $-a \leq x \leq a$, 因此设 $x = a \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \quad dx = a \cos t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

*) 利用1742题的结果.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$

解 被积函数的存在域为 $-\infty < x < +\infty$, 因此可设

$x = a \operatorname{tg} t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = a^3 \sec^3 t, \quad dx = a \sec^2 t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{a^2} \int \cos t \, dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C. \end{aligned}$$

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx.$

解 被积函数的存在域为 $-a \leq x < a$, 因此可设 x

$= a \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} = \frac{1+\sin t}{\cos t}, \quad dx = a \cos t \, dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= a \int (1 + \sin t) dt = a(t - \cos t) + C \\ &= a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (-a < x < a). \end{aligned}$$

注意, 上式在端点 $x = -a$ 也成立. 即函数 $F(x)$

$= a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$ 在点 $x = -a$ 的 (右) 导数等于

被积函数 $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ 在点 $x = -a$ 之值。事实上,

由于 $F(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $-a \leq x < a$ 连续, 且 $F'(x) = f(x)$ 在 $-a < x < a$ 成立. 故由中值定理, 知当 $-a < x < a$ 时, 有

$$\frac{F(x) - F(-a)}{x + a} = F'(\xi) = f(\xi), \quad -a < \xi < x.$$

由此可知, (右) 导数

$$\begin{aligned} F'(-a) &= \lim_{x \rightarrow -a+0} \frac{F(x) - F(-a)}{x + a} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow -a+0} f(\xi) = f(-a). \end{aligned}$$

下面有些题目在端点的情况可类似地进行讨论, 从略.

1783. $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$

解 被积函数的存在域为 $0 \leq x < 2a$, 因此可设 x

$= 2a \sin^2 t$, 并限制 $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} = \frac{2a \sin^3 t}{\cos t}, \quad dx = 4a \sin t \cos t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} &= 8a^2 \int \sin^4 t dt \\ &= 8a^2 \left(\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t \right)^* + C. \end{aligned}$$

注意到 $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2\sqrt{\frac{x}{2a}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{2a}} = \frac{1}{a}$

$\cdot \sqrt{x(2a-x)}$ 及 $\sin 4t = 2 \sin 2t \cos 2t = 4 \sin t \cos t (1$

$-2 \sin^2 t) = \frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)}$, 最后得

$$\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx = 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}}$$

$$- 2a^2 \cdot \frac{1}{a} \sqrt{x(2a-x)} + \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)} + C$$

$$= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2} \sqrt{x(2a-x)} + C.$$

*) 利用1749题的结果。

$$1784. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

解 不妨设 $a < b$. 被积函数的存在域为 $a < x < b$, 因此可设 $x-a = (b-a)\sin^2 t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin t \cos t,$$

$$dx = 2(b-a)\sin t \cos t dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \int dt = 2t + C$$

$$= 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

$$1785. \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx.$$

解 与上题相同, 作同一代换, 并注意到 $\sin 4t = 4 \sin t$

$$\cdot \cos t (1 - 2 \sin^2 t) = 4 \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x-a}{b-a}} \left(1 - 2 \cdot \frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$= -4 \cdot \frac{2x - (a+b)}{(b-a)^2} \sqrt{(x-a)(b-x)}, \text{ 即得}$$

$$\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = 2(b-a)^2 \int \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2} \int \sin^2 2t dt = \frac{(b-a)^2}{4} \int (1 - \cos 4t) dt$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) + C$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$$

$$+ \frac{2x - (a+b)}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)} + C.$$

用双曲线代换 $x = a \sinh t$, $x = a \cosh t$ 等等, 求下列积分(参数为正的):

$$1786. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$$

解 被积函数的存在域为 $-\infty < x < +\infty$, 因此可设 $x = a \sinh t$. 从而

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \cosh t, \quad dx = a \cosh t dt.$$

代入得

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt$$

$$= a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t \right)^{*)} + C_1.$$

注意到 $x + \sqrt{a^2 + x^2} = a (\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = ae^t$, 即 $t =$

$$\ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \text{ 及 } \operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \frac{2x\sqrt{a^2 + x^2}}{a^2},$$

最后得

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

$$+ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + C.$$

*) 利用1762题的结果.

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx.$

解 与上题相同, 设 $x = a \operatorname{sh} t$, 则

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}, \quad dx = a \operatorname{ch} t dt.$$

代入得

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = a^2 \int \operatorname{sh}^2 t dt$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{t}{2} \right)^{*)} + C_1$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

*) 利用1761题的结果.

$$1788^+. \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx.$$

解 被积函数的存在域为 $x \geq a$ 及 $x \leq -a$.

(1) 当 $x > a$ 时, 可设 $x = a \operatorname{ch} t$, 并限制 $t > 0$. 从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\operatorname{ch} t - 1}{\operatorname{sh} t}, \quad dx = a \operatorname{sh} t \, dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx &= a \int (\operatorname{ch} t - 1) dt \\ &= a \operatorname{sh} t - at + C_1 = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} - at + C_1 \\ &= a \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - a \ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} + \frac{x}{a}\right) + C_1 \\ &= \sqrt{x^2 - a^2} - a \ln(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + C_2 \\ &= \sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}) + C. \end{aligned}$$

(2) 当 $x < -a$ 时, 可设 $x = -a \operatorname{ch} t$, 并限制 $t > 0$. 从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = -\frac{\operatorname{ch} t + 1}{\operatorname{sh} t}, \quad dx = -a \operatorname{sh} t \, dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx &= -a \int (\operatorname{ch} t + 1) dt = -a \operatorname{sh} t - at + C_1 \\
&= -a \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - a \ln \left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} + \frac{x}{a} \right) + C_1 \\
&= -\sqrt{x^2 - a^2} - a \ln(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + C_2 \\
&= -\sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{-x+a} + \sqrt{-x-a}) + C.
\end{aligned}$$

总之, 当 $|x| > a$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx &= \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \\
&\quad - 2a \ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|}) + C.
\end{aligned}$$

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$

解 不妨设 $a < b$. 被积函数的存在域为 $x > -a$ 及 $x < -b$.

(1) 当 $x > -a$ 时, 可设 $x+a = (b-a) \operatorname{sh}^2 t$, 并限制 $t > 0$, 从而

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+a)(x+b)} &= (b-a) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad dx \\
&= 2(b-a) \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \, dt.
\end{aligned}$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2 \int dt = 2t + C_1.$$

注意到 $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{b-a}(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = \sqrt{b-a}$

e^t , 就有 $t = \ln \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}}$, 最后得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + C.$$

(2) 当 $x < -b$ 时, 可设 $x+b = (a-b)\operatorname{sh}^2 t$, 并限制 $t > 0$. 从而

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+a)(x+b)} &= (b-a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad dx \\ &= -(b-a)2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \, dt.\end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} &= -2 \int dt = -2t + C_1 \\ &= -2\ln(\sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}) + C.\end{aligned}$$

总之,

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} \\ &= \begin{cases} 2\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}), & \text{若 } x+a > 0 \text{ 及 } x+b > 0; \\ -2\ln(\sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}), & \text{若 } x+a < 0 \text{ 及 } x+b < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx.$

解 与上题相同, 作同一代换, 只是在求积分的过程中变动个别地方. 今以 $x > -a$ 时为例, 解法如下:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx &= 2(b-a)^2 \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t \, dt \\ &= \frac{1}{2}(b-a)^2 \int \operatorname{sh}^2 2t \, dt \\ &= \frac{1}{4}(b-a)^2 \int (\operatorname{ch} 4t - 1) \, dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(b-a)^2 \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 4t - t \right) + C_1 \\
&= \frac{1}{4}(b-a)^2 [\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t (1 + 2 \operatorname{sh}^2 t) - t] + C_1 \\
&= \frac{1}{4}(b-a)^2 \left[\sqrt{\frac{x+a}{b-a}} \cdot \sqrt{1 + \frac{x+a}{b-a}} \left(1 + 2 \cdot \frac{x+a}{b-a} \right) \right. \\
&\quad \left. - \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) \right] + C \\
&= \frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} \\
&\quad - \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + C.
\end{aligned}$$

至于当 $x < -b$ 时，与上题类似，只是将结果改成

$$\begin{aligned}
&\frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{-x-a} \\
&+ \sqrt{-x-b}) + C, \text{ 此处不再写出解法步骤.}
\end{aligned}$$

总之，

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx \\
&= \begin{cases} \frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{x+a} \\ + \sqrt{x+b}) + C, & \text{若 } x+a > 0 \text{ 及 } x+b > 0; \\ \frac{2x+a+b}{4} \sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4} \ln(\sqrt{-x-a} \\ + \sqrt{-x-b}) + C, & \text{若 } x+a < 0 \text{ 及 } x+b < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

用分部积分法，求下列积分：

1791. $\int \ln x dx.$

解 $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C.$

1792. $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1).$

解 $\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1} \int \ln x d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x$
 $-\frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx.$

解 $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx = - \int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)$
 $= -\frac{1}{x} \ln^2 x + \int \frac{1}{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$
 $= -\frac{1}{x} \ln^2 x - 2 \int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \ln^2 x - \frac{2}{x} \ln x$
 $+ 2 \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C.$

1794. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$

解 $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \frac{2}{3} \int \ln^2 x d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{4}{3} \int x^{\frac{3}{2}} \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{8}{9} \int \ln x d(x^{\frac{3}{2}})$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} \ln x + \frac{8}{9} \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + C.$$

1795. $\int x e^{-x} dx.$

解 $\int x e^{-x} dx = - \int x d(e^{-x}) = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$

$$= -e^{-x}(x+1) + C.$$

1796. $\int x^2 e^{-2x} dx.$

解 $\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int x^2 d(e^{-2x})$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cdot 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} \int x d(e^{-2x})$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x} \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) + C.$$

$$1797. \int x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^3 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int x^2 d(e^{-x^2}) \\ &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(x^2) = -\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$1798. \int x \cos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \cos x dx &= \int x d(\sin x) \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

$$1799. \int x^2 \sin 2x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \int x^2 d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} \int x d(\sin 2x) \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\ &= -\frac{2x^2-1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + C. \end{aligned}$$

$$1800. \int x \operatorname{sh} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \operatorname{sh} x dx &= \int x d(\operatorname{ch} x) \\ &= x \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C. \end{aligned}$$

$$1801. \int x^3 \operatorname{ch} 3x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^3 \operatorname{ch} 3x dx &= \frac{1}{3} \int x^3 d(\operatorname{sh} 3x) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \int x^2 \operatorname{sh} 3x dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3} \int x^2 d(\operatorname{ch} 3x) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3} x^2 \operatorname{ch} 3x + \frac{2}{3} \int x \operatorname{ch} 3x dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3} x^2 \operatorname{ch} 3x + \frac{2}{9} \int x d(\operatorname{sh} 3x) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sh} 3x - \frac{1}{3} x^2 \operatorname{ch} 3x + \frac{2}{9} x \operatorname{sh} 3x - \frac{2}{9} \int \operatorname{sh} 3x dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9} \right) \operatorname{sh} 3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27} \right) \operatorname{ch} 3x + C. \end{aligned}$$

$$1802. \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx &= x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

$$1803. \int \operatorname{arc} \sin x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{arc} \sin x dx &= x \operatorname{arc} \sin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$1804. \int x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$1805. \int x^2 \arccos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 \arccos x dx &= \frac{1}{3} \int \arccos x d(x^3) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \right) d(1-x^2) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{9} \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$1806. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = - \int \arcsin x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

作代换 $x = \sin t$, 得

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C^{*})$$

$$= \ln \left| \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right| + C = -\ln \left| \frac{1 + \cos t}{\sin t} \right| + C$$

$$= -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C,$$

最后得

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arcsin x$$

$$- \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C.$$

*). 利用1703题的结果.

$$1807. \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$\text{解} \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

$$= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$1808. \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx &= \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{1}{1-x^2} \right) dx \\ &= x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C. \end{aligned}$$

$$1809. \int \arctg \sqrt{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \arctg \sqrt{x} dx &= x \arctg \sqrt{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)} dx \\ &= x \arctg \sqrt{x} - \int \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) d(\sqrt{x}) \\ &= (x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

$$1810. \int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx &= - \int \ln(\operatorname{tg} x) d(\cos x) \\ &= -\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \int \cos x \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sec^2 x dx \\ &= -\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{dx}{\sin x} \end{aligned}$$

$$= -\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

求下列积分:

$$1811. \int x^5 e^{x^3} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^5 e^{x^3} dx &= \frac{1}{3} \int x^3 d(e^{x^3}) \\ &= \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) \\ &= \frac{1}{3} (x^3 - 1) e^{x^3} + C. \end{aligned}$$

$$1812. \int (\arcsin x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - 2 \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2 \int \arcsin x d(\sqrt{1-x^2}) \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2 \int dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

$$1813. \int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int (\operatorname{arctg} x)^2 d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \operatorname{arctg} x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - \int \operatorname{arctg} x dx + \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) \\
&= \frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \int \frac{x dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 \\
&= \frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}$$

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx = \frac{1}{3} \int \ln \frac{1-x}{1+x} d(x^3) \\
&= \frac{1}{3} x^3 \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3} \int \frac{x^3}{1-x^2} dx \\
&= \frac{x^3}{3} \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3} \int \left(-x + \frac{x}{1-x^2} \right) dx \\
&= \frac{x^3}{3} \ln \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} \ln(1-x^2) + C.
\end{aligned}$$

1815. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
&= \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d(\sqrt{1+x^2}) \\
&= \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
&= \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + C.
\end{aligned}$$

$$1816. \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x}{(1+x^2)^2} d(1+x^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

$$1817. \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$$

解 当 $a = 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C,$$

当 $a \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^3} \arctan \frac{x}{a} - \frac{1}{a^3} \int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^3} \arctan \frac{x}{a} - \frac{1}{a^3} \left[-\frac{\frac{x}{a}}{2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{a} \right]^* + C$$

$$= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + C.$$

*) 利用1816题的结果.

$$1818. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{|a|} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \\ &+ \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{|a|} + C \quad (a \neq 0). \end{aligned}$$

$$1819. \int \sqrt{x^2 + a} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{x^2 + a} dx &= x \sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a}} \\ &= x \sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}, \end{aligned}$$

于是得

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

1820. $\int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{2} \int x (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 + x^2) \\ &= \frac{1}{3} \int x d \left[(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{3} x (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \int (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} x (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{3} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx \\ &\quad - \frac{1}{3} \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx. \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx &= \frac{3}{4} \left[\frac{1}{3} x (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{3} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx \right] \\ &= \frac{1}{4} x (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} \\ &\quad - \frac{a^2}{4} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right]^* + C \\ &= \frac{x(2x^2 + a^2)}{8} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C. \end{aligned}$$

*) 利用1786题的结果.

$$1821. \int x \sin^2 x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int x(1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \int x d(\sin 2x) \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{4} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

$$1822. \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 代入得

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t dt = 2 \int t d(e^t) \\ &= 2 t e^t - 2 \int e^t dt \\ &= 2 t e^t - 2 e^t + C = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

$$1823. \int x \sin \sqrt{x} dx.$$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 代入得

$$\int x \sin \sqrt{x} dx = 2 \int t^3 \sin t dt = -2 \int t^3 d(\cos t)$$

$$\begin{aligned}
&= -2t^3 \cos t + 6 \int t^2 \cos t dt \\
&= -2t^3 \cos t + 6 \int t^2 d(\sin t) \\
&= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t - 12 \int t \sin t dt \\
&= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12 \int t d(\cos t) \\
&= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cos t - 12 \int \cos t dt \\
&= -2(t^2 - 6)t \cos t + 6(t^2 - 2) \sin t + C \\
&= 2(6 - x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2 - x) \sin \sqrt{x} + C.
\end{aligned}$$

1824. $\int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\arctg x}) \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctg x} - \int e^{\arctg x} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctg x} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\arctg x}) \\
&= \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctg x} - \int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,
\end{aligned}$$

于是得

$$\int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctg x} + C.$$

$$1825. \int \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\arctg x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctg x} + \int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\arctg x} + \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctg x} + C$$

$$= \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctg x} + C.$$

*) 利用1824题的结果.

$$1826. \int \sin(\ln x) dx.$$

$$\text{解} \quad \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx,$$

于是得

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

$$1827. \int \cos(\ln x) dx.$$

$$\text{解} \quad \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$$

$$= x \cos(\ln x) + \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

$$= \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C.$$

*) 利用1826题的结果.

$$1828. \int e^{ax} \cos bx dx.$$

解 如果 a, b 同时为零, 积分显然为 $x + C$; 若 $a = 0$, $b \neq 0$, 积分显然为 $\frac{1}{b} \sin bx + C$; 以下设 $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{1}{a} \int \cos bx d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int \sin bx d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx, \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx \right] \\ &+ C = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C. \end{aligned}$$

$$1829. \int e^{ax} \sin bx dx.$$

解 若 $a = b = 0$, 则积分为 $x + C$; 以下设 $a^2 + b^2 \neq 0$, 则有

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} \int \sin bx d(e^{ax})$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} \int \cos bx de^{ax}.$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx dx,$$

$$\text{故 } \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

$$1830. \int e^{2x} \sin^2 x dx.$$

$$\text{解 } \int e^{2x} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cos 2x + 2 \sin 2x}{8} e^{2x} \right)^{*}) + C$$

$$= \frac{1}{8} e^{2x} (2 - \cos 2x - \sin 2x) + C.$$

*) 利用1828题的结果.

$$1831. \int (e^x - \cos x)^2 dx.$$

$$\text{解 } \int (e^x - \cos x)^2 dx = \int (e^{2x} - 2e^x \cos x + \cos^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - 2 \cdot \frac{e^x (\cos x + \sin x)^{*})}{2} + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right)^{**}) + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x(\cos x + \sin x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

*) 利用1828题的结果.

**) 利用1742题的结果.

$$1832. \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^x}{e^x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^x}{e^x} dx &= - \int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^x d(e^{-x}) \\ &= -e^{-x} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(e^x) - \int \frac{dx}{1+e^{2x}} \\ &= -e^{-x} \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(e^x) + \frac{1}{2} [2x - \ln(1+e^{2x})] + C^{*)} \\ &= -e^{-x} \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(e^x) - x + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C. \end{aligned}$$

*) 利用1759题的结果.

$$1833. \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx &= - \int \ln(\sin x) d(\operatorname{ctg} x) \\ &= -\operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) + \int \operatorname{ctg}^2 x dx \\ &= -\operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) + (-\operatorname{ctg} x - x) + C^{*)} \\ &= -(x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln(e \sin x)) + C. \end{aligned}$$

*) 利用1649题或1751题的结果.

$$1834. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{x dx}{\cos^2 x} &= \int x d(\operatorname{tg} x) = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx \\ &= x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C.\end{aligned}$$

*) 利用1697题的结果.

$$1835. \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx &= - \int x e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= - \frac{x}{1+x} e^x + \int \frac{1}{1+x} e^x (x+1) dx \\ &= - \frac{x}{1+x} e^x + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C.\end{aligned}$$

下列积分的求法需要把二次三项式化成正则型, 并利用下列公式:

$$\text{I.} \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0);$$

$$\text{III.} \quad \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C;$$

$$\text{IV.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$\text{V.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$\text{VI. } \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C,$$

$$\text{VII. } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0),$$

$$\text{VIII. } \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

求下列积分:

$$1836^+. \int \frac{dx}{a + bx^2} \quad (ab \neq 0).$$

解 当 $ab > 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|x})}{(\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|x})^2}$$

$$= \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) + C,$$

当 $ab < 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \operatorname{sgn} a \cdot \int \frac{dx}{|a| - |b|x^2}$$

$$= \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|x})}{(\sqrt{|a|})^2 - (\sqrt{|b|x})^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}} \right| + C.$$

$$1837. \int \frac{dx}{x^2 - x + 2}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$1838. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \ln \left| \frac{\frac{2}{3} + \left(x - \frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3} - \left(x - \frac{1}{3}\right)} \right| + C_1$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{3x+1} \right| + C.$$

$$1839. \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - (\sqrt{2} + 1)}{x^2 + (\sqrt{2} - 1)} \right| + C.$$

$$1840. \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

$$1841. \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} &= \int \frac{x - \cos \alpha + \cos \alpha}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d[(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha]}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} \\ &\quad + \cos \alpha \cdot \int \frac{d(x - \cos \alpha)}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos \alpha + 1) + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) + C \end{aligned}$$

$$(\alpha \neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$1842. \int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} + \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \ln(x^4 - x^2 + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{7}}\right) + C.
 \end{aligned}$$

$$1243. \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2} &= \frac{1}{3} \int \frac{x^3 d(x^3)}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} - \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{6} \ln|x^6 - x^3 - 2| - \frac{1}{18} \ln \left| \frac{\frac{3}{2} + \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2} - \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} \ln \{ |x^3 + 1| \cdot (x^3 - 2)^2 \} + C.$$

如果本题不化成正则型来作，则有更简单的作法，事实上，

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2} &= \frac{1}{3} \int \frac{x^3 d(x^3)}{(x^3 - 2)(x^3 + 1)} \\ &= \frac{1}{9} \int \left(\frac{2}{x^3 - 2} + \frac{1}{x^3 + 1} \right) d(x^3) \\ &= \frac{1}{9} \ln \{ |x^3 + 1| \cdot (x^3 - 2)^2 \} + C. \end{aligned}$$

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x} \\ &= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{3\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 5} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(\operatorname{tg} x - \frac{4}{3}\right)}{\left(\operatorname{tg} x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{3} - \left(\operatorname{tg} x - \frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{3} + \left(\operatorname{tg} x - \frac{4}{3}\right)} \right| + C_1 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3\sin x + 5\cos x}{\sin x - \cos x} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1845. \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 + \sec^2 \frac{x}{2}} \\ &= 2 \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right)^2 + 4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

$$1846. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (b \neq 0).$$

解 当 $b > 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2} \right| + C;$$

当 $a > 0$ 及 $b < 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} &= \frac{1}{\sqrt{-b}} \int \frac{d(\sqrt{-b}x)}{\sqrt{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{-b}x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-b}} \operatorname{arc} \sin \left(x\sqrt{-\frac{b}{a}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1847. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

$$1848. \int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$= \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2} \right| + C.$$

本题即1687题，注意不同的解法及不同形式的结果。

$$1849. \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + 1} \right) + C.$$

1850. 证明：若

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),$$

$$\text{则当 } a > 0 \text{ 时, } \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C,$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

证 当 $a > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{y}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C,
\end{aligned}$$

当 $a < 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{y}} &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a}} \right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) + C.
\end{aligned}$$

1851. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{5+x-x^2}} &= \int \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d\left[\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \\
 &= -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right) + C.
 \end{aligned}$$

$$1852. \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx &= \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\
 &= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C.
 \end{aligned}$$

$$1853. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{17}{16} - \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^2}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}\right) + C.
 \end{aligned}$$

$$1854. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 2}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 1) d(x^2 - 1)}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1855. \int \frac{x + x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x + x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(1 + x^2) d(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} + \frac{3}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{1 + x^2 - x^4} + \frac{3}{4} \arcsin \left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1856. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$\text{解} \quad \text{作代换 } t = \frac{1}{x}, \text{ 则 } x\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\operatorname{sgn} t}{t^2} \sqrt{t^2 + t + 1},$$

$$dx = -\frac{dt}{t^2}. \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= -(\operatorname{sgn} t) \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} \\
&= -(\operatorname{sgn} t) \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1} \right|^{(*)} + C_1 \\
&= -(\operatorname{sgn} x) \ln \left| \frac{x+2+2(\operatorname{sgn} x)\sqrt{x^2+x+1}}{2x} \right| + C_1.
\end{aligned}$$

故当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \\
= -\ln \left| \frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x} \right| + C.
\end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \\
= -\ln \left| \frac{2x}{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}} \right| + C_1 \\
= -\ln \left| \frac{2x(x+2+2\sqrt{x^2+x+1})}{(x+2)^2-4(x^2+x+1)} \right| + C_1 \\
= -\ln \left| \frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x} \right| + C.
\end{aligned}$$

总之, 不论 x 为正或为负, 均有

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln \left| \frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x} \right| + C.$$

•) 利用1850题的结果.

$$1857. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

解 作代换 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}$

$$= \operatorname{sgn} t \cdot \frac{\sqrt{-t^2 + t + 1}}{t^3}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}. \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}} &= -(\operatorname{sgn} t) \int \frac{t}{\sqrt{-t^2 + t + 1}} dt \\ &= -(\operatorname{sgn} t) \cdot \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d(-t^2 + t + 1)}{\sqrt{-t^2 + t + 1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{-t^2 + t + 1}} \right) \\ &= -(\operatorname{sgn} t) \cdot \left(-\sqrt{-t^2 + t + 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2t-1}{\sqrt{5}} \right)^{*)} + C \\ &= (\operatorname{sgn} x) \cdot \left[\frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{|x|} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x-2}{x\sqrt{5}} \right) \right] + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{x} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

其存在域为 $\left| x + \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$.

*) 利用1850题的结果.

$$1858. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2 + 1}}.$$

解 设 $y = x + 1$, 本题即转化为1856题的类型. 由于解法类似, 且 $x + 1$ 的符号对结果没有影响, 故仅就 $x + 1 > 0$ 列出解法的主要步骤如下:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-2y+2}} \\ &= -\int \frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{\frac{2}{y^2}-\frac{2}{y}+1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y^2-2y+2}}{y\sqrt{2}} \right| + C_1 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$

解 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 则

$$(x-1)\sqrt{x^2-2} = \frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t|t|}, \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt,$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} &= -\int \frac{\operatorname{sgn} t dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} \\ &= -\operatorname{sgn} t \cdot \arcsin\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + C \\ &= \arcsin\left(\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}\right) + C \quad (|x| > \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$1860^+. \int \frac{dx}{(x+2)^2 \sqrt{x^2+2x-5}}.$$

解 设 $x+2 = \frac{1}{t}$, 则

$$(x+2)^2 \sqrt{x^2+2x-5} = \frac{\sqrt{1-2t-5t^2}}{t^2 |t|},$$

$$dx = -\frac{1}{t^2} dt,$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x+2)^2 \sqrt{x^2+2x-5}} = - \int \frac{t \cdot \operatorname{sgn} t dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\left[\left(t + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} \right] \operatorname{sgn} t dt}{\sqrt{\frac{6}{25} - \left(t + \frac{1}{5} \right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sgn} t \cdot \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{2}{5}t - t^2} \\ &\quad + \frac{1}{5\sqrt{5}} \operatorname{sgn} t \cdot \arcsin \left(\frac{5t+1}{\sqrt{6}} \right) + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)} + \frac{1}{5\sqrt{5}} \arcsin \left(\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}} \right) \\ &\quad + C. \end{aligned}$$

其存在域为满足不等式 $x^2+2x-5 > 0$ 的一切 x 值, 即 $|x+1| > \sqrt{6}$.

$$1861. \int \sqrt{2+x-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \sqrt{2+x-x^2} dx &= \int \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} d\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2x-1}{4} \sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

$$1862. \int \sqrt{2+x+x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \sqrt{2+x+x^2} dx &= \int \sqrt{\frac{7}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} d\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2x+1}{4} \sqrt{2+x+x^2} + \frac{7}{8} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{2+x+x^2}\right) \\ &\quad + C.\end{aligned}$$

$$1863. \int \sqrt{x^4+2x^2-1} x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \sqrt{x^4+2x^2-1} x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{(x^2+1)^2-2} d(x^2+1) \\ &= \frac{x^2+1}{4} \sqrt{x^4+2x^2-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln(x^2+1 + \sqrt{x^4+2x^2-1}) + C.\end{aligned}$$

$$1864. \int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx.$$

解 由于

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} = -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| + C_1$$

(可仿照1856题求得),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2,$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_3,$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx &= \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}} \\ &\quad - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} \\ &= -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{1+x-x^2} + C, \end{aligned}$$

其中存在域为满足不等式 $1+x-x^2>0$ 且 $x\neq 0$ 的一切

x 值, 即 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$ 及 $x\neq 0$.

1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx &= \int \frac{\operatorname{sgn} x \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx \\
&= \int \frac{\operatorname{sgn} x d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}} \\
&= \operatorname{sgn} x \cdot \ln\left(x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}\right) + C_1 \\
&= \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C.
\end{aligned}$$

§2. 有理函数的积分法

利用待定系数法，求下列积分：

$$1866. \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx.$$

解 设 $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$ ，通分后应有

$$2x+3 \equiv A(x+5) + B(x-2).$$

在这恒等式中，

令 $x=2^*$ ，得 $7=7A$ ， $A=1$ ；

令 $x=-5$ ，得 $-7=-7B$ ， $B=1$ 。

于是，

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5} \right) dx$$

$$= \ln |(x-2)(x+5)| + C.$$

*) 注意，这是一种习惯的说法。实际上，不能直接令 $x=2$ (因为上述恒等式是当 $x \neq 2$, $x \neq -5$ 时得出来的)，而应令 $x \rightarrow 2$ 取极限，得 $7=7A$ ，以下类似情况都作此理解。

$$1867. \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

$$\text{解 设 } \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3},$$

通分后应有

$$x \equiv A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2).$$

在这恒等式中，

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得 } -1 = 2A, \quad A = -\frac{1}{2},$$

$$\text{令 } x = -2, \text{ 得 } -2 = -B, \quad B = 2;$$

$$\text{令 } x = -3, \text{ 得 } -3 = 2C, \quad C = -\frac{3}{2}.$$

于是，

$$\begin{aligned} & \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln |x+1| + 2 \ln |x+2| - \frac{3}{2} \ln |x+3| + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right| + C.$$

1868. $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx.$

解 $\frac{x^{10}}{x^2+x-2} = x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3$

$$+ 43x^2 - 85x + 171 + \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2},$$

设 $\frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$, 通分后应有

$$-341x + 342 = A(x-1) + B(x+2),$$

在这恒等式中,

令 $x = -2$, 得 $1024 = -3A$, $A = -\frac{1024}{3}$,

令 $x = 1$, 得 $1 = 3B$, $B = \frac{1}{3}$.

于是,

$$\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx = \int \left[x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 - \frac{1024}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)} \right] dx$$

$$= \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2}$$

$$+ 171x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right| + C.$$

$$1869. \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

$$\text{解} \quad \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

$$= 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)},$$

$$\text{设} \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}, \quad \text{通分后应有}$$

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2).$$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } 1 = 6A, \quad A = \frac{1}{6},$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 得 } 9 = -2B, \quad B = -\frac{9}{2},$$

$$\text{令 } x = 3, \text{ 得 } 28 = 3C, \quad C = \frac{28}{3}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx \\ &= \int \left[1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)} \right] dx \\ &= x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

$$1870. \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

解 $\frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 + \frac{-(5x^2 + 4)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$

设 $\frac{-(5x^2 + 4)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + 4},$ 通分

后应有

$$-(5x^2 + 4) \equiv (A_1x + B_1)(x^2 + 4) + (A_2x + B_2)(x^2 + 1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A_1 + A_2 = 0, \\ x^2 & B_1 + B_2 = -5, \\ x^1 & 4A_1 + A_2 = 0, \\ x^0 & 4B_1 + B_2 = -4. \end{array}$$

由此, $A_1 = 0, B_1 = \frac{1}{3}, A_2 = 0, B_2 = -\frac{16}{3}.$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\ &= \int \left[1 + \frac{1}{3(x^2 + 1)} - \frac{16}{3(x^2 + 4)} \right] dx \\ &= x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$1871. \int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}.$$

解 $\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}, \text{ 通分后应有}$$

$$x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2.$$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x=1, \text{ 得 } 1=3B, B=\frac{1}{3};$$

$$\text{令 } x=-2, \text{ 得 } -2=9C, C=-\frac{2}{9},$$

比较 x^2 的系数, 得 $A+C=0$, 从而 $A=\frac{2}{9}$.

于是,

$$\int \frac{x dx}{x^3-3x+2} = \int \left[\frac{2}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{2}{9(x+2)} \right] dx$$

$$= -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

1872. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$

解 设 $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$, 通分

后应有

$$x^2+1 = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2.$$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得 } 2 = -2B, B = -1,$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } 2 = 4C, C = \frac{1}{2},$$

比较 x^2 的系数, 得 $A + C = 1$, 从而 $A = \frac{1}{2}$.

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

$$1873. \int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx.$$

$$\text{解 } \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}, \text{ 通分后应有}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x-1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 \\ &+ C(x-2)(x-1)^2 + D(x-1)^2. \end{aligned}$$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x = 1 \text{ 得 } B = 1,$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 得 } D = 4,$$

比较 x^3 及 x^2 的系数, 得

$$A+C=0 \text{ 及 } -5A+B-4C+D=1,$$

由此, $A=4$, $C=-4$.

于是,

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{x}{x^2-3x+2} \right)^2 dx \\ &= \int \left[\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right] dx \\ &= 4 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 4 \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + C \\ &= 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + C. \end{aligned}$$

$$1874. \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$$

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} \\ &+ \frac{F}{(x+3)^3}, \text{ 通分后应有} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &\equiv A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+2)(x+3)^3 \\ &+ C(x+1)(x+3)^3 + D(x+1)(x+2)^2 \\ &(x+3)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) \\ &+ F(x+1)(x+2)^2. \end{aligned}$$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x=-1, \text{ 得 } 1=8A, \quad A=\frac{1}{8},$$

$$\text{令 } x=-2, \text{ 得 } 1=-C, \quad C=-1;$$

令 $x = -3$, 得 $1 = -2F$, $F = -\frac{1}{2}$;

比较 x^5 、 x^4 及 x^3 的系数, 得

$$\begin{array}{l} x^5 \left| \begin{array}{l} A+B+D=0, \\ 13A+12B+C+11D+E=0, \\ 67A+56B+16C+47D+8E+F=0. \end{array} \right. \end{array}$$

由此, $B=2$, $D=-\frac{17}{8}$, $E=-\frac{5}{4}$.

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} \\ &= \int \left[\frac{1}{8(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{17}{8(x+3)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{5}{4(x+3)^2} - \frac{1}{2(x+3)^3} \right] dx \\ &= \frac{1}{8} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{1}{x+2} - \frac{17}{8} \ln|x+3| \\ & \quad + \frac{5}{4(x+3)} + \frac{1}{4(x+3)^2} + C \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right| + \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + C. \end{aligned}$$

1875. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}.$

解 $\frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3}$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{(x+1)^3},$$

通分后应有

$$1 \equiv A(x-1)(x+1)^3 + B(x+1)^3 + C(x-1)^3 \\ + (x+1)^2 + D(x-1)^2(x+1) + E(x-1)^2.$$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x=1, \text{ 得 } 1=8B, \quad B=\frac{1}{8};$$

$$\text{令 } x=-1, \text{ 得 } 1=4E, \quad E=\frac{1}{4};$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 得 } -A+B+C+D+E=1;$$

$$\text{令 } x=2, \text{ 得 } 27A+27B+9C+3D+E=1;$$

$$\text{令 } x=-2, \text{ 得 } 3A-B+9C-9D+9E=1;$$

$$\text{由此, } A=-\frac{3}{16}, \quad C=\frac{3}{16}, \quad D=\frac{1}{4}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1} \\ &= \int \left[-\frac{3}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{3}{16(x+1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^3} \right] dx \\ &= -\frac{3}{16} \ln|x-1| - \frac{1}{8(x-1)} + \frac{3}{16} \ln|x+1| \\ & \quad - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)} + C \\ &= \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2} + C. \end{aligned}$$

$$1876. \int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

解 设 $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$, 通分后应有

$$x^2 + 5x + 4 = (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + C = 0, \\ x^2 & B + D = 1, \\ x^1 & 4A + C = 5, \\ x^0 & 4B + D = 4. \end{array}$$

由此, $A = \frac{5}{3}$, $B = 1$, $C = -\frac{5}{3}$, $D = 0$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx &= \int \left(\frac{\frac{5}{3}x + 1}{x^2 + 1} + \frac{-\frac{5}{3}x}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \frac{5}{6} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} + \arctan x + C. \end{aligned}$$

本题如不直接用待定系数法将被积函数进行分解, 而使用其它技巧, 也可有更简单的方法. 事实上,

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\ &= \int \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx + 5 \int \frac{x dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{5}{6} \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} \right) d(x^2)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4} + C.$$

$$1877. \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$$

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, 通分后应有

$$1 \equiv A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

$$\text{由此, } A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}.$$

于是,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \int \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

$$1878. \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}.$$

解 由于 $\frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$

$$= \frac{(x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$$

$$= \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 4x + 5}.$$

于是,

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$$

$$= \int \left[\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \right] dx$$

$$= -\frac{1}{x-2} - \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2 + 1}$$

$$= -\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2) + C.$$

本题若用待定系数法, 较麻烦一些, 也可获得同样的结果, 此处从略.

$$1879. \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}.$$

解 设 $\frac{x}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}, \text{ 通分后应有}$$

$$x \equiv A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) \\ + (Cx+D)(x-1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & A+B-2C+D=0, \\ x^1 & 2B+C-2D=1, \\ x^0 & -2A+2B+D=0. \end{array}$$

$$\text{由此, } A=\frac{1}{25}, B=\frac{1}{5}, C=-\frac{1}{25}, D=-\frac{8}{25}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} \\ &= \int \left[\frac{1}{25(x-1)} + \frac{1}{5(x-1)^2} - \frac{x+8}{25(x^2+2x+2)} \right] dx \\ &= \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx \\ & \quad - \frac{7}{25} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \ln(x^2+2x+2) \\ & \quad - \frac{7}{25} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{5(x-1)}$$

$$- \frac{7}{25} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) + C.$$

1880. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}.$

解 设 $\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1},$

通分后应有

$$1 \equiv A(x+1)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + x(x+1)(Cx+D).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & 2A+B+C+D=0, \\ x^1 & 2A+B+D=0, \\ x^0 & A=1. \end{array}$$

由此, $A=1, B=-1, C=0, D=-1.$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^2} \right) dx \\ &= \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

本题也可以不用待定系数法。事实上，

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} &= \frac{1}{(x+x^2)(1+x+x^2)} \\ &= \frac{1}{x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^2}.\end{aligned}$$

1881. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

解 设 $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ ，通分后应有

$$1 \equiv A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{cases} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{cases}$$

由此， $A=\frac{1}{3}$ ， $B=-\frac{1}{3}$ ， $C=\frac{2}{3}$ 。

于是，

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left[\frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

1882. $\int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$

解 设 $\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$, 通分后应有

$$x \equiv A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + B = 0, \\ x^1 & A - B + C = 1, \\ x^0 & A - C = 0. \end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}.$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^3 - 1} dx &= \int \left[\frac{1}{3(x - 1)} - \frac{x - 1}{3(x^2 + x + 1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x - 1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

1883. $\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$

解 $\int \frac{dx}{x^4 - 1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

本题若用待定系数法，则较麻烦，从略。

1884. $\int \frac{dx}{x^4+1}.$

解 本题如用待定系数法来作，主要步骤如下：

设 $\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$ ，则经计

算可求得 $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $D = \frac{1}{2}$. 于是，

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+1} &= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx + \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} [\ln(x^2+x\sqrt{2}+1) - \ln(x^2-x\sqrt{2}+1)] \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right] + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right) + C.$$

如应用下列解法，则更简单些。

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \right)^{*}) \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}^{**}) + C_1, \end{aligned}$$

注意到 $\operatorname{arctg} \left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right)$ ，最后

即得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + C. \end{aligned}$$

*) 利用1712题的结果。

**) 利用1713题的结果。

1885. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$

解 设 $\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$ ，通分后

应有

$$1 \equiv (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & -A+B+C+D=0, \\ x^1 & A-B+C+D=0, \\ x^0 & B+D=1. \end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+x^2+1} &= \int \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+x+1} dx - \int \frac{\frac{1}{2}(x-1)}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln(x^2+x+1) - \ln(x^2-x+1) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right] + C_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2} \right) + C_1$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} \right) + C.$$

如不用待定系数法解本题，则更简单些，解法与上题类似：

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 - \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + C. \end{aligned}$$

1886. $\int \frac{dx}{x^6 + 1}.$

解 本题如用待定系数法来作，运算较麻烦，经计算可得

$$\frac{1}{x^6 + 1} = \frac{1}{3(x^2 + 1)} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 1}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3} \\ + \frac{1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1},$$

积分步骤与1884题与1885题完全类似，不再详解，其

结果为 $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^3)$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + C.$$

本题如不用待定系数法来作，则更简单些。下面列举两种解法：

解法一

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^6 + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^4 - 1}{x^6 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + (x^4 - x^2 + 1)}{x^6 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{d(x^3)}{1 + (x^3)^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3} \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^3) + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

解法二

仿照1881题的分解法，可得

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{x^2-2}{3(x^4-x^2+1)}.$$

于是，

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^6+1}&=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{(x^2-2)dx}{x^4-x^2+1} \\&=\frac{1}{3}\arctg x-\frac{1}{6}\int\frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx \\&\quad +\frac{1}{3}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx \\&=\frac{1}{3}\arctg x+\frac{1}{6}\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx \\&\quad -\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx \\&=\frac{1}{3}\arctg x+\frac{1}{6}\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-3} \\&=\frac{1}{3}\arctg x+\frac{1}{6}\arctg\left(\frac{x^2-1}{x}\right) \\&\quad +\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.\end{aligned}$$

两种答案形式不同，实质上是一致的。

$$1887. \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$$

解 设
$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1},$$

通分后应有

$$1 \equiv A(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1) + B(x^2+1)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) + (Ex+F)(x+1)^2(x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & A+C+E=0, \\ x^4 & B+C+D+2E+F=0, \\ x^3 & A+D+2E+2F-B=0, \\ x^2 & A+2B+C+2E+2F=0, \\ x^1 & -B+C+D+E+2F=0, \\ x^0 & A+B+D+F=1. \end{array}$$

由此, $A=\frac{1}{3}, B=\frac{1}{6}, C=0, D=\frac{1}{2}, E=-\frac{1}{3}, F=0.$

于是,

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \int \left[\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{6(x+1)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{x}{3(x^2-x+1)} \Big\} dx \\
& = \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \\
& \quad - \frac{1}{6} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} - \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
& = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \\
& \quad - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C.
\end{aligned}$$

1888. $\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}.$

解 设 $\frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$

$$= \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1},$$

通分后应有

$$\begin{aligned}
1 & \equiv A(x^2+x+1)(x^2-x+1) + (Bx+C)(x-1) \\
& \quad (x^2-x+1) + (Dx+E)(x-1)(x^2+x+1).
\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+B+D=0, \\ x^3 & -2B+C+E=0, \\ x^2 & A+2B-2C=0, \\ x^1 & -B+2C-D=0, \\ x^0 & A-C-E=1. \end{array}$$

由此, $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=-\frac{1}{6}, D=0, E=-\frac{1}{2}$.

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} \\ &= \int \left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

1889. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1}$.

解 设 $\frac{x^2}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+\frac{1}{2}}$, 通分后应有

$$x^2 = (Ax+B)(x^2+x+\frac{1}{2})$$

$$+ (Cx + D)(x^2 + 2x + 2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + C = 0, \\ x^2 & A + B + 2C + D = 1, \\ x^1 & \frac{A}{2} + B + 2C + 2D = 0, \\ x^0 & \frac{B}{2} + 2D = 0. \end{array}$$

由此, $A = \frac{4}{5}, B = \frac{12}{5}, C = -\frac{4}{5}, D = -\frac{3}{5}.$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1} \\ &= \int \left[\frac{4(x+3)}{5(x^2 + 2x + 2)} - \frac{4x+3}{5\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)} \right] dx \\ &= \frac{2}{5} \int \frac{(2x+2) dx}{x^2 + 2x + 2} + \frac{8}{5} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} \\ & \quad - \frac{2}{5} \int \frac{(2x+1) dx}{x^2 + x + \frac{1}{2}} - \frac{1}{5} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{2}{5} \ln \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + \frac{1}{2}} + \frac{8}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{5} \operatorname{arctg}(2x+1) + C.$$

1890. 在甚么条件下, 积分

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$$

为有理函数?

解 设 $\frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2},$

通分后应有

$$ax^2 + bx + c \equiv Ax^2(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + C(x-1)^2 + Dx^3(x-1) + Ex^3,$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A + D = 0, \\ x^3 & -2A + B - D + E = 0, \\ x^2 & A - 2B + C = a, \\ x^1 & B - 2C = b, \\ x^0 & C = c. \end{array}$$

由此, $A = a + 2b + 3c, B = b + 2c, C = c,$

$$D = -(a + 2b + 3c), E = a + b + c.$$

当 $A = D = 0$, 即 $a + 2b + 3c = 0$ 时, 积分

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$$

为有理函数.

利用奥斯特洛格拉得斯基方法*, 计算积分:

$$1891. \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

解 $Q = (x-1)^2(x+1)^3,$

$$Q_1 = (x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1,$$

$$Q_2 = (x-1)(x+1) = x^2 - 1.$$

设 $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}$

$$= \left(\frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + x^2 - x - 1} \right)' + \frac{Dx + E}{x^2 - 1}, \text{ 从而}$$

$$x \equiv (2Ax + B)(x-1)(x+1) - (3x-1)$$

$$+ (Ax^2 + Bx + C) + (Dx + E)(x-1)(x+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

* 所谓奥氏方法, 是指关于有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分, 可以借助代数方法来分离成一个真分式与另一个真分式积分的和, 使得在新的被积真分式函数中, 其分母次数达到最低状态, 也即在公式

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \quad (1)$$

中, 如果 $P(x), Q(x)$ 已知, 且设分母 $Q(x)$ 可以分解成一次与二次类型的实因式:

$$Q(x) = (x-a)^k \cdots (x^2+px+q)^m \cdots,$$

其中 k, \dots, m, \dots 是自然数. 在公式 (1) 的右端分母已知, 形如:

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1} \cdots (x^2+px+q)^{m-1} \cdots,$$

$$Q_2(x) = (x-a) \cdots (x^2+px+q) \cdots,$$

且满足 $Q_1(x) \cdot Q_2(x) = Q(x)$. 而 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 为相应比 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 更低次的多项式, 一般可用待定系数法求得. 这种利用公式 (1) 来求积分的方法, 就是所谓的奥斯特洛格拉得斯基方法. 详细可以参见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著 (北大译), 微积分学教程, 第二卷一分册, 第264目. — 题解编者注

$$\begin{array}{l|l} x^4 & D=0, \\ x^3 & -A+D+E=0, \\ x^2 & A-2B-D+E=0, \\ x^1 & -2A-3C+B-D-E=1, \\ x^0 & -B-C-E=0. \end{array}$$

由此, $A=-\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=-\frac{1}{4}$, $D=0$, $E=-\frac{1}{8}$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x-1)^2 (x+1)^3} &= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} \\ &\quad -\frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2-1} \\ &= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

1892. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}.$

解 $Q=(x+1)^2(x^2-x+1)^2,$

$$Q_1=Q_2=x^3+1.$$

设 $\frac{1}{(x^3+1)^2} = \left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} \right)' + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$, 从而

$$\begin{aligned} 1 &\equiv (2Ax+B)(x^3+1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) \\ &\quad + (Dx^2+Ex+F)(x^3+1). \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & D=0, \\ x^4 & -A+E=0, \\ x^3 & -2B+F=0, \\ x^2 & -3C+D=0, \\ x^1 & 2A+E=0, \\ x^0 & B+F=1. \end{array}$$

由此, $A=0, B=\frac{1}{3}, C=0, D=0, E=0, F=\frac{2}{3}$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^3+1)^2} &= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3+1} \\ &= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} \\ &\quad + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^{*)} + C. \end{aligned}$$

*) 利用1881题的结果。

1893. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

解 $Q=(x^2+1)^3, Q_1=(x^2+1)^2, Q_2=x^2+1.$

设 $\frac{1}{(x^2+1)^3} = \left[\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2} \right]' + \frac{Ex+F}{x^2+1},$

从而

$$1 \equiv (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1) - 4x(Ax^3+Bx^2$$

$$+Cx+D)+(Ex+F)(x^2+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & E=0, \\ x^4 & -A+F=0, \\ x^3 & -2B+2E=0, \\ x^2 & 3A-3C+2F=0, \\ x^1 & 2B-4D+E=0, \\ x^0 & C+F=1. \end{array}$$

由此, $A=\frac{3}{8}, B=0, C=\frac{5}{8}, D=0, E=0, F=\frac{3}{8}.$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} &= \frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^3} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^3} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

1894. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2},$

解 $Q=(x^2+2x+2)^2, Q_1=Q_2=x^2+2x+2.$

设 $\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+2x+2} \right)' + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$

从而

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv A(x^2+2x+2) - 2(x+1)(Ax+B) \\ &\quad + (Cx+D)(x^2+2x+2). \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & C=0, \\ x^2 & -A+2C+D=1, \\ x^1 & -2B+2C+2D=0, \\ x^0 & 2A-2B+2D=0. \end{array}$$

由此, $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=1$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2} &= \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{dx}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{1}{x^2+2x+2} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+2x+2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) + C. \end{aligned}$$

本题如不用奥斯特洛格拉得斯基方法, 则更容易得出上述结果. 事实上,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2} &= \int \frac{(x^2+2x+2) - (2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x^2+2x+2} - \int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2} \\ &= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} - \int \frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C. \end{aligned}$$

1895. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$

解 $Q = (x^4 + 1)^2$, $Q_1 = Q_2 = x^4 + 1$,

设 $\frac{1}{(x^4 + 1)^2} = \left(\frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^4 + 1} \right)' + \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4 + 1}$, 从而

$$1 = (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^4 + 1) - 4x^3(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)(x^4 + 1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^7 & E = 0, \\ x^6 & -A + F = 0, \\ x^5 & -2B + G = 0, \\ x^4 & -3C + H = 0, \\ x^3 & -4D + E = 0, \\ x^2 & 3A + F = 0, \\ x^1 & 2B + G = 0, \\ x^0 & C + H = 1. \end{array}$$

由此, $A = 0$, $B = 0$, $C = \frac{1}{4}$, $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$,

$$G = 0, \quad H = \frac{3}{4}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2} &= \frac{x}{4(x^4 + 1)} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^4 + 1} \\ &= \frac{x}{4(x^4 + 1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \end{aligned}$$

$$-\frac{3}{8\sqrt{2}} \arctg \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + C$$

*) 利用1884题的结果.

$$1896. \int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx.$$

$$\text{解 } Q=(x-1)(x^2+x+1)^2, \quad Q_1=x^2+x+1, \\ Q_2=(x-1)(x^2+x+1).$$

$$\text{设 } \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1} \right)' \\ + \frac{Cx^2+Dx+E}{(x-1)(x^2+x+1)}, \text{ 从而}$$

$$x^2+3x-2 \equiv A(x-1)(x^2+x+1) - (2x+1) \\ \cdot (Ax+B)(x-1) + (Cx^2+Dx+E)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l} x^4 \quad C=0, \\ x^3 \quad -A+C+D=0, \\ x^2 \quad A-2B+C+D+E=1, \\ x^1 \quad A+B+D+E=3, \\ x^0 \quad -A+B+E=-2. \end{array}$$

$$\text{由此, } A=\frac{5}{3}, B=\frac{2}{3}, C=0, D=\frac{5}{3}, E=-1.$$

$$\text{再将 } \frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} \text{ 分解, 可得}$$

$$\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{9(x-1)} - \frac{2x-11}{9(x^2+x+1)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx \\ &= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{9} \int \frac{2x-11}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{9} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ & \quad + \frac{4}{3} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} \\ & \quad + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

1897. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}.$

解 $Q=(x^4-1)^3, Q_1=(x^4-1)^2, Q_2=x^4-1.$

设 $\frac{1}{(x^4-1)^3} = \left[\frac{P(x)}{(x^4-1)^2} \right]' + \frac{P_1(x)}{x^4-1},$ 其中

$$\begin{aligned} P(x) &= Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 \\ &+ Fx^2 + Gx + H, \end{aligned}$$

$$P_1(x) = A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1,$$

从而利用待定系数法, 解出 $A=0$, $B=0$, C
 $=\frac{7}{32}$, $D=0$, $E=0$, $F=0$, $G=-\frac{11}{32}$, $H=0$,
 $A_1=0$, $B_1=0$, $C_1=0$, $D_1=\frac{21}{32}$.

于是,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^4-1)^3} &= \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{32} \int \frac{dx}{x^4-1} \\ &= \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{21}{64} \operatorname{arctg} x^{**}) + C.\end{aligned}$$

*) 利用1883题的结果.

分出下列积分的代数部分,

$$1898. \int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解 设 } \int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx \\ &= \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1} \\ &+ \int \frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4+x^2+1} dx.\end{aligned}$$

上述等式右端的积分为非代数部分, 因此, 只需要求出 A, B, C, D 就可以了. 等式两端求导并通分, 得

$$\begin{aligned}x^2+1 &\equiv (3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1) \\ &- (4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D) \\ &+ (A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1)(x^4+x^2+1).\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 解出 $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$,

$C = \frac{1}{3}$, $D = 0$, $A_1 = 0$, $B_1 = -\frac{1}{6}$, $C_1 = 0$, $D_1 = \frac{2}{3}$. 因

此, 所求积分的代数部分为

$$\frac{x^3 + 2x}{6(x^4 + x^2 + 1)}.$$

$$1899^+. \int \frac{dx}{(x^3 + x + 1)^3}.$$

$$\text{解 设 } \int \frac{dx}{(x^3 + x + 1)^3}$$

$$= \frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{(x^3 + x + 1)^2}$$

$$+ \int \frac{Gx^2 + Hx + L}{x^3 + x + 1} dx.$$

对上述等式两端求导再通分, 得

$$\begin{aligned} 1 &\equiv (5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E)(x^3 + x + 1) \\ &\quad - 2(3x^2 + 1)(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) \\ &\quad + (Gx^2 + Hx + L)(x^3 + x + 1)^2. \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 解出 $A = -\frac{243}{961}$,

$$B = \frac{357}{1922}, \quad C = -\frac{405}{961}, \quad D = -\frac{315}{1922}, \quad E = \frac{156}{961}, \quad F$$

$$= -\frac{224}{961}, \quad G = 0, \quad H = -\frac{243}{961}, \quad L = \frac{357}{961}. \text{ 因此, 所}$$

求积分的代数部分为

$$-\frac{486x^5 + 357x^4 + 810x^3 + 315x^2 - 312x + 448}{1922(x^3 + x + 1)^2}.$$

1900. $\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx.$

解 设 $\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx$

$$= \frac{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{x^5 + x + 1}$$

$$+ \int \frac{Fx^4 + Gx^3 + Hx^2 + Lx + M}{x^5 + x + 1} dx.$$

对上述等式两端求导再通分, 得

$$\begin{aligned} 4x^5 - 1 &\equiv (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D)(x^5 + x + 1) \\ &- (5x^4 + 1)(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) \\ &+ (Fx^4 + Gx^3 + Hx^2 + Lx + M)(x^5 + x + 1). \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 解出 $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 0$, $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$, $L = 0$, $M = 0$. 因此, 所求积分的代数部分为

$$-\frac{x}{x^5 + x + 1} \quad (\text{全部积分}).$$

1901. 计算积分

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

解 $Q = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2,$

$$Q_1 = Q_2 = x^2 + x + 1.$$

$$\text{设 } \frac{1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} \\ = \left(\frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} \right)' + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}, \text{ 从而}$$

$$1 \equiv A(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(Ax + B) \\ + (Cx + D)(x^2 + x + 1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 解出 $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$,

$C = 0$, $D = \frac{2}{3}$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} \\ &= -\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= -\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= -\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

1902⁺. 在甚么条件下, 积分

$$\int \frac{ax^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2} dx$$

为有理函数?

解 (1) 当 $a \neq 0$ 且 $b^2 - ac = 0$ 时, $ax^2 + 2bx + c$

$=a(x-x_0)^2$, 其中 x_0 为实数. 此时

$$\begin{aligned} & \frac{ax^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2} \\ = & \frac{a(x-x_0)^2+2ax_0(x-x_0)+ax_0^2+2\beta(x-x_0)+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4} \\ = & \frac{a}{a^2(x-x_0)^2} + \frac{2ax_0+2\beta}{a^2(x-x_0)^3} + \frac{ax_0^2+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4}, \end{aligned}$$

从而积分为有理函数.

(2) 当 $a \neq 0$ 且 $b^2-ac \neq 0$ 时, 则设

$$\begin{aligned} & \frac{ax^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2} \\ = & \left(\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c} \right)' + \frac{Cx+D}{ax^2+2bx+c}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} ax^2+2\beta x+\gamma & \equiv A(ax^2+2bx+c) - (2ax+2b) \\ & (Ax+B) + (Cx+D)(ax^2+2bx+c), \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 可解得 $C=0$,

$$D = \frac{2b\beta - a\gamma - ca}{2(b^2-ac)}, \text{ 从而当 } a\gamma + ca = 2b\beta \text{ 时 } D=0,$$

此时积分为有理函数.

(3) 当 $a=0$, $b \neq 0$ 时,

$$\frac{ax^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha\left(x + \frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{\alpha c}{b}\left(x + \frac{c}{2b}\right) + \frac{\alpha c^2}{4b^2} + 2\beta\left(x + \frac{c}{2b}\right) - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2\left(x + \frac{c}{2b}\right)^2} \\
&= \frac{\alpha}{4b^2} + \frac{2\beta - \frac{\alpha c}{b}}{4b^2\left(x + \frac{c}{2b}\right)} + \frac{\frac{\alpha c^2}{4b^2} - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2\left(x + \frac{c}{2b}\right)^2}.
\end{aligned}$$

故当 $2\beta - \frac{\alpha c}{b} = 0$ 即 $\alpha c = 2b\beta$ 时, 积分为有理函数. 这

种情况可归并到 $\alpha\gamma + c\alpha = 2b\beta$ 中去.

(4) 当 $a=b=0$, $c \neq 0$ 时, 积分显然为有理函数, 这种情况可归并到 $b^2 - ac = 0$ 中去.

综上所述, 当 $b^2 - ac = 0$ 或 $\alpha\gamma + c\alpha = 2b\beta$ 时, 积分为有理函数.

利用各种方法, 计算下列积分:

1903. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx = \int \frac{[(x-1)+1]^3}{(x-1)^{100}} dx \\
&= \int \left[\frac{1}{(x-1)^{97}} + \frac{3}{(x-1)^{98}} + \frac{3}{(x-1)^{99}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(x-1)^{100}} \right] dx \\
&= -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{99(x-1)^{99}} + C.$$

1904. $\int \frac{x dx}{x^8 - 1}.$

解 $\int \frac{x dx}{x^8 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^4 - 1}$

$$= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| - \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x^2) + C. \quad *)$$

*) 利用1883题的结果.

1905. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 3}.$

解 $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 3} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 + 3}$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

1906. $\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx.$

解 $\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^3 + 1}$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^3) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 - x^2 + 1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{3}}\right) \right] + C \quad *)$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^3) + \frac{1}{12} \ln \frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} \\ + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

*) 利用1881题的结果.

$$1907. \int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)} dx = \int \frac{\left(1-\frac{3}{x^4}\right)dx}{x^3\left(1+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^8}\right)}$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{x^4}\right)d\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{2}{x^8}+\frac{3}{x^4}+1}$$

$$= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{5}{\frac{2}{x^4}+1} - \frac{4}{\frac{1}{x^4}+1} \right) d\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$= -\frac{5}{8} \ln\left(\frac{2}{x^4}+1\right) + \ln\left(\frac{1}{x^4}+1\right) + C$$

$$= \frac{5}{8} \ln \frac{x^4}{x^4+2} - \ln \frac{x^4}{x^4+1} + C.$$

$$1908. \int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^4 dx}{(x^{10}-10)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5)}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{200} \int \frac{[(x^5 + \sqrt{10}) - (x^5 - \sqrt{10})]^2}{[(x^5 - \sqrt{10})(x^5 + \sqrt{10})]^2} d(x^5) \\
&= \frac{1}{200} \int \left(\frac{1}{x^5 - \sqrt{10}} - \frac{1}{x^5 + \sqrt{10}} \right)^2 d(x^5) \\
&= \frac{1}{200} \int \frac{d(x^5 - \sqrt{10})}{(x^5 - \sqrt{10})^2} - \frac{1}{100} \int \frac{d'(x^5)}{(x^5)^2 - 10} \\
&\quad + \frac{1}{200} \int \frac{d(x^5 + \sqrt{10})}{(x^5 + \sqrt{10})^2} \\
&= -\frac{1}{200(x^5 - \sqrt{10})} - \frac{1}{200\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5 - \sqrt{10}}{x^5 + \sqrt{10}} \right| \\
&\quad - \frac{1}{200(x^5 + \sqrt{10})} + C \\
&= -\frac{1}{100} \left(\frac{x^5}{x^{10} - 10} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5 - \sqrt{10}}{x^5 + \sqrt{10}} \right| \right) + C.
\end{aligned}$$

1909. $\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{x^8 d(x^4)}{(x^4 + 1)(x^4 + 2)} \\
&= \frac{1}{4} \int \left[1 - \frac{3x^4 + 2}{(x^4 + 1)(x^4 + 2)} \right] d(x^4) \\
&= \frac{1}{4} \int \left[1 + \frac{1}{x^4 + 1} - \frac{4}{x^4 + 2} \right] d(x^4) \\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4 + 1}{(x^4 + 2)^4} + C.
\end{aligned}$$

1910. $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{x^9 dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} &= \frac{1}{5} \int \frac{x^5 d(x^5)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{(x^5 + 1) d(x^5 + 1)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 + 1)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} \\ &= \frac{1}{10} \int \frac{d[(x^5 + 1)^2 + 1]}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 + 1)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} \\ &= -\frac{1}{10[(x^5 + 1)^2 + 1]} \\ &\quad - \frac{1}{5} \left\{ \frac{x^5 + 1}{2[(x^5 + 1)^2 + 1]} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(x^5 + 1) \right\}^* + C \\ &= -\frac{x^5 + 2}{10(x^{10} + 2x^5 + 2)} - \frac{1}{10} \operatorname{arc\,tg}(x^5 + 1) + C. \end{aligned}$$

*) 利用1817题的结果.

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx.$

解 当 $n \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx &= \int \frac{x^n \cdot x^{n-1} dx}{x^n + 1} \\ &= \frac{1}{n} \int \frac{x^n d(x^n)}{x^n + 1} \\ &= \frac{1}{n} \int \left(1 - \frac{1}{x^n + 1} \right) d(x^n) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}(x^n - \ln|x^n + 1|) + C;$$

当 $n=0$ 时,

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx = \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

1912. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx.$

解 当 $n \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx &= \int \frac{x^{2n} \cdot x^{n-1} dx}{(x^{2n} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{n} \int \frac{x^{2n} d(x^n)}{(x^{2n} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{n} \int \frac{(x^{2n} + 1) - 1}{(x^{2n} + 1)^2} d(x^n) \\ &= \frac{1}{n} \int \frac{d(x^n)}{x^{2n} + 1} - \frac{1}{n} \int \frac{d(x^n)}{(x^{2n} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{arctg}(x^n) - \frac{1}{n} \left[\frac{x^n}{2(x^{2n} + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^n) \right]^* + C \\ &= \frac{1}{2n} \left[\operatorname{arctg}(x^n) - \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \right] + C. \end{aligned}$$

当 $n=0$ 时,

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \ln|x| + C.$$

*) 利用1817题的结果.

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}.$

解
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{20} \int \frac{d(x^{10}+2)}{x^{10}+2} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{20} \ln(x^{10}+2) + C \\ &= \frac{1}{20} \ln \frac{x^{10}}{x^{10}+2} + C.\end{aligned}$$

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}.$

解 由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^{10}+1)^2} &= \frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x^{10}+1)} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} &= \int \left[\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2} \right] dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}+1} - \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}\end{aligned}$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{10} \ln(x^{10} + 1) + \frac{1}{10(x^{10} + 1)} + C$$

$$= \frac{1}{10} \ln \frac{x^{10}}{x^{10} + 1} + \frac{1}{10(x^{10} + 1)} + C.$$

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx.$

解 $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2x^6}{1+x^7} \right) dx$

$$= \ln|x| - \frac{2}{7} \int \frac{d(1+x^7)}{1+x^7}$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{7} \ln|1+x^7| + C$$

$$= \frac{1}{7} \ln \frac{|x|^7}{(1+x^7)^2} + C.$$

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} dx.$

解 $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} dx$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$$

$$= \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x^5-5x} - \frac{1}{x^5-5x+1} \right) d(x^5-5x)$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5-5x)}{x^5-5x} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5-5x+1)}{x^5-5x+1}$$

$$= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x(x^4 - 5)}{x^5 - 5x + 1} \right| + C.$$

1917. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} &= \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2 - x^2} \\ &= \frac{x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

1918. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x + x^2 + x + 1} dx.$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} dx \\
&= \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1} \\
&= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1} = \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{5}{4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2}{2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2} + C.
\end{aligned}$$

1919. $\int \frac{x^5 - x}{x^6 + 1} dx.$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \int \frac{x^5 - x}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)^2 - 1}{(x^2)^4 + 1} d(x^2) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4 - x^2\sqrt{2} + 1^{(*)}}{x^4 + x^2\sqrt{2} + 1} + C.
\end{aligned}$$

*) 利用1713题的结果。

1920. $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx = \int \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2}{x^6 + 1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} dx + \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} \\
&= \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} \\
&= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^3) + C.
\end{aligned}$$

1921. 试导出计算积分

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (a \neq 0)$$

的递推公式.

利用这个公式计算

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

解 由于

$$4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)^2 + (4ac - b^2) = t^2 + \Delta,$$

其中 $t = 2ax + b$, $\Delta = 4ac - b^2$. 于是

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \int \frac{(4a)^{\frac{1}{2}} dx}{[(2ax + b)^2 + \Delta]^n} \\
&= 2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n}.
\end{aligned}$$

当 $\Delta \neq 0$ 时, 对于积分 $\int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n}$ 施用分部积分法,

即有

$$\int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n} = \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + \Delta)^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + 2n \int \frac{(t^2 + \Delta) - \Delta}{(t^2 + \Delta)^{n+1}} dt \\
&= \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + 2n \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n} - 2n \Delta \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

若令 $\bar{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n}$, 则得

$$\bar{I}_n = \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + 2n \bar{I}_n - 2n \Delta \bar{I}_{n+1},$$

$$\text{或 } \bar{I}_{n+1} = \frac{1}{2n \Delta} \cdot \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{I}_n,$$

$$\text{从而 } \bar{I}_n = \frac{1}{2(n-1) \Delta} \cdot \frac{t}{(t^2 + \Delta)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \bar{I}_{n-1}.$$

代入 I_n , 即得

$$\begin{aligned}
I_n &= 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \cdot \left\{ \frac{1}{2(n-1) \Delta} \cdot \frac{t}{(t^2 + \Delta)^{n-1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{I}_{n-1} \right\} \\
&= 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \cdot \left\{ \frac{1}{2(n-1) \Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(4a)^{n-1} (ax^2+bx+c)^{n-1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{2a}{(4a)^{n-1}} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \right\} \\
&= \frac{1}{(n-1) \Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1},
\end{aligned}$$

最后得递推公式

$$I_n = \frac{1}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1}.$$

当 $\Delta = 0$ 时, 则有

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{(4a)^n dx}{(2ax+b)^{2n}} = 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \int \frac{d(2ax+b)}{(2ax+b)^{2n}} \\ &= \frac{1}{a^n(1-2n)} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^{1-2n} + C. \end{aligned}$$

对于 I_3 , $\Delta \neq 0$, 两次运用上述递推公式, 即得

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} \\ &\quad + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

1922. 利用代换 $t = \frac{x+a}{x+b}$ 来计算积分:

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}.$$

(m 及 n 为自然数).

利用这个代换, 求

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

解 设 $t = \frac{x+a}{x+b}$, 则 $1-t = \frac{b-a}{x+b}$ 或 $x+b = \frac{b-a}{1-t}$,

$$dt = \frac{b-a}{(x+b)^2} dx = \frac{(1-t)^2}{b-a} dx \text{ 或 } dx = \frac{b-a}{(1-t)^2} dt,$$

$$\text{及 } x+a = t(x+b) = \frac{t(b-a)}{1-t}.$$

代入 I , 即得

$$I = \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^n} dt \quad (a \neq b).$$

将 $(1-t)^{m+n-2}$ 展开, 即可分项积分求得 I .

如果 $b=a$, 则

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^{m+n}} = \frac{1}{1-m-n} (x+a)^{1-m-n} + C.$$

令 $a=-2, b=3, m=2$ 及 $n=3$, 并设 $t = \frac{x-2}{x+3}$,

即得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3} &= \frac{1}{5^4} \int \frac{(1-t)^3}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{5^4} \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + 3 - t \right) dt \\ &= \frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} - 3 \ln |t| + 3t - \frac{t^2}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{625} \left[-\frac{x+3}{x-2} - 3 \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + \frac{3(x-2)}{x+3} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2}\Big]+C.$$

1923. 若 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 计算

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx.$$

解 由于 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 故得

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

其中 $P_n^{(0)}(a) = P_n(a)$, $0! = 1$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(a) \int \frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}} \\ &+ \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(a) \int \frac{dx}{x-a} \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} \\ &+ \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(a) \ln|x-a| + C, \end{aligned}$$

其中 $\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} = a_0$ 为 $P_n(x)$ 的首项系数, 即

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0(x-a)^n + a_1(x-a)^{n-1} + \dots \\ &+ a_{n-1}(x-a) + a_n. \end{aligned}$$

1924⁺. 设 $R(x) = R^*(x^2)$, 其中 R^* 为有理函数, 则函数 $R(x)$ 分解为有理分式时有甚么特性?

解 设 $R^*(x) = P(x) + H(x)$,

其中 $P(x)$ 是多项式; 若 $R^*(x)$ 本身也为多项式时, 则 $H(x) \equiv 0$; 否则 $H(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是真分式, 而 $P_1(x)$, $Q_1(x)$ 也均为多项式.

设 $Q_1(x)$ 有非负实根为 a_i^2 , 其重数为 α_i ($i=1, 2, \dots, m$); 负根为 $-b_k^2$, 其重数为 β_k ($k=1, 2, \dots, t$); 二次因式为 $x^2 + C_p x + D_p$, 其重数为 ν_p ($p=1, 2, \dots, s$). 其中 $C_p^2 - 4D_p < 0$, 于是,

$$Q_1(x) = \begin{cases} a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i^2)^{\alpha_i} \cdot \prod_{k=1}^t (x + b_k^2)^{\beta_k} \cdot \prod_{p=1}^s (x^2 + C_p x + D_p)^{\nu_p}, & \text{当 } m \neq 0, t \neq 0, s \neq 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{k=1}^t (x + b_k^2)^{\beta_k} \cdot \prod_{p=1}^s (x^2 + C_p x + D_p)^{\nu_p}, & \text{当 } m = 0, \\ & t \neq 0, s \neq 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i^2)^{\alpha_i} \cdot \prod_{p=1}^s (x^2 + C_p x + D_p)^{\nu_p}, & \text{当 } m \neq 0, \\ & t = 0, s \neq 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i^2)^{\alpha_i} \cdot \prod_{k=1}^t (x + b_k^2)^{\beta_k}, & \text{当 } m \neq 0, t \neq 0, \\ & s = 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i^2)^{\alpha_i}, & \text{当 } m \neq 0, t = 0, s = 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{k=1}^t (x + b_k^2)^{\beta_k}, & \text{当 } m = 0, t \neq 0, s = 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{p=1}^s (x^2 + C_p x + D_p)^{\nu_p}, & \text{当 } m = 0, t = 0, s \neq 0 \text{ 时;} \end{cases}$$

以下就 $Q_1(x)$ 表达式中的第一种情形予以论证。

由 $C_p^2 - 4D_p < 0$, 必有

$$x^4 + C_p x^2 + D_p = (x^2 + E_p x + F_p) \cdot (x^2 - E_p x + F_p)$$

($p = 1, 2, \dots, s$), 则此时有

$$Q_1(x^2) = a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i)^{\alpha_i} (x + a_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{k=1}^t (x^2 + b_k^2)^{\beta_k}$$

$$\cdot \prod_{p=1}^s (x^2 + E_p x + F_p)^{\gamma_p} (x^2 - E_p x + F_p)^{\gamma_p}, \text{ 以及}$$

$$\begin{aligned} H(x^2) = \frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)} &= \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{\alpha_i} \left[\frac{A_{il}}{(a_i - x)^l} + \frac{A'_{il}}{(a_i + x)^l} \right] \\ &+ \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{B_{kl}x + C_{kl}}{(x^2 + b_k^2)^l} + \sum_{p=1}^s \sum_{l=1}^{\gamma_p} \left[\frac{M_{pl}x + N_{pl}}{(x^2 + E_p x + F_p)^l} \right. \\ &\left. + \frac{M'_{pl}x + N'_{pl}}{(x^2 - E_p x + F_p)^l} \right]. \end{aligned}$$

显然有 $H(x^2) = H((-x)^2)$, 由 $H(x^2)$ 的分解式的唯一性, 比较系数, 即得常数关系为:

$$\begin{aligned} A'_{il1} &= A_{il1}, \quad M'_{pl2} = -M_{pl2}, \quad N'_{pl2} = N_{pl2}, \quad B_{kl3} = 0, \\ (l_1 &= 1, 2, \dots, \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad l_2 = 1, 2, \dots, \gamma_p, \\ p &= 1, 2, \dots, s; \quad l_3 = 1, 2, \dots, \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, t). \end{aligned}$$

$$R(x) = P(x^2) + H(x^2) =$$

$$\begin{aligned} &= P(x^2) + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{\alpha_i} A_{il} \left[\frac{1}{(a_i - x)^l} + \frac{1}{(a_i + x)^l} \right] \\ &+ \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{C_{kl}}{(x^2 + b_k^2)^l} + \sum_{p=1}^s \sum_{l=1}^{\gamma_p} \left[\frac{M_{pl}x + N_{pl}}{(x^2 + E_p x + F_p)^l} \right. \\ &\left. - \frac{M_{pl}x - N_{pl}}{(x^2 - E_p x + F_p)^l} \right]. \end{aligned}$$

如若 $H(x) \neq 0$, 而 $m=0$, 但 $t \neq 0$, $s \neq 0$ 时, 则在上述表达式中就应该缺乏第二项的和式, 形如

$$R(x) = P(x^2) + \sum_{k=1}^t \sum_{l=1}^{p_k} + \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^{q_j},$$

其它情形可以类似推演, 此处不再一一细叙. 至于当 $H(x) \equiv 0$ 时, 当然有 $R(x) = P(x^2)$.

另外, 本题也可在复数域上作分解考虑.

仍记 $R^*(x) = P(x) + H(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式, 而 $H(x)$ 要么是零 (当 $R^*(x)$ 为多项式时), 要么是一个真分式. 例如 $H(x) \neq 0$ 时, 记 $H(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是其真分式. $P_1(x), Q_1(x)$ 为多项式. 若记 $Q_1(x)$ 在复数域中的根为 α_i , 其相应重数记为 n_i ($i = 1, 2, \dots, m$; 显然 $m \geq 1$). 即

$$Q_1(x) = a_0 \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)^{n_i},$$

那么 $Q_1(x^2)$ 中的每一项 $x^2 - \alpha_i$ 可分解为一次式乘积

$$x^2 - \alpha_i = (x - b_i)(x + b_i),$$

于是

$$Q_1(x^2) = a_0 \prod_{i=1}^m (x - b_i)^{n_i} (x + b_i)^{n_i}.$$

相应地有

$$\begin{aligned} H(x^2) &= \frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \left[\frac{B_{ik}}{(x - b_i)^k} + \frac{B'_{ik}}{(x + b_i)^k} \right], \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \left[\frac{A_{ik}}{(x - b_i)^k} + \frac{A'_{ik}}{(x + b_i)^k} \right]. \end{aligned}$$

由 $H(x^2) = H((-x)^2)$, 从 $H(x^2)$ 的分解式的唯一

性, 比较系数, 即得 $A'_{ik} = A_{ik} (k=1, 2, \dots, n_i; i=1, 2, \dots, m)$. 最后得到

$$R(x) = P(x^2) + H(x^2) = P(x^2) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \left[\frac{A_{ik}}{(b_i - x)^k} + \frac{A_{ik}}{(b_i + x)^k} \right],$$

其中 b_i 为分母 $Q_1(x^2)$ 的根, A_{ik} 为常数.

1925. 计算

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

式中 n 为正整数.

解 先将被积函数分解成部分分式之和, 我们可以证明

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1}.$$

事实上, 记多项式 $x^{2n} + 1$ 的 $2n$ 个根为 $a_k (k=1, 2, \dots, 2n)$, 显然 $a_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + j \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$, 其中 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位.

于是, $|a_k| = 1$, $a_k^{2n} = -1$, $\bar{a}_k = a_{2n-k+1}$,

$$a_k \cdot \bar{a}_k = 1, \quad a_k + \bar{a}_k = 2 \cos \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

设
$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{x - a_k},$$

即
$$1 = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x - a_k}$$

令 $x \rightarrow \alpha_i$ 并应用洛比塔法则, 即得

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow \alpha_i} \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x-\alpha_k} = \lim_{x \rightarrow \alpha_i} \frac{A_i(1+x^{2n})}{x-\alpha_i} \\ &= \lim_{x \rightarrow \alpha_i} (2n A_i x^{2n-1}) \\ &= 2n A_i \cdot \frac{\alpha_i^{2n}}{\alpha_i} = -\frac{2n A_i}{\alpha_i} \quad (i=1, 2, \dots, 2n), \end{aligned}$$

即 $A_k = -\frac{\alpha_k}{2n} \quad (k=1, 2, \dots, 2n).$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^{2n}} &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_k}{x-\alpha_k} \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha_k}{x-\alpha_k} + \frac{\bar{\alpha}_k}{x-\bar{\alpha}_k} \right) \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_k + \bar{\alpha}_k)x - 2\alpha_k \bar{\alpha}_k}{x^2 - (\alpha_k + \bar{\alpha}_k)x + \alpha_k \bar{\alpha}_k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1}. \end{aligned}$$

最后得到

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int \frac{1 - x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left[\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \int \frac{2x - 2\cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x\cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1} dx \right] \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sin^2 \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \int \frac{dx}{\left(x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right)^2 + \sin^2 \frac{2k-1}{2n} \pi} \right] \\
&= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left[\cos \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \ln \left(x^2 - 2x\cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1 \right) \right] \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sin \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi} \right] + C.
\end{aligned}$$

§3. 无理函数的积分法

化被积函数为有理函数，以求下列积分：

1926. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$

解 设 $\sqrt{x} = t$ ，则 $x = t^2$ ， $dx = 2t dt$ 。

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= 2 \int \frac{t dt}{1+t} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\
&= 2[t - \ln(1+t)] + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) + C.
\end{aligned}$$

1927. $\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}.$

解 设 $\sqrt[5]{x} = t$, 则 $x = t^5$, $dx = 5t^4 dt$.

代入得

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[5]{x})} = 5 \int \frac{dt}{t(1+2t^2+t^4)} \\
 & = 5 \int \frac{dt}{t(1+t)(2t^2-t+1)} \\
 & = 5 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{4(1+t)} - \frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)} \right] dt \\
 & = 5 \left\{ \ln t - \frac{1}{4} \ln(1+t) - \frac{3}{8} \int \frac{4t-1}{2t^2-t+1} dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{16} \int \frac{d\left(t-\frac{1}{4}\right)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} \right\} \\
 & = 5 \left\{ \ln|t| - \frac{1}{4} \ln|1+t| - \frac{3}{8} \ln(2t^2-t+1) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4t-1}{\sqrt{7}} \right\} + C \\
 & = \frac{5}{4} \ln \frac{t^5}{(1+t)^2(2t^2-t+1)^3} \\
 & \quad - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C \\
 & = \frac{5}{4} \ln \frac{x \cdot \sqrt[5]{x}}{(1+\sqrt[5]{x})^2(2\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x}+1)^3} \\
 & \quad - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.
 \end{aligned}$$

$$1928^+. \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$$

解 设 $\sqrt[3]{2+x}=t$, 则 $x=t^3-2$, $dx=3t^2 dt$.
代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx &= 3 \int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2} dt \\ &= 3 \int \left(t^3-t + \frac{t^2-2t}{t^3+t-2} \right) dt \\ &= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + 3 \int \left[-\frac{1}{4(t-1)} + \frac{\frac{5}{4}t - \frac{1}{2}}{t^2+t+2} \right] dt \\ &= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4} \ln|t-1| \\ &\quad + \frac{15}{8} \int \frac{2t+1}{t^2+t+2} dt - \frac{27}{8} \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} \\ &= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4} \ln|t-1| + \frac{15}{8} \ln(t^2+t+2) \\ &\quad - \frac{27}{4\sqrt{7}} \arctg\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right) + C, \end{aligned}$$

其中 $t=\sqrt[3]{2+x}$.

$$1929. \int \frac{1-\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$$

解 设 $\sqrt[3]{x+1}=t$, 则 $x=t^3-1$, $dx=3t^2 dt$.

代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx &= 6 \int \frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2} dt \\ &= 6 \int \left(-t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{1+t^2} \right) dt \\ &= -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t \\ &\quad + 3\ln(1+t^2) - 6\operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C,\end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{x+1}$.

1930. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^3}.$

解 设 $\sqrt[3]{x} = t$, 则 $x = t^3$, $dx = 3t^2 dt$.

代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^3} &= 4 \int \frac{t dt}{(1+t)^3} \\ &= 4 \int \left[\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \right] dt \\ &= -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} + C \\ &= \frac{2}{(1+\sqrt[3]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[3]{x}} + C.\end{aligned}$$

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$

解 设 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=t$, 则

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad dx = -\frac{4t}{(t^2 - 1)^2} dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} dx \\ &= -4 \int \frac{t dt}{(t-1)(t+1)^3} \\ &= \int \left[-\frac{2}{(t+1)^3} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t-1)} \right] dt \\ &= \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C_1 \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C. \end{aligned}$$

如果不限制将被积函数化为有理函数, 本题的解法可简单些, 事实上,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{(x+1) - (x-1)} dx \\ &= \int (x - \sqrt{x^2 - 1}) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C. \end{aligned}$$

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

解 设 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$, 则

$$x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}, \quad dx = -\frac{6t^2}{(t^3 - 1)^2} dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= -\frac{3}{2} \int dt = -\frac{3}{2}t + C \\ &= -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C. \end{aligned}$$

1933. $\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a > 0).$

解 设 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{a}{1+t^4}$,

$$dx = -\frac{4at^3}{(1+t^4)^2} dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} &= \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} = -4a \int \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt \\ &= -4a \int \left[\frac{t}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} \right]^2 dt \\ &= -\frac{a}{2} \int \left(\frac{1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \right)^2 dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{a}{2} \int \frac{dt}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)^2} - \frac{a}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + t\sqrt{2} + 1)^2} \\ + a \int \frac{dt}{t^4 + 1}.$$

现在分别求上述积分，利用1921题的递推公式，即得

$$\int \frac{dt}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)^2} = \frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} \\ + \int \frac{dt}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \\ = \frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} + \int \frac{d\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ = \frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t - 1) + C_1$$

及

$$\int \frac{dt}{(t^2 + t\sqrt{2} + 1)^2} = \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} \\ + \int \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \\ = \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} + \int \frac{d\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t + 1) + C_2.$$

利用1884题的结果, 即得

$$\int \frac{dt}{t^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} + C_3.$$

最后得到

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^5(a-x)}} = -\frac{a}{2} \left[\frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} \right. \\ \left. + \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} \right] - \frac{a\sqrt{2}}{2} \left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t - 1) \right. \\ \left. + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t + 1) \right] + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \\ + \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} \right) + C_4 \\ = -\frac{at^3}{1 + t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \\ - \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} \right) + C_4 \\ = -\frac{at^3}{1 + t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \\ + \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - t^2}{t\sqrt{2}} \right) + C,$$

其中 $t = \sqrt[n]{\frac{a-x}{x}}$ ($0 < x < a$).

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad (n \text{ 为自然数}).$

解 当 $a=b$ 时, 显然被积函数为 $(x-a)^{-2}$, 因此积分为 $-\frac{1}{x-a} + C$; 当 $a \neq b$ 时, 设 $\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} = t$, 则

$$x = a + \frac{a-b}{t^n - 1}, \quad dx = -\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n - 1)^2} dt,$$

$$x-a = \frac{a-b}{t^n - 1}, \quad x-b = \frac{(a-b)t^n}{t^n - 1},$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} &= -\frac{n}{a-b} \int dt \\ &= -\frac{n}{a-b} t + C \end{aligned}$$

$$= -\frac{n}{a-b} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C.$$

1935. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$

解 设 $\sqrt{x} = \frac{t^2 - 1}{2t}$ 并限制 $t > 1$, 则

$$x = \left(\frac{t^2 - 1}{2t}\right)^2, \quad dx = -\frac{t^4 - 1}{2t^3} dt, \quad \sqrt{x+1} = \frac{t^2 + 1}{2t},$$

$$t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}.$$

代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{t^4 - 1}{t^3(t+1)} dt \\&= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) dt \\&= \frac{1}{2} \left(t - \ln t - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right) + C_1 \\&= \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) \\&\quad + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{x(x+1)} + C.\end{aligned}$$

1936. 证明: 若

$$p+q=kn,$$

式中 k 为整数, 则积分

$$\int R\left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right] dx$$

(式中 R 为有理函数及 p, q, n 为整数) 为初等函数.

证 当 $a=b$ 时, $(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}} = (x-a)^k$, 则积分显然为初等函数.

当 $a \neq b$ 时, 设 $\frac{x-a}{x-b} = y (\neq 1)$, 则

$$x = \frac{a-by}{1-y}, \quad dx = \frac{a-b}{(1-y)^2} dy,$$

$$x-a = \frac{(a-b)y}{1-y}, \quad x-b = \frac{a-b}{1-y}.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int R \left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}} (x-b)^{\frac{q}{n}} \right] dx \\ &= (a-b) \int R \left[\frac{a-by}{1-y}, y^{\frac{p}{n}} \left(\frac{a-b}{1-y} \right)^k \right] \frac{dy}{(1-y)^2}. \end{aligned}$$

再设 $\sqrt[n]{y} = t$, 则 $y = t^n$, $dy = nt^{n-1} dt$, 从而上述积分化为

$$\begin{aligned} & \int R \left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}} (x-b)^{\frac{q}{n}} \right] dx \\ &= n(a-b) \int R \left[\frac{a-bt^n}{1-t^n}, t^k \left(\frac{a-b}{1-t^n} \right)^k \right] \frac{t^{n-1}}{(1-t^n)^2} dt, \end{aligned}$$

因为被积函数为 t 的有理函数, 所以积分是初等函数.
求最简单二次无理式的积分:

1937. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx = \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} \\ & = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} d\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x+x^2)}{\sqrt{1+x+x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} \\
& = \frac{2x+\frac{1}{2}}{4} \sqrt{1+x+x^2} + \frac{3}{8} \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right) \\
& = \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{2} \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right) + C \\
& = \frac{2x-3}{4} \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8} \ln\left(x+\frac{1}{2} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{1+x+x^2}\right) + C.
\end{aligned}$$

1938⁺. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}.$

解 设 $x+1=\frac{1}{t}$, 则

$$x = \frac{1-t}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{|t|} = \operatorname{sgn} t \cdot \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} &= -\operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} \\
&= -\operatorname{sgn} t \cdot \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2-t+1} \right| + C_1
\end{aligned}$$

$$= -\operatorname{sgn}(x+1)$$

$$\cdot \ln \left| \frac{1-x+2[\operatorname{sgn}(x+1)] \cdot \sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)} \right| + C_{10}$$

当 $x+1 > 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C_1$$

当 $x+1 < 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \ln \left| \frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{2(1+x)} \right| + C_1$$

$$= \ln \left| \frac{-3(x+1)}{2(1-x+2\sqrt{x^2+x+1})} \right| + C_1$$

$$= -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C_1$$

总之,

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C_1$$

$$1939. \int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}} \cdot$$

解 设 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$, 则

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt,$$

$$1-x = \frac{2t^2}{1+t^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{t^4} dt$$

$$= -\frac{1}{6t^3} + \frac{1}{2t} + C$$

$$= \frac{2-x}{3(1-x)^2} \sqrt{1-x^2} + C.$$

1940. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$

解 设 $\sqrt{x^2+2x+2} = t-x$, 则

$$x = \frac{t^2-2}{2(t+1)}, \quad dx = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2+2x+2} = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)}.$$

代入得

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2t+2)^2}{(t^2-2)(t+1)^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \left[1 + \frac{2}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} \Big] dt \\
& = \frac{t}{2} + \ln|t+1| + \frac{1}{2(t+1)} - \sqrt{2} \ln \left| \frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}} \right| + C_1 \\
& = \sqrt{x^2+2x+2} + \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) \\
& \quad - \sqrt{2} \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x} \right| + C.
\end{aligned}$$

1941. $\int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}.$

解 设 $1+x = \frac{1}{t}$, 则

$$x = \frac{1-t}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt,$$

$$\sqrt{1-x-x^2} = \frac{\sqrt{t^2+t-1}}{|t|} = \operatorname{sgn} t \frac{\sqrt{t^2+t-1}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} \\
& = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}} - \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x-x^2}} \right) dx \\
& = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} + \operatorname{sgn} t \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t-1}} \\
& = \arcsin \left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}} \right) + [\operatorname{sgn}(1+x)]
\end{aligned}$$

$$+ \ln \left| \frac{3+x+2(\operatorname{sgn}(x+1))\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)} \right| + C_1.$$

当 $x+1 \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} &= \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) \\ &+ \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x} \right| + C; \end{aligned}$$

当 $x+1 < 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} &= \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) \\ &- \ln \left| \frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)} \right| + C_1 \\ &= \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x} \right| + C. \end{aligned}$$

总之,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} &= \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) \\ &+ \ln \left| \frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x} \right| + C. \end{aligned}$$

以后诸题中, 出现二次无理式时也会碰到用 sgn 的问题, 可参照1938题及1941题类似地处理. 在解这类习题时, 不妨就开方后取正值求解. 如无特殊情况, 今后不再另加说明.

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx = \int \frac{(x^2-x-1)+2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx \\
 &= -\int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} d\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
 &+ 2 \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \\
 &= -\frac{1-2x}{4} \sqrt{1+x-x^2} - \frac{5}{8} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) \\
 &+ 2 \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C \\
 &= -\frac{1-2x}{4} \sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8} \arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) + C.
 \end{aligned}$$

利用公式

$$\int \frac{P_n(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

式中 $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $P_n(x)$ 为 n 次多项式, $Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式及 λ 为常数, 求下列积分:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$

解 设 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx$

$$= (ax^2 + bx + c)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

两边对 x 求导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} &= (2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2} \\ &+ \frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} x^3 &\equiv (2ax+b)(1+2x-x^2) + (ax^2+bx+c) \\ &\cdot (1-x) + \lambda. \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{cases} x^3 & -3a=1, \\ x^2 & 5a-2b=0, \\ x^1 & 2a+3b-c=0, \\ x^0 & b+c+\lambda=0. \end{cases}$$

由此, $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{6}$, $c = -\frac{19}{6}$, $\lambda = 4$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx &= -\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} \\ &+ 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= -\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} \end{aligned}$$

$$+ 4a \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

1944. $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx,$

解 设 $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx = (ax^9 + bx^8 + cx^7 + dx^6 + ex^5$
 $+ fx^4 + gx^3 + hx^2 + lx + m) \sqrt{1+x^2}$
 $+ \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$

从而有

$$\begin{aligned} x^{10} &= (9ax^8 + 8bx^7 + 7cx^6 + 6dx^5 + 5ex^4 + 4fx^3 \\ &\quad + 3gx^2 + 2hx + l)(1+x^2) \\ &\quad + x(ax^9 + bx^8 + cx^7 + dx^6 + ex^5 + fx^4 + gx^3 \\ &\quad + hx^2 + lx + m) + \lambda. \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 求得

$$a = \frac{1}{10}, b = 0, c = -\frac{9}{80}, d = 0,$$

$$e = \frac{21}{160}, f = 0, g = -\frac{21}{128}, h = 0,$$

$$l = \frac{63}{256}, m = 0, \lambda = -\frac{63}{256}.$$

于是,

$$\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left(\frac{63}{256}x - \frac{21}{128}x^3 + \frac{21}{160}x^5 - \frac{9}{80}x^7 \right.$$

$$+\frac{1}{10}x^9)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

1945. $\int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{x^4(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= (Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) \sqrt{a^2 - x^2} \\ &\quad + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} x^4(a^2 - x^2) &= (5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx \\ &\quad + E)(a^2 - x^2) - x(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 \\ &\quad + Ex + F) + \lambda. \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 求得

$$A = \frac{1}{6}, B = 0, C = -\frac{a^2}{24}, D = 0,$$

$$E = -\frac{a^4}{16}, F = 0, \lambda = \frac{a^4}{16}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left(\frac{1}{6}x^5 - \frac{a^2}{24}x^3 - \frac{a^4}{16}x \right) \sqrt{a^2 - x^2} \\ &\quad + \frac{a^4}{16} \arcsin \frac{x}{|a|} + C \quad (a \neq 0). \end{aligned}$$

1946. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx.$

解 设 $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx$

$$= (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}},$$

从而有

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \equiv (2ax + b)(x^2 + 4x + 3) \\ + (x + 2)(ax^2 + bx + c) + \lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 求得

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{14}{3}, \quad c = 37, \quad \lambda = -66.$$

于是,

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx \\ = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 37 \right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} \\ - 66 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| + C.$$

1947. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}}.$

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 这里碰到二次无理式 $\sqrt{x^2 + 1}$ 需引用 $\operatorname{sgn} t$ 的问题, 不妨设

$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} \quad (t > 0).$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}} &= - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt \\
&= - \int \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\
&= - \int \sqrt{t^2+1} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\
&= -\frac{t}{2} \sqrt{t^2+1} - \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{t^2+1}| \\
&\quad + \ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{|x|} + C.
\end{aligned}$$

1948⁺. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}.$

解 不妨设 $x = \frac{1}{t} > 0$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 由 $|x| > 1$ 知

必有 $|t| < 1$, 则有

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \quad (0 < t < 1).$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}} &= - \int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int \frac{t(1-t^2)-t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int t\sqrt{1-t^2} dt - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int (1-t^2)^{\frac{3}{2}} d(1-t^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-t^2) \\
&= -\frac{1}{\frac{5}{2}} (1-t^2)^{\frac{5}{2}} + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{1+2x^2}{3x^3} \sqrt{x^2-1} + C.
\end{aligned}$$

1949⁺. $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}}.$

解 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 不妨设 $t > 0$, 则有

$$\sqrt{x^2+3x+1} = \frac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}} &= - \int \frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}} dt \\
&= (at+b) \sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}},
\end{aligned}$$

从而

$$-t^2 \equiv a(1+5t+5t^2) + \left(5t + \frac{5}{2}\right)(at+b) + \lambda.$$

比较等式两端 t 的同次幂系数, 求得

$$a = -\frac{1}{10}, \quad b = \frac{3}{20}, \quad \lambda = -\frac{11}{40}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}} &= \left(-\frac{t}{10} + \frac{3}{20}\right) \sqrt{5t^2+5t+1} \\ &\quad - \frac{11}{40} \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} \\ &= -\frac{3-2t}{20} \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C_1 \\ &= \frac{3x-5}{20(x-1)^2} \sqrt{x^2+3x+1} \\ &\quad - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

1950⁺. $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}.$

解 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 先设 $t > 0$, 则有

$$\sqrt{x^2+2x} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} = - \int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= (at^3 + bt^2 + ct + e)\sqrt{1-t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

从而有

$$-t^4 \equiv (3at^2 + 2bt + c)(1-t^2) - t(at^3 + bt^2 + ct + e) + \lambda.$$

比较等式两端 t 的同次幂系数, 求得

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 0, \quad c = \frac{3}{8}, \quad e = 0, \quad \lambda = -\frac{3}{8}.$$

于是,

$$\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} = \left(\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{8}t \right)$$

$$\cdot \sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4} \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{x+1} + C.$$

再设 $t < 0$, 则答案前一项不改变符号, 但后一项要改变符号, 因此, 最后得到

$$\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} = \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4} \sqrt{x^2+2x}$$

$$- \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{|x+1|} + C,$$

其中 $x > 0$ 或 $x < -2$.

1951. 在什么条件下, 积分

$$\int \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

是代数函数?

解 设 $\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

$$= (Ax + B)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

从而有

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1x + c_1 &\equiv A(ax^2 + bx + c) \\ &+ (ax + \frac{b}{2})(Ax + B) + \lambda. \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 当 $a \neq 0$ 时求得

$$A = \frac{a_1}{2a}, \quad B = \frac{4ab_1 - 3a_1b}{4a^2},$$

$$\lambda = \frac{8a^2c_1 + 3a_1b^2 - 4a(a_1c + bb_1)}{8a^2}.$$

于是, 当 $a \neq 0$ 且 $8a^2c_1 + 3a_1b^2 = 4a(a_1c + bb_1)$ 时, $\lambda = 0$, 积分为代数函数; 当 $a = 0$ 时积分显然为代数函数.

要求积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)y} dx$, 式中 $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$,

应先分解有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为最简分式.

1952. $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}}.$

解 $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}}$

$$+ \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t > 0$,

则有

$$\sqrt{1+2x-x^2} = \frac{\sqrt{2t^2-1}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{x dx}{(x-1)^2 \sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= - \int \frac{t dt}{\sqrt{2t^2-1}} - \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{2t^2-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2-1}| + C \\ &= \frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+2x-x^2}}{1-x} \right| + C. \end{aligned}$$

1953. $\int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2.$$

对于 I_1 , 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t > 0$, 则有

$$\sqrt{x^2 - x - 1} = \frac{\sqrt{t^2 - 3t + 1}}{t}.$$

代入 I_1 , 得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3t+1}} \\ &= -\ln \left| t - \frac{3}{2} + \sqrt{t^2-3t+1} \right| + C_1 \\ &= -\ln \left| \frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right| + C_2. \end{aligned}$$

对于 I_2 , 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 同上可得

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}} \\ &= \arcsin \left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} \right) + C_3. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right| \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right)+C.$$

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx.$

解
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \int \frac{(x+1)^2 - (x+1) + 1}{(x+1)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &\quad + \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}} = I_1 - I_2 + I_3.\end{aligned}$$

对于 I_1 , 显然有

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C_1;$$

对于 I_2 , 利用1938题的结果, 即得

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= -\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C_2;\end{aligned}$$

对于 I_3 , 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t > 0$.

则有

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
 I_3 &= - \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - t + 1}} \\
 &= - \frac{1}{2} \int \frac{(2t-1) dt}{\sqrt{t^2 - t + 1}} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t + 1}} \\
 &= - \sqrt{t^2 - t + 1} - \frac{1}{2} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + 1} \right| + C_3 \\
 &= - \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x+1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| \\
 &\quad + C_4.
 \end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} dx \\
 &= \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) - \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x+1} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C.
 \end{aligned}$$

如用下述解法更简单些:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} dx &= - \int \sqrt{x^2 + x + 1} d\left(\frac{1}{x+1}\right) \\
 &= - \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x+1} + \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\
&= -\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} + \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right|^{(*)} + C.
\end{aligned}$$

*) 利用1938题的结果.

1955. $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx \\
&= \int \frac{(x^2+1)-1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} dx \\
&= \int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx - \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&= -\int \frac{1+2x-x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&\quad + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&= -\int \sqrt{2-(x-1)^2} d(x-1) - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&\quad + 3 \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}} - I_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} - \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) \\
&\quad - \sqrt{1+2x-x^2} + 3 \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - I_1 \\
&= -\frac{x+1}{2} \sqrt{1+2x-x^2} + 2 \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - I_1.
\end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 可得

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{x+1}\right) + C_1.
\end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} dx \\
&= -\frac{1+x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} - 2 \arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right) + C.
\end{aligned}$$

1956. $\int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

解 $\int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

$$= \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$= \int \frac{2dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} - \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}} \\ = 2I_1 - I_2.$$

对于 I_1 , 设 $x-2 = \frac{1}{t}$, 可得

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} \\ = -\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right) + C_1;$$

对于 I_2 , 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 可得

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} + C_2.$$

于是, 最后得到

$$\int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}} \\ = -2\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right) - \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} + C,$$

其中 $x < 1$ 或 $x > 3$.

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

解 设 $x = \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$dx = \cos t dt, \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{1+\sin^2 t} \\
&= \int \frac{dt}{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2} \operatorname{tg} t)}{(\sqrt{2} \operatorname{tg} t)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} t) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right) + C.
\end{aligned}$$

1958. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}.$

解 当 $x > 1$ 时, 设 $x = \sec t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$dx = \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt, \quad \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{tg} t.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t dt}{1+\sec^2 t} \\
&= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t + 1} dt = \int \frac{d(\sin t)}{2 - \sin^2 t} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin t}{\sqrt{2} - \sin t} \right| + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x - \sqrt{x^2-1}} \right| + C.
\end{aligned}$$

当 $x < -1$ 时, 仍设 $x = \sec t$, 但限制 $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$,

经计算可获得同样的结果.

总之, 当 $|x| > 1$ 时,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2} - \sqrt{x^2-1}} \right| + C. \end{aligned}$$

1959. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}.$

解 设 $x = \operatorname{tg} t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ 且 $|t| \neq \frac{\pi}{4}$, 则

$$dx = \sec^2 t dt, \quad \sqrt{1+x^2} = \sec t.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{(1-\operatorname{tg}^4 t)\sec t} \\ &= \int \frac{\cos^3 t dt}{1-2\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t}{1-2\sin^2 t} d(\sin t) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1-2\sin^2 t}{1-2\sin^2 t} d(\sin t) + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t} \\ &= \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t} \right| + C \\ &= \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}} \right| \\ &+ C \quad (|x| \neq 1). \end{aligned}$$

1960. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx &= \int \frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} \\
 &= \int \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} \\
 &= \ln(x + \sqrt{x^2+2}) + I_1.
 \end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$dx = \sqrt{2} \sec^2 t dt, \quad \sqrt{x^2+2} = \sqrt{2} \sec t.$$

代入得

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{\sec t dt}{1+2\operatorname{tg}^2 t} \\
 &= \int \frac{\cos t dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t} = \operatorname{arctg}(\sin t) + C_1 \\
 &= \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}} \right) + C_1 \\
 &= -\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} \right) + C.
 \end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2+2}) \\
 &\quad - \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} \right) + C.
 \end{aligned}$$

化二次三项式为正则型，以计算下列积分：

$$1961. \int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$= \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}}.$$

当 $x+\frac{1}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，设 $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sec t$ ，并限

制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ，则

$$dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt, \quad \sqrt{x^2+x-1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{tg} t,$$

$$x^2+x+1 = \frac{1}{4}(5\sec^2 t + 3).$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} \\ &= 4 \int \frac{\sec t dt}{5\sec^2 t + 3} = 4 \int \frac{\cos t dt}{5 + 3\cos^2 t} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3} \sin t)}{(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{3} \sin t)^2} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{8}} \ln \left| \frac{\sqrt{8} + \sqrt{3} \sin t}{\sqrt{8} - \sqrt{3} \sin t} \right| + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C.$$

当 $x + \frac{1}{2} < -\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时, 仍设 $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sec t$,

但限制 $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$. 经计算可获同样的结果.

总之, 当 $|x + \frac{1}{2}| > \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C. \end{aligned}$$

1962. $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$

解
$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} \\ &= \int \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{(3+(x-1)^2)\sqrt{3-(x-1)^2}} dx. \end{aligned}$$

设 $x-1 = \sqrt{3} \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$dx = \sqrt{3} \cos t dt, \quad \sqrt{2+2x-x^2} = \sqrt{3} \cos t.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} \\ &= \int \frac{1 + 2\sqrt{3} \sin t + 3 \sin^2 t}{3(1 + \sin^2 t)} dt \end{aligned}$$

$$= \int dt + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t} dt - \frac{2}{3} \int \frac{dt}{1 + \sin^2 t}$$

$$= t - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\cos t)}{2 - \cos^2 t} - \frac{2}{3} \int \frac{d(\operatorname{tg} t)}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 t}$$

$$= t - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t} \right|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} t) + C$$

$$= \operatorname{arc} \sin \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C.$$

1963. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

解 $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

$$= \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} d\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\sqrt{x^2+x+1}} \quad *)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C$$

$$= \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

*) 利用1781题的结果.

1964⁺. 利用线性分式的代换 $x = \frac{\alpha + \beta t}{1+t}$, 计算积分:

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解 线性分式的代换

$$x = \frac{\alpha + \beta t}{1+t}$$

给出

$$x^2 \pm x + 1 = \frac{(\beta^2 \pm \beta + 1)t^2 + [2\alpha\beta \pm (\alpha + \beta) + 2]t + (\alpha^2 \pm \alpha + 1)}{(1+t)^2}.$$

要求 $2\alpha\beta \pm (\alpha + \beta) + 2 = 0$ 即化成正则型, 当 $\alpha + \beta = 0$ 及 $\alpha\beta = -1$ 时即得上式. 例如, 取

$$\alpha = -1, \beta = 1,$$

我们有

$$x = \frac{t-1}{1+t} \text{ 或 } t = \frac{1+x}{1-x},$$

$$dx = \frac{2dt}{(1+t)^2}, \quad x^2 - x + 1 = \frac{t^2 + 3}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{1+3t^2}}{t+1},$$

其中不妨设 $t+1 \geq 0$ 。

于是，

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= 2 \int \frac{t+1}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} dt \\ &= 2 \int \frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} + 2 \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} \\ &= 2(I_1 + I_2). \end{aligned}$$

对于 I_1 ，设 $u = \sqrt{1+3t^2}$ ，则

$$du = \frac{3tdt}{\sqrt{1+3t^2}}, \quad t^2+3 = \frac{u^2+8}{3}.$$

代入得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} = \int \frac{du}{u^2+8} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{u}{2\sqrt{2}}\right) + C_1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}\right] + C_1. \end{aligned}$$

对于 I_2 ，设 $u = \frac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}$ ，则

$$\frac{dt}{\sqrt{1+3t^2}} = \frac{du}{3-u^2}, \quad t^2+3 = \frac{27-8u^2}{3(3-u^2)},$$

代入得

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}} = 3 \int \frac{du}{27-8u^2} \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}u} \right| + C_2 \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2+x+1)} + (x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x+1)} - (x+1)\sqrt{2}} \right| + C_2 \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)} - (x+1)\sqrt{2}} \right| + C_2.
\end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}} \right] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)} - (x+1)\sqrt{2}} \right| + C.
\end{aligned}$$

1965⁺. 求

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

解 此题与1964题均属于下述类型的积分

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

【参看微积分学教程 (Γ. M. 菲赫金哥尔茨) 第二卷 第一分册55页“272. 其它的计算方法”】

设 $x = \frac{\alpha + \beta t}{1+t}$, 适当选择 α 与 β , 使得在两个三

项式中同时消去一次项。为此，将 $x = \frac{a + \beta t}{1 + t}$ 分别代入 $x^2 + 2$ 及 $2x^2 - 2x + 5$ 中，并令一次项的系数等于零，求得

$$a = -1, \beta = 2,$$

即设

$$x = \frac{2t - 1}{1 + t}.$$

从而有

$$dx = \frac{3}{(t+1)^2} dt, \quad x^2 + 2 = \frac{3(2t^2 + 1)}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 5} = \frac{3\sqrt{t^2 + 1}}{|t+1|}.$$

以下不妨设 $t+1 > 0$ 。

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{2x^2 - 2x + 5}} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{t+1}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{t dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}. \end{aligned}$$

对于右端的第一个积分，设 $u = \sqrt{t^2 + 1}$ ，代入后计算得

$$\frac{1}{3} \int \frac{t dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{2u^2-1}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1} + C_1$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)} + C_1.$$

对于右端的第二个积分, 设 $u = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, 代入后计算得

$$\frac{1}{3} \int \frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} u + C_2 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}} \right) + C_2$$

$$= -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} \right) + C_3.$$

于是, 最后得到

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)} \\ & \quad - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} \right) + C. \end{aligned}$$

利用尤拉代换

$$(1) \text{ 若 } a > 0, \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{ax} + z,$$

$$(2) \text{ 若 } c > 0, \sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c};$$

$$(3) \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z(x-x_1).$$

以求下列积分:

$$1966. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

解 设 $\sqrt{x^2 + x + 1} = z - x$, 则

$$x = \frac{z^2 - 1}{1 + 2z}, \quad dx = \frac{2(z^2 + z + 1)}{(1 + 2z)^2} dz,$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{z^2 + z + 1}{1 + 2z}.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{z^2 + z + 1}{z \left(z + \frac{1}{2} \right)^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\frac{4}{z} - \frac{3}{z + \frac{1}{2}} - \frac{3}{2 \left(z + \frac{1}{2} \right)^2} \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z^4}{z + \frac{1}{2}} \right|^3 + \frac{3}{4 \left(z + \frac{1}{2} \right)} + C_1 \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z^4}{2z + 1} \right|^3 + \frac{3}{2(2z + 1)} + C, \end{aligned}$$

其中 $z = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

$$1967. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

解 设 $\sqrt{1 - 2x - x^2} = xz - 1$, 则

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x}, \quad x = \frac{2(z - 1)}{z^2 + 1},$$

$$dx = \frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2} dz,$$

$$\sqrt{1-2x-x^2} + 1 = \frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} &= \int \frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)} dz \\ &= \int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2+1} \right] dz \\ &= \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| - 2\operatorname{arctg} z + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2} dx.$

解 设 $\sqrt{x^2-2x+2} = z-x$, 则

$$x = \frac{z^2-2}{2(z-1)}, \quad dx = -\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)^2} dz,$$

$$\sqrt{x^2-2x+2} = \frac{z^2-2z+2}{2(z-1)}.$$

代入得

$$\begin{aligned} &\int x\sqrt{x^2-2x+2} dx \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{(z^2-2)(z^2-2z+2)^2}{(z-1)^4} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int \frac{[(z-1)^2 + 2(z-1) - 1] \cdot [(z-1)^2 + 1]^2}{(z-1)^4} dz \\
&= \frac{1}{8} \int \left\{ \left[(z-1)^2 - (z-1)^{-4} \right] \right. \\
&\quad + \left[2(z-1) + 2(z-1)^{-3} \right] \\
&\quad + \left[1 - (z-1)^{-2} \right] + 4(z-1)^{-1} \left. \right\} d(z-1) \\
&= \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} \left[(z-1)^3 + (z-1)^{-3} \right] \right. \\
&\quad + \left[(z-1)^2 - (z-1)^{-2} \right] \\
&\quad + \left. \left[(z-1) + (z-1)^{-1} \right] \right\} + \frac{1}{2} \ln|z-1| + C,
\end{aligned}$$

其中 $z = x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

1969. $\int \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx.$

解 设 $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = z(x+1)$, 则

$$x = \frac{2 - z^2}{z^2 - 1}, dx = -\frac{2z}{(z^2 - 1)^2} dz,$$

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} = \frac{z}{z^2 - 1}.$$

代入得

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2} dz \\
&= \int \left[-\frac{17}{108(z+1)} + \frac{5}{18(z+1)^2} + \frac{1}{3(z+1)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4(z-1)} - \frac{16}{27(z-2)} \right] dz \\
&= -\frac{17}{108} \ln|z+1| - \frac{5}{18(z+1)} - \frac{1}{6(z+1)^2} \\
&\quad + \frac{3}{4} \ln|z-1| - \frac{16}{27} \ln|z-2| + C,
\end{aligned}$$

其中 $z = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

1970. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x(1+x)})^2}.$

解 设 $\sqrt{x(1+x)} = z+x$, 则

$$x = \frac{z^2}{1-2z}, \quad dx = \frac{2z(1-z)}{(1-2z)^2} dz,$$

$$1 + \sqrt{x(1+x)} = \frac{1-z-z^2}{1-2z}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x(1+x)})^2} &= 2 \int \frac{z(1-z)}{(1-z-z^2)^2} dz \\
&= 2 \int \frac{(1-z-z^2) + (2z+1) - 2}{(1-z-z^2)^2} dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int \frac{dz}{1-z-z^2} - 2 \int \frac{d(1-z-z^2)}{(1-z-z^2)^2} \\
&\quad - 4 \int \frac{dz}{(1-z-z^2)^2} = 2 \int \frac{d\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \\
&\quad + \frac{2}{1-z-z^2} - 4 \left\{ \frac{2z+1}{5(1-z-z^2)} + \frac{2}{5} \int \frac{d\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \right\}^{*}) \\
&= \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+z+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-z-\frac{1}{2}} \right| \\
&\quad + \frac{2}{1-z-z^2} - \frac{4(2z+1)}{5(1-z-z^2)} + C \\
&= \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+2z+1}{\sqrt{5}-2z-1} \right| + \frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + C,
\end{aligned}$$

其中 $z = \sqrt{x(1+x)} - x$.

*) 利用1921题的递推公式.

利用各种方法, 计算下列积分:

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}.$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{(x^2+1) - (x^2-1)} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-1} dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{x}{4} (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \right| + C.$$

1972. $\int \frac{x dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}.$

解 设 $\frac{1+x}{1-x} = z$, 则

$$x = \frac{z-1}{z+1}, \quad dx = \frac{2}{(z+1)^2} dz,$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{(z^2-1) dz}{\sqrt{z}(3z^2+1)} \\ &= \int \frac{(z^2-1)d(\sqrt{z})}{3z^2+1} = \int \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{3(3z^2+1)} \right] d(\sqrt{z}) \\ &= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{d(\sqrt[4]{3z^2})}{(\sqrt[4]{3z^2})^4+1} \\ &= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{4}{3\sqrt[4]{3}} \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{z\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{12z^2+1}}{z\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{12z^2+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{1-z\sqrt[4]{3}} \right) \right]^{*}) + C \\ &= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{1}{3\sqrt[4]{12}} \left[\ln \frac{z\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{12z^2+1}}{z\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{12z^2+1}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt[4]{3}-1} \right) \right] + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{1+x}{1-x}.$

*> 利用1884题的结果。

$$1973. \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{(\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})(-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} dx \\ &= \int \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + C. \end{aligned}$$

$$1974. \int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx \\ &= \int \frac{(x + \sqrt{1+x+x^2})(1+x - \sqrt{1+x+x^2})}{(1+x)^2 - (1+x+x^2)} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} dx - \ln|x|. \end{aligned}$$

对于积分 $\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} dx$, 设 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt, \quad \sqrt{1+x+x^2} = \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t|}.$$

不妨设 $t > 0$, 代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} dx &= - \int \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t^2} dt \\ &= \int \sqrt{t^2+t+1} d\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t} - \frac{1}{2} \int \frac{2t+1}{t\sqrt{1+t+t^2}} dt \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}} \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \ln\left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{1+t+t^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right) + 1}} \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \ln \frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1}\right) + C_1 \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \ln \frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{2} + C_1 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + \ln x + C.$$

于是, 当 $x > 0$ 时, 最后得到

$$\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + C,$$

当 $x < 0$ 时, 可获同样的结果.

1975. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx.$

解
$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{x(x+1)} \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{(x+1) - x} dx \\ &= \int [(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}] dx \\ &= \int \left[x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}} \right] dx \\ &= \frac{2}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{2}{5} \left[(x+1)^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}} \right] + C. \end{aligned}$$

1976. $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

解
$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}}}$$

$$= \int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}\right)^2}}.$$

下面我们先考虑积分 $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx$. 设 $x = \operatorname{tg} t$,

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则有 $dx = \sec^2 t dt$.

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 t - 1}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt \\ &= \int (\sin^2 t - \cos^2 t) dt = - \int \cos 2t dt \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2t + C_1 = -\frac{x}{1+x^2} + C_1, \end{aligned}$$

从而, 可得 $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right) + C. \end{aligned}$$

1977. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}} dx.$

解 仿照1976题, 可得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}} dx = \int \frac{\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2-1)^2}}} dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + \sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2} \right| + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^4+1}}{x^2-1} \right| + C.
\end{aligned}$$

1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}.$

解 作变换 $\frac{1}{x} = \sqrt{t}$ (这里设 $x > 0$, 若 $x < 0$, 则作变换 $\frac{1}{x} = -\sqrt{t}$, 最后结果相同), 则

$$dx = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} dt, \sqrt{x^4+2x^2-1} = \frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}} \\
&= -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}} \right) + C \quad (|x| \geq \sqrt{\sqrt{2} - 1}).$$

1979. $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x \sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$

解 $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x \sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} + \int \frac{dx}{x \sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4}}} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2(1 + 2x^2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1})}{2 + x^2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} + C.$$

1980. 证明积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

(式中 R 为有理函数) 的求法, 归结为有理函数的积分法.

证 当 a, c 中至少有一个为零时, 则积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a \neq 0, c \neq 0$ 时, 设 $\sqrt{ax+b} = z$, 则

$$x = \frac{z^2 - b}{a}, \quad dx = \frac{2}{a} z dz,$$

$$\sqrt{cx + d} = \sqrt{\frac{c}{a} z^2 + d - \frac{bc}{a}} = \sqrt{c_1 z^2 + d_1},$$

$$\text{式中 } c_1 = \frac{c}{a}, \quad d_1 = d - \frac{bc}{a}.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx \\ &= \int R\left(\frac{z^2-b}{a}, z, \sqrt{c_1 z^2 + d_1}\right) \frac{2}{a} z dz, \\ &= \int R_1(z, \sqrt{c_1 z^2 + d_1}) dz, \end{aligned}$$

其中 R_1 为有理函数.

再设 $\sqrt{c_1 z^2 + d_1} = \pm \sqrt{c_1} z + u$ ($c_1 > 0$) 或 $\sqrt{c_1 z^2 + d_1} = zu \pm \sqrt{d_1}$ ($d_1 > 0$) —— 尤拉代换, 就可将被积函数有理化. 于是, 积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

的求法可归结为有理函数的积分法.

二项微分式

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

(式中 m, n 和 p 为有理数) 仅在下列三种情形可化为有理函数的积分 (契比协夫定理):

第一种情形, p 为整数. 假定 $x = z^N$, 其中 N 为分数 m 和 n 的公分母.

第二种情形, $\frac{m+1}{n}$ 为整数. 假定 $a + bx^n = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母.

第三种情形, $\frac{m+1}{n} + p$ 为整数. 利用代换: $ax^{-n} + b = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母. 计算下列积分:

$$1981. \int \sqrt{x^3 + x^4} dx.$$

解 $\sqrt{x^3 + x^4} = x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $m = \frac{3}{2}$, $n = 1$, $p = \frac{1}{2}$;

$\frac{m+1}{n} + p = 3$, 这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-1} + 1 = z^2$, 则

$$x = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad dx = -\frac{2z}{(z^2 - 1)^2} dz,$$

$$\sqrt{x^3 + x^4} = \frac{z}{(z^2 - 1)^2} \quad (\text{不妨设 } z > 0, \text{ 以下各题}$$

不再说明).

代入得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^3 + x^4} dx &= -2 \int \frac{z^2}{(z^2 - 1)^4} dz \\ &= -2 \int \frac{dz}{(z^2 - 1)^4} - 2 \int \frac{dz}{(z^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \left[-\frac{z}{6(z^2-1)^3} - \frac{5}{6} \int \frac{dz}{(z^2-1)^3} \right]^{*}) - 2 \int \frac{dz}{(z^2-1)^3} \\
&= \frac{z}{3(z^2-1)^3} - \frac{1}{3} \int \frac{dz}{(z^2-1)^3} \\
&= \frac{z}{3(z^2-1)^3} + \frac{z}{12(z^2-1)^2} - \frac{z}{8(z^2-1)} \\
&\quad + \frac{1}{16} \ln \frac{z+1}{z-1} + C \\
&= \frac{1}{3} \sqrt{(x+x^2)^3} - \frac{1+2x}{8} \sqrt{x+x^2} \\
&\quad + \frac{1}{8} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C \quad (x > 0).
\end{aligned}$$

*) 利用1921题的结果。

1982. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx.$

解 $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} = x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}$. $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$; p 为整数, 这是二项微分式的第一种情形.

设 $x = z^6$, 则

$$dx = 6z^5 dz, \quad \sqrt{x} = z^3, \quad \sqrt[3]{x} = z^2.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx &= 6 \int \frac{z^3}{(z^2+1)^2} dz \\
&= 6 \int \left[z^4 - 2z^2 + 3 - \frac{4}{z^2+1} + \frac{1}{(z^2+1)^2} \right] dz
\end{aligned}$$

$$= \frac{6}{5}z^5 - 4z^3 + 18z - 24 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z$$

$$+ 6 \left[\frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \right]^{*}) + C$$

$$= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^{\frac{1}{6}}) + C.$$

*) 利用 1921 题的结果.

1983. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

解 $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}, m=1, n=\frac{2}{3}, p=-\frac{1}{2};$

$\frac{m+1}{n}=3$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$, 则

$$x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}}, \quad dx=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz.$$

代入得

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = 3 \int (z^2-1)^2 dz$$

$$= \frac{3}{5}z^5 - 2z^3 + 3z + C,$$

其中 $z = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}.$

1984. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解 $\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} = x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, m=5, n=2, p=-\frac{1}{2};$

$\frac{m+1}{n} = 3$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $\sqrt{1-x^2} = z$ (不妨设 $x > 0$), 则

$$x = \sqrt{1-z^2}, \quad dx = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} dz.$$

代入得

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int (1-z^2)^2 dz$$

$$= -z + \frac{2}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 + C,$$

其中 $z = \sqrt{1-x^2}$.

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

解 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} = x^0 (1+x^3)^{-\frac{1}{3}}, m=0, n=3, p=-\frac{1}{3};$

$\frac{m+1}{n} + p = 0$, 这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-3} + 1 = z^3$, 则

$$x = (z^3 - 1)^{-\frac{1}{3}}, \quad dx = -z^2 (z^3 - 1)^{-\frac{4}{3}} dz.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= - \int \frac{z}{z^3-1} dz \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3} \int \frac{z-1}{z^2+z+1} dz \\ &= -\frac{1}{3} \ln|z-1| + \frac{1}{6} \ln(z^2+z+1) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

解 $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}, m=0, n=4, p=-\frac{1}{4};$

$\frac{m+1}{n}+p=0$, 这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-4}+1=z^4$, 则

$$z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \quad (z>0, x>0),$$

$$x=(z^4-1)^{-\frac{1}{4}}, \quad dx=-z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= -\int \frac{z^2}{z^4-1} dz \\ &= \int \left[\frac{1}{4(z+1)} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{2(z^2+1)} \right] dz \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{\sqrt[6]{1+x^6}}{x}$.

1987⁺. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}.$

解 $\frac{1}{x\sqrt[6]{1+x^6}} = x^{-1}(1+x^6)^{-\frac{1}{6}}, m = -1, n = 6, p$

$= -\frac{1}{6}; \frac{m+1}{n} = 0$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^6 = z^6$, 则

$z = \sqrt[6]{1+x^6} \quad (z > 0, x > 0),$

$x = \sqrt[6]{z^6-1}, \quad dx = z^5(z^6-1)^{-\frac{5}{6}}dz.$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}} &= \int \frac{z^4 dz}{z^6-1} \\ &= \int \left[-\frac{1}{6(z+1)} + \frac{z+1}{6(z^2-z+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6(z-1)} + \frac{-z+1}{6(z^2+z+1)} \right] dz \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\arctg \left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right) + \arctg \left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}} \right) \right] + C_1 \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\arctg\left(\frac{z^2-1}{z\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)+C,$$

其中 $z=\sqrt[6]{1+x^6}$.

1988. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$

解 $\frac{1}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} = x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}, m=-3, n=-1,$

$p=-\frac{1}{5}; \frac{m+1}{n}=2$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{-1}=z^5$, 则

$$x=(z^5-1)^{-1}, dx=-5z^4(z^5-1)^{-2}dz.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} = -5 \int z^3(z^5-1)dz$$

$$= -\frac{5}{9}z^9 + \frac{5}{4}z^4 + C,$$

其中 $z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}.$

1989. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx.$

解 $\sqrt[3]{3x-x^3}=x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}, m=\frac{1}{3}, n=2, p=\frac{1}{3},$

$\frac{m+1}{n}+p=1$, 这是二项微分式的第三种情形.

设 $3x^2 - 1 = z^3$ (不妨设 $x > 0$) , 则

$$z = \frac{\sqrt[3]{3x - x^3}}{x}, \quad x = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{z^3 + 1}},$$

$$dx = -\frac{3\sqrt[3]{3}}{2} \cdot \frac{z^2}{(z^3 + 1)^2} dz.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx &= -\frac{9}{2} \int \frac{z^3}{(z^3 + 1)^2} dz \\ &= -\frac{9}{2} \int \frac{dz}{z^3 + 1} + \frac{9}{2} \int \frac{dz}{(z^3 + 1)^2} \\ &= -\frac{9}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2z-1}{\sqrt[3]{3}} \right) \right]^{*}) \\ &\quad + \frac{9}{2} \left[\frac{z}{3(z^3 + 1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2 - z + 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3\sqrt[3]{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2z-1}{\sqrt[3]{3}} \right) \right]^{**}) + C \\ &= \frac{3z}{2(z^3 + 1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2 - z + 1} \\ &\quad - \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2z-1}{\sqrt[3]{3}} \right) + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{\sqrt[3]{3x - x^3}}{x}$.

*) 利用1881题的结果.

**) 利用1892题的结果.

1990. 在甚么情形下, 积分

$$\int \sqrt{1+x^m} dx$$

(式中 m 为有理数) 为初等函数?

解 $\sqrt{1+x^m} = x^0(1+x^m)^{\frac{1}{2}}$. 由于 $p = \frac{1}{2}$, 故由契比协夫定理知, 仅在下述两种情形, 此函数的积分可化为有理函数的积分.

第一种情形, $\frac{1}{m}$ 为整数, 即 $m = \frac{1}{k_1} = \frac{2}{2k_1}$, 其中 $k_1 = \pm 1, \pm 2, \dots$;

第二种情形, $\frac{1}{m} + \frac{1}{2}$ 为整数, 即 $m = \frac{2}{2k_2-1}$, 其中 $k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

综上所述, 即得: 当

$$m = \frac{2}{k}$$

(式中 $k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 积分

$$\int \sqrt{1+x^m} dx$$

为初等函数.

§4. 三角函数的积分法

形如

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

的积分 (式中 m 及 n 为整数), 可利用巧妙的变换或

运用递推公式计算。

求下列积分：

1991. $\int \cos^5 x dx.$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx \\&= \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\&= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) \\&= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.\end{aligned}$$

1992. $\int \sin^6 x dx.$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \sin^6 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx \\&= \frac{1}{8} \int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\&= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\&\quad - \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx \\&= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \sin 4x \\&\quad - \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d(\sin 2x) \\&= \frac{5x}{16} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C \\
& = \frac{5x}{16} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

1993. $\int \cos^6 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \cos^6 x dx &= \int \sin^6 \left(x - \frac{\pi}{2}\right) d\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{5}{16} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \sin 2 \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{64} \sin 4 \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{48} \sin^3 2 \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{*}) + C_1 \\
&= \frac{5x}{16} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

*) 利用1992题的结果.

1994. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos^2 x dx \\
&= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) \\
&= \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

1995. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx.$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \sin^4 x \cos^5 x dx &= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.\end{aligned}$$

$$1996. \quad \int \sin^5 x \cos^5 x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \sin^5 x \cos^5 x dx &= \frac{1}{32} \int \sin^5 2x dx \\ &= -\frac{1}{64} \int (1 - \cos^2 2x)^2 d(\cos 2x) \\ &= -\frac{1}{64} \cos 2x + \frac{1}{96} \cos^3 2x - \frac{1}{320} \cos^5 2x + C.\end{aligned}$$

$$1997. \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx &= - \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) \\ &= \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C\end{aligned}$$

$$1998. \quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx &= \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} d(\sin x) \\ &= -\frac{1}{2} \int \cos^3 x d\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \\ &= -\frac{\cos^3 x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{\cos^2 x \sin x}{\sin^2 x} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx \\
 &= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{3}{2} \cos x + C.
 \end{aligned}$$

1999. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= - \int \frac{1}{\sin x} d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} \\
 &= - \int \operatorname{ctg} x \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx \\
 &= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|,
 \end{aligned}$$

于是,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \\
 &= -\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \right| + C^{*}) \\
 &= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.
 \end{aligned}$$

*) 利用1999题的结果。

$$2001. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = 16 \int \frac{dx}{\sin^4 2x} \\ &= -8 \int \csc^2 2x d(\operatorname{ctg} 2x) \\ &= -8 \int (1 + \operatorname{ctg}^2 2x) d(\operatorname{ctg} 2x) \\ &= -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^3 2x + C. \end{aligned}$$

$$2002. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^5 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} \\ &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^5 x} dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx + 2 \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} \\ &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x} + 2 \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \\ &+ 3 \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\cos^4 x} - 2 \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + 3 \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} \\
&= -\frac{1}{4\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + 3\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C_1 \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg} x| + C.
\end{aligned}$$

2003. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^4 x} dx \\
&= \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} \\
&= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x} \\
&= \frac{1}{3\cos^3 x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \\
&= \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.
\end{aligned}$$

2004. $\int \operatorname{tg}^5 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1)^2 dx \\
&= \int \sec^4 x \operatorname{tg} x dx - 2 \int \sec^2 x \operatorname{tg} x dx + \int \operatorname{tg} x dx \\
&= \int \sec^3 x d(\sec x) - 2 \int \sec x d(\sec x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \sec^4 x - \sec^2 x - \ln |\cos x| + C_1$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C.$$

2005. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{ctg}^6 x dx &= \int \operatorname{ctg}^2 x (\csc^2 x - 1)^2 dx \\ &= \int \operatorname{ctg}^2 x \csc^4 x dx - 2 \int \operatorname{ctg}^2 x \csc^2 x dx + \int \operatorname{ctg}^2 x dx \\ &= - \int \operatorname{ctg}^2 x (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d(\operatorname{ctg} x) \\ &\quad + 2 \int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) + \int (\csc^2 x - 1) dx \\ &= -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C \\ &= -\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C. \end{aligned}$$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx.$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.$$

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$$

$$\begin{aligned}
& + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} \\
& = \int \sqrt{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} \\
& = \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} - 2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + C.
\end{aligned}$$

2008⁺. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

解 设 $t = \sqrt[3]{\sin x}$, 不妨只考虑 $\cos x$ 为正的情况,

即 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 且 $x \neq 0$, 则有

$$dx = \frac{3t^2}{\sqrt{1-t^6}} dt, \quad \cos x = \sqrt{1-t^6}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = 3 \int \frac{dt}{1-t^6} \\
& = \frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{1-t^3} + \frac{1}{1+t^3} \right) dt \\
& = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{t+2}{1+t+t^2} \right) dt + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1-t^3} \\
& = \frac{-1}{2} \ln|1-t| + \frac{1}{4} \int \frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{3}{4} \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
& + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right] + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \ln \frac{(t+1)^2(t^2+t+1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)} \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right] + C \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{t\sqrt{3}}{1-t^2} \right) + C,
\end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\sin x}$.

*) 利用1881题的结果.

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

解 设 $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, 则

$$x = \operatorname{arctg} t^2, \quad dx = \frac{2t}{1+t^4} dt,$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} &= 2 \int \frac{dt}{1+t^4} \\
&= 2 \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} \right) + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + C,
\end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

*) 利用1884题的结果.

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}.$

解 设 $\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} = t$, 则

$$x = \arctg t^3, \quad dx = \frac{3t^2}{1+t^6} dt,$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} &= 3 \int \frac{t dt}{1+t^6} = \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2)}{1+(t^2)^3} \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t^2-1}{\sqrt{3}} \right]^* + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctg \frac{2t^2-1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$.

*) 利用1881题的结果.

2011. 推出下列积分的递推公式

$$(a) I_n = \int \sin^n x dx; \quad (b) K_n = \int \cos^n x dx \quad (n > 2).$$

并利用推得的公式来计算

$$\int \sin^6 x dx \text{ 及 } \int \cos^8 x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) \quad I_n &= \int \sin^n x dx = - \int \sin^{n-1} x d(\cos x) \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} + (1-n) I_n, \end{aligned}$$

于是,

$$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

利用此公式及

$$I_0 = \int dx = x + C,$$

即得

$$I_6 = \int \sin^6 x dx = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6} I_4$$

$$= -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5 \cos x \sin^3 x}{24} + \frac{5}{8} I_2$$

$$= -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5 \cos x \sin^3 x}{24}$$

$$- \frac{5 \cos x \sin x}{16} + \frac{5}{16} x + C.$$

$$(6) \quad K_n = \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x d(\sin x)$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) K_{n-2} - (n-1) K_n$$

于是,

$$K_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2},$$

利用此公式及

$$K_0 = x + C$$

即得

$$\begin{aligned} K_8 &= \int \cos^8 x dx = \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{8} K_6 = \dots \\ &= \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cos^5 x + \frac{35}{192} \sin x \cos^3 x \\ &\quad + \frac{35}{128} \sin x \cos x + \frac{35}{128} x + C. \end{aligned}$$

2012. 推出下列积分的递推公式

$$(a) I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \quad (b) K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n > 2).$$

并利用推得的公式计算

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \text{ 及 } \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) \quad I_n &= \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x} dx \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \int \cos x d\left(\frac{1}{\sin^{n-1} x}\right) \\ &= I_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} I_{n-2} \\ &= -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}; \end{aligned}$$

利用此公式及

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$$

即得

$$I_5 = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4} I_3 = \dots$$

$$= -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$(6) \quad K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^n x} dx$$

$$= \frac{1}{n-1} \int \sin x d\left(\frac{1}{\cos^{n-1} x}\right) + K_{n-2}$$

$$= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} K_{n-2} + K_{n-2}$$

$$= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2};$$

利用此公式及

$$K_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C,$$

即得

$$K_7 = \int \frac{dx}{\cos^7 x} = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5}{6} K_5 = \dots$$

$$= \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5\sin x}{24\cos^4 x} + \frac{5\sin x}{16\cos^2 x}$$

$$+ \frac{5}{16} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

运用公式

$$\text{I} \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\text{II} \quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

$$\text{III} \quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

来计算下列的积分。

求积分：

$$2013. \quad \int \sin 5x \cos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sin 5x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 6x) dx \\ &= -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x + C. \end{aligned}$$

$$2014. \quad \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int \cos 2x (\cos 4x + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\cos 6x + \cos 2x) dx + \frac{1}{4} \int (1 + \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

$$2015. \quad \int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{2}{3}x - \cos \frac{4}{3}x \right) \sin \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos \frac{2}{3}x \sin \frac{x}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos \frac{4}{3}x \sin \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\sin \frac{7}{6}x - \sin \frac{1}{6}x \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\sin \frac{11}{6}x - \sin \frac{5}{6}x \right) dx$$

$$= -\frac{3}{14} \cos \frac{7}{6}x + \frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11}{6}x$$

$$- \frac{3}{10} \cos \frac{5}{6}x + C.$$

$$2016. \quad \int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b) dx.$$

$$\text{解} \quad \int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin x [\cos(a-b) - \cos(2x+a+b)] dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x \cos(a-b) - \frac{1}{4} \int [\sin(3x+a+b)$$

$$- \sin(x+a+b)] dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x \cos(a-b) + \frac{1}{12} \cos(3x+a+b)$$

$$- \frac{1}{4} \cos(x+a+b) + C.$$

2017. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \cos^2 ax \cos^2 bx dx &= \int (\cos ax \cos bx)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int [\cos^2(a-b)x + \cos^2(a+b)x \\ &\quad + 2\cos(a-b)x\cos(a+b)x] dx. \\ &= \frac{1}{8} \int [2 + \cos 2(a+b)x + \cos 2(a-b)x] dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int (\cos 2ax + \cos 2bx) dx \\ &= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)} + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} \\ &\quad + \frac{1}{8a} \sin 2ax + \frac{1}{8b} \sin 2bx + C. \end{aligned}$$

2018. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx.$

解 先利用三角公式化简 $\sin^3 2x \cos^2 3x$, 得

$$\begin{aligned} \sin^3 2x \cos^2 3x &= -\frac{1}{16} \sin 12x + \frac{3}{16} \sin 8x \\ &\quad - \frac{1}{8} \sin 6x - \frac{3}{16} \sin 4x + \frac{3}{8} \sin 2x, \end{aligned}$$

于是

$$\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx$$

$$= \frac{1}{192} \cos 12x - \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{48} \cos 6x \\ + \frac{3}{64} \cos 4x - \frac{3}{16} \cos 2x + C.$$

运用恒等式

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[(x + \alpha) - (x + \beta)]$$

及 $\cos(\alpha - \beta) = \cos[(x + \alpha) - (x + \beta)]$

来计算积分.

求积分:

2019. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(a+x) - (x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} - \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C,$$

其中设 $\sin(a-b) \neq 0$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos(a-b)} \int \frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)} dx \\
&= \frac{1}{\cos(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} + \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} \right] dx \\
&= \frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right| + C,
\end{aligned}$$

其中设 $\cos(a-b) \neq 0$.

2021. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}.$

解
$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} \\
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} \\
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)} - \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} \right] dx \\
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)} \right| + C,
\end{aligned}$$

其中设 $\sin(a-b) \neq 0$ *).

*) 当 $a-b=2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 是更简单的积分, 2019题及2020题与本题类似, 解法从略.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}.$

解
$$\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{\cos a} \int \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2} - \frac{x-a}{2}\right)}{\sin x - \sin a} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos a} \int \frac{\cos \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2} + \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}} dx \\
&= -\frac{1}{2 \cos a} \int \left(-\frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} + \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right) dx \\
&= \frac{1}{\cos a} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| + C,
\end{aligned}$$

其中设 $\cos a \neq 0$.

2023. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a} .$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{dx}{\cos x + \cos a} &= \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{3}{2}\pi\right)} \\
&= \frac{1}{\cos\left(a + \frac{3}{2}\pi\right)} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a-\pi}{2}}{\cos \frac{x+a+2\pi}{2}} \right|^{*}) + C \\
&= \frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| + C,
\end{aligned}$$

其中设 $\sin a \neq 0$.

*) 利用2022题的结果.

$$2024. \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx = \int \frac{\sin x \sin(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx \\ &= \int \frac{\cos x \cos(x+a) + \sin x \sin(x+a) - \cos x \cos(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx \\ &= \int \frac{\cos a - \cos x \cos(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx \\ &= -x + \cos a \cdot \int \frac{dx}{\cos(x+a) \cos x} \\ &= -x + \operatorname{ctg} a \cdot \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x-a)} \right|^{(*)} + C, \end{aligned}$$

其中设 $\sin a \neq 0$.

*) 利用2021题的结果.

形如

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

(式中 R 为有理函数) 的积分的一般情形可利用代换 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ 化为有理函数的积分.

(a) 若等式

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

$$\text{或} \quad R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用代换 $\cos x = t$ 或对应的 $\sin x = t$.

(b) 若等式

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用代换 $\operatorname{tg} x = t$.

求积分:

$$2025. \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$$

解 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} &= \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{3t + 1}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{3\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$2026. \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}.$$

解 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 同2025题, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} &= \int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)} dt \\ &= \int \left[\frac{1}{3t} + \frac{2t}{3(3+t^2)} \right] dt \\ &= \frac{1}{3} \ln |t(3+t^2)| + C_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{(1 - \cos x)(2 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)^3} \quad *) + C.$$

*) 由于

$$\begin{aligned} t(3+t^2) &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(2 + \sec^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} \left(1 + 2 \cos^2 \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{\left(\frac{1 - \cos x}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} (\cos x + 2) \\ &= 2 \left[\frac{(1 - \cos x)(\cos x + 2)^2}{(1 + \cos x)^3} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

因而

$$\ln |t(3+t^2)| = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \cos x)(2 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)^3}.$$

2027. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$

解 设 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, 同2025题, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx &= 4 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)} \\ &= \frac{4}{5} \int \left[\frac{1}{1+t^2} + \frac{-2+t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t-t^2} \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{5} \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{8}{5} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{5} \int \frac{2t dt}{(1+t^2)^2} \\
&+ \frac{4}{5} \int \frac{d\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{4}{5} \operatorname{arctg} t - \frac{8}{5} \left[\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right]^{*}) \\
&- \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + t - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)} \right| + C_1 \\
&= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2t}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} + t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - t} \right| + C_1 \\
&= -\frac{1}{5} (\cos x + 2 \sin x)^{**}) \\
&+ \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2} \right) \right|^{***}) + C.
\end{aligned}$$

*) 利用1817题的结果。

$$\begin{aligned}
***) \quad & -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2t}{1+t^2} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} \\
&= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2 \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x}}{2} = -\frac{1}{5} (\cos x + 2 \sin x) - \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *** \quad \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} + t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - t} \right| &= \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| \\
 &= \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + \ln \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)} \\
 &= \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) \right| - \ln \left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right) \right].
 \end{aligned}$$

2028. $\int \frac{dx}{1 + e \cos x};$

(a) $0 < e < 1$; (b) $e > 1$.

解 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 同 2025 题, 得

$$\int \frac{dx}{1 + e \cos x} = 2 \int \frac{dt}{(1+e) + (1-e)t^2} = I.$$

(a) $0 < e < 1$,

$$I = \frac{2}{1+e} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{1-e}{1+e}\right)t^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg}\left(t \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C;$$

$$(6) \quad e > 1,$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{e-1} \int \frac{dt}{\left(\frac{e+1}{e-1}\right) - t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \left| \frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1}t}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1}t} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \left| \frac{e + \cos x + \sqrt{e^2-1} \sin x}{1 + e \cos x} \right|^{*}) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *) \frac{\sqrt{e+1} + t\sqrt{e-1}}{\sqrt{e+1} - t\sqrt{e-1}} &= \frac{e+1 + 2t\sqrt{e^2-1} + (e-1)t^2}{(e+1) - (e-1)t^2} \\ &= \frac{e(1+t^2) + (1-t^2) + 2\sqrt{e^2-1}t}{e(1-t^2) + (1+t^2)} \\ &= \frac{e(1+t^2) + (1+t^2)\cos x + 2t\sqrt{e^2-1}}{e(1+t^2)\cos x + (1+t^2)} \\ &= \frac{e + \cos x + \sqrt{e^2-1} \cdot \frac{2t}{1+t^2}}{e\cos x + 1} \\ &= \frac{e + \cos x + \sqrt{e^2-1} \sin x}{e\cos x + 1}. \end{aligned}$$

$$2029. \quad \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1 + \sin^2 x} \right) dx \\ &= x - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x} = x - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + 2\operatorname{tg}^2 x} \end{aligned}$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

$$2030. \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \int \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{a^2 \operatorname{tg}^2 x + b^2} \\ &= \frac{1}{ab} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b}\right) + C, \end{aligned}$$

其中设 $ab \neq 0$.

$$2031. \int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\cos^2 x dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} &= \frac{1}{a} \int \frac{d(a \operatorname{tg} x)}{(a^2 \operatorname{tg}^2 x + b^2)^2} \\ &= \frac{\operatorname{tg} x}{2b^2(a^2 \operatorname{tg}^2 x + b^2)} + \frac{1}{2ab^3} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b}\right)^{*}) + C, \end{aligned}$$

其中设 $ab \neq 0$.

*.) 利用1921题的结果.

$$2032. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C \\
&= \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C.
\end{aligned}$$

2033. $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}.$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2} &= \frac{1}{a} \int \frac{d(atgx + b)}{(atgx + b)^2} \\
&= -\frac{1}{atgx + b} + C = -\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} + C.
\end{aligned}$$

2034. $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}.$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} &= \int \frac{\sin x dx}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x - \cos x) dx}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)} \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \sin x \cos x} \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{-(\cos x - \sin x) dx}{\sin x + \cos x} \\
&+ \frac{1}{6} \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \sin x \cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \sin x \cos x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{6} \int \frac{d(1 - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int d\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x}\right) \\
&= -\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} \right) + C.
\end{aligned}$$

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{2dx}{2 - \sin^2 2x} \\
&= \int \frac{d(\operatorname{tg} 2x)}{2 \sec^2 2x - \operatorname{tg}^2 2x} \\
&= \int \frac{d(\operatorname{tg} 2x)}{2 + \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right) + C.
\end{aligned}$$

2036. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx = \int \frac{2 \sin^2 2x dx}{\sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + 8} \\
&= \int \frac{\operatorname{tg}^2 2x d(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}^4 2x - 8 \operatorname{tg}^2 2x \sec^2 2x + 8 \sec^4 2x} \\
&= \int \frac{\operatorname{tg}^2 2x d(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}^4 2x + 8 \operatorname{tg}^2 2x + 8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{4} (2 + \sqrt{2}) \int \frac{d(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}^2 2x + 4 + 2\sqrt{2}} \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{2}) \int \frac{d(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}^2 2x + 4 - \sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{4} \left[\sqrt{2 + \sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \right) \right] + C.
\end{aligned}$$

2037. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx &= - \int \frac{\cos 2x}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} dx \\
&= - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} + \frac{2\cos 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} + C.
\end{aligned}$$

2038. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx &= \int \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{\sec^4 x + \operatorname{tg}^4 x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d(\operatorname{tg}^2 x)}{2\operatorname{tg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1 + 2\operatorname{tg}^2 x) + C.
\end{aligned}$$

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} &= \int \frac{dx}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x} \\
 &= \int \frac{dx}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x} = \int \frac{2d(\operatorname{tg} 2x)}{4\sec^2 2x - 3\operatorname{tg}^2 2x} \\
 &= \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}\right) + C.
 \end{aligned}$$

$$2040. \quad \int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2},$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^4 x} dx}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} \\
 &= \int \frac{\sec^2 x d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} \\
 &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} \\
 &= \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 2) - 2}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} \\
 &= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)} \\
 &\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^* + C.
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)} + C.$$

*) 利用1817题的结果.

2041. 求积分

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

先化分母为对数的形状.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \varphi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x + \varphi}{2} \right) \right| + C, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

并设 $a^2 + b^2 \neq 0$.

2042. 证明

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C,$$

式中 A, B, C 为常数.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad a_1 \sin x + b_1 \cos x &= A(a \sin x + b \cos x) \\ &\quad + B(a \cos x - b \sin x), \end{aligned}$$

$$\text{式中 } A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2}, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

于是

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \int dx$$

$$+ B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x}$$

$$= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C.$$

求积分:

$$2043. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

解 此为2042题的特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = -1, a = 1, b = 2;$$

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 - 2}{1 + 4} = -\frac{1}{5},$$

$$B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2} = \frac{-1 - 2}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx = -\frac{x}{5}$$

$$- \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x| + C.$$

$$2044. \int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x}.$$

$$\text{解 } \int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x}{5 \sin x + 3 \cos x} dx.$$

此为2042题的特例, 这里

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a = 5, \quad b = 3;$$

$$A = \frac{3}{34}, \quad B = \frac{5}{34}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{3+5\operatorname{tg}x} = \frac{3}{34}x + \frac{5}{34}\ln|5\sin x + 3\cos x| + C.$$

$$2045. \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx.$$

解 仿2042题, $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx$

$$= A \int \frac{a \sin x + b \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx$$

$$+ B \int \frac{a \cos x - b \sin x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx$$

$$= A \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx$$

$$= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|^{(*)} - \frac{B}{a \sin x + b \cos x} + C$$

$$= \frac{aa_1 + bb_1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|$$

$$- \frac{ab_1 - a_1 b}{(a^2 + b^2)(a \sin x + b \cos x)} + C,$$

$$\text{式中 } A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$a^2 + b^2 \neq 0$ (显然按题意 a, b 不同时为零).

*) 利用2041题的结果.

2046. 证明:

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx \\ &= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| \\ &+ C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}, \end{aligned}$$

式中 A, B, C 都是常系数.

证 按题意 a, b 不同时为零. 设

$$\begin{aligned} a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 &\equiv A(a \sin x + b \cos x + c) \\ &+ B(a \cos x - b \sin x) + C, \end{aligned}$$

比较等式两端同类项的系数, 则有

$$\begin{aligned} A &= \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2}, \\ C &= \frac{a(ac_1 - a_1c) + b(bc_1 - b_1c)}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx \\ &= A \int dx + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x + c)}{a \sin x + b \cos x + c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} \\
& = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| \\
& + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.
\end{aligned}$$

求积分:

$$2047. \int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx.$$

解 此为2046题之特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -3, a = 1, b = -2, c = 3,$$

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5},$$

$$B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2} = \frac{2 + 2}{1 + 4} = \frac{4}{5},$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{a(ac_1 - a_1c) + b(bc_1 - b_1c)}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{(-3 - 3) + (-2)(6 - 6)}{1 + 4} = -\frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx \\
& = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5} \ln |\sin x - 2 \cos x + 3| \\
& \quad - \frac{6}{5} \int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x + 3}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\ln|\sin x - 2\cos x + 3|$$

$$- \frac{6}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 + 5 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2} + C.$$

*) 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 积分即得所求式子.

$$2048. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}.$$

解 此为2046题之特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, a = 1, b = 1, c = \sqrt{2};$$

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x| \\ & \quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x| \\ & \quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x| \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)} \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x| \\
&\quad - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + C.
\end{aligned}$$

2049. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx.$

解 本题也是2046题之特例, 这里

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 0, \quad a = 3, \quad b = 4, \quad c = -2;$$

$$A = \frac{2}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = \frac{4}{5}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx \\
&= \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\ln|3\sin x + 4\cos x - 2| \\
&\quad + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x - 2} \\
&= \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\ln|3\sin x + 4\cos x - 2| \\
&\quad + \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right)}{\sqrt{7} - \sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right)} \right|^{(*)} + C.
\end{aligned}$$

*) 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 积分即得所求式子.

2050. 证明:

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx$$

$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

式中 A, B, C 都是常系数.

证 按题意 a, b 不同时为零. 设

$$a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x$$

$$= A \cos x (a \sin x + b \cos x) - B \sin x (a \sin x + b \cos x) + C,$$

比较等式两端同类项的系数, 则有

$$aA - bB = 2b_1, \quad C - aB = a_1, \quad C + bA = c_1,$$

从而

$$A = \frac{bc_1 - a_1b + 2ab_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2 + b^2},$$

$$C = \frac{a_1b^2 + a^2c_1 - 2abb_1}{a^2 + b^2}.$$

代入得

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx$$

$$= A \int \cos x dx - B \int \sin x dx + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}.$$

求积分:

$$2051. \int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx.$$

解 此为2050题之特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = -2, c_1 = 3, a = 1, b = 1;$$

$$A = \frac{bc_1 - a_1 b + 2ab_1}{a^2 + b^2} = \frac{3 - 1 - 4}{1 + 1} = -1,$$

$$B = \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{3 - 1 + 4}{1 + 1} = 3,$$

$$C = \frac{a_1 b^2 + a^2 c_1 - 2ab b_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 + 3 + 4}{1 + 1} = 4.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= -\sin x + 3\cos x + 4 \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} \\ &= -\sin x + 3\cos x + \frac{4}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= -\sin x + 3\cos x + 2\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C. \end{aligned}$$

$$2052. \int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx.$$

解 本题也是2050题的特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, c_1 = 2, a = 1, b = 2;$$

$$A = \frac{1}{5}, B = \frac{3}{5}, C = \frac{8}{5}.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx \\ &= \frac{1}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x + \frac{8}{5} \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x} \\ &= \frac{1}{5} (\sin x + 3 \cos x) \\ &+ \frac{8}{5 \sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{5} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right|^{*}) + C. \end{aligned}$$

*) 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 积分即得所求式子.

2053. 证明: 若 $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx \\ &= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}, \end{aligned}$$

式中 A, B 为未定系数, λ_1, λ_2 为下方程式的根

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

及

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x, \quad k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \quad (i = 1, 2).$$

证 记

$$\begin{aligned}
& a^2 \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x \\
&= (a - \lambda_i) \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + (c - \lambda_i) \cos^2 x + \lambda_i \\
&= \frac{1}{a - \lambda_i} [(a - \lambda_i)^2 \sin^2 x + 2b(a - \lambda_i) \sin x \cos x \\
&\quad + (c - \lambda_i)(a - \lambda_i) \cos^2 x] + \lambda_i,
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i (i = 1, 2)$ 为 $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$ 的根.

由假定 $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$, 从而 $(a - c)^2 + 4b^2 \neq 0$, 因此 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

再设 $k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \quad (i = 1, 2)$ 及

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x.$$

由于 $(a - \lambda_i)(c - \lambda_i) - b^2 = 0$, 即 $b^2 = (a - \lambda_i)(c - \lambda_i)$. 于是,

$$\begin{aligned}
& a^2 \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x \\
&= k_i [(a - \lambda_i)^2 \sin^2 x + 2b(a - \lambda_i) \sin x \cos x \\
&\quad + b^2 \cos^2 x] + \lambda_i = k_i [(a - \lambda_i) \sin x + b \cos x]^2 + \lambda_i \\
&= k_i u_i^2 + \lambda_i. \quad (1)
\end{aligned}$$

其次, 设

$$\begin{aligned}
a_1 \sin x + b_1 \cos x &= A[(a - \lambda_1) \cos x - b \sin x] \\
&\quad + B[(a - \lambda_2) \cos x - b \sin x], \quad (2)
\end{aligned}$$

比较等式两端同类项的系数, 则有

$$-b(A + B) = a_1,$$

$$A(a - \lambda_1) + B(a - \lambda_2) = b_1,$$

$$A = -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + b b_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a - \lambda_1)^*}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

由 (1) 式及 (2) 式即得

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a^2 \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx \\ &= A \int \frac{(a - \lambda_1) \cos x - b \sin x}{k_1 [(a - \lambda_1) \sin x + b \cos x]^2 + \lambda_1} dx \\ &+ B \int \frac{(a - \lambda_2) \cos x - b \sin x}{k_2 [(a - \lambda_2) \sin x + b \cos x]^2 + \lambda_2} dx \\ &= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

- * 按题意, $b \neq 0$. 因若 $b = 0$, 则 $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = c$, 从而 k_1 无意义. 不过, 当 $b = 0$ 时, 仍能化为所要求的类似形式. 事实上, 当 $b = 0$ 时, $a \neq c$,

我们有

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} dx \\ &= a_1 \int \frac{\sin x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} dx + b_1 \int \frac{\cos x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} dx \\ &= a_1 \int \frac{d(\cos x)}{(c - a) \cos^2 x + a} + b_1 \int \frac{d(\sin x)}{(a - c) \sin^2 x + c} \end{aligned}$$

$$= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

式中 $A = -a_1, B = b_1, k_1 = c - a, k_2 = a - c,$

$$u_1 = \cos x, u_2 = \sin x, \lambda_1 = a, \lambda_2 = c.$$

本题也可用下法另证: 命 $u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x,$

$k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} (i = 1, 2),$ 代入积分等式, 然后两边求导,

整理并比较系数, 便可知 λ_i 必为 $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$ 的根,

相应可求出系数, $A, B.$

求积分:

$$2054. \int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{2 \sin x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx \\ &= -2 \int \frac{d(\cos x)}{3 + \cos^2 x} - \int \frac{d(\sin x)}{4 - \sin^2 x} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} + C. \end{aligned}$$

$$2055. \int \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} dx.$$

解 此为2053题之特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = 1, a = 2, b = -2, c = 5.$$

由

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

求得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$, 从而

$$\begin{aligned} A &= -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + b_1 b + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ &= \frac{(1-6) - 2 + (2-1)}{-2(1-6)} = \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{-2 + 1}{10} = -\frac{1}{10},$$

$$u_1 = (a - \lambda_1)\sin x + b\cos x = \sin x - 2\cos x,$$

$$u_2 = (a - \lambda_2)\sin x + b\cos x = -4\sin x - 2\cos x;$$

$$k_1 = \frac{1}{a - \lambda_1} = 1,$$

$$k_2 = \frac{1}{a - \lambda_2} = -\frac{1}{4}.$$

代入得

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} dx \\ &= \frac{3}{5} \int \frac{d(\sin x - 2\cos x)}{(\sin x - 2\cos x)^2 + 1} \\ &\quad + \frac{1}{10} \int \frac{d(4\sin x + 2\cos x)}{6 - \frac{1}{4}(4\sin x + 2\cos x)^2} \\ &= \frac{3}{5} \arctg(\sin x - 2\cos x) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{10\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} + 2\sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2\sin x - \cos x} \right| + C.$$

2056. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} dx.$

解 本题也是2053题的特例, 因为

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x} dx, \end{aligned}$$

这里,

$$a_1 = 1, b_1 = 2, a = 1, b = 2, c = 1;$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = \frac{1}{2};$$

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{3}{4};$$

$$u_1 = 2(\cos x - \sin x), u_2 = 2(\cos x + \sin x).$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{2d(\cos x - \sin x)}{-2(\cos x - \sin x)^2 + 3} \\ & \quad - \frac{3}{4} \int \frac{2d(\cos x + \sin x)}{2(\cos x + \sin x)^2 - 1} \\ &= \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1} \right| \\ & \quad - \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}(\sin x - \cos x)} \right| + C. \end{aligned}$$

2057. 证明

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$$

式中 A, B, C 为未定系数.

证 $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha),$

式中 $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} &= (a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{dx}{\sin^n(x + \alpha)} \\ &= -(a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{1}{\sin^{n-2}(x + \alpha)} d\{\operatorname{ctg}(x + \alpha)\} \\ &= -(a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{\operatorname{ctg}(x + \alpha)}{\sin^{n-2}(x + \alpha)} \\ &\quad - \frac{n-2}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{\operatorname{ctg}(x + \alpha) \cos(x + \alpha)}{\sin^{n-1}(x + \alpha)} dx \\ &= \frac{\frac{b}{a^2 + b^2} \sin x - \frac{a}{a^2 + b^2} \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} \\ &\quad - \frac{n-2}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{1 - \sin^2(x + \alpha)}{\sin^n(x + \alpha)} dx. \end{aligned}$$

设 $I_n = \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n}$, 则由上式可得

$$I_n = \frac{\frac{b}{a^2+b^2} \sin x - \frac{a}{a^2+b^2} \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}}$$

$$+ (2-n)I_n + \frac{n-2}{a^2+b^2} I_{n-2}.$$

于是,

$$I_n = \frac{\frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)} \sin x - \frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)} \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)} I_{n-2}.$$

即

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}}$$

$$+ C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$$

$$\text{式中 } A = \frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}, \quad B = \frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)},$$

$$C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}.$$

$$2058. \text{ 求 } \int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3}.$$

解 此为2057题之特例, 这里

$$a=1, b=2, n=3;$$

$$A = \frac{2}{10}, \quad B = -\frac{1}{10}, \quad C = \frac{1}{10}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3} &= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} \\
 &+ \frac{1}{10} \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} \\
 &= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sin(x + \alpha)} \\
 &= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} \\
 &+ \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \right| + C.
 \end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2$.

2059. 若 n 为大于 1 的自然数, 证明

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} &= \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} \\
 &+ B \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}}
 \end{aligned}$$

($|a| \neq |b|$),

并求出系数 A, B 和 C .

证 设 $I_n = \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n}$, 先考虑 I_{n-1} .

$$I_{n-1} = \frac{1}{a} \int \frac{(a + b\cos x) - b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b}{a} \int \frac{d(\sin x)}{(a+b\cos x)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}} \\
&\quad + \frac{(n-1)b^2}{a} \int \frac{\sin^2 x}{(a+b\cos x)^n} dx \\
&= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}} \\
&\quad + \frac{n-1}{a} \int \frac{(b^2-a^2) + (a+b\cos x)(a-b\cos x)}{(a+b\cos x)^n} dx \\
&= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a} I_n \\
&\quad + \frac{n-1}{a} \int \frac{a-b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}} dx \\
&= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a} I_n \\
&\quad - \frac{n-1}{a} \int \frac{(a+b\cos x) - 2a}{(a+b\cos x)^{n-1}} dx \\
&= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a} I_n \\
&\quad - \frac{n-1}{a} I_{n-2} + 2(n-1) I_{n-1},
\end{aligned}$$

于是,

$$\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{a} I_n = \frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ (2n-3)I_{n-1} - \frac{n-2}{2}I_{n-2}.$$

最后得到

$$I_n = -\frac{b \sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b \cos x)^{n-1}} \\ + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-1} - \frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-2},$$

即

$$\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n} = \frac{A \sin x}{(a+b \cos x)^{n-1}} \\ + B \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{n-2}}.$$

$$\text{式中 } A = -\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}, B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)},$$

$$C = -\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)} \quad (|a| \neq |b|; n > 1 \text{ 且 } a \neq 0).$$

若 $a=0$, 则 $b \neq 0$, 我们有

$$\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^n} = \frac{1}{b^n} \int \frac{dx}{\cos^n x} \\ = \frac{1}{b^n} \left[\frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \right] *).$$

*) 利用2012题(6)的结果.

求积分:

$$2060. \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} &= \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x \sqrt{2 - \cos^2 x}} \\
 &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x \sqrt{2 \sec^2 x - 1}} = \int \frac{d(\sec x)}{\sqrt{2 \sec^2 x - 1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2} \sec x + \sqrt{2 \sec^2 x - 1} \right| + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{|\cos x|} + C.
 \end{aligned}$$

$$2061. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} dx &= \int \frac{\sin^2 x d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \\
 &= 2 \int \sin^2 x d(\sqrt{\operatorname{tg} x}) = 2 \int (1 - \cos^2 x) d(\sqrt{\operatorname{tg} x}) \\
 &= 2\sqrt{\operatorname{tg} x} - 2 \int \frac{d(\sqrt{\operatorname{tg} x})}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \\
 &= 2\sqrt{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2\operatorname{tg} x} + 1} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x - 1} + C \quad (\operatorname{tg} x > 0).
 \end{aligned}$$

*) 利用1884题的结果。

$$2062. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}.$$

解 由于

$$2 + \sin 2x = 1 + (\sin x + \cos x)^2$$

$$= 3 - (\sin x - \cos x)^2.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}} &= \int \frac{\cos x - (\cos x - \sin x)}{\sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2}} dx \\ &= \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} dx \\ &\quad - \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) \\ &= - \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}} + \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} \\ &\quad - \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}), \end{aligned}$$

因而,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) + C. \end{aligned}$$

2063. $\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2} \quad (0 < \varepsilon < 1).$

解 此为2059题之特例, 这里

$$a = 1, \quad b = \varepsilon, \quad n = 2,$$

$$A = -\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, \quad B = \frac{1}{1 - \varepsilon^2}, \quad C = 0.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+e\cos x)^2} &= -\frac{e\sin x}{(1-e^2)(1+e\cos x)} \\ &+ \frac{1}{1-e^2} \int \frac{1}{1+e\cos x} \\ &= -\frac{e\sin x}{(1-e^2)(1+e\cos x)} \\ &+ \frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{*)} + C. \end{aligned}$$

*) 利用2028题(a)的结果.

$$2064^{+} \cdot \int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} dx$$

解 设 $t = \frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}}$, 则

$$dt = \frac{-\frac{1}{2} \cos a}{\sin^2 \frac{x-a}{2}} dx, \quad \frac{dx}{\sin^2 \frac{x-a}{2}} = -\frac{2}{\cos a} dt.$$

于是,

$$\int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} dx = -\frac{2}{\cos a} \int t^{n-1} dt$$

$$= -\frac{2}{n \cos a} t^n + C$$

$$= -\frac{2}{n \cos a} \left(\frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} \right)^n + C \quad (\cos a \neq 0).$$

2065. 推出积分

$$I_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n dx$$

的递推公式 (n 为自然数)。

证 方法一:

$$\text{设 } t = \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}}, \text{ 则}$$

$$x = 2 \arctg \left(\frac{1+t}{1-t} \cdot \tg \frac{a}{2} \right),$$

$$dx = \frac{4 \tg \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \left(\tg^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}} dt.$$

由于

$$\frac{4 t^n \tg \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \left(\tg^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-2} + \frac{-4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2} + 2t\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} - 1\right) + \sec^2\frac{a}{2}} \\
&\quad \cdot \frac{2\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} - 1\right)}{\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-1} \\
&\quad + \frac{-4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2} + 2t\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} - 1\right) + \sec^2\frac{a}{2}} \\
&\quad \cdot t^{n-2} \quad (n \geq 2),
\end{aligned}$$

两端对 t 积分, 即得递推公式

$$I_n = \frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1} + 2I_{n-1}\cos a - I_{n-2}.$$

方法二:

设 $y = \frac{x+a}{2}$, 则 $\frac{x-a}{2} = y-a$, 从而

$$\begin{aligned}
I_n &= 2 \int \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^n dy \\
&= 2 \int \frac{\sin(y-a)}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^{n-1} dy \\
&= 2 \int \frac{\sin y \cos a - \cos y \sin a}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^{n-1} dy \\
&= \cos a I_{n-1} - 2 \sin a \int \frac{\cos y}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^{n-1} dy.
\end{aligned}$$

再设

$$\frac{\sin(y-a)}{\sin y} = t = \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin \frac{x+a}{2}}, \quad J_n = 2 \int \frac{\cos y}{\sin y} t^n dy,$$

则

$$I_n = \cos a I_{n-1} - \sin a J_{n-1}, \quad J_{n-1} = \frac{\cos a I_{n-1} - I_n}{\sin a}. \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned} J_n &= 2 \int \frac{\cos y}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^n dy \\ &= -\frac{2}{n} \int \sin^n(y-a) d\left(\frac{1}{\sin^n y}\right) \\ &= -\frac{2}{n} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^n \\ &\quad + 2 \int \frac{\sin^{n-1}(y-a)}{\sin^n y} \cos(y-a) dy \\ &= -\frac{2}{n} t^n + 2 \int t^{n-1} \frac{\cos y \cos a + \sin y \sin a}{\sin y} dy \\ &= -\frac{2}{n} t^n + \cos a J_{n-1} + \sin a I_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)式和(2)式解得

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} \cos a - \sin a J_{n-1} \\ &= I_{n-1} \cos a - \sin a \left(-\frac{2}{n-1} t^{n-1} + \cos a J_{n-2} + I_{n-2} \sin a \right) \\ &= I_{n-1} \cos a + \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin a \cos a \left(\frac{I_{n-2} \cos a - I_{n-1}}{\sin a} \right) - \sin^2 a I_{n-2} \\
&= 2I_{n-1} \cos a - I_{n-2} + \frac{2 \sin a}{n-1} I^{n-1}.
\end{aligned}$$

§5. 各种超越函数的积分法

2066. 证明若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\begin{aligned}
\int P(x) e^{ax} dx &= e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} \right. \\
&\quad \left. + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{证} \quad \int P(x) e^{ax} dx &= \frac{1}{a} \int P(x) d(e^{ax}) \\
&= \frac{1}{a} P(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} P'(x) dx \\
&= \frac{1}{a} P(x) e^{ax} - \frac{1}{a^2} \int P'(x) d(e^{ax}) \\
&= \frac{1}{a} P(x) e^{ax} - \frac{1}{a^2} P'(x) e^{ax} + \frac{1}{a^2} \int e^{ax} P''(x) dx \\
&= \dots \dots \\
&= e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] + C.
\end{aligned}$$

因为 $P(x)$ 为 n 次多项式, 所以 $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$, 从而上述等式括号中的导数到 $P^{(n)}(x)$ 为止.

2067. 证明若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\begin{aligned} \int P(x) \cos ax \, dx = & \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) \right. \\ & \left. - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] \\ & + \frac{\cos ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \int P(x) \sin ax \, dx = & -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) \right. \\ & \left. - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] \\ & + \frac{\sin ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \int P(x) \cos ax \, dx &= \frac{1}{a} \int P(x) d(\sin ax) \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax - \frac{1}{a} \int P'(x) \sin ax \, dx \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax + \frac{1}{a^2} \int P'(x) d(\cos ax) \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax + \frac{1}{a^2} P'(x) \cos ax \\ &\quad - \frac{1}{a^2} \int P''(x) \cos ax \, dx \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax + \frac{1}{a^2} P'(x) \cos ax - \frac{1}{a^3} P''(x) \sin ax \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a^4}P'''(x)\cos ax + \frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\cos ax dx \\
& = \dots\dots \\
& = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots\right] \\
& + \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots\right] + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int P(x)\sin ax dx &= -\frac{1}{a}\int P(x)d(\cos ax) \\
&= -\frac{1}{a}P(x)\cos ax + \frac{1}{a}\int P'(x)\cos ax dx \\
&= -\frac{1}{a}P(x)\cos ax + \frac{1}{a^2}\int P'(x)d(\sin ax) \\
&= -\frac{1}{a}P(x)\cos ax + \frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax \\
&\quad - \frac{1}{a^2}\int P''(x)\sin ax dx \\
&= -\frac{1}{a}P(x)\cos ax + \frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax + \frac{1}{a^3}P''(x)\cos ax \\
&\quad - \frac{1}{a^4}P'''(x)\sin ax + \frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\sin ax dx \\
&= \dots\dots \\
&= -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots\right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\sin ax}{a^2} \left[P^{(4)}(x) - \frac{P^{(5)}(x)}{a^2} + \frac{P^{(6)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C.$$

上述导数项是有限的, 其次数 $\leq n$.

求积分:

$$2068. \int x^3 e^{3x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^3 e^{3x} dx &= e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{9} + \frac{6x}{27} - \frac{6}{81} \right)^{*)} + C \\ &= e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} \right) + C. \end{aligned}$$

*) 利用2066题的结果.

$$2069. \int (x^2 - 2x + 2) e^{-x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int (x^2 - 2x + 2) e^{-x} dx &= e^{-x} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2x - 2}{1} + \frac{2}{-1} \right)^{*)} + C \\ &= -e^{-x} (x^2 + 2) + C. \end{aligned}$$

*) 利用2066题的结果.

$$2070. \int x^5 \sin 5x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^5 \sin 5x dx &= -\frac{\cos 5x}{5} \left(x^5 - \frac{20x^3}{25} + \frac{120x}{625} \right) \\ &\quad + \frac{\sin 5x}{25} \left(5x^4 - \frac{60x^2}{25} + \frac{120}{625} \right)^{*)} + C \\ &= -\frac{\cos 5x}{5} \left(x^5 - \frac{4x^3}{5} + \frac{24x}{125} \right) \end{aligned}$$

$$\dots + \frac{\sin 5x}{25} \left(5x^4 - \frac{12x^2}{5} + \frac{24}{125} \right) + C.$$

*) 利用2067题的结果.

$$2071. \int (1+x^2)^2 \cos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int (1+x^2)^2 \cos x dx &= \int (1+2x^2+x^4) \cos x dx \\ &= \sin x \left[(1+2x^2+x^4) - (4+12x^2)+24 \right] \\ &\quad + \cos x \left[(4x+4x^3) - 24x \right]^*) + C \\ &= (21-10x^2+x^4) \sin x - (20x-4x^3) \cos x + C. \end{aligned}$$

*) 利用2067题的结果.

$$2072. \int x^7 e^{-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^7 e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int (x^2)^3 e^{-x^2} d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} e^{-x^2} \left(\frac{x^6}{-1} - \frac{3x^4}{1} + \frac{6x^2}{-1} - \frac{6}{1} \right)^*) + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 6) + C. \end{aligned}$$

*) 利用2066题的结果.

$$2073. \int x^2 e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int (\sqrt{x})^4 e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) \\ &= 2e^{\sqrt{x}} \left(x^{\frac{5}{2}} - 5x^2 + 20x^{\frac{3}{2}} - 60x + 120x^{\frac{1}{2}} - 120 \right)^*) + C. \end{aligned}$$

*) 利用2066题的结果.

$$2074. \int e^{ax} \cos^2 bx dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int e^{ax} \cos^2 bx dx &= \frac{1}{2} \int e^{ax} (1 + \cos 2bx) dx \\ &= \frac{1}{2a} e^{ax} + \frac{1}{2} e^{ax} \cdot \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{a^2 + 4b^2} + C.\end{aligned}$$

*) 利用1828题的结果.

$$2075. \quad \int e^{ax} \sin^3 bx dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int e^{ax} \sin^3 bx dx &= \int e^{ax} \sin bx \cdot \frac{1 - \cos 2bx}{2} dx \\ &= \int e^{ax} \left(\frac{3}{4} \sin bx - \frac{1}{4} \sin 3bx \right) dx \\ &= \frac{3}{4} e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \\ &\quad - \frac{1}{4} e^{ax} \cdot \frac{a \sin 3bx - 3b \cos 3bx}{a^2 + 9b^2} + C.\end{aligned}$$

*) 利用1829题的结果.

$$2076. \quad \int x e^x \sin x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x e^x \sin x dx &= \int x \sin x d(e^x) \\ &= x e^x \sin x - \int e^x (\sin x + x \cos x) dx \\ &= x e^x \sin x - \int (\sin x + x \cos x) d(e^x) \\ &= e^x (x \sin x - \sin x - x \cos x) \\ &\quad + \int e^x (2 \cos x - x \sin x) dx\end{aligned}$$

$$= e^x(x \sin x - \sin x - x \cos x)$$

$$+ 2 \int e^x \cos x dx - \int x e^x \sin x dx.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int x e^x \sin x dx &= \frac{e^x}{2}(x \sin x - \sin x \\ &\quad - x \cos x) + \int e^x \cos x dx \\ &= \frac{e^x}{2}(x \sin x - \sin x - x \cos x) + \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C \\ &= \frac{e^x}{2}[x(\sin x - \cos x) + \cos x] + C. \end{aligned}$$

*) 利用1828题的结果.

$$2077. \int x^2 e^x \cos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 e^x \cos x dx &= \int x^2 \cos x d(e^x) \\ &= x^2 e^x \cos x - \int e^x (2x \cos x - x^2 \sin x) dx \\ &= x^2 e^x \cos x - \int (2x \cos x - x^2 \sin x) d(e^x) \\ &= x^2 e^x \cos x - e^x (2x \cos x - x^2 \sin x) \\ &\quad + \int e^x (2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x) dx \end{aligned}$$

$$= e^x [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \cos x] + 2 \int e^x \cos x dx \\ - 4 \int x e^x \sin x dx - \int x^2 e^x \cos x dx,$$

于是,

$$\int x^2 e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \cos x] \\ + \int e^x \cos x dx - 2 \int x e^x \sin x dx \\ = \frac{e^x}{2} [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \cos x] + \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)^{*}) \\ - 2 \cdot \frac{e^x}{2} [x (\sin x - \cos x) + \cos x]^{**}) + C \\ = \frac{e^x}{2} [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \sin x \\ + (\sin x - \cos x)] + C.$$

*) 利用1828题的结果.

**) 利用2076题的结果.

2078. $\int x e^x \sin^2 x dx.$

解 $\int x e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int x e^x (1 - \cos 2x) dx \\ = \frac{1}{2} \int x e^x dx - \frac{1}{2} \int x e^x \cos 2x dx \\ = \frac{1}{2} e^x (x - 1) - \frac{1}{2} \int x \cos 2x d(e^x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} e^x (x-1) - \frac{1}{2} x e^x \cos 2x \\
&\quad + \frac{1}{2} \int e^x (\cos 2x - 2x \sin 2x) dx \\
&= \frac{1}{2} e^x (x-1) - \frac{1}{2} x e^x \cos 2x + \frac{e^x}{2} \cdot \frac{\cos 2x + 2 \sin 2x^{**})}{5} \\
&\quad - \int x e^x \sin 2x dx,
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\int x e^x \sin 2x dx = \int x \sin 2x d(e^x) \\
&= x e^x \sin 2x - \int e^x (\sin 2x + 2x \cos 2x) dx \\
&= x e^x \sin 2x - \frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x)^{**}) \\
&\quad - 2 \int x e^x (1 - 2 \sin^2 x) dx \\
&= x e^x \sin 2x - \frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) \\
&\quad - 2(x-1)e^x + 4 \int x e^x \sin^2 x dx.
\end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned}
&\int x e^x \sin^2 x dx = e^x \left[\frac{x-1}{2} - \frac{x}{10} (2 \sin 2x + \cos 2x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{50} (4 \sin 2x - 3 \cos 2x) \right] + C.
\end{aligned}$$

*) 利用1828题的结果.

**) 利用1829题的结果.

$$2079. \int (x - \sin x)^3 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int (x - \sin x)^3 dx \\ &= \int (x^3 - 3x^2 \sin x + 3x \sin^2 x - \sin^3 x) dx \\ &= \frac{x^4}{4} + 3 \int x^2 d(\cos x) + \frac{3}{2} \int x(1 - \cos 2x) dx \\ &\quad + \int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\ &= \frac{x^4}{4} + 3x^2 \cos x - 6 \int x \cos x dx + \frac{3}{4} x^2 \\ &\quad - \frac{3}{4} \int x d(\sin 2x) + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - 6 \int x d(\sin x) - \frac{3}{4} x \sin 2x \\ &\quad + \frac{3}{4} \int \sin 2x dx + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x \\ &\quad - \frac{3}{4} x \sin 2x + \cos x - \frac{3}{8} \cos 2x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - x \left(6 \sin x + \frac{3}{4} \sin 2x \right) \end{aligned}$$

$$-\left(5\cos x + \frac{3}{8}\cos 2x\right) - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

2080. $\int \cos^2 \sqrt{x} dx.$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$. 于是,

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \sqrt{x} dx &= 2 \int t \cos^2 t dt = \int t(1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int t d(\sin 2t) \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t - \frac{1}{2} \int \sin 2t dt \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t + C \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4} \cos(2\sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

2081. 证明若 R 为有理函数及 a_1, a_2, \dots, a_n 为可公度的数, 则积分

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$$

是初等函数.

证 按题意 a_1, a_2, \dots, a_n 为可公度的数, 于是存在一个实数 α , 使得

$$a_1 = k_1 \alpha, a_2 = k_2 \alpha, \dots, a_n = k_n \alpha \quad (\alpha \neq 0),$$

其中 k_1, k_2, \dots, k_n 为整数.

$$\text{设 } e^{\alpha x} = t, \text{ 则 } x = \frac{1}{\alpha} \ln t, \quad dx = \frac{1}{\alpha t} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx \\ &= \frac{1}{a} \int R(t^{k_1}, t^{k_2}, \dots, t^{k_n}) \frac{dt}{t} = \int R^*(t) dt, \end{aligned}$$

其中 $R^*(t)$ 是 t 的有理函数. 因此, 积分

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$$

为初等函数.

求下列积分:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{dx}{(1+e^x)^2} = \int \frac{(1+e^x) - e^x}{(1+e^x)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{1+e^x} - \int \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2} \\ &= \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx - \int \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2} \\ &= x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C. \end{aligned}$$

2083. $\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x} = \int \frac{(e^{2x}-1)+1}{1+e^x} dx \\ &= \int (e^x - 1) dx + \int \frac{1}{1+e^x} dx \end{aligned}$$

$$= e^x - x + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = e^x - \ln(1+e^x) + C.$$

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}.$

解 $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \int \frac{dx}{(e^x + 2)(e^x - 1)}$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{e^x - 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{e^x + 2} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x - 1}\right) dx - \frac{1}{6} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 2}\right) dx$$

$$= -\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln|e^x - 1| - \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2) + C$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \ln|e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2) + C.$$

2085. $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}.$

解 设 $e^{\frac{x}{6}} = t$, 则 $x = 6 \ln t$, $dx = \frac{6}{t} dt$.

代入得

$$\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} = 6 \int \frac{dt}{t(1 + t^3 + t^2 + t)}$$

$$= 6 \int \frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{t+1}{2(t^2+1)} \right] dt \\
&= 6 \ln t - 3 \ln(t+1) - \frac{3}{2} \ln(1+t^2) - 3 \operatorname{arctg} t + C \\
&= x - 3 \ln \left[\left(1 + e^{\frac{x}{6}} \right) \sqrt{1 + e^{\frac{x}{3}}} \right] - 3 \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{x}{6}} \right) + C.
\end{aligned}$$

2086. $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2} dx.$

解 设 $e^{\frac{x}{4}} = t$, 则 $x = 4 \ln t$, $dx = \frac{4}{t} dt$.

代入得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2} dx = 4 \int \frac{1+t^2}{t(1+t)^2} dt \\
&= 4 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{2}{(1+t)^2} \right] dt \\
&= 4 \ln t + \frac{8}{1+t} + C = x + \frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}} + C.
\end{aligned}$$

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} &= \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} \sqrt{1 - (e^{-\frac{x}{2}})^2}} \\
&= -2 \int \frac{d(e^{-\frac{x}{2}})}{\sqrt{1 - (e^{-\frac{x}{2}})^2}}
\end{aligned}$$

$$= -2 \operatorname{arc} \sin \left(e^{-\frac{x}{2}} \right) + C.$$

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx &= \int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx \\ &= \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \\ &= \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}} + \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} \\ &= \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + \operatorname{arc} \sin(e^{-x}) + C. \end{aligned}$$

2089. $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} dx &= \int \frac{e^{2x}+4e^x-1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} dx \\ &= \int \frac{2e^{2x}+4e^x}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} dx \\ &\quad + 2 \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} \\ &= \int \frac{d(e^{2x}+4e^x-1)}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}} + 2 \int \frac{d(e^x+2)}{\sqrt{(e^x+2)^2-5}} \\ &\quad + \int \frac{d(e^{-x}-2)}{\sqrt{5-(e^{-x}-2)^2}} \\ &= \sqrt{e^{2x}+4e^x-1} + 2 \ln(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}) \end{aligned}$$

$$-\arcsin \frac{2e^x-1}{\sqrt{5}e^x} + C.$$

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}.$

解
$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} \\ &= \frac{1}{2} \int e^{-x} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) d(e^{-x}) \\ &= -\frac{e^{-x}}{2} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) \\ & \quad + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{1}{\sqrt{1-e^x}} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) + \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{4} I_2. \end{aligned}$$

对于 $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, 设 $\sqrt{1+e^x} = t$, 则

$$x = \ln(t^2 - 1), \quad dx = \frac{2t dt}{t^2 - 1}.$$

于是,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} \\ &= \ln \frac{t-1}{t+1} + C = \ln \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} + C_1. \end{aligned}$$

对于 $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$, 设 $\sqrt{1-e^x} = t$, 则

$$x = \ln(1-t^2), \quad dx = -\frac{2t dt}{1-t^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}} = -2 \int \frac{dt}{1-t^2} = -\ln \frac{1+t}{1-t} + C_2 \\ &= -\ln \frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}} + C_2. \end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} &= -\frac{e^{-x}}{2} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) \\ &+ \frac{1}{4} \ln \frac{(\sqrt{1+e^x} - 1)(1 - \sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x} + 1)(1 + \sqrt{1-e^x})} + C. \end{aligned}$$

2091. 证明积分

$$\int R(x) e^{ax} dx,$$

(式中 R 为有理函数, 其分母仅有实根) 可用初等函数和超越函数

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = \text{li}(e^{ax}) + C, \quad \text{式中 } \text{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}$$

来表示.

证 因为 R 的分母仅有实根, 所以仅包含形如 $(x-a_i)_{k_i}$ 的因子 ($i=1, 2, \dots, l$). 分解 $R(x)$ 为部分分式得

$$R(x) = P(x) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j},$$

其中 $P(x)$ 为 x 的多项式, A_{ij} 是常系数.

从而积分

$$\begin{aligned} \int R(x) e^{ax} dx &= \int P(x) e^{ax} dx \\ &+ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} \int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j} dx. \end{aligned}$$

上式右端第一个积分显然是初等函数, 而积分

$$\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j} dx$$

可用初等函数和超越函数来表示. 事实上, 设 $x-a_i=t$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j} dx &= \int \frac{e^{a(a_i+t)}}{t^j} dt \\ &= \frac{e^{aa_i}}{1-j} \int e^{at} d\left(-\frac{1}{t^{j-1}}\right) \\ &= \frac{e^{aa_i}}{1-j} e^{at} \cdot \frac{1}{t^{j-1}} - \frac{ae^{aa_i}}{1-j} \int \frac{e^{at}}{t^{j-1}} dt. \end{aligned}$$

这样, 被积函数中分母的次数便降低一次, 再继续运用分部积分法 ($j-2$) 次, 即可得

$$\int \frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j} dx = g_{ij}(x) + B_{ij} \operatorname{li}(e^{a(x-a_i)}),$$

其中 $g_{ij}(x)$ 为 x 的初等函数, B_{ij} 为常数.

因而积分

$$\begin{aligned} \int R(x) e^{ax} dx &= \int P(x) e^{ax} dx \\ &+ \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} g_{ij}(x) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} B_{ij} \operatorname{li}(e^{a(x-a_i)}) \end{aligned}$$

是初等函数与超越函数之和。

2092. 在甚么情形下, 积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx$$

(式中 $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ 及 a_0, a_1, \dots, a_n 为

常数) 为初等函数?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{a_k}{x^k} e^x dx &= -\frac{a_k}{k-1} \cdot \frac{e^x}{x^{k-1}} + \frac{a_k}{k-1} \int \frac{e^x}{x^{k-1}} dx \\ &= \dots = -\frac{a_k}{k-1} \cdot \frac{e^x}{x^{k-1}} - \frac{a_k}{(k-1)(k-2)} \cdot \frac{e^x}{x^{k-2}} - \dots \\ &\quad - \frac{a_k}{(k-1)!} \cdot \frac{e^x}{x} + \frac{a_k}{(k-1)!} \int \frac{e^x}{x} dx, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx &= \int \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} \right) e^x dx = \sum_{k=0}^n \int \frac{a_k}{x^k} dx \\ &= - \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_k}{(k-1)(k-2)\dots(k-j)} \cdot \frac{e^x}{x^{k-j}} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} \int \frac{e^x}{x} dx + a_0 e^x.$$

因而, 若

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} = 0,$$

即

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0,$$

则积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数.

求积分:

2093. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$

解 $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = \int \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x dx$

$$= e^x - 4 \int \frac{e^x}{x} dx + 4 \int e^x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^x - 4 \int \frac{e^x}{x} dx - \frac{4}{x} e^x + 4 \int \frac{e^x}{x} dx$$

$$= e^x \left(1 - \frac{4}{x}\right) + C.$$

2094. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$

解 $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx = -e^{-x} - \int \frac{e^{-x}}{x} dx + C.$

$$2095. \int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \frac{e^{2x}}{(x-2)(x-1)} dx \\ &= \int \frac{e^{2x}}{x-2} dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1} dx \\ &= e^4 \int \frac{e^{2(x-2)} d(x-2)}{x-2} - e^2 \int \frac{e^{2(x-1)} d(x-1)}{x-1} \\ &= e^4 \operatorname{li}(e^{2x-4}) - e^2 \operatorname{li}(e^{2x-2}) + C. \end{aligned}$$

$$2096. \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx &= - \int xe^x d\left(-\frac{1}{x+1}\right) \\ &= -xe^x \frac{1}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C \\ &= \frac{e^x}{x+1} + C. \end{aligned}$$

$$2097. \int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx &= \int (x^2 + 4x + 12)e^{2x} dx \\ &\quad + 32 \int \frac{e^{2x} dx}{x-2} + 16 \int \frac{e^{2x} dx}{(x-2)^2} \\ &= e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4} \right)^* + 32e^4 \operatorname{li}(e^{2x-4}) \\ &\quad - 16 \int e^{2x} d\left(-\frac{1}{x-2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} \right) + 32e^4 \operatorname{li}(e^{2x-4}) \\
&\quad - \frac{16e^{2x}}{x-2} + 32 \int \frac{e^{2x} dx}{x-2} \\
&= \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} - \frac{32}{x-2} \right) + 64e^4 \operatorname{li}(e^{2x-4}) + C.
\end{aligned}$$

*) 利用2066题的结果.

求含有 $\ln f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ 等函数的积分, 其中 $f(x)$ 为代数函数.

2098. $\int \ln^n x dx$ (n 为自然数).

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \ln^n x dx &= x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx \\
&= x \ln^n x - n x \ln^{n-1} x + n(n-1) \int \ln^{n-2} x dx = \dots \\
&= x \left[\ln^n x - n \ln^{n-1} x + n(n-1) \ln^{n-2} x - \dots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{n-1} n! \ln x + (-1)^n n! \right] + C.
\end{aligned}$$

2099. $\int x^3 \ln^3 x dx$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int x^3 \ln^3 x dx &= \frac{1}{4} \int \ln^3 x d(x^4) \\
&= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{4} \int x^3 \ln^2 x dx \\
&= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} \int \ln^2 x d(x^4) \\
&= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{8} \int x^3 \ln x dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16}x^4 \ln^2 x + \frac{3}{32} \int \ln x d(x^4) \\
&= \frac{1}{4}x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16}x^4 \ln^2 x + \frac{3}{32}x^4 \ln x - \frac{3}{32} \int x^3 dx \\
&= \frac{1}{4}x^4 \left(\ln^3 x - \frac{3}{4} \ln^2 x + \frac{3}{8} \ln x - \frac{3}{32} \right) + C.
\end{aligned}$$

2100. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx.$

解
$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx &= -\frac{1}{2} \int \ln^3 x d \left(\frac{1}{x^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x + \frac{3}{2} \int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx \\
&= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4} \int \ln^2 x d \left(\frac{1}{x^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \int \frac{\ln x}{x^3} dx \\
&= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x - \frac{3}{4} \int \ln x d \left(\frac{1}{x^2} \right) \\
&= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x - \frac{3}{4x^2} \ln x + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^3} \\
&= -\frac{1}{2x^2} \left(\ln^3 x + \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x + \frac{3}{4} \right) + C.
\end{aligned}$$

2101. $\int \ln[(x+a)^{x+c}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \ln[(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)} \\
&= \int \frac{\ln(x+a)}{x+b} dx + \int \frac{\ln(x+b)}{x+a} dx \\
&= \int \ln(x+a) d[\ln(x+b)] \\
&\quad + \int \ln(x+b) d[\ln(x+a)] \\
&= \ln(x+a) \ln(x+b) - \int \ln(x+b) d[\ln(x+a)] \\
&\quad + \int \ln(x+b) d[\ln(x+a)] \\
&= \ln(x+a) \ln(x+b) + C.
\end{aligned}$$

$$2102. \quad \int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&\quad - 2 \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx \\
&= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&\quad - 2 \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d(\sqrt{1+x^2}) \\
&= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&\quad - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2 \int dx \\
&= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&\quad - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C.
\end{aligned}$$

$$2103. \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$$

$$\text{解} \quad \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx$$

$$= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \int \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x + C.$$

$$2104. \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \ln x d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

$$2105. \int x \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) dx.$$

$$\text{解} \quad \int x \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + C.$$

$$2106. \int \sqrt{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx &= \frac{2}{3} \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} d\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \\
 &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x} dx \\
 &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\
 &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln(1+x) + C.
 \end{aligned}$$

2107. $\int x \arcsin(1-x) dx.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int x \arcsin(1-x) dx &= \frac{1}{2} \int \arcsin(1-x) d(x^2) \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \arcsin(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx.
 \end{aligned}$$

对于积分 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx$, 设 $1-x=t$, 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx &= - \int \frac{1-2t+t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= \int \frac{-t^2+1}{\sqrt{1-t^2}} dt - 2 \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + 2 \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= \int \sqrt{1-t^2} dt - 2 \arcsin t - 2 \sqrt{1-t^2} \\
 &= \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t - 2 \arcsin t \\
 &\quad - 2 \sqrt{1-t^2} + C_1
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-3-x}{2} \sqrt{2x-x^2} - \frac{3}{2} \arcsin(1-x) + C_1.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int x \arcsin(1-x) dx &= \frac{2x^2-3}{4} \arcsin(1-x) \\ &\quad - \frac{3+x}{4} \sqrt{2x-x^2} + C. \end{aligned}$$

2108. $\int \arcsin \sqrt{x} dx.$

解 $\int \arcsin \sqrt{x} dx = x \arcsin \sqrt{x}$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

对于积分 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$, 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $dx = 2t dt$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx &= 2 \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= -2 \int \sqrt{1-t^2} dt + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= -t \sqrt{1-t^2} - \arcsin t + 2 \arcsin t + C_1 \\ &= \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + C_1. \end{aligned}$$

因而,

$$\int \arcsin \sqrt{x} dx = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C.$$

$$2109. \int x \arccos \frac{1}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \arccos \frac{1}{x} dx &= \frac{1}{2} \int \arccos \frac{1}{x} d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} x) \sqrt{x^2-1} + C. \end{aligned}$$

$$2110. \int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx &= \int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} d(x+1) \\ &= (x+1) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - \operatorname{sgn}(1-x) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= (x+1) \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} - 2\sqrt{x} \operatorname{sgn}(1-x) + C, \end{aligned}$$

其中用到了

$$\begin{aligned} \left(\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right)' &= \frac{1}{(1+x)^2} \left[(1+x) \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x}{(1+x)^2}}} \\ &= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2} \cdot \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+x} \cdot \operatorname{sgn}(1-x) \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$2111. \int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \arccos x d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{1-x^2} \\ &= \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$2112. \int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \arccos x d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{1-x^2} \\ &= \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C. \end{aligned}$$

$$2113. \int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) d(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int x^2 \left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{2x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx + \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\
&\quad - \int x \operatorname{arctg} x dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \int \frac{2x^2 dx}{1+x^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\
&\quad + \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) \\
&\quad + x - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C
\end{aligned}$$

$$= x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \left(\frac{1+x^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{x}{2} \right) \left[\ln(1+x^2) - 1 \right] + C.$$

$$2114. \quad \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx &= \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{1}{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C. \end{aligned}$$

$$2115. \quad \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \ln \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

求含有双曲线函数的积分:

$$2116. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \operatorname{sh}^2 2x dx \\ &= \frac{1}{8} \int \operatorname{sh}^2 2x d(2x) \\ &= -\frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32}^{*)} + C.\end{aligned}$$

*) 利用1761题的结果.

$$2117. \int \operatorname{ch}^4 x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \operatorname{ch}^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{4} \operatorname{ch}^2 2x \right) dx \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 4x \right)^{*)} + C \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x + C.\end{aligned}$$

*) 利用1762题的结果.

$$2118. \int \operatorname{sh}^3 x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \operatorname{sh}^3 x dx &= \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh} x dx = \int (\operatorname{ch}^2 x - 1) d(\operatorname{ch} x) \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{ch} x + C.\end{aligned}$$

$$2119. \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x dx \\ &= \int \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 4x - \operatorname{ch} 2x) \operatorname{sh} 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 4x \operatorname{sh} 2x dx - \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 2x dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\operatorname{sh} 6x - \operatorname{sh} 2x) dx - \frac{1}{4} \int \operatorname{sh} 4x dx \\ &= \frac{1}{24} \operatorname{ch} 6x - \frac{1}{16} \operatorname{ch} 4x - \frac{1}{8} \operatorname{ch} 2x + C. \end{aligned}$$

$$2120. \int \operatorname{th} x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{th} x dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \ln(\operatorname{ch} x) + C.$$

$$2121. \int \operatorname{cth}^2 x dx$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \operatorname{cth}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx \\ &= x - \operatorname{cth} x + C. \end{aligned}$$

$$2122. \int \sqrt{\operatorname{th} x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \sqrt{\operatorname{th} x} dx = \int \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{e^{2x} - e^{-2x}}} dx \\ &= \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} - 1}} - \int \frac{e^{-2x} dx}{\sqrt{1 - e^{-4x}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x})}{\sqrt{(e^{2x})^2 - 1}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{-2x})}{\sqrt{1 - (e^{-2x})^2}} \\
&= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + \frac{1}{2} \arcsin(e^{-2x}) + C.
\end{aligned}$$

2123. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x}.$

解 设 $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$, 则

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$x = \ln \frac{1+t}{1-t}, \quad dx = \frac{2}{1-t^2} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x} &= \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1 + 2 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

2124. $\int \operatorname{sh} ax \sin bx dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \operatorname{sh} ax \sin bx dx &= \frac{1}{2} \int e^{ax} \sin bx dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int e^{-ax} \sin bx dx \\
&= \frac{1}{2} e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}^{*)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} e^{-ax} \cdot \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2}^{*)} + C \\
& = \frac{a \operatorname{ch} ax \cdot \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cdot \cos bx}{a^2 + b^2} + C.
\end{aligned}$$

*) 利用1829题的结果。

$$2125. \int \operatorname{sh} ax \cos bxdx.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \operatorname{sh} ax \cos bxdx &= \frac{1}{2} \int e^{ax} \cos bxdx \\
& - \frac{1}{2} \int e^{-ax} \cos bxdx \\
&= \frac{1}{2} e^{ax} \cdot \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2}^{*)} \\
& + \frac{1}{2} e^{-ax} \cdot \frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2 + b^2}^{*)} + C \\
&= \frac{a \operatorname{ch} ax \cdot \cos bx + b \operatorname{sh} ax \cdot \sin bx}{a^2 + b^2} + C.
\end{aligned}$$

*) 利用1828题的结果。

§6. 函数的积分法的各种例子

求积分:

$$2126. \int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} &= \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^6(1+x^2)} dx \\
&= \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} \\
&= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(1+x^2)} dx \\
&= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{x^2}{x^4(1+x^2)} dx \\
&= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

$$2127. \quad \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3} &= \int \frac{(x^2-1)+1}{(1-x^2)^3} dx \\
&= - \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2-1)^3} \\
&= - \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \left[\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} \right]^{**} \\
&= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} + \frac{x}{4(1-x^2)^2} \\
&= -\frac{1}{4} \left\{ -\frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-1} \right\} + \frac{x}{4(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

*) 利用1921题的递推公式.

$$2128. \int \frac{dx}{1+x^4+x^8}.$$

解 因为

$$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1),$$

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

$$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1),$$

所以

$$\frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} - \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} \right),$$

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} \right),$$

$$\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^4+x^8} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1} dx \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[\ln(x^2 + x\sqrt{3} + 1) \right. \\
&\quad \left. - \ln(x^2 - x\sqrt{3} + 1) \right] + C, \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + C.
\end{aligned}$$

2129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

解 设 $\sqrt[6]{x} = t$, 则

$$\sqrt{x} = t^3, \quad \sqrt[3]{x} = t^2, \quad dx = 6t^5 dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= 6 \int \frac{t^5 dt}{t+1} \\
&= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(1+t) + C \\
&= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) \\
&\quad + C \quad (x > 0).
\end{aligned}$$

2130. $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$

解 设 $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$, 则

$$x = \frac{1}{1+t^2} \quad dx = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx &= -2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^4} \\ &= -2 \left[\frac{t}{6(t^2+1)^3} + \frac{5t}{24(t^2+1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5t}{16(t^2+1)} + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} t \right]^{**} + C_1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}$$

$$+ \frac{5}{8} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + C_1$$

$$= -\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}$$

$$+ \frac{5}{8} \operatorname{arcsin} \sqrt{x} + C \quad (0 < x < 1).$$

*) 利用1921题的递推公式。

$$2131. \int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx.$$

解 设 $x = \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \cos t dt$.

代入得

$$\int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin t + 2}{\sin^2 t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dt}{\sin t} + 2 \int \frac{dt}{\sin^2 t} \\
&= \ln |\csc t - \operatorname{ctg} t| - 2 \operatorname{ctg} t + C \\
&= -\ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x} + C \quad (0 < |x| < 1).
\end{aligned}$$

2132. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx.$

解 设 $\sqrt{1-x\sqrt{x}} = t$, 则

$$x = (1-t^2)^{\frac{2}{3}}, \quad dx = -\frac{4}{3}t(1-t^2)^{-\frac{1}{3}}dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx &= -\frac{4}{3} \int dt = -\frac{4}{3}t + C \\
&= -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C \quad (0 < x < 1).
\end{aligned}$$

2133. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

解 设 $\sqrt{1+x^2} = t$, 则 $x^2 = t^2 - 1$, $xdx = tdt$. 代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int (t^2 - 1)^2 dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt \\
&= \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C \\
&= \frac{1}{15}(8 - 4x^2 + 3x^4)\sqrt{1+x^2} + C.
\end{aligned}$$

$$2134. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

解 设 $\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{t^3+1}$, $dx = -\frac{3t^2}{(t^3+1)^2} dt$.

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} &= -3 \int \frac{t}{t^3+1} dt \\ &= \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt \\ &= \ln|t+1| - \frac{1}{2} \int \frac{2t-1}{t^2-2t+1} dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2-t+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) + C, \end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$.

$$2135. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}} &= \int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^{-3}+x^{-3}+1}} \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{d\left(x^{-3} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^{-3} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\ &= -\frac{1}{3} \ln \left| x^{-3} + \frac{1}{2} + \sqrt{x^{-6} + x^{-3} + 1} \right| + C_1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{2+x^3+2\sqrt{x^4+x^3+1}}{x^3} \right| + C.$$

注 以上实际已设 $x > 0$ 。对于 $x < 0$ ，利用1856题的方法可得同一结果。

$$2136. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-2x^{-2}-x^{-4}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}} \right) + C_1$$

$$= -\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}} \right) + C_1$$

$$= \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}} \right) + C.$$

$$2137. \int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{(1+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})} dx$$

$$= \int \frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{x} - x - 2 \int \sqrt{1-x^2} d\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{2}{x} - x - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= -\frac{2+x^2}{x} - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - 2 \arcsin x + C.
\end{aligned}$$

2138. $\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}} &= \int \frac{(1+x)(x-\sqrt{x+x^2})}{(x+\sqrt{x+x^2})(x-\sqrt{x+x^2})} dx \\
&= \int \frac{x+x^2-\sqrt{x+x^2}-x\sqrt{x+x^2}}{-x} dx \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} dx + \int \sqrt{x+x^2} dx \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + 2 \int \sqrt{1+(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) \\
&\quad + \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} d\left(x+\frac{1}{2}\right) \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x} + \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) \\
&\quad + \frac{2x+1}{4} \sqrt{x+x^2} - \frac{1}{8} \ln\left(x+\frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2}\right) + C_1 \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5+2x}{4} \sqrt{x+x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \ln(2x+1+2\sqrt{x+x^2}) \\
& - \frac{1}{8} \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right) + C_1 \\
& = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2} \\
& + \frac{3}{8} \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right) + C,
\end{aligned}$$

其中设 $x > 0$ ，对于 $x < -1$ ，同样可获得上述结果，但要注意加对数中的绝对值。

2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx = - \int \ln(1+x+x^2) d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\
& = -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \int \frac{2x+1}{(x+1)(1+x+x^2)} dx \\
& = -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \int \left(\frac{x+2}{1+x+x^2} - \frac{1}{1+x}\right) dx \\
& = -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x+1}{1+x+x^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{1+x+x^2}\right) dx - \ln|1+x| \\
& = -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \frac{1}{2} \ln(1+x+x^2)
\end{aligned}$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) - \ln|1+x| + C$$

$$= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}$$

$$+ \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

2140. $\int (2x+3) \arccos(2x-3) dx,$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int (2x+3) \arccos(2x-3) dx \\ &= \int \arccos(2x-3) d(x^2+3x) \\ &= (x^2+3x) \arccos(2x-3) + \int \frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}} dx \\ &= (x^2+3x) \arccos(2x-3) - \int \sqrt{-x^2+3x-2} dx \\ &\quad - 3 \int \frac{-2x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}} dx + 7 \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} \\ &= (x^2+3x) \arccos(2x-3) \\ &\quad - \int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2} d\left(x-\frac{3}{2}\right) \\ &\quad - 6\sqrt{-x^2+3x-2} + 7 \int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$= (x^2 + 3x) \arccos(2x-3)$$

$$- \frac{2x-3}{4} \sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$- \frac{1}{8} \arcsin(2x-3) - 6 \sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$- 7 \arccos(2x-3) + C_1$$

$$= \left(x^2 + 3x - \frac{55}{8}\right) \arccos(2x-3)$$

$$- \frac{2x+21}{4} \sqrt{-x^2+3x-2} + C \quad (1 < x < 2).$$

$$2141. \quad \int x \ln(4+x^4) dx.$$

$$\text{解} \quad \int x \ln(4+x^4) dx = \frac{1}{2} \int \ln(4+x^4) d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(4+x^4) - 2 \int \frac{x^6}{4+x^4} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(4+x^4) - 2 \int \left(x - \frac{4x}{4+x^4} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(4+x^4) - x^2 + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{2} \right) + C.$$

$$2142. \quad \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= (\operatorname{sgn} x) \int \frac{\arcsin x dx}{x^3 \sqrt{x^{-2}-1}} + \int \arcsin x d(\arcsin x) \\
&= -(\operatorname{sgn} x) \int \arcsin x d(\sqrt{x^{-2}-1}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 \\
&= -(\operatorname{sgn} x) \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} \arcsin x - \int \frac{dx}{|x|} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 \\
&= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 \\
&= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \ln|x| \\
&\quad + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C \quad (0 < |x| < 1) .
\end{aligned}$$

2143. $\int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx .$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
&= \int \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) d(1 + \sqrt{1+x^2}) \\
&= (1 + \sqrt{1+x^2}) \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

$$= (1 + \sqrt{1+x^2}) \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$2144. \int x\sqrt{x^2+1} \ln\sqrt{x^2-1} dx.$$

$$\text{解} \quad \int x\sqrt{x^2+1} \ln\sqrt{x^2-1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \ln\sqrt{x^2-1} d[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}]$$

$$= \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \ln\sqrt{x^2-1}$$

$$- \frac{1}{3} \int (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{x^2-1} dx,$$

对于右端的积分, 设 $\sqrt{x^2+1} = t$, 则 $x^2+1 = t^2$, $xdx = tdt$. 于是,

$$- \frac{1}{3} \int (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \frac{xdx}{x^2-1} = - \frac{1}{3} \int \frac{t^4 dt}{t^2-2}$$

$$= - \frac{1}{3} \int \left(t^2 + 2 + \frac{4}{t^2-2} \right) dt$$

$$= - \frac{1}{9} t^3 - \frac{2}{3} t - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C$$

$$= - \frac{x^2+7}{9} \sqrt{1+x^2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}} + C.$$

最后得到

$$\int x\sqrt{x^2+1} \ln\sqrt{x^2-1} dx$$

$$= \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \ln\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2+7}{9} \sqrt{1+x^2}$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}} + C \quad (|x| \geq 1).$$

$$2145^+. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= - \int \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{1-x^2}) \\ &= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx. \end{aligned}$$

右端的积分

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx = \int \frac{(1-x^2)(2-x)}{x(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{2+x-x^2}{x\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -2 \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \\ &= -2 \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right| + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1 \\ &= -2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1. \end{aligned}$$

于是,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} \right) \sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \\ + \frac{1}{2} \arcsin x + C \quad (0 < x < 1).$$

2146. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$

解 设 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, 不妨限制 $-\pi < x < \pi$, 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(1+t+t^2) - \frac{1}{2}(2t+1) + \frac{1}{2}}{(1+t+t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t+t^2} - \frac{1}{4} \int \frac{(2t+1)dt}{(1+t+t^2)^2} \\ &\quad + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1+t+t^2)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{4(1+t+t^2)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{2t+1}{3(1+t+t^2)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \right] + C_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{\frac{2}{3}}} \arctg \left(-\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \right) + \frac{\cos x}{3(2+\sin x)}^{**}) + C.$$

*) 利用1921题的递推公式.

$$**) \frac{1}{4(1+t+t^2)} + \frac{2t+1}{12(1+t+t^2)} = \frac{t+2}{6(1+t+t^2)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin x + 1 + \cos x}{\frac{1}{2} \sin x + 1} = \frac{1}{6} + \frac{\cos x}{3(2 + \sin x)}. \end{aligned}$$

$$2147^+. \int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$$

$$\text{解} \quad \sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x$$

$$= [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x]^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x$$

$$= \frac{1}{8} (\sin^4 2x - 8\sin^2 2x + 8).$$

$$= \frac{1}{8} (\sin^2 2x - 4 - 2\sqrt{2})(\sin^2 2x - 4 + 2\sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{32} (\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}) (\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}).$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx \\ &= 32 \cdot \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[\int \frac{\sin 4x}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} dx \right. \\ & \quad \left. - \int \frac{\sin 4x}{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}} dx \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2})}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2})}{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

$$2148. \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}.$$

解 设 $1 + \cos x = t^2$, 并限制 $t > 0$, 则

$$\sin x = t\sqrt{2-t^2}, \quad dx = -\frac{2}{\sqrt{2-t^2}} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}} &= - \int \frac{2dt}{t^2(2-t^2)} \\ &= - \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2-t^2} \right) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}} + C.$$

$$2149. \int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx &= \int \left(a - \frac{a-b}{x^2+1} \right) \operatorname{arctg} x dx \\ &= ax \operatorname{arctg} x - a \int \frac{x dx}{1+x^2} - \frac{a-b}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 \\ &= a \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] - \frac{a-b}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + C. \end{aligned}$$

$$2150. \int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{ax^2+b}{x^2-1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx \\ &= \int \left(a + \frac{a+b}{x^2-1} \right) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx \\ &= ax \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - a \int \frac{2x dx}{x^2-1} \\ &\quad + \frac{a+b}{2} \int \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| d \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \\ &= a \left(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln |x^2-1| \right) + \frac{a+b}{4} \ln^2 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$2151. \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

$$2152. \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \operatorname{arctg} x d(\sqrt{1+x^2}) \\ &= \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

$$2153^+. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}} &= -\int \frac{d(1+\cos 2x)}{\sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}} \\ &= -\ln(1+\cos 2x + \sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}) + C_1 \\ &= -\ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}) + C. \end{aligned}$$

$$2154. \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int x^2 \arccos x d(\sqrt{1-x^2}) \\
 &= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x \\
 &\quad + \int \sqrt{1-x^2} \left(2x \arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
 &= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x \\
 &\quad - \frac{2}{3} \int \arccos x d\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right] - \int x^2 dx \\
 &= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x \\
 &\quad - \frac{2}{3} \int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3} x^3 \\
 &= -x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x - \frac{2}{3} x \\
 &\quad + \frac{2}{9} x^3 - \frac{1}{3} x^3 + C \\
 &= -\frac{6x+x^3}{9} - \frac{2+x^2}{3} \sqrt{1-x^2} \arccos x + C.
 \end{aligned}$$

$$2155. \int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) \operatorname{arctg} x dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \int \operatorname{arctg} x d(x^3) - \int \operatorname{arctg} x dx \\
&\quad + \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) \\
&= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{1+x^2} - x \operatorname{arctg} x \\
&\quad + \int \frac{x dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 \\
&= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx - x \operatorname{arctg} x \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 \\
&= \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) - x \operatorname{arctg} x \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + C \\
&= -\frac{1}{6} x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \operatorname{arctg} x \\
&\quad + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + \frac{2}{3} \ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}$$

2156. $\int \frac{x \operatorname{arccotg} x}{(1+x^2)^2} dx.$

解 $\int \frac{x \operatorname{arccotg} x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \operatorname{arccotg} x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$$= -\frac{\operatorname{arccotg} x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \left[\frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right]^{**} + C$$

$$= -\frac{1-x^2}{4(1+x^2)} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(1+x^2)} + C.$$

*) 利用1921题的递推公式.

$$2157^+. \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2(1-x^2)} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

对于右端积分设 $x = \operatorname{tg} t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$\sqrt{1+x^2} = \sec t, \quad dx = \sec^2 t dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\sec t dt}{1-\operatorname{tg}^2 t} \\ &= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}} \right| + C, \end{aligned}$$

因而,

$$\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} \\ + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}} \right| + C.$$

2158. $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$

解 $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = x\sqrt{1-x^2} \arcsin x$
 $- \int x \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \right) dx$
 $= x\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{2}$
 $- \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 $= x\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2$
 $- \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx,$

于是,

$$\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx \\ = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 \\ + C \quad (|x| < 1).$$

$$2159. \int x(1+x^2)\operatorname{arc\,ctg} x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & \int x(1+x^2)\operatorname{arc\,ctg} x dx \\ &= \frac{1}{4} \int \operatorname{arc\,ctg} x d[(1+x^2)^2] \\ &= \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arc\,ctg} x + \frac{1}{4} \int (1+x^2) dx \\ &= \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arc\,ctg} x + \frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + C.\end{aligned}$$

$$2160. \int x^x(1+\ln x) dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & \int x^x(1+\ln x) dx = \int e^{x \ln x}(1+\ln x) dx \\ &= \int e^{x \ln x} d(x \ln x) \\ &= e^{x \ln x} + C = x^x + C \quad (x > 0).\end{aligned}$$

$$2161. \int \frac{\operatorname{arc\,sine}^x}{e^x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & \int \frac{\operatorname{arc\,sine}^x}{e^x} dx = - \int \operatorname{arc\,sine}^x d(e^{-x}) \\ &= -e^{-x} \operatorname{arc\,sine}^x + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} \\ &= -e^{-x} \operatorname{arc\,sine}^x - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}} \\ &= -e^{-x} \operatorname{arc\,sine}^x - \ln(e^{-x} + \sqrt{(e^{-x})^2-1}) + C\end{aligned}$$

$$= x - e^{-x} \operatorname{arcsin} e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}) + C \quad (x < 0).$$

$$2162. \quad \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx = \int \left(e^{-\frac{x}{2}} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x} \right) \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$= -2 \int \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} d(e^{-\frac{x}{2}})$$

$$- 2 \int \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} d(\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}})$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} + \int \frac{dx}{1+e^x} - (\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}})^2$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx - (\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}})^2$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}} + x - \ln(1+e^x) - (\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}})^2 + C.$$

$$2163. \quad \int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2 - (e^{x-1}+1)^2}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2 - (e^{x-1}+1)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{(e^{x+1} - e^{x-1})(e^{x+1} + e^{x-1} - 2)}$$

$$= \int \frac{dx}{e^{2x}(e - e^{-1})(e + e^{-1} + 2e^{-x})}$$

$$= \int \frac{dx}{e^{2x} \cdot 2\operatorname{sh} 1 \cdot (2\operatorname{ch} 1 + 2e^{-x})}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dx}{4e^x \operatorname{sh} 1 \cdot (1 + e^x \operatorname{ch} 1)} \\
&= \frac{1}{4 \operatorname{sh} 1} \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{\operatorname{ch} 1}{1 + e^x \operatorname{ch} 1} \right) dx \\
&= -\frac{e^{-x}}{4 \operatorname{sh} 1} - \frac{\operatorname{ch} 1}{4 \operatorname{sh} 1} \int \left(1 - \frac{e^x \operatorname{ch} 1}{1 + e^x \operatorname{ch} 1} \right) dx \\
&= -\frac{e^{-x}}{4 \operatorname{sh} 1} - \frac{\operatorname{cth} 1}{4} (x - \ln(1 + e^x \operatorname{ch} 1)) + C.
\end{aligned}$$

2164. $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx = \int \frac{\operatorname{th}^2 x + 1}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}} dx \\
&= \int \frac{\frac{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}} dx \\
&= \int \frac{2 \operatorname{ch}^2 x - 1}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}} d(\operatorname{th} x) \\
&= 2 \int \frac{\operatorname{ch}^2 x d(\operatorname{th} x)}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}} - \int \frac{d(\operatorname{th} x)}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}} \\
&= 2 \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}} - \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) \\
&= 2 \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}} - \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) \\
&= \sqrt{2} \int \frac{d(\sqrt{2} \operatorname{sh} x)}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{sh}^2 x}} - \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) \\
&= \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} \operatorname{sh} x + \sqrt{1 + 2 \operatorname{sh}^2 x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) + C \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} - \sqrt{2} \operatorname{th} x} \\
& - \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) + C.
\end{aligned}$$

2165. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx &= \int \left(\frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right) e^x dx \\
&= \int \frac{e^x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx \\
&= \int e^x d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} d(e^x) \\
&= e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} d e^x + \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} d(e^x) \\
&= e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

2166. $\int |x| dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int |x| dx &= (\operatorname{sgn} x) \int x dx \\
&= (\operatorname{sgn} x) \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{x|x|}{2} + C.
\end{aligned}$$

2167. $\int x|x| dx.$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x|x|dx &= (\operatorname{sgn} x) \int x^2 dx \\ &= (\operatorname{sgn} x) \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^2|x|}{3} + C.\end{aligned}$$

$$2163. \quad \int (x + |x|)^2 dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int (x + |x|)^2 dx &= \int (x^2 + 2x|x| + x^2) dx \\ &= \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2|x|}{3} + C = \frac{2x^2}{3}(x + |x|) + C.\end{aligned}$$

$$2169. \quad \int (|1+x| - |1-x|) dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int (|1+x| - |1-x|) dx &= \int |1+x| d(1+x) - \int |1-x| d(1-x) \\ &= \frac{(1+x)|1+x|}{2} + \frac{(1-x)|1-x|}{2} + C.\end{aligned}$$

*) 利用2166题的结果.

$$2170. \quad \int e^{-|x|} dx.$$

$$\text{解} \quad \text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } \int e^{-|x|} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_1,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } \int e^{-|x|} dx = \int e^x dx = e^x + C_2.$$

由于 $e^{-|x|}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故其原函数必在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微, 而且任意两个原函数之间差一常数. 今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$. 由上

述知, 必有

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + C_1, & x \geq 0, \\ e^x + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 由于 $0 = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$,

即 $0 = -1 + C_1 = 1 + C_2$, 因此 $C_1 = 1, C_2 = -1$, 从而

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0, \\ e^x - 1, & x < 0. \end{cases}$$

所以,

$$\int e^{-|x|} dx = \begin{cases} 1 - e^{-x} + C, & x \geq 0, \\ e^x - 1 + C, & x < 0. \end{cases}$$

2171. $\int \max(1, x^2) dx.$

解 仿上题, 当 $|x| \leq 1$ 时,

$$\int \max(1, x^2) dx = \int dx = x + C_1;$$

当 $x > 1$ 时, $\int \max(1, x^2) dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2,$

当 $x < -1$ 时, $\int \max(1, x^2) dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_3.$

今求满足 $F(1) = 1$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & x > 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x < -1. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 是三个常数. 由于 $1 = F(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} F(x)$,

即 $1 = 1 + C_1 = \frac{1}{3} + C_2$, 故 $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{2}{3}$. 再由 $F(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-0} F(x)$, 得 $-1 = -\frac{1}{3} + C_3$, 故 $C_3 = -\frac{2}{3}$. 由此可知

$$F(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}, & x > 1, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}, & x < -1. \end{cases}$$

最后得

$$\begin{aligned} & \int \max(1, x^2) dx \\ &= \begin{cases} x + C, & |x| \leq 1; \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x + C, & |x| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2172. $\int \varphi(x) dx$, 其中 $\varphi(x)$ 为数 x 至其最接近的整数之距离.

解 显然 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故其原函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微. 今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数. 由于

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - n, & \text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{2} \text{ 时,} \\ -x + n + 1, & \text{当 } n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

故

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - nx + C_n, & \text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{2} \text{ 时;} \\ -\frac{x^2}{2} + (n+1)x + C'_n, & \text{当 } n + \frac{1}{2} \leq x < n+1 \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 C_n, C'_n 是两个常数。由 $\lim_{x \rightarrow (n+\frac{1}{2})-0} F(x) = F(n+\frac{1}{2})$,

$$\text{得 } C'_n = C_n - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

故

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - nx + C_n, & \text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{2} \text{ 时;} \\ -\frac{x^2}{2} + (n+1)x - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + C_n, & \text{当 } n + \frac{1}{2} \leq x < n+1 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow (n+1)-0} F(x) = F(n+1)$$

$$\text{得递推公式 } C_{n+1} = C_n + n + \frac{3}{4}.$$

$$\text{显然 } 0 = F(0) = C_0. \text{ 由此得 } C_n = \frac{1}{4}n(2n+1).$$

于是

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - nx + \frac{1}{4}n(2n+1) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\left(x - n - \frac{1}{2}\right) \\ \quad \cdot \left[1 - 2\left(\frac{1}{2} - x + n\right)\right], & \text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{2} \text{ 时;} \\ -\frac{x^2}{2} + (n+1)x - \frac{1}{4}(2n+1)(n+1) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \\ \quad \cdot \left(x - n - \frac{1}{2}\right) \left[1 - 2\left(x - n - \frac{1}{2}\right)\right], \\ \quad \text{当 } n + \frac{1}{2} \leq x < n+1 \text{ 时.} \end{cases}$$

记 $\{x\} = x - [x]$ 表数 x 去掉其整数部分 $[x]$ 后所剩下的零头部分, 那么最后得 $F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left\{ 1 - 2 \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right| \right\} (-\infty < x < +\infty)$.

故

$$\int \varphi(x) dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left\{ 1 - 2 \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right| \right\} + C \quad (-\infty < x < +\infty).$$

2173. $\int [x] |\sin \pi x| dx \quad (x \geq 0).$

解 分别求出在区间 $(0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, \dots , $[[x], x)$ 上满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$ 的增量如下:

在 $(0, 1)$ 上, $\int 0 \cdot \sin \pi x dx = C_1, F(1) - F(0) = 0;$

在 $[1, 2)$ 上, $-\int \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi} \cos \pi x + C_2, F(2) - F(1) = \frac{2}{\pi};$

在 $[2, 3)$ 上, $2 \int \sin \pi x dx = -\frac{2}{\pi} \cos \pi x + C_3, F(3) - F(2) = \frac{2 \cdot 2}{\pi}; \dots\dots$

在 $[[x], x)$ 上, $(-1)^{[x]} [x] \int \sin \pi x dx = (-1)^{[x]}$

$$\cdot [x] \left(-\frac{1}{\pi} \right) \cos \pi x + C_{[x]+1},$$

$$F(x) - F([x]) = \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x).$$

从而, 对于 $x \geqslant 0$, 得到

$$\begin{aligned} \int [x] |\sin \pi x| dx &= F(x) + C = (F(1) - F(0)) \\ &\quad + (F(2) - F(1)) + (F(3) - F(2)) + \cdots \\ &\quad + \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x) + C \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2 \cdot 2}{\pi} + \cdots + \frac{2([x] - 1)}{\pi} \\ &\quad + \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x) + C \\ &= \frac{[x] \cdot ([x] - 1)}{\pi} + \frac{(-1)^{[x]} \cdot [x] \cdot (-1)^{[x]}}{\pi} \\ &\quad - \frac{(-1)^{[x]} \cdot [x] \cdot \cos \pi x}{\pi} + C \\ &= \frac{[x]}{\pi} ([x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x) + C. \end{aligned}$$

2174. $\int f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{当 } |x| \leqslant 1, \\ 1-|x|, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$

解 当 $|x| \leqslant 1$ 时,

$$\int f(x) dx = \int (1-x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} + C_1;$$

$$\begin{aligned}\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } \int f(x) dx &= \int (1 - |x|) dx \\ &= x - \frac{x|x|}{2} + C_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{当 } x \leq -1 \text{ 时, } \int f(x) dx &= \int (1 - |x|) dx \\ &= x - \frac{x|x|}{2} + C_3.\end{aligned}$$

今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} F(x) = F(1)$, $\lim_{x \rightarrow -1-0} F(x) = F(-1)$, 仿2171题, 可得

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3}, & |x| \leq 1; \\ x - \frac{x|x|}{2} + \frac{1}{6}, & x \geq 1; \\ x - \frac{x|x|}{2} - \frac{1}{6}, & x \leq -1. \end{cases}$$

于是

$$\int f(x) dx = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + C, & |x| \leq 1; \\ x - \frac{x|x|}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{sgn} x + C, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

2175. $\int f(x) dx$, 式中

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } -\infty < x < 0; \\ x+1, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ 2x, & \text{若 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

解 当 $-\infty < x < 0$ 时,

$$\int f(x)dx = \int dx = x + C_1,$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\int f(x)dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C_2,$$

当 $1 < x < +\infty$ 时,

$$\int f(x)dx = \int 2x dx = x^2 + C_3.$$

今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow 0-0} F(x) = F(0)$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} F(x) = F(1)$, 仿 2171 题,

可得

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x < 0 \text{ 时;} \\ \frac{x^2}{2} + x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时;} \\ x^2 + \frac{1}{2}, & \text{当 } 1 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

故

$$\int f(x)dx = \begin{cases} x + C, & \text{当 } -\infty < x < 0 \text{ 时;} \\ \frac{x^2}{2} + x + C, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时;} \\ x^2 + \frac{1}{2} + C, & \text{当 } 1 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

2176. 求 $\int x f''(x) dx$.

$$\text{解}^* \quad \int x f''(x) dx = \int x d[f'(x)] = x f'(x)$$

$$-\int f'(x)dx = xf'(x) - f(x) + C.$$

2177. 求 $\int f'(2x)dx$.

$$\text{解}^* \quad \int f'(2x)dx = \frac{1}{2} \int f'(2x)d(2x) = \frac{1}{2}f(2x) + C.$$

* 这里暗中分别假定了被积函数 f'' , f' 是连续的.

2178. 设 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$), 求 $f(x)$.

$$\text{解} \quad \text{由 } f'(x^2) = \frac{1}{x}, \text{ 得 } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

于是,

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

2179. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 求 $f(x)$.

$$\text{解} \quad \text{由 } f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ 得 } f'(x) = 1 - x.$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (1-x)dx \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + C \quad (|x| \leq 1). \end{aligned}$$

2180. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 < x \leq 1; \\ x, & \text{当 } 1 < x < +\infty \end{cases}$

及 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$.

解 设 $t = \ln x$, 则

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \leq 0, \\ e^t, & 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

于是,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \begin{cases} x + C_1, & -\infty < x \leq 0; \\ e^x + C_2, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 由假定 $f(0) = 0$, 得 $C_1 = 0$.

再由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性, 知 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, 由

此得 $C_2 = -1$.

于是

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x \leq 0 \text{ 时;} \\ e^x - 1, & \text{当 } 0 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

第四章 定 积 分

§1. 定积分作为和的极限

1° 黎曼积分的意义 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 则数

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1)$$

(式中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分.

极限 (1) 存在的必要而且充分的条件为: 积分下和

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

及积分上和
$$\overline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

当 $|\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时有共同的极限, 其中

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \quad \text{及} \quad M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

若等式 (1) 右端的极限存在, 则函数 $f(x)$ 称为在对应的区间上可积分 (常义的). 特殊情形: (a) 连续函数, (b) 具有有穷个不连续点的有界函数, (c) 单调有界的函数, —— 在任意的有穷闭区间上为可积分的.

2° 可积分的条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

式中 ω_i 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅, 上述等式成立为函数 $f(x)$ 于已知闭区间 $[a, b]$ 上可积分的充要条件.

2181. 把区间 $[-1, 4]$ 分为 n 个相等的子区间, 并取这些子区间中点的坐标作自变量 ξ_i 的值($i=0, 1, \dots, n-1$), 求函数 $f(x)=1+x$ 在此区间上的积分和 S_n .

解 每一个子区间的长为 $\frac{5}{n}$, 第 i 个子区间为 $(-1 +$

$\frac{5i}{n}, -1 + \frac{5i}{n} + \frac{5}{n})$, 其中点 $\xi_i = -1 + (i + \frac{1}{2})$

$\cdot \frac{5}{n}$, 于是, 所求的积分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ 1 + \left[-1 + \left(i + \frac{1}{2} \right) \frac{5}{n} \right] \right\} \cdot \frac{5}{n} \\ &= \frac{25}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(i + \frac{1}{2} \right) = 12 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2182. 设

$$(a) f(x) = x^3 \quad [-2 \leq x \leq 3];$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x} \quad [0 \leq x \leq 1];$$

$$(B) f(x) = 2^x \quad [0 \leq x \leq 10].$$

把相应区间等分成 n 份, 求给定函数 $f(x)$ 在相应区间上的积分下和 \underline{S}_n 及积分上和 \overline{S}_n .

解 (a) 把区间 $[-2, 3]$ n 等分, 则每一个子区间的

长为 $h = \frac{5}{n}$, 且第 i 个子区间为

$$[-2 + ih, -2 + (i+1)h] \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

若令 m_i 及 M_i 分别表示函数 $f(x)$ 在第 i 个子区间上的下确界及上确界, 则因 $f(x) = x^3$ 为增函数, 所以

$$m_i = (-2 + ih)^3,$$

$$M_i = [-2 + (i+1)h]^3 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

于是,

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (-2 + ih)^3 h \\ &= -8nh + 12h^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i - 6h^3 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + h^4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\ &= -40 + \frac{12 \cdot 25n(n-1)}{2n^2} - \frac{125(2n^3 - 3n^2 + n)}{n^3} \\ &\quad + \frac{625(n^4 - 2n^3 + n^2)}{4n^4} \\ &= \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_n &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [-2 + (i+1)h]^3 \\ &= \frac{65}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{12}{4n^2}. \end{aligned}$$

$$(6) \quad h = \frac{1}{n},$$

$$m_i = \sqrt{\frac{i}{n}},$$

$$M_i = \sqrt{\frac{i+1}{n}} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

于是,

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}};$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{i+1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}.$$

$$(B) \quad h = \frac{10}{n},$$

$$m_i = 2^{ih},$$

$$M_i = 2^{(i+1)h} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

于是,

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} h 2^{ih} = \frac{h(2^{nh} - 1)}{2^h - 1} = \frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)};$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} h 2^{(i+1)h} = \frac{h 2^h (2^{nh} - 1)}{2^h - 1}$$

$$= \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}.$$

2183. 分闭区间 $[1, 2]$ 为 n 份;使这分点的横坐标构成一等比级数*),以求函数 $f(x)=x^4$ 在 $[1, 2]$ 上的积分下和.当 $n \rightarrow \infty$ 时此和的极限等于甚么?

解 设 $\sqrt[n]{2}=q$ 或 $2=q^n$,分点为

$$1=q^0 < q^1 < q^2 < \dots < q^n=2.$$

由于 $f(x)=x^4$ 在 $[1, 2]$ 上为增函数,故积分下和为

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_n &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [(q^i)^4 \cdot (q^{i+1} - q^i)] \\
 &= (q-1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (q^i)^5 = \frac{(q-1)(q^{5n}-1)}{q^5-1} \\
 &= \frac{31 \cdot (\sqrt[n]{2}-1)}{\sqrt[n]{32}-1},
 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n &= 31 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1} \\
 &= 31 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{16} + \sqrt[n]{8} + \sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{2} + 1} \\
 &= \frac{31}{5}.
 \end{aligned}$$

*) 原题为“使这 n 份的长构成等比级数”，现根据原题答案予以改正。

2184⁺. 从积分的定义出发，求

$$\int_0^T (v_0 + gt) dt,$$

其中 v_0 及 g 为常数。

解 $f(t) = v_0 + gt$ 在 $[0, T]$ 上为增函数 ($T > 0$)。

$$h = \frac{T}{n},$$

$$m_i = v_0 + igh,$$

$$M_i = v_0 + (i+1)gh \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

于是

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} (v_0 + igh) \cdot h = nv_0 h + gh^2 \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$=v_0 T + \frac{gT^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$=v_0 T + \frac{gT^2}{2} - \frac{gT^2}{2n},$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} [v_0 + (i+1)gh]h = v_0 T + \frac{gT^2}{2} - \frac{gT^2}{2n}.$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n = v_0 T + \frac{gT^2}{2},$$

所以

$$\int_0^T (v_0 + gt) dt = v_0 T + \frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方法进行积分区间的分段，把积分看作是对应的积分和的极限，来计算定积分。

2185. $\int_{-1}^2 x^2 dx.$

解 将区间 $[-1, 2]$ n 等分，得 $h = \frac{3}{n}$. 取

$$\xi_i = -1 + ih \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

作和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1 + ih)^2 h = nh - 2h^2 \sum_{i=0}^{n-1} i + h^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= 3 + \frac{9-9n}{2n^2}. \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3.$$

由于 $f(x)=x^2$ 在 $[-1, 2]$ 上连续, 故积分 $\int_{-1}^2 x^2 dx$ 是存在的, 且它与分法无关, 同时也与点的取法无关. 因此上述和的极限就是所求的积分值 (以后如无特殊情况, 不再说明), 即定积分

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = 3.$$

2186. $\int_0^1 a^x dx \quad (a > 0).$

解 当 $a \neq 1$ 时, 将区间 $(0, 1)$ n 等分, 得 $h = \frac{1}{n}$.

取

$$\xi_i = ih \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h a^{\xi_i} = \frac{h(a^{nh} - 1)}{a^h - 1} = \frac{a - 1}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - 1}{\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} = \frac{a - 1}{\ln a},$$

即

$$\int_0^1 a^x dx = \frac{a - 1}{\ln a} \quad (a \neq 1).$$

当 $a = 1$ 时, 积分显然为 1.

2187. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

解 将区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ n 等分, 得 $h = \frac{\pi}{2n}$. 取

$$\xi_i = ih \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h \sin ih.$$

由于

$$\sin ih = \frac{1}{2\sin \frac{h}{2}} \cdot \left[\cos \frac{2i-1}{2} h - \cos \frac{2i+1}{2} h \right],$$

所以

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{h}{2\sin \frac{h}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2i-1}{2} h - \cos \frac{2i+1}{2} h \right) \\ &= \frac{h}{2\sin \frac{h}{2}} \left(\cos \frac{h}{2} - \cos \frac{2n-1}{2} h \right). \end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{4n} - \cos \frac{2n-1}{4n} \pi \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1.$$

2188. $\int_0^x \cos t \, dt.$

解 将区间 $[0, x]$ n 等分, 得 $h = \frac{x}{n}$. 取

$$\xi_i = ih \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

与2187题类似, 可得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} h \cos \xi_i h \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \cdot \left[\sin \frac{h}{2} + \sin \frac{2n-1}{2} h \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin \frac{x}{2n} + \sin \frac{(2n-1)x}{2n} \right] \\ &= \sin x. \end{aligned}$$

即

$$\int_0^x \cos t \, dt = \sin x.$$

$$2189. \int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b).$$

解 将区间 $[a, b]$ 作 n 等分, 设分点为

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

取 $\xi_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}}$ ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$). 显然 $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$.

作和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

即

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

2190. $\int_a^b x^m dx$ ($0 < a < b$; $m \neq -1$).

解 选择诸分点, 使它们的横坐标构成一等比级数,
即

$$a < aq < aq^2 < \cdots < aq^i < \cdots < aq^{n-1} < aq^n = b,$$

其中

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

取 $\xi_i = aq^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), 作和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^m (aq^{i+1} - aq^i) \\ &= a^{m+1} (q-1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^{(m+1)i} \\ &= a^{m+1} (q-1) \frac{q^{n(m+1)} - 1}{q^{m+1} - 1} \\ &= (b^{m+1} - a^{m+1}) \cdot \frac{q-1}{q^{m+1} - 1}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= (b^{m+1} - a^{m+1}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q-1}{q^{m+1} - 1} \\ &= (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^m + q^{m-1} + \cdots + 1} \\ &= \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, \end{aligned}$$

即

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b).$

解 同2190题的分法及取法, 得和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^{-1} \cdot (aq^{i+1} - aq^i) \\ &= n(q-1) \\ &= n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right). \end{aligned}$$

由于 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a \quad (a > 0)$ (可用洛比塔法则), 命 $\alpha = \frac{b}{a}$, 而 $\frac{1}{n}$ 是趋向于 0 的变量, 应用这一极限即得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) \\ &= \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

即

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}.$$

2192. 计算布阿桑积分

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$$

当: (a) $|\alpha| < 1$; (b) $|\alpha| > 1$.

解 因为 $(1 - |\alpha|)^2 \leq 1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2$, 所以当 $|\alpha| \neq 1$ 时, 被积函数是连续的, 于是积分就存在. 把区间 $(0, \pi)$ 分成 n 个相等部分, 即有

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - 2\alpha \cos \frac{i\pi}{n} + \alpha^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{n} \ln \left[(1 + \alpha)^2 \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - 2\alpha \cos \frac{i\pi}{n} + \alpha^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

另一方面, 我们可以证明

$$t^{2n} - 1 = (t^2 - 1) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - 2t \cos \frac{i\pi}{n} + t^2 \right).$$

事实上, 方程 $t^{2n} - 1 = 0$ 共有 $2n$ 个根, 记作

$$\begin{aligned} &1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n = -1, \\ &\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \dots, \bar{\varepsilon}_{n-1}, \end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon_i = \cos \frac{i\pi}{n} + j \sin \frac{i\pi}{n}$$

及

$$\bar{\varepsilon}_i = \cos \frac{i\pi}{n} - j \sin \frac{i\pi}{n} \quad (j = \sqrt{-1} \text{ 为虚数单位}).$$

于是

$$t^{2n} - 1 = (t+1)(t-1) \prod_{i=1}^{n-1} (t - \varepsilon_i)(t - \bar{\varepsilon}_i).$$

而

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - 2t \cos \frac{i\pi}{n} + t^2 \right) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(\sin^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} - 2t \cos \frac{i\pi}{n} + t^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{n-1} \left[\left(t - \cos \frac{j\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{j\pi}{n} \right] \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} \left(t - \cos \frac{j\pi}{n} - j \sin \frac{j\pi}{n} \right) \\
&\quad \cdot \left(t - \cos \frac{j\pi}{n} + j \sin \frac{j\pi}{n} \right) \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} (t - \varepsilon_j)(t - \bar{\varepsilon}_j) \\
&= \frac{t^{2n} - 1}{(t+1)(t-1)} \\
&= \frac{t^{2n} - 1}{t^2 - 1}.
\end{aligned}$$

即

$$t^{2n} - 1 = (t^2 - 1) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - 2t \cos \frac{j\pi}{n} + t^2 \right).$$

当 $t = \alpha$ 时, 利用上式就可把 S_n 表成下面的形式

$$S_n = \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1} (\alpha^{2n} - 1) \right].$$

于是, (a) 当 $|\alpha| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$, 即

$$\int_0^\pi (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = 0.$$

(6) 当 $|\alpha| > 1$ 时, 把 S_n 改写成

$$S_n = 2\pi \ln |\alpha| + \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \cdot \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^{2n}} \right]$$

后, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^{2n}} = 1$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2\pi \ln |\alpha|$,

即

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = 2\pi \ln |a|.$$

2193. 设函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

其中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $x_i \leq \theta_i \leq x_{i+1}$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($x_0 = a$, $x_n = b$).

证 因为 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续, 所以它们的乘积 $f(x)\varphi(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续. 因此, 积分

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

存在.

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故有界, 即存在常数 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$ ($a \leq x \leq b$); 又由于 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故一致连续, 因此任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $\max |\Delta x_i| < \delta$ 时, 恒有

$$|\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

从而

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^{n-1} (f(\xi_i) \varphi(\theta_i) - f(\xi_i) \varphi(\xi_i)) \Delta x_i \right| \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \cdot |\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| \cdot |\Delta x_i| \\ & < \sum_{i=0}^{n-1} M \cdot \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot |\Delta x_i| = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} [f(\xi_i) \varphi(\theta_i) - f(\xi_i) \varphi(\xi_i)] \Delta x_i = 0. \quad (2)$$

由(1)式和(2)式, 最后得到

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i.$$

2194. 证明不连续的函数:

$$f(x) = \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)$$

于区间 $[0, 1]$ 上可积分.

证 首先注意, 函数 $f(x) = \operatorname{sgn} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 其不连续点是

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

并且, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的任何部分区间上的振幅 $\omega \leq 2$.

任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\varepsilon}{5}, 1 \right]$ 上只有有限个间断点, 故可积. 因此存在 $\eta > 0$, 使对 $\left[\frac{\varepsilon}{5}, 1 \right]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 就有 $\sum \omega_i^* \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{5}$. 显然, 若 $[a, \beta] \subset \left[\frac{\varepsilon}{5}, 1 \right]$, 则对于 $[a, \beta]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 也有 $\sum \omega_i^* \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{5}$.

令 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{5}, \eta\right\}$. 现设 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = 1$ 是 $[0, 1]$ 的满足 $\max |\Delta x_i| < \delta$ 的任一分法. 设 $x_{i_0} \leq \frac{\varepsilon}{5} < x_{i_0+1}$.

由上述, 有 $\sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{5}$. 又, 显然

$$\sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i \leq 2 \sum_{i=0}^{i_0} \Delta x_i < 2 \cdot \frac{2\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5}.$$

故
$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

于是, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积.

2195. 证明黎曼函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } x = \frac{m}{n}, \end{cases}$$

(式中 m 及 n ($n \geq 1$) 为互质的整数) 在任何有穷的区间上可积分.

证 为简单起见, 我们只考虑闭区间 $[0, 1]$ (对于一般的有限闭区间 $[a, b]$, 可类似地讨论之).

命 $\lambda > 0$ 将区间 $[0, 1]$ 分成长度 $\Delta x_i < \lambda$ 的若干部分区间, 取任意的自然数 N , 将所有的部分区间分成两

类：把包含分母 $n \leq N$ 的数 $\frac{m}{n}$ 的区间列入第一类，而把不包含上述数的那些区间列入第二类。对于第一类，由于满足条件 $n \leq N$ 的数 $\frac{m}{n}$ 只有有限个，个数记为 $k = k_N$ ，所以第一类区间的个数就不大于 $2k$ ，而它们长度的总和不超出 $2k\lambda$ ；对于第二类，由于在这些区间内除含无理数外，仅能含 $n > N$ 的有理数 $\frac{m}{n}$ ，而在这种有理点上， $\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ ，所以，振幅 ω_i 小于 $\frac{1}{N}$ 。

这样一来，和数 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ 就分成两部分，分别估计它们的值，即得

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < 2k_N \lambda + \frac{1}{N}.$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，取定一个 $N > \frac{2}{\varepsilon}$ ，然后取 $\delta = \frac{\varepsilon}{4k_N}$ 。于是，当 $\lambda < \delta$ 时，必有

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积分。

2196. 证明函数

当 $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ 及 $f(0) = 0$,

于闭区间 $[0, 1]$ 上可积分.

证 首先注意, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 其不连续点是

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

并且, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的任何部分区间上的振幅 $\omega \leq 1$.

任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\varepsilon}{3}, 1\right]$ 上只有有限个间断点, 故可积. 因此, 存在 $\eta > 0$, 使对 $\left[\frac{\varepsilon}{3}, 1\right]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 就有 $\sum \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$. 显然, 若 $[a, \beta] \subset \left[\frac{\varepsilon}{3}, 1\right]$, 则对于 $[a, \beta]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 也有 $\sum \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$.

令 $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \eta \right\}$. 现设 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 1$ 是 $[0, 1]$ 的满足 $\max |\Delta x_i| < \delta$ 的任一分法. 设 $x_{i_0} \leq \frac{\varepsilon}{3} < x_{i_0+1}$. 由上述, 有

$$\sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}. \text{ 又, 显然 } \sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{i_0} \Delta x_i < \frac{2\varepsilon}{3}. \text{ 故}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

于是

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

由此可知, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积.

2197. 证明迪里黑里函数

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \end{cases}$$

于任意区间上不可积分.

证 在任意区间 (a, b) 的任何部分区间上均有

$$\omega_i = 1,$$

所以 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = b - a$, 它不趋于零. 因此函数 $D(x)$

在 (a, b) 上不可积分.

2198. 设函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积分, 且

$$f_n(x) = \sup f(x) \quad \text{当 } x_i < x \leq x_{i+1},$$

其中 $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ ($i=0, 1, \dots, n-1$).

$$\text{证明} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

证 $f_n(x)$ 是不超过 $n+1$ 个间断点的阶梯函数, 因此 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积分, 于是

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f_n(x) - f(x)| dx \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_i dx = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \\
&\quad \left(\text{当 } \max |\Delta x_i| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0 \text{ 时} \right),
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2199. 证明: 若函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积分, 则有连续函数 $\varphi_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 的叙列, 使

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx, \text{ 当 } a \leq c \leq b.$$

证 将区间 $[a, b]$ 作 n 等分, 设分点为

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b,$$

即 $x_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a)$, $i=0, 1, \dots, n$.

在 $\Delta x_i^{(n)} = [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上令 $\varphi_n(x)$ 为过点 $[x_{i-1}^{(n)}, f(x_{i-1}^{(n)})]$ 及 $[x_i^{(n)}, f(x_i^{(n)})]$ 的直线, 即当 $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 时, 令

$$\varphi_n(x) = f(x_{i-1}^{(n)}) + \frac{x - x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}} [f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)})],$$

则 $\varphi_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 因此, 它是可积分的.

若令 $m_i^{(n)}$, $M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$ 分别表示函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上的下确界, 上确界及振幅, 则当 $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 时,

$$m_i^{(n)} \leq \varphi_n(x) \leq M_i^{(n)}, \quad m_i^{(n)} \leq f(x) \leq M_i^{(n)},$$

从而

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \leq \omega_i^{(n)}.$$

于是, 当 $a \leq c \leq b$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^c f(x) dx - \int_a^c \varphi_n(x) dx \right| \\ & \leq \int_a^c |f(x) - \varphi_n(x)| dx \\ & \leq \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}} |f(x) - \varphi_n(x)| dx \\ & \leq \sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)}. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积分, 因此,

当 $\max |\Delta x_i^{(n)}| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ 时, 必有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)} \rightarrow 0.$$

由此可知

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx \quad (a \leq c \leq b).$$

2200. 证明: 若有界的函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上可积分,

则其绝对值 $|f(x)|$ 于 $[a, b]$ 上也可积分, 并且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

证 对于区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任意两点 x' 及 x'' , 总有

$$\left| |f(x')| - |f(x'')| \right| \leq |f(x') - f(x'')|,$$

所以函数 $|f(x)|$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅 ω_i^* 不超过 $f(x)$ 在此区间上的振幅 ω_i , 因而

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^* \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0,$$

即 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积分.

其次, 因为

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

所以

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

即

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2201. 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上绝对可积 (即积分 $\int_a^b |f(x)| dx$ 存在), 这个函数在 $[a, b]$ 上是否为可积分的函数?

解 一般地说, 不. 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ -1, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

$|f(x)|=1$ ，它在 $[a, b]$ 上连续，因此它在 $[a, b]$ 上可积。但对于函数 $f(x)$ 而言，在 $[a, b]$ 的任一部分区间上 $\omega_i=2$ ，所以

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 2(b-a).$$

它不趋向于零，于是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积分。

2202. 设函数 $\varphi(x)$ 于闭区间 $[A, B]$ 上有定义并连续，函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积分，并且当 $a \leq x \leq b$ 时 $A \leq f(x) \leq B$ 。证明函数 $\varphi[f(x)]$ 于 $[a, b]$ 上可积分。

证 任给 $\varepsilon > 0$ 。根据函数 $\varphi(x)$ 在 $[A, B]$ 的一致连续性，存在 $\eta > 0$ ，使得在 $[A, B]$ 中长度小于 η 的任一闭区间上，函数 φ 的振幅都小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ 。用 Ω 表 $\varphi(x)$ 在 $[A, B]$ 上的振幅。由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的可积性，知必有 $\delta > 0$ 存在，使对 $[a, b]$ 的任一分法，只要 $\max |\Delta x_i| < \delta$ ，就有 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\eta \varepsilon}{2\Omega}$ 。（ $\omega_i(f)$ 表 $f(x)$ 在 (x_i, x_{i+1}) 上的振幅）。

下证对 $[a, b]$ 的任何分法，只要 $\max |\Delta x_i| < \delta$ ，就有

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi(f)) \Delta x_i < \varepsilon.$$

事实上，将诸区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 分成两组，第一组是满足 $\omega_i(f) < \eta$ 的（其下标以“ i' ”记之），第二组是满足 $\omega_i(f) \geq \eta$ 的（下标以“ i'' ”记之）。

于是,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi(f)) \Delta x_i \\ &= \sum_{i'} \omega_{i'}(\varphi(f)) \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''}(\varphi(f)) \Delta x_{i''} \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i'} \Delta x_{i'} + \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''}, \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} & \frac{\eta \varepsilon}{2\Omega} > \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \\ &= \sum_{i'} \omega_{i'}(f) \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''}(f) \Delta x_{i''} \\ &\geq \sum_{i''} \omega_{i''}(f) \Delta x_{i''} \geq \eta \sum_{i''} \Delta x_{i''}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi(f)) \Delta x_i \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \Omega \cdot \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此可知, $\varphi[f(x)]$ 在 (a, b) 上可积.

2203. 若函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 可积分, 则函数 $f[\varphi(x)]$ 是否也必定可积分?

解 未必. 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x = 0, \\ 1 & \text{若 } x \neq 0, \end{cases}$$

及 $\varphi(x)$ 为黎曼函数 (参阅 2195 题) .

它们在任何有穷的区间上均可积（前者不连续点仅为原点一个，且是有界函数，因而是可积分的）。

但 $f(\varphi(x)) = x(x)$ ，利用2197题的结果得知它在任何有穷的区间上不可积分。

2204. 设函数 $f(x)$ 于闭区间 $[A, B]$ 上可积分，证明函数 $f(x)$ 有积分的连续性，即是说

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{a+h} |f(x+h) - f(x)| dx = 0,$$

式中 $[a, b] \subset [A, B]$ 。

证 方法一：

不妨设 $A < a, b < B$ 。由于 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 可积，故任给 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\eta > 0$ ，使对 $[A, B]$ 的任何分法，只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$ ，就恒有

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

显然，对 $[A, B]$ 的任一子区间 $[A', B']$ 的任何分法，只要 $\max |\Delta x_{i'}| < \eta$ ，也有

$$\sum \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon. \quad (1)$$

今设 $0 < h < \delta = \min \left\{ \frac{\eta}{2}, \frac{B-b}{3} \right\}$ ，则对于 h ，

存在正整数 $n = n(h)$ ，使有

$$a + (2n-2)h < b \leq a + 2nh < a + (2n+1)h < B.$$

用 ω_i 表 $f(x)$ 在 $[a + ih, a + (i+2)h]$ 上的振幅，则

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^{a+2nh} |f(x+h) - f(x)| dx \\
&= \sum_{i=0}^{2n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \sum_{i=0}^{2n-1} \omega_i h \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i} 2h + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i+1} 2h.
\end{aligned}$$

显然, $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i} \cdot 2h$ 是对于区间 $[a, a+2nh]$ 的分法 $a < a+2h < a+4h < \dots < a+2nh$ 所作的 (1) 式中的和, 而 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i+1} 2h$ 是对于区间 $[a+h, a+(2n+1)h]$

的分法

$a+h < a+3h < a+5h < \dots < a+(2n+1)h$ 所作的 (1) 式中的和, 故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i} 2h < \varepsilon, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i+1} 2h < \varepsilon.$$

从而

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

同理可证

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

于是, 得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

方法二:

由2199题的结果可知: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 由于 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 上可积, 故存在 $[A, B]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$, 使

$$\int_A^B |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $[A, B]$ 上一致连续, 故存在 $\delta > 0$, 使当 $|x' - x''| < \delta$ ($x' \in [A, B]$, $x'' \in [A, B]$) 时, 恒有

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是, 当 $|h| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx \\ & \leq \int_a^b |f(x+h) - \varphi(x+h)| dx \\ & \quad + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx \\ & \quad + \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \\ & \leq 2 \int_A^B |f(x) - \varphi(x)| dx \\ & \quad + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx \end{aligned}$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

故

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

2205. 设函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上可积分, 证明等式

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

当而且仅当对属于闭区间 $[a, b]$ 内函数 $f(x)$ 连续的一切点有 $f(x) = 0$ 时方成立.

证 先证必要性:

采用反证法. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 但 $f(x_0) \neq 0$, 则存在 $\delta > 0$, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$, 使当 $|x - x_0| \leq \delta$ 时

$$|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$$

从而

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x) dx &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x) dx > \frac{f^2(x_0)}{4} \cdot 2\delta \\ &= \frac{\delta \cdot f^2(x_0)}{2} > 0. \end{aligned}$$

这与假设 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ 矛盾.

再证充分性:

也即要证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积条件下, 假设 $f(x)$ 在一切连续点 x_0 上均有 $f(x_0) = 0$, 则必有

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0.$$

证明分两个部分. 第一, 首先要指出当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时, $f(x)$ 的连续点在 $[a, b]$ 中必定是稠密的. 此处所谓“稠密”性是指: 对于任意区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 总存在一点 $x_0 \in [\alpha, \beta]$, 使 $f(x)$ 在 x_0 连续. 第二, 利用假设, 并借助于稠密性, 可证得充分性. 现在先证第二部分, 如下: 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的全体连续点 X 的稠密性以及当 $x_0 \in X$ 时有 $f(x_0) = 0$ 的假设. 便知, 对于区间 $[a, b]$ 的任一分法, 均可适当地取 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, 使 $f(\xi_i) = 0$.

从而积分和 $\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) \Delta x_i = 0$. 由此, 再注意到 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 的可积性, 便有

$$\int_a^b f^2(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) \Delta x_i = 0.$$

如今再补证第一部分: 应当首先指明, 若 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $[\alpha, \beta]$ 的子区间 $[\alpha', \beta']$ 使得振幅

$$\omega(\alpha', \beta') < \varepsilon.$$

事实上, 如果上述结论不成立, 则存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 使对于 $[\alpha, \beta]$ 的任意分法, 有

$$\sum \omega_i \Delta x_i \geq \varepsilon_0 \sum \Delta x = \varepsilon_0 (\beta - \alpha) > 0,$$

这与 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可积矛盾, 因此, 结论为真.

今取 (α, β) 为 (a_1, b_1) . 由于 $f(x)$ 在 $\left[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{4}, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{4} \right]$ 上可积, 故存在区间 $(a_2, b_2) \subset \left[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{4}, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{4} \right] \subset (a_1, b_1)$, 使

$$\omega(a_2, b_2) < \frac{1}{2}.$$

同样, 存在区间 $(a_3, b_3) \subset \left[a_2 + \frac{b_2 - a_2}{4}, b_2 - \frac{b_2 - a_2}{4} \right] \subset (a_2, b_2)$, 使

$$\omega(a_3, b_3) < \frac{1}{3}.$$

这样继续下去, 得一串闭区间 $[a_n, b_n]$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 满足

$$a = a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots < b_n < \dots < b_2 < b_1 = \beta,$$

并且 $b_n - a_n \leq \frac{\beta - \alpha}{2^{n-1}} \rightarrow 0$, $\omega(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$).

由区间套定理, 诸 (a_n, b_n) 具有唯一的公共点 c . 显然 $a_n < c < b_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$). 下证 $f(x)$ 在点 c 连续.

任给 $\varepsilon > 0$, 取正整数 n_0 使 $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. 再取 $\delta > 0$ 使 $(c - \delta, c + \delta) \subset [a_{n_0}, b_{n_0}]$. 于是, 当 $|x - c| < \delta$ 时, 必有 $|f(x) - f(c)| \leq \omega(a_{n_0}, b_{n_0}) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

故 $f(x)$ 在点 $x=c$ 连续. 到此, 充分性证毕.

§2. 利用不定积分计算定积分的方法

1° 牛顿—莱布尼兹公式 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上有定义而且连续, $F(x)$ 为它的原函数(即 $F'(x)=f(x)$), 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义表示由曲线 $y=f(x)$, OX 轴及垂直于 OX 轴的二直线 $x=a$ 和 $x=b$ 四者所围成的代数面积 S (图4.1).

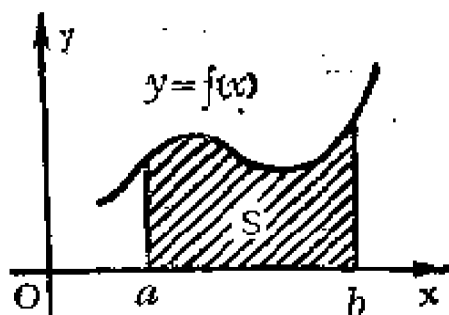


图 4.1

2° 部分积分法 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上连续并有连续导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

3° 变数代换 若: (1) 函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 内连续, (2) 函数 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆于闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 其中 $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; (3) 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 于闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上有定义并连续, 则

※ 本节个别题是收敛的广义积分, 仍按此公式计算。——题解编者注。

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

利用牛顿—莱布尼兹公式，求下列定积分并绘出对应的曲边图形面积：

$$2206. \int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^8 = 11 \frac{1}{4} \quad (\text{图 4.2}).$$

$$2207. \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$\text{解} \quad \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2 \quad (\text{图 4.3}).$$



图 4.2



图 4.3

$$2208. \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{解} \quad \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \quad (\text{图 4.4}).$$

$$2209. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{解} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3} \quad (\text{图 4.5}).$$

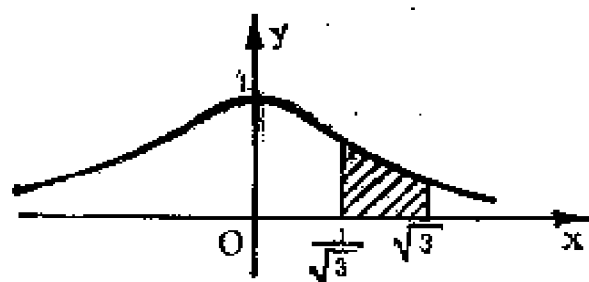


图 4.4

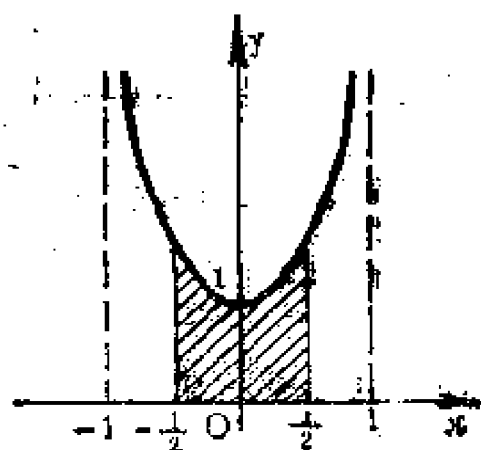


图 4.5

2210. $\int_{sh1}^{sh2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

解 $\int_{sh1}^{sh2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_{sh1}^{sh2}$
 $= \operatorname{arcsinh} x \Big|_{sh1}^{sh2} = 1 \quad (\text{图 4.6}).$

2211. $\int_0^2 |1-x| dx.$

解 $\int_0^2 |1-x| dx$
 $= \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = 1 \quad (\text{图 4.7}).$

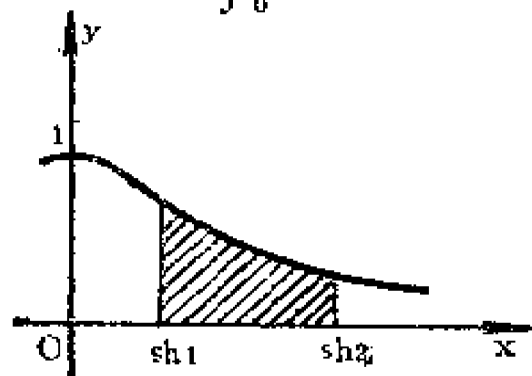


图 4.6

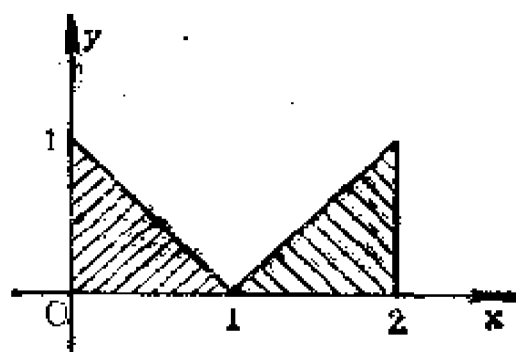


图 4.7

$$2212. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ \frac{\alpha}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{2 \sin \alpha} \quad (\text{图 4.8}). \end{aligned}$$

注 以下图形从略。

$$2213. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

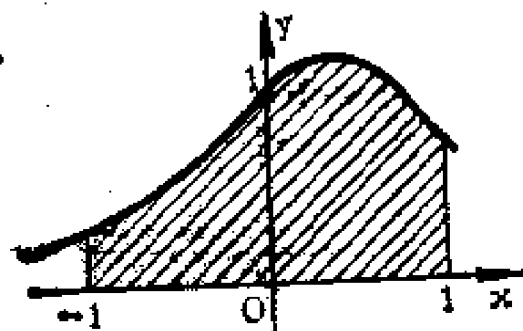


图 4.8

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} + \int_{\pi}^0 \frac{d(2\pi - x)}{1 + \varepsilon \cos(2\pi - x)} \\ &= 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x} + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x} \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\varepsilon \cos x} \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\varepsilon^2 \cos^2 x} \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-\varepsilon^2) \cos^2 x + \sin^2 x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + (1-\varepsilon^2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \\
&= \frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.
\end{aligned}$$

2214. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a| < 1,$

$|b| < 1, ab > 0).$

解 在公式

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{A}} \ln |Ax + \frac{B}{2} + \sqrt{A} \cdot \sqrt{Ax^2+Bx+C}| + C^*
\end{aligned}$$

中, 设

$$Ax^2+Bx+C=(1-2ax+a^2)(1-2bx^2+b^2),$$

两端求导数得

$$Ax + \frac{B}{2} = -b(1 - 2ax + a^2) - a(1 - 2bx + b^2).$$

由此推得, 当 $x=1$ 时, 在对数符号下的表达式的值为

$$\begin{aligned} & -a(1-b)^2 - b(1-a)^2 + 2\sqrt{ab}(1-a)(1-b) \\ & = -(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(1 + \sqrt{ab})^2, \end{aligned}$$

而当 $x=-1$ 时, 得到值 $-(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(1 - \sqrt{ab})^2$.
于是,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

*) 利用1850题的结果.

$$2215. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0).$$

$$\text{解} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{|ab|} \arctg\left(\frac{|a|\operatorname{tg} x}{|b|}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2} *} = \frac{\pi}{2|ab|}.$$

*) 利用2030题的结果.

2216. 设

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}; \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$(B) \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right) dx.$$

说明为甚么运用牛顿—莱布尼兹公式会得到不正确的结果。

解 (a) 若应用公式得

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2 < 0.$$

这是不正确的。事实上，由于函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ ，

所以当积分存在时，其值必大于零。原因在于该函数在区间 $[-1, 1]$ 上有第二类间断点 $x=0$ 。因而不能运用公式。

(b) 若应用公式得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \operatorname{tg}^2 x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

但 $\frac{\sec^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} > 0$ ，故积分若存在，必为正。原因在于

原函数在 $[0, 2\pi]$ 上 $x = \frac{\pi}{2}$ ， $x = \frac{3\pi}{2}$ 为第一类不连续点，故不能直接运用公式。

(B) 若应用公式得

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} > 0. \end{aligned}$$

这是不正确的，因为 $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}) = -\frac{1}{1+x^2} < 0$ 。

所以，积分值必为负。原因在于原函数 $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 为第一类不连续点，故不能直接运用公式。

2217. 求 $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx$ 。

解 我们有

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx \\ &= \left. \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

注意，被积函数 $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right)$ 显然在 $x=0$ 间断，但

易知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) = 0$ ，故 $x=0$ 是可去间断点。

若我们补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0 ，则被积函数在整个 $[-1, 1]$ 上都是连续的，从而积分

$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx$ 存在。以后，凡是被积函数有

可去间断点的情形，我们都按此法处理，理解为连

续函数的积分。另外，

$$\int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}$$

应理解为

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx &= \lim_{\eta \rightarrow 0+} \int_{-1}^{-\eta} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{-\eta}}} \Big|_{-1}^{-\eta} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

以后，凡是定积分存在而原函数有间断点的情况，都按此理解，省去取极限的式子，但应理解为取极限的结果。

2218. 求 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx \\ &= \sum_{k=1}^{100} \sqrt{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sqrt{\sin^2 x} dx \\ &= \sum_{k=1}^{100} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x} dx \\ &= 100 \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = 200 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

利用定积分求下列和的极限值：

2219. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

解 这是和的极限，该极限即为函数 $f(x)=x$ 在区间

$(0, 1]$ 上的定积分。事实上，函数 $f(x)=x$ 在 $(0, 1]$ 上是连续的，因而可积分。这样便可将 $[0, 1]$ n 等份，并取 ξ_i 为小区间的左端点，这样作出的和的极限就是题中所要求的极限。于是，

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

以下各题不再说明。

$$2220. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

$$2221. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$2222. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} \sin \frac{i\pi}{n} &= \int_0^1 \sin \pi x dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

$$2223. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{x^{p+1}} dx = \frac{1}{p+1}.$$

$$2224. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{i}{n}} &= \int_0^1 \sqrt{1+x} dx \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1),\end{aligned}$$

$$2225. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \ln i \right) - n \ln n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln x dx^{*}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \ln x dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} x(\ln x - 1) \Big|_{\epsilon}^1 = -1.\end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

*) 参看后面2388题.

$$2226. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right] \\ = \int_0^1 f(a + (b-a)x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

弃掉高阶同等无穷小, 求下列和的极限值

$$\begin{aligned} 2227. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n} \right) \sin \frac{2\pi}{n^2} \right. \\ \left. + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n} \right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right]. \end{aligned}$$

解 由于对于一切 $k < n$, $3 < n$ 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2} \leq \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2} \\ &\leq \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n^2} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n^2} \right) \\ &\leq \frac{\sin \frac{k\pi}{n^2}}{\cos \frac{k\pi}{n^2}} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n^2} \right) \\ &\leq \frac{2k\pi}{n^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{2k\pi}{n^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \\ &\leq 2\pi \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{k\pi}{n^2} \\ &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{k\pi}{n} + \frac{k^2\pi}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 \pi(x+x^2)dx = \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

2228. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}.$

解 由于

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} (1 + \alpha_n),$$

式中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} \\
&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) \\
&= \pi \int_0^1 \frac{dx}{2 + \cos \pi x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

2229. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \quad (x > 0).$

解 由于

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right)\left(x + \frac{k+1}{n}\right)} - \left(x + \frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{\left(x + \frac{k}{n}\right)\left(x + \frac{k+1}{n}\right) - \left(x + \frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right)\left(x + \frac{k+1}{n}\right)} + \left(x + \frac{k}{n}\right)} \\
&\leq \frac{1}{2x} \left(x + \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(x + \frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{2xn^2} \sum_{k=1}^n \left(x + \frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{4x} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

于是,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 (x+t) dt = x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$2230. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

解 由于

$$0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{1}{k}} = \frac{1}{n(nk+1)} < \frac{1}{n^2},$$

故

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} - \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} < \frac{2}{n} \rightarrow 0 \\ & \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}} \cdot 2^{\frac{k}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

$$2231. \text{ 求: } \frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx, \quad \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx, \\ \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx.$$

$$\text{解} \quad \frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx = 0$$

$$\frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx = -\frac{d}{da} \int_a^a \sin x^2 dx \\ = -\sin a^2$$

$$\frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2,$$

$$2232. \text{ 求: (a) } \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt;$$

$$(b) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

$$(B) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

$$\text{解} \quad (a) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$$

$$= \left(\frac{d}{d(x^2)} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right) \cdot \frac{d}{dx} (x^2) \\ = 2x \cdot \sqrt{1+x^4};$$

$$(b) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \\
&= \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{d}{d(x^3)} \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \\
&\quad - \frac{d}{dx}(x^2) \cdot \frac{d}{d(x^2)} \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \\
&= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{B}) \quad & \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \\
&= \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^0 \cos(\pi t^2) dt \\
&\quad + \frac{d}{dx} \int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \\
&= -\frac{d(\sin x)}{dx} \cdot \frac{d}{d(\sin x)} \int_0^{\sin x} \cos(\pi t^2) dt \\
&\quad + \frac{d(\cos x)}{dx} \cdot \frac{d}{d(\cos x)} \int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \\
&= -\cos x \cdot \cos(\pi \sin^2 x) \\
&\quad - \sin x \cdot \cos(\pi \cos^2 x) *) \\
&= (\sin x - \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x), \\
*) \quad & \cos(\pi \cos^2 x) = \cos(\pi - \pi \sin^2 x) \\
&= -\cos(\pi \sin^2 x).
\end{aligned}$$

2233. 求;

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctg x)^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2) = 1;$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctg x)^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctg x)^2}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \\ = \frac{\pi^2}{4};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} \cdot \int_0^x e^{x^2} dx}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{x^2} dx}{e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2234. 证明

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}.$$

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{x^2} dx}{\frac{1}{2x} e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)} = 1,$$

所以, 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}.$$

2235. 求:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)} (\sin x)' }{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)} (\operatorname{tg} x)' }.$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(\operatorname{tg} x)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \cos^3 x = 1.$$

2236. 设 $f(x)$ 为连续正值函数, 证明当 $x \geq 0$ 时, 函数

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}.$$

增加.

证 首先注意, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x f(x)}{f(x)} = 0$, 故若

规定 $\varphi(0) = 0$, 则 $\varphi(x)$ 是 $x \geq 0$ 上的连续函数.

另外,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2} \left\{ x f(x) \int_0^x f(t) dt \right. \\ &\quad \left. - f(x) \int_0^x t f(t) dt \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2} \cdot \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

$$\geq 0 \quad (\text{当 } x > 0 \text{ 时}),$$

所以, $\varphi(x)$ 当 $x \geq 0$ 时是增加的.

2237. 求

$$(a) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{当 } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(b) \int_0^1 f(x) dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leq x \leq t, \\ t \cdot \frac{1-x}{1-t}, & \text{当 } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x) dx \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^t x dx + \int_t^1 t \cdot \frac{1-x}{1-t} dx \\
 &= \frac{t}{2}.
 \end{aligned}$$

2238. 计算下列积分并把它们当作参数 α 的函数作出积分 $I = I(\alpha)$ 的图形, 设:

$$(a) \quad I = \int_0^1 x|x-a| dx;$$

$$(b) \quad I = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha \cos x + \alpha^2} dx;$$

$$(B) \quad I = \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\alpha \cos x + \alpha^2}}.$$

解 (a) 分三种情况:

1° 若 $\alpha < 0$, 则

$$I = \int_0^1 x(x-\alpha) dx = \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2};$$

2° 若 $\alpha > 1$, 则

$$I = \int_0^1 x(\alpha-x) dx = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3};$$

3° 若 $0 \leq \alpha \leq 1$, 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\alpha x(\alpha-x) dx + \int_\alpha^1 x(x-\alpha) dx \\
 &= \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^1 x|x-a|dx = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{a}{2}, & \text{当 } a < 0, \\ \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}, & \text{当 } 0 \leq a \leq 1, \\ \frac{a}{2} - \frac{1}{3}, & \text{当 } a > 1 \text{ (图4.9).} \end{cases}$$

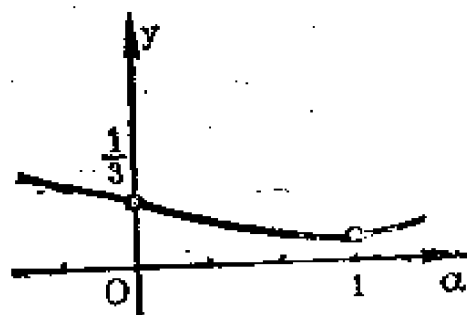


图 4.9

(6) 分两种情况:

1° 若 $|\alpha| \leq 1$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + 2\cos x + \alpha^2} dx \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} \int_0^\pi \frac{4\alpha^2(1 - \cos^2 x) dx}{(1 + \alpha^2) + 2\alpha\cos x} \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} \int_0^\pi \frac{[(1 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2\cos^2 x] + [4\alpha^2 - (1 + \alpha^2)^2]}{(1 + \alpha^2) + 2\alpha\cos x} dx \\ &= \frac{1}{4\alpha^2} \int_0^\pi [(1 + \alpha^2) - 2\alpha\cos x] dx - \frac{(1 - \alpha^2)^2}{4\alpha^2} \\ &\quad \cdot \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + \alpha^2) + 2\alpha\cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4a^2} \left[(1+a^2)x - 2a \sin x \right] \Big|_0^\pi - \frac{(1-a^2)^2}{4a^2} \\
&\quad + \frac{2}{1-a^2} \cdot \arctan \left(\sqrt{\frac{1+a^2-2a}{1+a^2+2a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \Big|_0^\pi \\
&= \frac{(1+a^2)\pi}{4a^2} - \frac{(1-a^2)\pi}{4a^2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

2° 若 $|\alpha| > 1$, 则同上述情况类似有

$$\begin{aligned}
I &= \frac{(1+a^2)\pi}{4a^2} - \frac{(a^2-1)^2}{4a^2} \\
&\quad + \frac{2}{a^2-1} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+a^2-2a}{1+a^2+2a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \Big|_0^\pi \\
&= \frac{(1+a^2)\pi}{4a^2} - \frac{(a^2-1)\pi}{4a^2} = \frac{\pi}{2a^2}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\sin^2 x dx}{1+2a \cos x + a^2} \\
&= \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } |a| \leq 1; \\ \frac{\pi}{2a^2}, & \text{当 } |a| > 1, \end{cases} \quad (\text{图4.10})
\end{aligned}$$

*) 利用2028题(a)的结果.

$$\begin{aligned}
(\text{B}) \quad &\int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2a \cos x + a^2}} \\
&= \frac{1}{a} \sqrt{1+a^2-2a \cos x} \Big|_0^\pi
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 2, & \text{当 } |a| \leq 1, \\ \frac{2}{|a|}, & \text{当 } |a| > 1, \end{cases} \quad (\text{图 4.11})$$

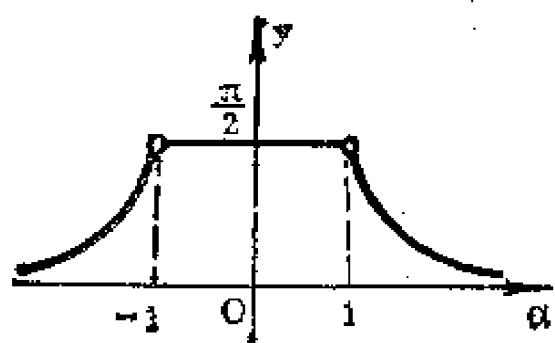


图 4.10

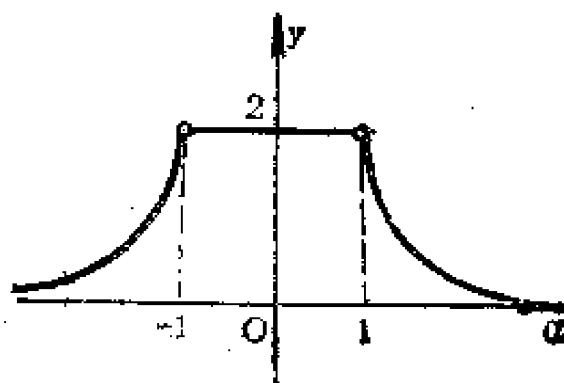


图 4.11

利用部分积分法的公式，求下列定积分：

2239. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx &= - \int_0^{\ln 2} x d(e^{-x}) \\ &= -x e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 - e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

2240. $\int_0^{\pi} x \sin x dx.$

$$\text{解} \quad \int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi.$$

$$2241. \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx \\ &= 2 \left(x \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x dx \right) \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

$$2242^+. \int_{\frac{1}{e}}^e |\lg x| dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_{\frac{1}{e}}^e |\lg x| dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\lg x) dx + \int_1^e \lg x dx \\ &= \left(-x \lg x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{\ln 10} dx \right) + x \lg x \Big|_1^e \\ &\quad - \int_1^e \frac{1}{\ln 10} dx \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right) \lg e. \end{aligned}$$

$$2243. \int_0^1 \arccos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^1 \arccos x dx &= x \arccos x \Big|_0^1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{1-x} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{1-x} = 1.$$

2244⁺. $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$

解 $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{3}$$

$$= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

利用适当的变数代换, 求下列定积分:

2245. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$

解 设 $\sqrt{5-4x} = t$, 则

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1 \frac{5-t^2}{8} dt = \frac{1}{6}.$$

2246. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$

解 设 $x = a \sin t$, 则

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^4}{16}.$$

$$2247. \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

解 设 $t = \frac{1}{x+1}$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \int_{\frac{4}{7}}^1 \frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln (2t-1 + \sqrt{2t^2-2t+1}) \Big|_{\frac{4}{7}}^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{\frac{1}{7} + \sqrt{\frac{50}{49}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7 + 7\sqrt{2}}{1 + 5\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}. \end{aligned}$$

$$2248. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx.$$

解 设 $\sqrt{e^x-1} = t$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2 (t - \arctg t) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$2249. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

解 设 $\sqrt{x}=t$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt = (\arcsin t)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

2250. 假设 $x - \frac{1}{x} = t$, 来计算积分

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

解 由于被积函数是偶函数, 于是,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \int_N^0 \frac{dt}{t^2+2} \\ &= \lim_{N \rightarrow -\infty} \sqrt{2} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_N^0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2251. 设:

$$(A) \int_{-1}^1 dx, \quad t = x^{\frac{2}{3}},$$

$$(B) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad x = \frac{1}{t},$$

$$(B) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = t.$$

说明为甚么用 $\varphi(t)$ 代换 x 会引致不正确的结果.

解 (A) $\int_{-1}^1 dx = 2$. 但若作代换 $t = x^{\frac{2}{3}}$, 则得

$$\int_{-1}^1 dx = \pm \frac{3}{2} \int_1^1 t^{\frac{1}{2}} dt = 0.$$

其错误在于代换 $t = x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x = \pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的.

$$(6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}. \text{但若作代换}$$

$x = \frac{1}{t}$, 则得

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0.$

其错误在于 $x = \frac{1}{t}$, 当 $t = 0$ (0 属于 $[-1, 1]$) 时不连续.

$$(B) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} \text{ 大于零, 但若作代换 } t = \operatorname{tg} x,$$

则得

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

其错误在于 $t = \operatorname{tg} x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处不连续.

2252. 在积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{1-x^2} dx$$

中, 令 $x = \sin t$ 是否可以?

解 不可以, 因为 $\sin t = x$ 不可能大于 1.

2253. 于积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 中, 当作变数的代换 $x = \sin t$

时, 可否取数 π 和 $\frac{\pi}{2}$ 作为新的上下限?

解 可以. 因为满足定积分换元的条件, 事实上,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} d(\sin t) \\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \left(-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2254. 证明: 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a+(b-a)x] dx.$$

证 设 $x = a + (b-a)t$, 则 $dx = (b-a)dt$.

代入得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a+(b-a)t] dt,$$

即

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a+(b-a)x] dx.$$

2255. 证明: 等式

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx \quad (a > 0).$$

证 设 $x = \sqrt{t}$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^a x^3 f(x^2) dx \\ &= \int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t) \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} t f(t) dt. \end{aligned}$$

即

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx.$$

2256. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[A, B] = [a, b]$ 上的连续函数, 当

$$A - a \leq x \leq B - b \text{ 时, 求 } \frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y) dy.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y) dy \\ &= \frac{d}{dx} \int_{a+x}^{b+x} f(y) dy = f(b+x) - f(a+x). \end{aligned}$$

2257. 证明: 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 则

$$(a) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$(b) \quad \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

证: (a) 设 $\frac{\pi}{2} - t = x$, 则 $dx = -dt$, 且

$$f(\sin x) = f(\cos t).$$

代入得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt,$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$$

(6) 设 $\pi - t = x$, 则 $dx = -dt$, 且
 $xf(\sin x) = (\pi - t)f(\sin t)$.

代入得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx &= - \int_{\pi}^0 (\pi - t)f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt, \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

2258. 证明: 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[-l, l]$ 上连续, 则

(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数时,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx,$$

(2) 若函数 $f(x)$ 为奇函数时,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0.$$

给出这些事实的几何解释.

证 (1) 由于 $f(x)$ 为偶函数, 即 $f(x) = f(-x)$,
 $(x \in [-l, l])$. 于是设 $x = -t$, 则有

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\
&= - \int_{-1}^0 f(-x) d(-x) + \int_0^1 f(x) dx \\
&= - \int_1^0 f(t) dt + \int_0^1 f(x) dx \\
&= \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.
\end{aligned}$$

其几何解释如下:

由于 $f(x) = f(-x)$, 故图形关于 Oy 轴对称. 于是由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = -1$ 及 $x = 1$ 所围成图形的面积为由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 0$ 及 $x = 1$ 所围成的图形的面积 S 的两倍(图4.12).

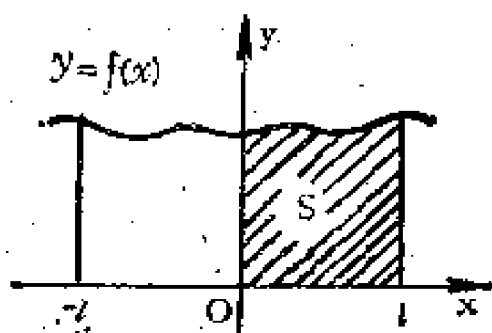


图 4.12

(2) 由于 $f(x) = -f(-x)$, 设 $x = -t$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 f(x) dx \\
&= - \int_{-1}^0 f(-x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\
&= \int_1^0 f(t) dt + \int_0^1 f(x) dx = 0.
\end{aligned}$$

其几何解释如下:

由于 $f(x) = -f(-x)$, 故图形关于原点对称. 于是由 -1 到 0 之间所围之面积, 与由 0 到 1 之间所围成之面积绝对值相等, 符号相反, 故其面积的代数和为零 (图 4.13).

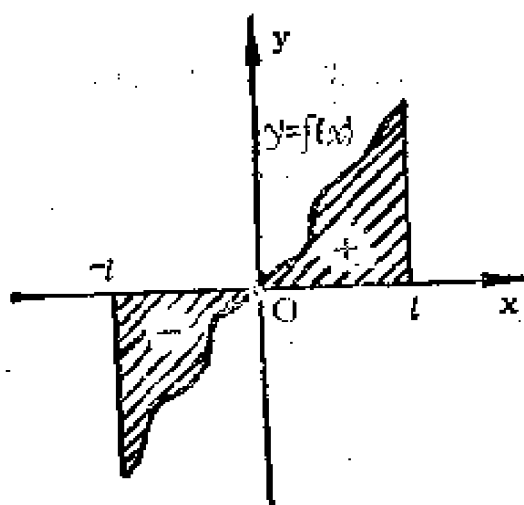


图 4.13

2259. 证明: 偶函数的原函数中之一为奇函数, 而奇函数的一切原函数皆为偶函数.

证 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上定义^{*)}, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 当 $f(-x) = f(x)$ 时, 由于

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \text{ 及 } f(-x) = -\frac{d}{dx} F(-x),$$

故有 $\frac{d}{dx} [F(x) + F(-x)] = 0$. 从而可得

$$F(x) + F(-x) = C_1, \text{ 且 } C_1 = 2F(0).$$

于是, $f(x)$ 有一个原函数 $F(x) - F(0)$ 是奇函数.

当 $f(-x) = -f(x)$ 时, 类似地可得

$$F(x) - F(-x) = C_2, \text{ 且 } C_2 = 0.$$

于是, $F(-x) = F(x)$, 即 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x) + C$ (C 为任意常数) 也为偶函数.

^{*)} 如果 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可积, 则由

$$F_c(x) = \int_0^x f(t) dt + C \quad (C \text{ 是任意常数})$$

也可获证, 其中 $F_+(x)$ 为 $f(x)$ 的全部原函数.

2260. 引入新变数

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

来计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx$.

解 设 $t = x + \frac{1}{x}$, 则

$$t^2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2, \quad x = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{t^2 - 4}).$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx \\ &= \int_1^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx \\ & \quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} (1 + \sqrt{t^2 - 4}) e^t d\left[\frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2 - 4})\right] \\ & \quad + \int_{\frac{5}{2}}^2 (1 - \sqrt{t^2 - 4}) e^t d\left[\frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2 - 4})\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_2^{\frac{5}{2}} (1 + \sqrt{t^2 - 4}) e^t \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_2^{\frac{5}{2}} (1 - \sqrt{t^2 - 4}) e^t \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt \\
&= \int_2^{\frac{5}{2}} e^t \left[\sqrt{t^2 - 4} + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}} \right] dt \\
&= \int_2^{\frac{5}{2}} (\sqrt{t^2 - 4} d(e^t) + e^t d\sqrt{t^2 - 4}) \\
&= (\sqrt{t^2 - 4}) e^t \Big|_2^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

2261. 于积分

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx.$$

中实行变数代换 $\sin x = t$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cos x dx \\
&\quad + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \cos x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x) \cos x dx.
\end{aligned}$$

在右端的第一个积分中, 设 $\sin x = t$; 第二、第三个积分中, 设 $\sin(\pi - x) = t$; 第四个积分中, 设 $\sin(2\pi - x) = -t$, 代入得

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$$

$$= \int_0^1 (f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)) dt \\ + \int_{-1}^0 (f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)) dt.$$

2262. 计算积分

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \left[\cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right]' \right| dx,$$

式中 n 为自然数.

证 $\left[\cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right]' = \frac{\sin(-\ln x)}{x}$. 设 $x = e^{-t}$,

则 $dx = -e^{-t} dt$, $\frac{\sin(-\ln x)}{x} = \frac{\sin t}{e^{-t}} = e^t \sin t$.

代入得

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \left[\cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right]' \right| dx = \int_0^{2\pi n} |\sin t| dt \\ = \sum_{k=1}^{2n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{\pi} \sin t dt \\ = 2 \cdot 2n = 4n.$$

2263. 求:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

解 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx^{*}) \\ = \frac{\pi}{2} \left[-\arctg(\cos x) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$

*) 利用2257题结果.

2264. 设

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)},$$

求 $\int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx + \int_0^2 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx \\ & \quad + \int_2^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx \\ &= \arctan f(x) \Big|_{-1}^0 + \arctan f(x) \Big|_0^2 + \arctan f(x) \Big|_2^3 \\ &= \left(-\frac{\pi}{2} - 0\right)^{*)} + \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ & \quad + \left(\arctan \frac{4^2 \cdot 2}{3^3 \cdot 1} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \arctan \frac{32}{27} - 2\pi. \end{aligned}$$

*) 参看2217题后的注意.

2265. 证明: 若 $f(x)$ 为定义在 $-\infty < x < +\infty$ 而周期为 T 的连续的周期函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

式中 a 为任意的数.

$$\text{证 } \int_a^{a+T} f(x) dx$$

$$= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx.$$

对上述等式右端的第三个积分，设 $x-T=t$ ，则

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(t+T) dt = \int_0^a f(t) dt.$$

于是，

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

2266. 证明：当 n 为奇数时，函数

$$F(x) = \int_0^x \sin^n x dx \text{ 及 } G(x) = \int_0^x \cos^n x dx$$

为以 2π 为周期的周期函数；而当 n 为偶数时，则其中的任何一个皆为线性函数与周期函数的和。

证 当 n 为奇数时， $\sin^n x$ 是奇函数，而且是以 2π 为周期的函数。于是，

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} \sin^n x dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^n x dx + \int_{2\pi}^{2\pi+x} \sin^n x dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(\pi-x) dx + \int_0^x \sin^n x dx \\ &= 0 + \int_0^x \sin^n x dx = F(x) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
 G(x+2\pi) &= G(x) + \int_0^{2\pi} \cos^n x dx \\
 &= G(x) + \int_0^\pi \cos^n x dx + \int_\pi^{2\pi} \cos^n x dx \\
 &= G(x) + \int_0^\pi \cos^n x dx + \int_0^\pi \cos^n(x+\pi) dx \\
 &= G(x),
 \end{aligned}$$

从而得知: $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是以 2π 为周期的周期函数。
当 n 为偶数时, 显然有

$$\begin{aligned}
 F(x+2\pi) &= F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^n x dx, \\
 G(x+2\pi) &= G(x) + \int_0^{2\pi} \cos^n x dx,
 \end{aligned}$$

但因

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = a > 0,$$

所以, $F(x)$ 、 $G(x)$ 都不是 2π 为周期的周期函数,
设

$$F_1(x) = F(x) - \frac{a}{2\pi}x,$$

则

$$\begin{aligned}
 F_1(x+2\pi) &= F(x+2\pi) - \frac{a}{2\pi}(x+2\pi) \\
 &= F(x) + a - \frac{a}{2\pi}x - a
 \end{aligned}$$

$$= F(x) - \frac{a}{2\pi}x = F_1(x).$$

即 $F_1(x)$ 是以 2π 为周期的函数，而

$$F(x) = F_1(x) + \frac{a}{2\pi}x.$$

所以， $F(x)$ 为周期函数与线性函数之和。

同理，可以证明 $G(x)$ 也是周期函数与线性函数之和。

2267. 证明：函数

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

（式中 $f(x)$ 为具周期 T 的连续的周期函数）在一般的情形下是线性函数与周期函数之和。

证 因为 $F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$ ，所以

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(x) dx.$$

又因 $f(x)$ 是一周期为 T 的连续函数，所以

$$\int_x^{x+T} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx = K.$$

于是， $F(x+T) - F(x) = K$ 。

如果 $K = 0$ ，则 $F(x)$ 为一周期函数。

如果 $K \neq 0$ ，可考虑函数 $\varphi(x) = F(x) - \frac{K}{T}x$ ，

则因

$$\varphi(x+T) = F(x+T) - \frac{K}{T}(x+T)$$

$$= F(x+T) - \frac{K}{T}x - K$$

$$= F(x) - \frac{K}{T}x = \varphi(x),$$

所以, $\varphi(x)$ 也为一周期函数, 从而

$$F(x) = \varphi(x) + \frac{K}{T}x,$$

即 $F(x)$ 是线性函数与周期等于 T 的周期函数之和.

计算下列积分:

$$2268. \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx$$

$$= -\frac{1}{26} (2-x^2)^{13} \Big|_0^1 = 315 \frac{1}{26}.$$

$$2269. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2+x+1}.$$

$$\text{解} \quad \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\frac{3}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

$$2270^+. \int_1^e (x \ln x)^2 dx.$$

解 $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$

$$= x^3 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x^2 \ln x \cdot (1 + \ln x) dx$$

$$= e^3 - 2 \int_1^e x^2 \ln x dx - 2 \int_1^e (x \ln x)^2 dx.$$

移项合并得

$$\int_1^e (x \ln x)^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{2}{9} x^3 \ln x - \frac{2}{27} x^3 \right) \Big|_1^e$$

$$= \frac{5}{27} e^3 - \frac{2}{27}.$$

$$2271. \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx.$$

解 设 $\sqrt[3]{1-x} = t$, 则

$$\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$$

$$= -3 \int_0^{-2} (t^3 - t^6) dt = -66 \frac{6}{7}.$$

$$2272^+. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1} = -\frac{\pi}{3}.$$

2273. $\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx.$

解 设 $1+3x^8=t$, 则 $24x^7 dx=dt$, $x^8=\frac{1}{3}(t-1)$.

于是,

$$\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx$$

$$= \frac{1}{72} \int_1^4 (t-1) t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{29}{270}.$$

2274. $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$

解 $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

$$= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{\sqrt{x} dx}{2(1+x)}$$

$$= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{1+t^2} \quad *) = \pi - (t - \arctan t) \Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

*) 设 $\sqrt{x}=t$.

2275. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} + \int_0^{\pi} \frac{dx}{2-\cos x} \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} \\
&= 4 \int_0^{\pi} \frac{dx}{4-\cos^2 x} - 6 \int_0^{\pi} \frac{dx}{9-\cos^2 x} \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x} \\
&\quad - 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{9\sin^2 x + 8\cos^2 x} \\
&= 8 \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad - 12 \frac{1}{3\sqrt{8}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3\operatorname{tg} x}{\sqrt{8}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).
\end{aligned}$$

$$2276. \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

*) 利用2035题的结果.

$$2277. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$\text{解} \quad \sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x) \cdot \sin 2x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} (\sin 6x - \sin 2x).$$

于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$$

$$= \left(-\frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

$$2278. \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx.$$

$$\text{解} \quad \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{x^2}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{6} - \frac{x}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos 2x dx \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2279. $\int_0^x e^x \cos^2 x dx,$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int_0^x e^x \cos^2 x dx &= \int_0^x \frac{e^x(1 + \cos 2x)}{2} dx \\
&= \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{10} (\cos 2x + 2 \sin 2x)^{*)} \Big|_0^x \\
&= \frac{3}{5} (e^x - 1).
\end{aligned}$$

*) 利用1828题的结果。

2280. $\int_0^{\ln 2} \text{sh}^4 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int_0^{\ln 2} \text{sh}^4 x dx &= \int_0^{\ln 2} \text{sh}^2 x \cdot (\text{ch}^2 x - 1) dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\ln 2} \text{sh}^2 2x dx - \int_0^{\ln 2} \text{sh}^2 x dx \\
&= \frac{1}{4} \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{8} \text{sh} 4x \right)^{*)} \Big|_0^{\ln 2} \\
&\quad - \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \text{sh} 2x \right)^{*)} \Big|_0^{\ln 2} \\
&= \frac{3}{8} \ln 2 - \frac{225}{1024}.
\end{aligned}$$

*) 利用1761题的结果.

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数 n 的积分.

$$2281. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I_n &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x) \\ &= - \sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \end{aligned}$$

移项合并得

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

利用上述递推公式即可求得

$$I_n = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{若 } n=2k, \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{若 } n=2k+1. \end{cases}$$

$$2282. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

解 设 $\frac{\pi}{2} - x = t$, 则 $dx = -dt$, 且

$$\cos x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \sin t.$$

代入得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

因此, 与2281题的结果相同.

$$2283. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x \cdot (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x d(\operatorname{tg} x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-2} x dx \\ &= \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}, \end{aligned}$$

即

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

由于 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$, 于是推得

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2n-3} - I_{n-2} \right) = \dots \\ &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - \dots + (-1)^n I_0 \\ &= (-1)^n \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right) \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \Big) \Big] .$$

$$2284. I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

解 设 $x = \sin t$, 代入得

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \\ &= 2^{2n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} . \end{aligned}$$

$$2285. I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

解 设 $x = \sin t$, 代入得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt .$$

因此, 与2281题的结果相同.

$$2286. I_n = \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx .$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I_n &= -\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln^n x \Big|_0^1 \\ &\quad - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx , \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{n}{n+1} I_{n-1} \\ &= \left(-\frac{n}{n+1}\right) \left(-\frac{n-1}{n}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}\right) I_0 . \end{aligned}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

$$2287. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx.$$

$$\text{解 } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-1} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left[\sec^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-1} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) d \left[\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - I_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2n} - I_{n-1},$$

即

$$I_n = -\frac{1}{2n} - I_{n-1}.$$

递推之，得

$$I_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n-2)} + \dots$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{1}{2} + (-1)^n I_0.$$

但

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) dx = -\ln \left| \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln \sqrt{2},$$

于是,

$$I_n = (-1)^n \left\{ -\ln \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] \right\}.$$

设 $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ 是实变数 x 的复函数, 其中 $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ 及 $i = \sqrt{-1}$, 则按定义有:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx.$$

显而易见

$$\operatorname{Re} \int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx,$$

$$\text{及} \quad \operatorname{Im} \int f(x) dx = \int \operatorname{Im} f(x) dx.$$

2288. 利用尤拉氏公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

证明:

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{若 } m = n. \end{cases}$$

(n 及 m 为整数).

证 当 $m = n$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

当 $m \neq n$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} (\cos nx + i \sin nx)(\cos mx - i \sin mx) dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx - i \int_0^{2\pi} \sin(m-n)x dx = 0.
 \end{aligned}$$

2289. 证明

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x} dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

(α 及 β 为常数)

证 $\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x} dx$

$$= \int_a^b e^{\alpha x} \cos \beta x dx + i \int_a^b e^{\alpha x} \sin \beta x dx$$

$$= \frac{e^{\alpha x} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x + i(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x))}{\alpha^2 + \beta^2} \Big|_a^b$$

$$= \frac{e^{\alpha x} (\alpha - i\beta)(\cos \beta x + i \sin \beta x)}{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)} \Big|_a^b$$

$$= \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta} \Big|_a^b = \frac{e^{(\alpha+i\beta)b} - e^{(\alpha+i\beta)a}}{\alpha+i\beta}.$$

利用尤拉氏公式:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

计算下列积分 (m 及 n 为正整数),

2290. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$.

解: 方法一: 记

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx,$$

易见 $I_0 = \frac{1}{4} I$, 其中

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx,$$

利用尤拉公式, 有

$$\begin{aligned} \sin^{2m} x \cos^{2n} x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^{2m} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2n} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{l=0}^{2m} (-1)^l c_{2m}^l e^{2(m-l)ix} \sum_{l=0}^{2n} c_{2n}^l e^{2(n-l)ix} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l e^{2(m+n-k-l)ix} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l [\cos 2(m+n-k-l)x + i \sin 2(m+n-k-l)x], \end{aligned}$$

今不妨设 $m \leq n^*$, 作积分计算, 则有

$$I = \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l \left(\int_0^{2\pi} \cos(m+n-k-l)x dx \right)$$

* 若 $m > n$ 作代换 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 即得。

$$\begin{aligned}
& -k-l) 2x dx + i \int_0^{2\pi} \sin(m+n-k-l) 2x dx \Big)^{1/2} \\
& = \frac{(-1)^n \pi}{2^{2m+2n-1}} \sum_{k+l=m+n} \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2m \\ 0 \leq l \leq 2n}} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l \\
& = \frac{(-1)^n \pi}{2^{2m+2n-1}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}
\end{aligned}$$

经计算, 可以验证有:

$$\begin{aligned}
& (-1)^n \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k} \\
& = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}.
\end{aligned}$$

于是得

$$I_0 = \frac{1}{4} I = \frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1} m!n!(m+n)!}.$$

方法二:

令 $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$. 显然

$$I_{m,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

* 用 $C_m^k C_{2n}^{m+n-k} = C_{2n}^m C_{2n}^n \left(C_{m+n}^n \right)^{-2} C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k}$, 以及由恒等式

$(1-x)^{m+n} (1+x)^{m+n} = (1-x^2)^{m+n}$ 展开, 取 x^{2m} 的系数的关系式

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k} = (-1)^m C_{m+n}^m \text{ 可以验证.}$$

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n-1} x dx \\
&= \frac{1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x d\sin^{2m+1} x \\
&= \frac{1}{2m+1} \cos^{2n-1} x \sin^{2m+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad - \frac{1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x d\cos^{2n-1} x \\
&= \frac{2n-1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2} x \cos^{2n-2} x dx \\
&= \frac{2n-1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x (1 - \cos^2 x) \cos^{2n-2} x dx \\
&= \frac{2n-1}{2m+1} I_{m,n-1} - \frac{2n-1}{2m+1} I_{m,n},
\end{aligned}$$

整理后得

$$I_{m,n} = \frac{2n-1}{2(m+n)} I_{m,n-1}.$$

由此不难得到

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{(2n-1)!!}{2^n(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)} I_{m,0} \\
&= \frac{(2n-1)!!m!}{2^n(m+n)!} \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi(2n-1)!!(2m-1)!!}{2^{n+m+1}(m+n)!}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1} m!n!(m+n)!}.$$

2291. $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx.$

解 设 $u = \frac{\sin nx}{\sin x}$, 利用尤拉公式得

$$u = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}}.$$

当 $n=2k$ 时,

$$\begin{aligned} u &= (e^{ikx} + e^{-ikx}) \cdot (e^{i(k-1)x} + e^{i(k-2)x} + \dots \\ &\quad + e^{-i(k-3)x} + e^{-i(k-1)x}) \\ &= e^{(2k-1)ix} + e^{(2k-3)ix} + \dots + e^{ix} + e^{-ix} \\ &\quad + \dots + e^{-(2k-1)ix} \\ &= 2[\cos(2k-1)x + \cos(2k-3)x + \dots + \cos x], \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u dx &= 2 \left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \frac{\sin(2k-3)x}{2k-3} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \sin x \right] \Big|_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

当 $n=2k+1$ 时, 同上得

$$u = 2[\cos 2kx + \cos 2(k-1)x + \dots + \cos 2x] + 1.$$

于是,

$$\int_0^\pi u dx = \pi.$$

最后得到

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数;} \\ \pi, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

$$2292. \int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} &= \frac{e^{i(2n+1)x} + e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix} + e^{-ix}} \\ &= e^{2nix} - e^{2(n-1)ix} + \cdots + (-1)^n + \cdots + e^{-2nix} \\ &= 2[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \cos 2x] + (-1)^n. \end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx = (-1)^n \pi.$$

$$2293. \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \cos^n x \cos nx &= \frac{1}{2^{n+1}} (e^{ix} + e^{-ix})^n (e^{inx} + e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2^n} \left[\cos 2nx + C_1^1 \cos 2(n-1)x + \cdots \right. \\ &\quad \left. + C_{n-1}^{n-1} \cos 2x + 1 \right]. \end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

$$2294. \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx.$$

解 方法一:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx \\
 &= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \int_0^{\pi} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k e^{i(n-2k)x} (e^{inx} - e^{-inx}) \right] dx \\
 &= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_0^{\pi} e^{i(2n-2k)x} dx - \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_0^{\pi} e^{-i2kx} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2^{n+1} i^{n+1}} \left[(-1)^n C_n^n \cdot \pi - (-1)^0 C_n^0 \pi \right] \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数;} \\ \frac{\pi}{2^n} \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

由于

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

于是,

$$\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx = \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

方法二:

设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx \, dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin \left(\frac{n\pi}{2} - nt \right) dt \\
&= \sin \frac{n\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos nt \, dt \\
&\quad - \cos \frac{n\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin nt \, dt \\
&= \sin \frac{n\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx \, dx \\
&= \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}$$

求下列积分 (n 为自然数):

2295. $\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x \, dx.$

$$\begin{aligned}
& \text{解 } \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x \, dx \\
&= \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x (\cos nx \cos x - \sin nx \sin x) \, dx \\
&= \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos nx \, d(\sin x) - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx \, dx \\
&= \left. \frac{\sin^n x \cos nx}{n} \right|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin^n x \, d(\cos nx) \\
&\quad - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx \, dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$2296. \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx.$$

解 考虑积分

$$I = \int_0^{\pi} \cos^{n+1} x \sin(n+1)x dx,$$

并对它作两次分部积分, 可得

$$I = I - \frac{n}{n+1} \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx.$$

于是,

$$\int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx = 0.$$

本题也可不用分部积分法. 事实上, $\cos^{n-1} x \cdot \sin(n+1)x$ 是以 π 为周期的函数, 又是奇函数, 于是

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx = 0. \end{aligned}$$

$$2297. \int_0^{2\pi} e^{-\alpha x} \cos^{2n} x dx.$$

解 方法一:

$$\cos^{2n} x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2n}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \left[c_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \cos 2(n-k)x \right].$$

于是

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos 2n x dx \\
 &= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ c_{2n}^n \cdot \int_0^{2\pi} e^{-ax} dx + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \right. \\
 &\quad \cdot \left. \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos 2(n-k) x dx \right\} \\
 &= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ -\frac{1}{a} c_{2n}^n e^{-ax} \Big|_0^{2\pi} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \right. \\
 &\quad \cdot \left. \frac{(2n-2k) \cdot \sin 2(n-k)x - a \cos 2(n-k)x}{a^2 + (2n-2k)^2} e^{-ax} \Big|_0^{2\pi} \right\} \\
 &= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ -\frac{1}{a} c_{2n}^n (e^{-2\pi a} - 1) - a(e^{-2\pi a} - 1) \right. \\
 &\quad \cdot \left. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2c_{2n}^k}{a^2 + (2n-2k)^2} \right\} \\
 &= \frac{1 - e^{-2\pi a}}{2^{2n} \cdot a} \left\{ c_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \right. \\
 &\quad \cdot \left. \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right\},
 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos 2n x dx \\
 &= \frac{1 - e^{-2\pi a}}{2^{2n} \cdot a} \cdot \left\{ c_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \right. \\
 &\quad \cdot \left. \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

方法二:

由于

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x} dx &= \frac{e^{(a+ik)x}}{a+ik} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{e^{2\pi a} - 1}{a+ik} = \frac{(e^{2\pi a} - 1)(a-ik)}{a^2 + k^2},\end{aligned}$$

取实部, 得

$$\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x} dx = \frac{a(e^{2\pi a} - 1)}{a^2 + k^2}$$

于是,

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos 2nx dx \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-ax} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{2\pi} e^{-ax} \left(\sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k e^{i(2n-2k)x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k \int_0^{2\pi} e^{-a+i(2n-2k)x} dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k \frac{e^{-2\pi a} - 1}{-a + i(2n-2k)} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k \frac{a(1 - e^{-2\pi a})}{a^2 + (2n-2k)^2} \\ &= \frac{1 - e^{-2\pi a}}{2^{2n} \cdot a} \left[c_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right].\end{aligned}$$

$$2298. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx$$

解 利用分部积分得

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx \\ &= \frac{1}{2n} \sin 2nx \cdot \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &+ \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \cdot \sin x}{\cos x} dx \\ &= 0^{*)} + \frac{1}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx \\ &- \frac{1}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx. \end{aligned}$$

对于上述等式右端的第二项和第三项的被积函数有下列等式:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} &= \frac{e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x}}{e^{ix} + e^{-ix}} \\ &= 2[\cos 2(n-1)x - \cos 2(n-2)x + \dots \\ &+ (-1)^{n-2} \cos 2x] + (-1)^{n-1}, \\ \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} &= 2[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \cos 2x] + (-1)^n. \end{aligned}$$

由于积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx dx \quad (k \text{ 为任意的正整数})$$

的值恒等于零，所以积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx \quad \text{及} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx$$

分别等于 $(-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}$ 及 $(-1)^n \frac{\pi}{2}$ 。

这样，我们得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx \\ &= \frac{1}{4n} \left[(-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} - (-1)^n \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{\pi}{4n} (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

*) 在 $x=0$ 处， $\sin 2nx \cdot \ln \cos x = 0$ ；而在 $x = \frac{\pi}{2}$

处，为“ $0 \cdot \infty$ ”型，采用洛比塔法则定值：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \sin 2nx \cdot \ln \cos x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \cos x}{\frac{1}{\sin 2nx}} \\ &= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin x \cdot \sin^2 2nx}{\cos x \cdot \cos 2nx} \\ &= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos x \cdot \sin^2 2nx + 4n \sin x \sin 2nx \cos 2nx}{-\sin x \cos 2nx - 2n \cos x \sin 2nx} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2299. 利用多次的部分积分法, 计算尤拉氏积分:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx,$$

式中 m 及 n 为正整数.

$$\begin{aligned} \text{解 } B(m, n) &= \frac{1}{m} x^m (1-x)^{n-1} \Big|_0^1 \\ &\quad + \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^m (1-x)^{n-2} dx \\ &= \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1). \end{aligned}$$

继续利用部分积分法, 可得

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)} \int_0^1 x^{m+n-2} dx \\ &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!} \\ &\quad \cdot \frac{1}{m+n-1} x^{m+n-1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}. \end{aligned}$$

2300. 勒让德多项式 $P_n(x)$ 被下面公式来定义:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n] \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

证明

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{若 } m=n. \end{cases}$$

证：当 $m \neq n$ 时，不失一般性，设 $n < m$ 。由于 $P_n(x)$ 为一 n 次的多项式，我们记

$$P_m(x) = R^{(m)}(x),$$

$$\text{其中 } R(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - 1)^n.$$

利用多次部分积分法得

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx \\ &= \left[P_n(x) R^{(n-1)}(x) - P_n'(x) R^{(n-2)}(x) + \dots \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{n-1} P_n^{(n-1)}(x) R(x) \right] \Big|_{-1}^1 \\ & \quad + (-1)^n \int_{-1}^1 R(x) P_n^{(n)}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

当 $m = n$ 时，

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \left[\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \right]^2 dx, \end{aligned}$$

设 $u = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$, $v = (x^2 - 1)^n$, 则

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \\ &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \left[uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v \right] \Big|_{-1}^1 + (-1)^n \int_{-1}^1 u v dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 v u^{(*)} dx \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \cdot \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} [(x^2-1)^n] dx \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \int_0^1 (1-x^2)^n dx \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}^{**)} = \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

*) 设 $x = \sin t$.

**) 利用2282题的结果.

2301. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积分, 函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 内除了有限个点 $c_i (i=1, \dots, p)$ 及点 a 与 b 外皆有 $F'(x) = f(x)$, 而在这除去的有限个点上 $F(x)$ 有第一类的间断点 (广义原函数). 证明

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= F(b-0) - F(a+0) \\
&\quad - \sum_{i=1}^p [F(c_i+0) - F(c_i-0)].
\end{aligned}$$

证 为确定起见, 设 $a < c_1 < c_2 < \dots < c_p < b$, 并记 $a = c_0$, $b = c_{p+1}$. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 故

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0+} \sum_{i=0}^p \int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x) dx.$$

显然, 在 $[c_i+\eta, c_{i+1}-\eta]$ 上 $F'(x) = f(x)$, 从而可

应用牛顿—莱布尼兹公式，得

$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x) dx = F(c_{i+1}-\eta) - F(c_i+\eta),$$

由此可知

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p-1} (F(c_{i+1}-\eta) - F(c_i+\eta)) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} (F(c_{i+1}-0) - F(c_i+0)) \\ &= F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^p \{F(c_i+0) \\ &\quad - F(c_i-0)\}. \end{aligned}$$

2302. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积分，而

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi) d\xi$$

为 $f(x)$ 的不定积分。证明函数 $F(x)$ 连续且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处有等式

$$F'(x) = f(x)$$

成立，问在函数 $f(x)$ 不连续点处函数 $F(x)$ 的导函数为何？

解 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，故必有界： $|f(x)| \leq M$ ($a \leq x \leq b$)。因此，对任何 $x \in [a, b]$ ，有

$$\begin{aligned} &|F(x+\Delta x) - F(x)| \\ &= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(\xi) d\xi \right| \leq M \cdot |\Delta x| \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时}). \end{aligned}$$

由此可知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

现设 $f(\xi)$ 在点 $\xi = x$ 处连续, 于是, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|\xi - x| < \delta$ 时, 恒有 $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$.

于是, 当 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时, 恒有

$$\left| \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} [f(\xi) - f(x)] d\xi \right|$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta x|} \varepsilon \cdot |\Delta x| = \varepsilon.$$

故 $F'(x)$ 存在, 且

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

而在不连续点处 $F'(x)$ 可能存在也可能不存在.

例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{当 } x \neq \frac{1}{n}, \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的可积性可仿2194题证明, 而且显然有

$$\int_0^x f(t) dt = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

然而在点 $x = \frac{1}{n}$ 处, $F(x) = C$ 的导函数 $F'(x)$

$=0$ 是存在的。

但函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, 它在 $[-1, 1]$ 上是可积的, 且

$$\int_0^x f(x) dx = |x|,$$

然而在点 $x=0$ 处, $F(x) = |x| + C$ 的导函数 $F'(x)$ 不存在。

求下列有界非连续函数的不定积分:

2303. $\int \operatorname{sgn} x dx.$

解 $\int \operatorname{sgn} x dx = \int_0^x \operatorname{sgn} x dx + C = |x| + C.$

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx.$

解 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 在任何有限区间上都可积, 故其

原函数 $F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上

的连续函数。对任何 x , 必存在唯一的整数 k 使 $k\pi \leq x < (k+1)\pi$ 。于是

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt \\ &= \int_0^{k\pi + \frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\sin t) dt + \int_{k\pi + \frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_{k\pi + \frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \arccos(\cos t) \Big|_{t=\frac{\pi}{2}}^x$$

$$= \frac{\pi}{2} + \arccos(\cos x) - \frac{\pi}{2}$$

$$= \arccos(\cos x).$$

故

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx = \arccos(\cos x) + C$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

2305. $\int [x] dx (x \geq 0).$

解 $\int [x] dx = C + \int_0^x [x] dx$

$$= C + \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} k dx + \int_{[x]}^x [x] dx$$

$$= C + \sum_{k=0}^{[x]-1} k + [x](x - [x])$$

$$= x \cdot [x] - \frac{[x]^2 + [x]}{2} + C.$$

2306. $\int x[x] dx (x \geq 0).$

解 $\int x[x] dx = C + \int_0^x x[x] dx$

$$= \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} k t dt + \int_{[x]}^x [x] t dt + C$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{[x]-1} \left(\frac{k k^2}{2} \right) \Big|_k^{k+1} + \frac{[x] t^2}{2} \Big|_{[x]}^x + C \\
&= \sum_{k=0}^{[x]-1} \left(k^2 + \frac{k}{2} \right) + \frac{[x](x^2 - [x]^2)}{2} + C \\
&= \frac{([x]-1)[x](2[x]-1)}{6} + \frac{[x]([x]-1)}{4} \\
&\quad + \frac{x^2[x] - [x]^3}{2} + C \\
&= \frac{x^2[x]}{2} \\
&\quad - \frac{6[x]^3 - 3[x]([x]-1) - 2[x]([x]-1)(2[x]-1)}{12} \\
&\quad + C \\
&= \frac{x^2[x]}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + C.
\end{aligned}$$

2307. $\int (-1)^{[x]} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int (-1)^{[x]} dx &= \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin \pi x) dx + C \\
&= \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) \Big|_0^{x^*} + C \\
&= \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) + C.
\end{aligned}$$

*) 利用2304题的结果.

2308. $\int_0^x f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$

$$\text{解 } \int_0^x f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^x f(x) dx$$

$$= \int_0^1 1 \cdot dx + \int_0^x 0 dx = 1 \quad (x \geq 1);$$

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x 1 \cdot dx = x \quad (|x| < 1),$$

$$\int_0^x f(x) dx$$

$$= - \int_x^{-1} f(x) dx - \int_{-1}^0 f(x) dx = -1 \quad (x \leq -1).$$

合并得

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2}(|1+x| - |1-x|).$$

计算下列有界非连续函数的定积分:

$$2309. \int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx.$$

$$\text{解 } \operatorname{sgn}(x-x^3) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x \in (1, 3) \text{ 时.} \end{cases}$$

于是,

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx = \int_0^1 dx - \int_1^3 dx = -1.$$

$$2310. \int_0^2 [e^x] dx.$$

$$\text{解 } \int_0^2 [e^x] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\ln 2} 1 dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2 \cdot dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} 3 \cdot dx \\
&\quad + \cdots + \int_{\ln 7}^2 7 \cdot dx \\
&= \ln 2 + 2(\ln 3 - \ln 2) + 3(\ln 4 - \ln 3) + \cdots \\
&\quad + 7(-\ln 7 + 2) \\
&= 14 - (\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln 7) \\
&= 14 - \ln 7!.
\end{aligned}$$

2311. $\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx \\
&= \int_1^2 \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_2^3 2 \sin \frac{\pi x}{6} dx + \cdots \\
&\quad + \int_5^6 5 \sin \frac{\pi x}{6} dx \\
&= \frac{30}{\pi}.
\end{aligned}$$

2312. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x) dx = -\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

2313. $\int_1^{n+1} \ln(x) dx$, 其中 n 为自然数.

$$\text{解} \quad \int_1^{n+1} \ln(x) dx$$

$$= \int_2^3 \ln 2 dx + \int_3^4 \ln 3 dx + \cdots + \int_n^{n+1} \ln n dx \\ = \ln n.$$

$$2314. \quad \int_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x)) dx.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x)) dx$$

$$= \int_{e^{-\pi}}^1 (-1) dx + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}} dx \\ = -1 + 2e^{-\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} e^{-(k-1)\pi} \\ = -1 + \frac{2e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1} = -th \frac{\pi}{2}.$$

2315. 求 $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$, 其中 E 为闭区间 $[0, 4\pi]$ 中使被积分式有意义的一切值所成之集合.

$$\text{解} \quad \int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx + \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x} dx$$

$$+ \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x) \sqrt{\sin x} dx \\
& = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx = \frac{8}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

§3. 中 值 定 理

1° 函数的平均值 数

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值.

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则可求得一点 $c \in (a, b)$ 适合

$$M[f] = f(c).$$

2° 第一中值定理 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上有界并可积分; (2) 当 $a < x < b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx,$$

式中 $m \leq \mu \leq M$ 及 $M = \sup_{a < x < b} f(x)$, $m = \inf_{a < x < b} f(x)$; (3) 除此而外, 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\mu = f(c)$, 其中 $a \leq c \leq b$ (编者注: 可以证明, c 可取值使 $a < c < b$).

3° 第二中值定理 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上有界并可积分; (2) 当 $a < x < b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 是单调的, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

$$= \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x)dx + \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x)dx,$$

式中 $a \leq \xi \leq b$; (3) 除此而外, 若函数 $\varphi(x)$ 单调下降 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a+0) \int_a^{\xi} f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

(3') 若函数 $\varphi(x)$ 单调上升 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b-0) \int_{\xi}^b f(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2316. 确定下列定积分的符号;

$$(a) \int_0^{2\pi} x \sin x dx,$$

$$(b) \int_0^{2\pi} -\frac{\sin x}{x} dx;$$

$$(c) \int_{-2}^2 x^3 2^x dx;$$

$$(d) \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx.$$

解 (a) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$

$$= \int_0^{\pi} x \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_0^{\pi} (t+\pi) \sin t dt$$

$$= -\pi \int_0^{\pi} \sin x dx < 0.$$

(6) 由第一中值定理知

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+\pi} dt \\
 &= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x(x+\pi)} dx \\
 &= \frac{\pi^2 \sin c}{c(c+\pi)} > 0,
 \end{aligned}$$

其中 $0 < c < \pi$.

(B) 由第一中值定理知

$$\begin{aligned}
 & \int_{-2}^2 x^3 e^x dx \\
 &= \int_{-2}^0 x^3 e^x dx + \int_0^2 x^3 e^x dx \\
 &= \int_2^0 t^3 e^{-t} dt + \int_0^2 x^3 e^x dx \\
 &= \int_0^2 x^3 (e^x - e^{-x}) dx = 2c^3 (e^c - e^{-c}) > 0,
 \end{aligned}$$

其中 $0 < c < 2$.

$$\begin{aligned}
 (r) \quad & \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx \\
 &= \frac{1}{2} c^2 \ln c < 0 \quad (\text{其中 } \frac{1}{2} < c < 1)
 \end{aligned}$$

2317. 于下列各题中确定那个积分较大:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \text{ 或 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx?$$

$$(b) \int_0^1 e^{-x} dx \text{ 或 } \int_0^1 e^{-x^2} dx?$$

$$(B) \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \text{ 或 } \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx?$$

解 (a) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $0 < \sin x < 1$ 从而

$$0 < \sin^{10} x < \sin^2 x,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

(b) 当 $0 < x < 1$ 时, $x > x^2$, 从而

$$e^{-x} < e^{-x^2},$$

于是

$$\int_0^1 e^{-x} dx < \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

$$(B) \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-(\pi+x)^2} \cos^2 x dx < \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

2318. 求下列已知函数在所给区间内的平均值:

(a) $f(x) = x^2$ 在 $[0, 1]$ 上;

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, 100]$ 上;

(B) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上;

(r) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上.

解 (a) $M(f) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3};$

(b) $M(f) = \frac{1}{100} \int_0^{100} \sqrt{x} dx = 6\frac{2}{3};$

(B) $M(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (10 + 2\sin x + 3\cos x) dx$
 $= 10;$

(r) $M(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin(x + \varphi) dx$
 $= \frac{1}{2} \cos \varphi.$

2319. 求椭圆之焦径

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

之长的平均值.

解 设 $\varphi = \pi + t$, 则

$$\begin{aligned} M(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{p}{1 + \varepsilon \cos t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{p}{2\pi} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad *) \end{aligned}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{1-e^2}} = b,$$

其中 b 为椭圆的短半轴.

*) 利用2213题的结果.

2320. 求初速度为 v_0 之自由落体的速度之平均值.

解 自由落体的速度为 $v = v_0 + gt$, 从 $t = 0$ 到 $t = T$ 时间内的速度的平均值

$$\begin{aligned} M(v) &= \frac{1}{T} \int_0^T (v_0 + gt) dt = \frac{1}{2} gT + v_0 \\ &= \frac{1}{2} (v_0 + v_T). \end{aligned}$$

物理意义: 平均速度等于初速与末速之和的一半.

2321. 电流的强度依下面的规律变化

$$i = i_0 \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right),$$

其中 i_0 表振幅, t 表时间, T 表周期, φ 表初相, 求电流强度之平方的平均值.

$$\begin{aligned} \text{解 } M(i^2) &= \frac{1}{T} \int_0^T i_0^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) dt \\ &= \frac{i_0^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sin 2 \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) \right] \Big|_0^T = \frac{i_0^2}{2}. \end{aligned}$$

将上式开平方, 即得电流的有效值 $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

2322. 命 $\int_0^x f(t)dt = xf(\theta x)$, 求 θ , 设,

(A) $f(t) = t^n$ ($n > -1$); (B) $f(t) = \ln t$;

(B) $f(t) = e^t$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \theta$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta$ 等于甚么?

解 (A) $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, 从而

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta^n x^{n+1}.$$

于是

$$\theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \int_0^x f(t)dt &= \int_0^x \ln t dt = t(\ln t - 1) \Big|_0^x \\ &= x(\ln x - 1), \end{aligned}$$

从而

$$x(\ln x - 1) = x \ln \theta x,$$

于是

$$\theta = \frac{1}{e}.$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \int_0^x f(t)dt &= \int_0^x e^t dt = e^t \Big|_0^x = e^x - 1, \text{ 从而} \\ e^x - 1 &= x e^{\theta x}, \end{aligned}$$

于是

$$\theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ，故当 $x \rightarrow 0$ 时， $\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$ 是

$\frac{0}{0}$ 型未定形。因此

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \theta &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} \right] \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1 + xe^x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-x} \frac{e^x - 1}{x} + 1} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1,\end{aligned}$$

于是，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2} \text{ 及 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta = 1.$$

利用第一中值定理估计积分：

$$2323. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x}.$$

解 由于

$$\frac{1}{1+0.5} \leq \frac{1}{1+0.5\cos x} \leq \frac{1}{1-0.5},$$

即

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1}{1+0.5\cos x} \leq 2.$$

于是

$$\frac{4\pi}{3} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5\cos x} \leq 4\pi,$$

即

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5\cos x} = \frac{8\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3}\theta \quad (|\theta| \leq 1).$$

2324. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$

解 由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leq x^9$ ($0 \leq x \leq 1$), 从而,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx &\leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \\ &\leq \int_0^1 x^9 dx, \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leq \frac{1}{10}.$$

2325. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad I &= \int_0^{50} \frac{e^{-x}}{x+100} dx + \int_{50}^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx \\
 &= \frac{1}{100+\xi_1} \int_0^{50} e^{-x} dx + \frac{1}{100+\xi_2} \int_{50}^{100} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}, \text{ 其中 } 0 \leq \xi_1 \leq 50, \\
 &\quad 50 \leq \xi_2 \leq 100.
 \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned}
 &\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2} \\
 &\leq \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_1} \\
 &= \frac{1-e^{-100}}{100+\xi_1} < \frac{1}{100}, \\
 &\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2} \\
 &> \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} > \frac{1-e^{-50}}{150} > \frac{1}{200},
 \end{aligned}$$

故 $\frac{1}{200} < I < \frac{1}{100}$, 即 $I = 0.01 - 0.005\theta$, $0 < \theta < 1$.

另外, 按中值定理, 可写

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx = \frac{1}{\xi+100} \int_0^{100} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{\xi+100} \left(1 - \frac{1}{e^{100}} \right),
 \end{aligned}$$

其中 $0 \leq \xi \leq 100$, 如果改写 I 为

$$I = 0.01 - 0.005\theta,$$

则有

$$\theta = f(\xi) = \frac{2}{100 + \xi} \left(\xi + \frac{100}{e^{100}} \right).$$

易见导数

$$f'(\xi) = \frac{200(1 - e^{-100})}{(100 + \xi)^2} > 0,$$

$f(\xi)$ 单调上升, 故在 $[0, 100]$ 上有 $f(0) \leq f(\xi) \leq f(100)$, 也即有

$$\frac{2}{e^{100}} \leq \theta \leq 1 + \frac{1}{e^{100}}.$$

根据前面的估计 $0 < \theta < 1$, 综合起来, 便有

$$\frac{2}{e^{100}} \leq \theta < 1.$$

这个结果比原来的估计又好了一些. 如果更精确一些, 采用些近似计算方法, 还可进一步明确 θ 的数值范围. 此处从略.

2326. 证明等式

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0; \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi_n} \int_0^1 x^n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi_n} \cdot \frac{1}{n+1} = 0; \end{aligned}$$

(6) 任意给定 $\varepsilon > 0$, 且设 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right). \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述不等式的第二项趋于零, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

2327. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且在 (a, b) 上可微分, 并且

$$\varphi'(x) \geq 0 \quad \text{当} \quad a < x < b.$$

应用部分积分法及第一中值定理以证明第二中值定理.

证 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \int_a^b \varphi(x) dF(x) \\ &= F(x) \varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) \varphi'(x) dx \\ &= F(b) \varphi(b) - F(a) \varphi(a) - F(\xi) \int_a^b \varphi'(x) dx \\ &= F(b) \varphi(b) - F(a) \varphi(a) - F(\xi) [\varphi(b) - \varphi(a)]^{**}) \\ &= \varphi(b) [F(b) - F(\xi)] + \varphi(a) [F(\xi) - F(a)] \\ &= \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx + \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx. \end{aligned}$$

*) 一般数学分析中已有第二中值定理的证明, 本题限用部分积分法证明, 应加 $\varphi'(x)$ 在 (a, b) 上连续的条件.

利用第二中值定理, 估计积分:

$$2328. \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解 设 $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[100\pi, 200\pi]$ 上满足第二中值定理的条件, 又 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ 单调下降且不为负, 于是,

$$\begin{aligned} \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx \\ &= \frac{1 - \cos \xi}{100\pi} = \frac{\sin^2 \frac{\xi}{2}}{50\pi} = \frac{\theta}{50\pi}, \end{aligned}$$

其中 $100\pi \leq \xi \leq 200\pi$ 及 $0 \leq \theta \leq 1$.

$$2329. \int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx \quad (a \geq 0; 0 < a < b).$$

解 设 $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$, 同上题, 有

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx &= \frac{e^{-a\xi}}{a} \int_a^{\xi} \sin x dx \\ &= \frac{1}{ae^{a\xi}} (\cos a - \cos \xi) \\ &= -\frac{2}{a} e^{-a\xi} \sin \frac{a+\xi}{2} \sin \frac{a-\xi}{2} = \frac{2}{a} \theta, \end{aligned}$$

其中 $a \leq \xi \leq b$ 及 $|\theta| < 1$.

$$2330. \int_a^b \sin x^2 dx \quad (0 < a < b).$$

解 设 $x = \sqrt{t}$. 则

$$\int_a^b \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

其次, 设 $f(t) = \sin t$, $\varphi(t) = (\sqrt{t})^{-1}$, 则 $\varphi(t)$ 单调下降, 且 $\varphi(t) > 0$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{2a} \int_{a^2}^{\xi} \sin t dt \\ &= \frac{1}{2a} (\cos a^2 - \cos \xi) = \frac{1}{a} \sin \frac{\xi + a^2}{2} \sin \frac{\xi - a^2}{2} \\ &= \frac{1}{a} \theta, \end{aligned}$$

其中 $a^2 \leq \xi \leq b^2$, $|\theta| \leq 1$. 所以

$$\int_a^b \sin x^2 dx = \frac{\theta}{a} \quad (|\theta| \leq 1).$$

2331. 设函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 和它们的平方在区间 (a, b) 上可积分. 证明哥西—布尼雅可夫斯基不等式

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx.$$

证 证法一: 我们有

$$\left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b \psi^2(x) dx \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b \psi^2(y) dy \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\int_a^b \psi^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b \varphi^2(y) dy \right) \\
&- \left(\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b \varphi(y) \psi(y) dy \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \int_a^b [\varphi(x) \psi(y) - \psi(x) \varphi(y)]^2 dx \right\} dy \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

故

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \cdot \int_a^b \psi^2(x) dx,$$

证法二：考虑积分

$$\int_a^b [\varphi(x) - \lambda \psi(x)]^2 dx,$$

其中 λ 为任意实数，从而

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \varphi^2(x) dx - 2\lambda \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \\
&+ \lambda^2 \int_a^b \psi^2(x) dx \geq 0.
\end{aligned}$$

这是关于变数 λ 的不等式，左端是二次三项式，于是其判别式

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right\}^2 - \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx \leq 0$$

$$\int_a^b \psi^2(x) dx \leq 0,$$

即

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \right\}^2 \\ \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \cdot \int_a^b \psi^2(x) dx.$$

2332. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续可微分且 $f(a) = 0$, 证明不等式

$$M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx,$$

其中 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

证 设 x 为 $[a, b]$ 上任一点, 则利用哥西—布尼雅可夫斯基不等式得到

$$\left\{ \int_a^x f'(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^x 1 \cdot dx \cdot \int_a^x f'^2(x) dx,$$

即

$$f^2(x) = [f(x) - f(a)]^2 \leq (x-a) \int_a^x f'^2(x) dx \\ \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx.$$

由此可知

$$M^2 = \sup_{x \in [a, b]} f^2(x) \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx.$$

2333. 证明等式;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

证 证法一：应用第一中值定理，知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \xi_n}{\xi_n} \cdot p = 0,$$

其中 ξ_n 为界于 n 与 $n+p$ 之间的某值。

证法二：应用第二中值定理，得

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \frac{1}{n} \left| \int_n^{\xi'_n} \sin x dx \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \cos n - \cos \xi'_n \right| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

其中 ξ'_n 是界于 n 与 $n+p$ 之间的某值。于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

§4. 广义积分

1° 函数的广义可积分性 若函数 $f(x)$ 于每一个有穷区间 $[a, b)$ 上依寻常的意义是可积分的，则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

若函数 $f(x)$ 于点 b 的邻域内无界且于每一个区间 $(a, b-\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) 内依寻常的意义是可积分的，则取

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (2)$$

若极限(1)或(2)存在, 则对应的积分称为收敛的, 在相反的情形则称为发散的.

2° 哥西准则 积分(1)收敛的充要条件为对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在有数 $b = b(\varepsilon)$, 当 $b' > b$ 及 $b'' > b$ 时, 下面的不等式成立

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

同样地对形状为(2)的积分可述出哥西准则.

3° 绝对收敛的判别法 若 $|f(x)|$ 是广义可积分的, 则函数 $f(x)$ 的对应的积分(1)或(2)称为绝对收敛的, 而且显然也是收敛的积分.

比较判别法 I. 设当 $x \geq a$ 时 $|f(x)| \leq F(x)$.

若 $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛.

比较判别法 II. 若 $\varphi(x) > 0$ 及当 $x \rightarrow +\infty$ 时,
 $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$,

则积分 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 及 $\int_a^{+\infty} \psi(x) dx$ 同时收敛或同时发散.

就特别情形来说, 若当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则上面的结果也成立.

比较判别法 III. (a) 设当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

在这种情况下, 当 $p > 1$ 时, 积分(1)收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 积分(1)发散.

(6) 设当 $x \rightarrow b-0$ 时,

$$f(x) = O^*\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right].$$

在这种情况下, 当 $p < 1$ 时, 积分 (2) 收敛; 当 $p \geq 1$ 时, 积分 (2) 发散.

4° 收敛性的较精密的判别法 若 (1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 单调地趋近于零; (2) 函数 $f(x)$ 有有界的原函数

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

收敛, 但一般地说, 并非绝对收敛.

特殊情形, 若 $p > 0$, 则积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ 及 } \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

收敛.

5° 在哥西意义上的主值 若函数 $f(x)$ 对任意的 $\varepsilon > 0$ 积分

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \text{ 及 } \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (a < c < b)$$

存在, 则在哥西意义上的主值 ($V.P.$) 为

$$V.P. \int_a^b f(x)dx$$

$$= \lim_{c \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-0} f(x) dx + \int_{c+0}^b f(x) dx \right],$$

相仿地, $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$

计算下列积分:

2334. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0).$

解 由于

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a},$$

所以

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}.$$

2335. $\int_0^1 \ln x dx.$

解 由于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon - 1) = -1,$$

所以

$$\int_0^1 \ln x dx = -1.$$

2336. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

解 由于

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

$$2337. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon' \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [-\arcsin(-1+\varepsilon)] + \lim_{\varepsilon' \rightarrow +0} \arcsin(1-\varepsilon') \\ &= \pi, \end{aligned}$$

所以

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

$$2338. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} \right) \Big|_2^b \\ &= \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{b-1}{b+2} + 2 \ln 2 \right) = \frac{2}{3} \ln 2, \end{aligned}$$

所以

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{2}{3} \ln 2.$$

$$2339. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2a+1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \\ & \quad + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2b+1}{\sqrt{3}} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \\ &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用1921题的递推公式.

$$2340. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

解 由于

$$\begin{aligned}
& \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^3} \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]^{*}) \Big|_0^b \\
&= -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用1881题的结果.

$$2341. \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

解 由于

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow +0}} \int_a^b \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \\
&= \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow +0}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \right)^{*}) \Big|_a^b = \frac{\pi}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*) 利用1712题的结果.

$$2342. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

解 先求 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. 设 $\sqrt{1-x}=t$, 则

$$x=1-t^2, \quad dx=-2t dt, \quad 2-x=1+t^2.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= -2 \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -2 \operatorname{arctg} t + C = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{1-x} + C. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-2 \operatorname{arctg} \sqrt{1-x} \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) \\ &= -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{1-(1-\varepsilon)} - \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2}.$$

2343. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$

解 设 $\sqrt{1+x^5+x^{10}}=t-x^5$. 则当 $1 \leq x < +\infty$ 时,
 $1+\sqrt{3} \leq t < +\infty$. 代入得

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$$

$$= \frac{2}{5} \int_{1+\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{5} \ln \frac{t-1}{t+1} \Big|_{1+\sqrt{3}}^{+\infty} \quad *)$$

$$= \frac{1}{5} \ln 1 - \frac{1}{5} \ln \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

*) 牛顿—莱不尼兹公式对于广义积分也成立。例如

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty},$$

其中 $F(+\infty)$ 是一个符号，代表 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ (假定此极限存在有限)，下同，不再说明。

2344. $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

解 我们有

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty}} \int_x^x \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left\{ -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right\} \Big|_{\varepsilon}^b \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left\{ -\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{\ln \varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{b^2}{b^2+1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \ln \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1} \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2+1)} \ln \varepsilon + \frac{1}{4} \ln(\varepsilon^2+1) \right\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = 0.$$

注 $\varepsilon \rightarrow +0$ 与 $b \rightarrow +\infty$ 的极限过程是独立的, 因此可分别取极限.

2345. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

解 设 $x = \operatorname{tg} t$, 则

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sec^2 t dt}{\sec^3 t} \\
&= (t \sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

2346. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0).$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \\
 &= \left(\frac{-a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right)^{*}) \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{a}{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

*) 利用1828题的结果.

$$2347. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \\
 &= \left(\frac{-a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right)^{*}) \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{b}{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

*) 利用1829题的结果.

利用递推公式计算下列广义积分(n 为自然数):

$$2348. I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad I_n &= \int_0^{+\infty} x^n d(-e^{-x}) \\
 &= -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} \, dx \\
 &= n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} \, dx = n I_{n-1},
 \end{aligned}$$

即 $I_n = nI_{n-1}$. 利用此递推公式及

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

容易得到

$$I_n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 I_0 = n!$$

$$2349^+. \quad I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^n} \quad (ac - b^2 > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad I_n &= \frac{ax+b}{2(n-1)(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)^{n-1}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{a}{2(ac-b^2)} I_{n-1} \quad *) \\ &= \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{a}{ac-b^2} I_{n-1}, \end{aligned}$$

即

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{a}{ac-b^2} I_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} \\ &= \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{|a|\left(x + \frac{b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\pi \operatorname{sgn} a}{\sqrt{ac-b^2}}. \end{aligned}$$

利用递推公式及 I_1 容易得到

$$I_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

*) 利用1921题的结果.

$$2350^+ \quad I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

解 由于 $x^{n+1} \cdot \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} \longrightarrow 1$ (当 $x \rightarrow$

$+\infty$ 时), 且 $n+1 > 1$, 所以积分 I_n 收敛.

其次, 我们来计算 I_n . 由于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\ &= \frac{1}{n!x} - \frac{1}{(n-1)! (x+1)} + \frac{1}{2!(n-2)! (x+2)} \\ & \quad - \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)! (x+k)} \\ & \quad + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n! (x+n)}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!} \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{dx}{x+k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln(x+k) \Big|_1^{+\infty}, \end{aligned}$$

其中 C_n^k 为从 n 个元素中每次取 k 个的组合数.

对于 n , 不论是偶数还是奇数, 用上限代入 (此处理解为趋近于无穷时的极限) 后均为零. 事实上,

当 $n=2m$ 时,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k) \\ &= \ln \frac{x \cdot (x+2)^{C_{2m}^2} \cdots (x+2m)^{C_{2m}^{2m}}}{(x+1)^{C_{2m}^1} (x+3)^{C_{2m}^3} \cdots (x+2m-1)^{C_{2m}^{2m-1}}} \end{aligned}$$

由于

$$1 + C_{2m}^2 + \cdots + C_{2m}^{2m} = C_{2m}^1 + C_{2m}^3 + \cdots + C_{2m}^{2m-1},$$

所以, 当 $m \rightarrow +\infty$ 时

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k) \rightarrow \ln 1 = 0;$$

当 $n=2m-1$ 时,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k C_{2m-1}^k \ln(x+k) \\ &= \ln \frac{x(x+2)^{C_{2m-1}^2} \cdots (x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-2}}}{(x+1)^{C_{2m-1}^1} (x+3)^{C_{2m-1}^3} \cdots (x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-1}}} \\ & \rightarrow 0 \quad (\text{当 } m \rightarrow +\infty \text{ 时}). \end{aligned}$$

最后我们得到

$$I_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} C_n^k \ln(1+k).$$

2351. $I_0 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$

解 由于 $\sqrt{1-x} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \rightarrow \frac{1}{2}$

(当 $x \rightarrow 1-0$ 时),

且 $p = \frac{1}{2} < 1$, 所以积分 I_n 收敛.

其次, 设 $x = \sin t$, 则

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n=2k \text{ 时;}^*) \\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时.} \end{cases}$$

*) 利用 2281 题的结果.

$$2352. \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$$

解 设 $x = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$, 则

$$\text{当 } 0 \leq x < +\infty \text{ 时, } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi,$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \, du \\ &= \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n=2k \text{ 时;}^*) \\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

*) 利用 2282 题的结果.

$$2353. \quad (\text{a}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx; \quad (\text{b}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx.$$

解 先证明它们是收敛的. 事实上, 当 $x \rightarrow +0$ 时, $\sqrt{x} \cdot \ln \sin x \rightarrow 0$, 所以, 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

收敛。

同法可证积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx$$

也收敛。

其次，求这两个积分的值。设 $t = \frac{\pi}{2} - x$ ，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = A.$$

相加得

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x + \ln \cos x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx - \ln 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t \, dt \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt - \frac{\pi}{2} \ln 2 \\ &= A - \frac{\pi}{2} \ln 2, \end{aligned}$$

于是, $2A = A - \frac{\pi}{2} \ln 2$, $A = -\frac{\pi}{2} \ln 2$, 即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

2354. 求:

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} \, dx,$$

其中 E 表区间 $(0, +\infty)$ 中使被积分式有意义的一切 x 值所成之集合.

解 $\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} \, dx$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} \, dx, *$$

对于广义积分 $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} \, dx$

作如下处理:

$$\begin{aligned} & \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} \, dx \\ &= \int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} \, dx + \\ & \quad + \int_{(2k+\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx \end{aligned}$$

* 记号 $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ 理解为极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n S_k$, 以后题解中不再说明.

$$\begin{aligned}
&= 2e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} \Big|_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{2})\pi} - 2e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} \Big|_{(2k+\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \\
&= 2\sqrt[4]{8} \cdot e^{-k\pi} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}}.
\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{i=0}^n 2\sqrt[4]{8} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}} e^{-k\pi} = 2\sqrt[4]{8} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 上式的极限为 $2\sqrt[4]{8} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}}$.

于是,

$$\int_0^{\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx = \frac{2\sqrt[4]{8} e^{-\frac{\pi}{8}}}{1 - e^{-\pi}}.$$

2355. 证明等式

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx,$$

其中 $a > 0$, $b > 0$ (假定等式左端的积分有意义).

证 设 $ax - \frac{b}{x} = t$, 则

当 $0 < x < +\infty$ 时, $-\infty < t < +\infty$,

$$ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2 + 4ab}.$$

将此二式相加得

$$x = \frac{1}{2a} (t + \sqrt{t^2 + 4ab}).$$

从而有

$$dx = \frac{1}{2a} \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt.$$

代入欲证的等式左端, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \\ &\quad \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t + \sqrt{t^2 + 4ab} + t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt, \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx.$$

2356. 数

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的平均值, 求下列函数的平均值:

$$(a) f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2});$$

$$(b) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x; \quad (B) f(x) = \sqrt{x} \sin x.$$

解 (a) 由于

$$\begin{aligned} & \int_0^x [\sin^2 \xi + \cos^2(\xi\sqrt{2})] d\xi \\ &= \int_0^x \left[\frac{1 - \cos 2\xi}{2} + \frac{1 + \cos(2\xi\sqrt{2})}{2} \right] d\xi \\ &= x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin(2x\sqrt{2}), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} M[f] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x [\sin^2 \xi + \cos^2(\xi\sqrt{2})] d\xi \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{4x} \sin 2x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4x\sqrt{2}} \sin(2x\sqrt{2}) \right] \\ &= 1; \end{aligned}$$

$$(b) M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \xi d\xi$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left[x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} \\
&= \frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2(1+x^2)} = \frac{\pi}{2};
\end{aligned}$$

(B) 利用第二中值定理, 得

$$\int_0^x \sqrt{\xi} \sin \xi \, d\xi = \sqrt{x} \int_c^x \sin \xi \, d\xi$$

$$= \sqrt{x} (\cos c - \cos x) \quad (0 \leq c \leq x),$$

于是,

$$\begin{aligned}
M[f] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{\xi} \sin \xi \, d\xi \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos c - \cos x}{\sqrt{x}} = 0.
\end{aligned}$$

2357. 求:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt; \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}};$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{a+1}} dt,$$

其中 $a > 0$, $f(t)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数.

解 (a) 由于

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1,$$

所以

$$\int_x^1 \frac{1 - \frac{t^2}{2}}{t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{dt}{t^2},$$

计算得

$$-\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \leq -1 + \frac{1}{x}.$$

又由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left(-\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \right) = 1$$

及

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left(-1 + \frac{1}{x} \right) = 1,$$

故最后得到

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = 1;$$

(6) 由于

$$t^2 < \sqrt{1+t^4},$$

所以

$$\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt > \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

从而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt \rightarrow +\infty$.

利用洛比塔法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3};$$

(B) 由于 $\lim_{t \rightarrow +0} t \cdot (t^{-1} e^{-t}) = 1$ ，故广义积分

$\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt$ 发散，从而，所求的极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。利用洛比塔法则，得

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-e^{-x} \cdot x^{-1}}{-\frac{1}{x}} = 1;$$

(r) 由于 $f(t)$ 在 $t=0$ 处右连续，故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，总存在 $\delta' > 0$ ，使当 $0 < t < \delta'$ 时，恒有

$$|f(t) - f(0)| < \frac{\alpha \varepsilon}{2}.$$

今又取 $0 < \delta < \delta'$ ，使当 $0 < x < \delta$ 时，有

$$\left| x^\alpha \int_{\delta'}^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{\alpha+1}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $0 < x < \delta$ 时，就有

$$\begin{aligned} & \left| x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{\alpha+1}} dt \right| \\ &= \left| x^\alpha \int_x^{\delta'} \frac{f(t) - f(0)}{t^{\alpha+1}} dt \right. \\ & \quad \left. + x^\alpha \int_{\delta'}^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{\alpha+1}} dt \right| \\ &\leq \frac{\alpha \varepsilon}{2} \cdot x^\alpha \int_x^{\delta'} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} x^a \left(\frac{1}{x^a} - \frac{1}{\delta'^a} \right) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{a+1}} dt = 0,$$

最后得到

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{a+1}} dt &= \lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(0)}{t^{a+1}} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} x^a f(0) \left[-\frac{1}{a} t^{-a} \right] \Big|_x^1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} x^a f(0) \left(-\frac{1}{ax^a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{f(0)}{a}. \end{aligned}$$

*) 原题(B) (Γ)中 $x \rightarrow +0$ 误印为 $x \rightarrow 0$.
研究下列积分的收敛性:

$$2358. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$$

解 由于 $x^2 \cdot \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时),

所以积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ 收敛.

$$2359. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}.$$

解 由于 $x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时),

所以积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}$ 收敛.

$$2360. \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

解 当 $0 < x < 1$ 时 $\ln x < 0$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \cdot \frac{1}{-\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-1}{-\frac{1}{x}} = 1,$$

所以积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ 发散, 从而积分 $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ 也发散.

$$2361. \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

解 将积分分成 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$
 $+ \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$

对于积分 $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$. 由于

$$x^{1-p} \cdot (x^{p-1} e^{-x}) \longrightarrow 1 \quad (\text{当 } x \rightarrow +0 \text{ 时}),$$

故当 $p > 0$ 时 (从而 $1-p < 1$), 积分 $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ 收敛.

对于积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$. 由于

$$x^2 \cdot (x^{p-1} e^{-x}) = \frac{x^{p+1}}{e^x} \longrightarrow 0 \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故对于一切 p 值, 积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 恒收敛.

于是, 当 $p > 0$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

收敛.

2362. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$

解 将积分分成 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$
 $+ \int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$

对于积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{-q} \cdot x^p \ln^q \frac{1}{x} &= \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} x^p \left(\frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} \right)^q \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} \right)^q = \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-1} \right)^q = 1, \end{aligned}$$

故 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 当 $-q < 1$ (即 $q > -1$) 时收敛,

当 $-q \geq 1$ (即 $q \leq -1$) 时发散. 于是, 当 $q \leq -1$

时, $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 必发散. 故下面可在 $q > -1$ 的假

定下来讨论 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$.

若 $p > -1$, 可取 $r > 0$ 充分小, 使 $p-r > -1$.
于是

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{-p+r} \cdot x^p \ln^q \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^q}{\left(\frac{1}{x}\right)^r} = 0.$$

由于 $p+r < 1$, 故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 收敛;
若 $p \leq -1$ (设 $q > -1$), 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1} \ln^q \frac{1}{x} dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q d\left(\ln \frac{1}{x}\right) \\ &= - \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{q+1}}{q+1} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = +\infty, \end{aligned}$$

故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 发散.

总之, 仅当 $p > -1$ 且 $q > -1$ 时积分

$$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx \text{ 收敛.}$$

2363. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$. 由于

$$x^{-n} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \longrightarrow 1 \quad (\text{当 } x \rightarrow +0 \text{ 时}),$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 仅当 $-m < 1$, 即仅当 $m > -1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$. 由于

$$x^{n-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \longrightarrow 1 \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ 仅当 $n-m > 1$ 时收敛.

于是, 当 $m > -1$ 且 $n-m > 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx \quad (n \geqslant 0)$$

收敛.

2364. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0).$

解 由于 $\operatorname{arctg} ax = -\operatorname{arctg}(-ax)$, 故可设 $a > 0$,

先考虑积分 $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^{n-1} \cdot \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{a}{1+a^2 x^2}}{1} = a, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx$ 仅当 $n-1 < 1$ 即当 $n < 2$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx$. 由于

$$x^n \cdot \frac{\operatorname{arctg} ax}{x'} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx$ 仅当 $n > 1$ 时收敛.

于是, 仅当 $1 < n < 2$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} dx \quad (a \neq 0)$$

收敛.

2365. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$

解 先考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$. 当 $n > 1$ 时, 取

$a > 0$ 充分小, 使 $n-a > 1$. 由于

$$x^{n-a} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \frac{\ln(1+x)}{x^a} \rightarrow 0$$

(当 $x \rightarrow +\infty$ 时),

故此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 收敛. 当 $n \leq 1$ 时,

由于

$$x^n \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^n} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 发散.

再考虑积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{n-1} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 仅当 $n-1 < 1$ 即当 $n < 2$ 时

收敛.

于是, 仅当 $1 < n < 2$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$$

收敛.

2366. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^2} dx \quad (n \geq 0).$

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^2} dx$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{-m-1} \cdot \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{1}{2},$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^2} dx$ 仅当 $-m-1 < 1$ 即当

$m > -2$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^2} dx$. 由于

$$x^{n-m} \cdot \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^2}$$

$$= \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{2+x^2} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{2+x^2} dx$ 仅当 $n-m > 1$ 时收敛。

于是，仅当 $m > -2$ 且 $n-m > 1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^2} \quad (n \geq 0)$$

收敛。

2367. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$

解 当 $a \neq 0$ 时，设 $f(x) = \cos ax$, $g(x) = \frac{1}{1+x^n}$,

则对于任意的 $A > 0$, 均有 $\left| \int_0^A f(x) dx \right| \leq \frac{2}{a}$; 其次,

当 $n > 0$ 时, $g(x)$ 单调下降且趋于零 ($n \rightarrow +\infty$).

从而得知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$$

收敛。至于当 $n = 0$ 时，积分显然发散。

当 $a = 0$ 时，由于

$$x^n \cdot \frac{1}{1+x^n} \longrightarrow 1 \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$ 仅当 $n > 1$ 时收敛。

于是, 当 $a \neq 0$ 、 $n > 0$ 及 $a = 0$ 、 $n > 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx.$$

收敛.

2368. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$

解 方法一:

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right).$$

积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 显然发散.

又因对于任意的 $A > 1$, $\left| \int_1^A \cos 2x dx \right| \leq 2$,

且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 单调地趋于零, 故积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \text{ 收敛.}$$

于是, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散, 从而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

发散.

方法二:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{t+n\pi} dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

由于不论 N 取多大, 只要取 $p=N$, 就有

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k} &= \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N}}_{N \text{ 个}} \\ &= \frac{1}{2N}, \quad N = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故递增叙列

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (n=1, 2, \dots)$$

的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 是 $+\infty$, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

于是, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

发散.

$$2369. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$. 对于任何 q 值,

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sin^p x \cos^q x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^p \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\cos^q x} \right) = 1,$$

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 仅当 $p < 1$ (q 为任意值) 时收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$, 对于任何 p 值, 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^q \cdot \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^q \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{1}{\sin^p x} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^q = 1, \end{aligned}$$

故积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 仅当 $q < 1$ (p 为任意值) 时收敛.

于是, 当 $p < 1$ 且 $q < 1$ 时, 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$$

收敛.

2370. $\int_0^1 \frac{x^a dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{-n} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 1,$$

故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 仅当 $-n < 1$ 即当 $n > -1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 对于任意的 n , 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sqrt{1-x} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 恒收敛.

于是, 当 $n > -1$ 时, 积分

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

收敛.

2371. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$. 不妨设 $\min(p, q) = p$,

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^p \cdot \frac{1}{x^p + x^q} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + x^{q-p}} = 1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $p < 1$ 即当 $\min(p, q) < 1$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$. 不妨设 $\max(p, q) = q$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^q \cdot \frac{1}{x^p + x^q} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{-(q-p)} + 1} = 1,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $q > 1$ 即当 $\max(p, q) > 1$ 时收敛。

于是, 当 $\min(p, q) < 1$ 且 $\max(p, q) > 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$$

收敛。

2372. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{\ln x}{1-x^2} \right) = 0,$$

故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 收敛。

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sqrt{1-x} \cdot \frac{\ln x}{1-x^2} \right) = 0,$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 收敛.

于是, 积分

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$$

收敛.

2373. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \left[x^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left[\left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[3]{\sin x} \ln(\sin x) \right] = 0, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$ 收敛.

2374. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$

解 先考虑 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. 对于任意的 p , 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left[(x-1)^q \cdot \frac{1}{x^p \ln^q x} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1+0} \left[\frac{1}{x^p} \cdot \left(\frac{x-1}{\ln x} \right)^q \right] = \left(\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{\ln x} \right)^q \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\frac{1}{x}} \right)^q = 1,
\end{aligned}$$

故积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 仅当 $q < 1$ 且 p 为任意值时收敛。

再考虑积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 。如果 $p > 1$ ，取 $\alpha > 0$

充分小，使 $p - \alpha > 1$ ，则对于任意的 q ，由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{p-\alpha} \cdot \frac{1}{x^p \ln^q x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^\alpha \ln^q x} \right) = 0,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 收敛；如果 $p \leq 1$ ， $q < 1$ ，由于

$$\begin{aligned}
&\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \geq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} \\
&= \left. \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} \right|_2^{+\infty} = +\infty,
\end{aligned}$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 发散。

于是，当 $p > 1$ 且 $q < 1$ 时，积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

收敛。

$$2375. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}.$$

解 先考虑积分 $\int_e^3 \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$. 对于任意的 p 和 q , 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow e+0} \frac{(x-e)^r}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} \\ &= \frac{1}{e^p} \left(\lim_{x \rightarrow e+0} \frac{x-e}{\ln \ln x} \right)^r \\ &= \frac{1}{e^p} \left(\lim_{x \rightarrow e+0} \frac{1}{\frac{1}{x \ln x}} \right)^r = e^{r-p}, \end{aligned}$$

故积分 $\int_e^3 \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 仅当 $r < 1$ 和 p, q 为任意值时收敛.

再考虑积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$. 分三种情形讨论:

(1) 如果 $p > 1$, q 和 r 为任意值. 取 $\alpha > 0$ 充分小, 使 $p - \alpha > 1$. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p-\alpha}}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = 0, \end{aligned}$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 收敛.

(2) 当 $p = 1$ 时, 则有

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$$

$$= \int_{1.3}^{+\infty} \frac{dx}{x^q (\ln x)^r},$$

利用2374题的结果得知, 当 $p=1$, $q>1$ 和 $r<1$ 时

积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 收敛,

(3) 当 $p<1$ 时, 取 $\delta>0$ 充分小, 使 $p+\delta<1$. 对于任意的 q 和 r , 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+\delta}}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\delta}{(\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = +\infty,$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 发散.

于是, 当 $p>1$, q 是任意的, $r<1$ 和当 $p=1$, $q>1$, $r<1$ 时, 积分

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$$

收敛.

2376.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1} |x-a_2|^{p_2} \cdots |x-a_n|^{p_n}},$$

解 首先, 被积函数关于 $\frac{1}{x}$ 是 $\sum_{i=1}^n p_i$ 级无穷小 (当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时),

其次 (不妨设当 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$),

$$\lim_{x \rightarrow a_i} \left[|x - a_i|^{-p_i} \cdot \frac{1}{|x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \cdots |x - a_n|^{p_n}} \right] \\ = c_i, \quad 0 < c_i < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \cdots |x - a_n|^{p_n}}$ 仅当 $\sum_{i=1}^n p_i > 1$ 且 $p_i < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ 时收敛。

2377. $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx,$

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为次数分别为 m 及 n 的互质的多项式。

解 当 $P_n(x) = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上有根 λ 并设其重数为 $r (\geq 1)$ 时, 由于 $P_n(x)$ 与 $P_m(x)$ 互质, 故 λ 不是 $P_m(x)$ 的根。从而有

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} \left[(x - \lambda)^r \cdot \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right] = a \neq 0,$$

而且显然在点 λ 的右 (左) 近旁, $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 都保持定号。由于 $r \geq 1$, 故积分发散。由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{n-m} \cdot \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right] = b \neq 0,$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$ 仅当 $n - m > 1$ 即当 $n \geq m + 1$

时收敛。

于是，当 $P_n(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内无根且 $n > m + 1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$$

收敛。

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性：

2378. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

解 对于任意的 $A > 1$ ，由于 $\left| \int_1^A \sin x dx \right| \leq 2$ ，且

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $\frac{1}{x}$ 单调地趋于零，故积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛。而积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 是普通的定积分 $\left(-\frac{\sin x}{x} \right)$ 在 $x = 0$ 有可去间断点，故补充定义其值为 1 后， $\frac{\sin x}{x}$ 可视为 $[0, 1]$ 上的连续函数，故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛 但它不是绝对收敛的。事实上，当 $x > 0$ 时，

$$\left| -\frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}, \text{ 由 2368 题知，积分 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

发散，故积分 $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ 发散。

$$2379. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$$

解 对于任意的 $A > 0$, 由于 $\left| \int_0^A \cos x dx \right| \leq 2$, 且

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ 单调地趋于零, 故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$$

收敛. 但它不是绝对收敛的. 事实上, 由于

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} &\geq \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+100} - \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} \right), \end{aligned}$$

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+100} \right) = 1$, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx$

发散. 仿照前半段证明, 可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} dx$

收敛. 从而, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx$ 发散. 于是, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx$$

发散.

$$2380. \int_0^{+\infty} x^q \sin(x^q) dx \quad (q \neq 0).$$

解 设 $t=x^q$, 则 $dx=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt$. 于是

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx = \frac{1}{|q|} \int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt.$$

先考虑积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$. 由于

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^{-\frac{p+1}{q}} \cdot t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

故积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 仅当 $-\frac{p+1}{q} < 1$, 即当

$\frac{p+1}{q} > -1$ 时收敛, 又由于被积函数在 $[0, 1]$ 上

非负, 故也是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$. 如果 $\frac{p+1}{q} < 1$,

则由于对任意的 $A > 1$, $\left| \int_1^A \sin t dt \right| \leq 2$ 且 $t^{\frac{p+1}{q}-1}$ 单调地趋于零 (当 $t \rightarrow +\infty$ 时), 故此时积分

$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 收敛. 如果 $\frac{p+1}{q} = 1$, 则积分

$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 显然发散, 从而积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}$

$\sin t dt$ 也发散. 如果 $\frac{p+1}{q} > 1$, 则由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}$

$= +\infty$, 故对任给的 $A > 0$, 总存在自然数 N , 使有

$2N\pi + \frac{\pi}{4} > A$, 且当 $t > 2N\pi + \frac{\pi}{4}$ 时, $t^{\frac{p+1}{q}-1} > \sqrt{2}$.

今取

$$A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}, \quad A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2},$$

则有

$$\left| \int_{A'}^{A''} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \, dt \right| > \sqrt{2} \left| \int_{A'}^{A''} \sin t \, dt \right| \\ = 1,$$

它不可能小于任给的 ε ($0 < \varepsilon < 1$), 因而, 积分

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \, dt,$$

发散, 从而积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \, dt$$

也发散.

于是, 仅当 $-1 < -\frac{p+1}{q} < 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \, dt$$

收敛, 且当 $-\frac{p+1}{q} > -1$ 时, 积分

$$\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \, dt$$

绝对收敛.

下面我们考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \, dt$ 的绝对收

敛性，分三种情形讨论：

(1) 当 $\frac{p+1}{q} < 0$ 时，由于

$$|t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t| \leq t^{\frac{p+1}{q}-1} \quad (1 \leq t < +\infty),$$

且 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} dt$ 收敛，故当 $\frac{p+1}{q} < 0$ 时，积分

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt \text{ 绝对收敛；}$$

(2) 当 $\frac{p+1}{q} = 0$ 时，由于

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \left| t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \right| dt \\ &= \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty, \end{aligned}$$

故此时积分不绝对收敛(但条件收敛)；

(3) 当 $\frac{p+1}{q} > 0$ 时，由于

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \left| t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \right| dt \\ & \geq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty, \end{aligned}$$

故此时积分也不是绝对收敛的。

于是，当 $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \, dt$$

绝对收敛。

最后我们得到：当 $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx$$

绝对收敛；当 $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$ 时，积分条件收敛。

2381. $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx \quad (q \geq 0).$

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 。由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{-1-p} \cdot \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+x^q} \right) = 1, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 仅当 $-1-p < 1$ 即当 $p > -2$

时收敛，且是绝对收敛的。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 。(1) 若 $p \geq q$ ，则

对任何 $A > 1$ ，必存在正整数 N ，使 $2N\pi + \frac{\pi}{4} > A$

且当 $x \geq 2N\pi + \frac{\pi}{4}$ 时，恒有 $\frac{x^p}{1+x^q} > \frac{1}{3}$ 。于是，对

$A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}$, $A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} \frac{x^p}{1+x^q} \sin x \, dx \right| &\geq \frac{1}{3} \int_{A'}^{A''} \sin x \, dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6}, \end{aligned}$$

它不可能小于任给的 ε , 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \, dx$ 发散. (2) 若 $p < q-1$, 取 $\alpha > 0$ 使 $p+\alpha < q-1$, 即 $q-p-\alpha > 1$, 由于

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{q-p-\alpha} \cdot \frac{x^p}{1+x^q} |\sin x| \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{1+x^q} \cdot \frac{|\sin x|}{x^\alpha} = 0, \end{aligned}$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \, dx$ 绝对收敛. (3) 现设 $q-1$

$\leq p < q$. 先证 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} \, dx$ 发散. 事实上, 此

时, 可取 $A_0 > 1$, 使当 $x \geq A_0$ 时, $\frac{x^{p+1}}{1+x^q} \geq \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_{A_0}^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} \, dx &= \int_{A_0}^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{1+x^q} \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx \\ &\geq \frac{1}{3} \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx = +\infty, \end{aligned}$$

从而 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} \, dx$ 发散.

再证 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 收敛. 事实上, 若 $q = 0$,

则 $-1 \leq p < 0$, 此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$

$= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^p \sin x dx$ 显然收敛; 若 $q > 0$, 由于

$$\left(\frac{x^p}{1+x^q} \right)' = -\frac{x^{p-1} [p - (q-p)x^q]}{(1+x^q)^2} < 0 \quad (\text{当 } x \text{ 充分}$$

大时),

故当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^p}{1+x^q}$ 单调递减趋于零. 而

$\left| \int_1^A \sin x dx \right| = \left| \cos 1 - \cos A \right| \leq 2$ 有界, 故积分

$\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 收敛. 总之, 我们证明了: 当 $q-1$

$\leq p < q$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 条件收敛.

于是, 最后得结论: 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 当

$p > -2$, $q > p+1$ 时绝对收敛; 当 $p > -2$, $p < q$
 $\leq p+1$ 时条件收敛.

2382. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \left(x + \frac{1}{x} \right)}{x^n} dx.$

解 当 $n \leq 0$ 时, 积分显然是发散的.

当 $n > 0$ 时, 首先考虑积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$
($a > 1$). 由于

$$\begin{aligned} & \int_a^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx \\ &= \int_a^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} dx, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^A \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx \right| \\ &= \left| \cos\left(a + \frac{1}{a}\right) - \cos\left(A + \frac{1}{A}\right) \right| \leq 2. \end{aligned}$$

又当 x 充分大时, 有

$$\frac{d}{dx} x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = nx^{n-1} \left(x^2 - \frac{n-2}{n}\right) > 0,$$

故当 x 充分大时, 函数 $x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ 是增加的, 从而函

数 $\frac{1}{x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时递减趋于零。由此可知,

积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$ 当 $n > 0$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_0^{a'} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$ ($0 < a' < 1$).

设 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\int_0^{a'} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx = \int_{\frac{1}{a'}}^{+\infty} \frac{\sin\left(t + \frac{1}{t}\right)}{t^{2-n}} dt,$$

由前所述, 此积分仅当 $2 - n > 0$ 即当 $n < 2$ 时收敛.

请注意, $\int_{a'}^a \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx \quad (0 < a' < 1 < a)$

是一个通常的积分, 它对任意 n 均有意义.

于是, 当 $0 < n < 2$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$$

收敛.

可以证明: 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$$

当 $0 < n < 2$ 时发散. 事实上,

$$\begin{aligned} \frac{\left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} &\geq \frac{\sin^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} \\ &= \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{2}{x}\right)}{2x^n}, \end{aligned}$$

而当 $0 < n \leq 1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ 显然发散, 积分

$\int_a^{+\infty} \frac{\cos\left(2x + \frac{2}{x}\right)}{x^n} dx$ 收敛 (仿前半段证明), 故当

$0 < n \leq 1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$ 发散,

从而当 $0 < n \leq 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$$

发散. 对于 $1 < n < 2$ 的情况, 可考虑对积分作变换

$x = \frac{1}{t}$, 则得

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx \\ &= \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(t + \frac{1}{t}\right)\right|}{t^{2-n}} dt. \end{aligned}$$

仿前可知, 当 $0 < 2 - n \leq 1$ 即当 $1 \leq n < 2$ 时, 积分

$\int_0^a \frac{\left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$ 发散. 从而, 当 $1 < n < 2$

时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)\right|}{x^n} dx$$

发散

最后我们得到: 当 $0 < n < 2$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$$

条件收敛.

$$2383^+ \cdot \int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx,$$

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式, 且若 $x \geq a$, $P_n(x) > 0$.

解. 今仿2381题解之. 设

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m,$$

$$P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n,$$

其中 m, n 是非负整数, $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

(1) 若 $n > m+1$, 可取 $\alpha > 0$ 充分小, 使 $n - \alpha > m+1$. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m-\alpha} \cdot \left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^n P_m(x)}{x^m P_n(x)} \right| \cdot \frac{|\sin x|}{x^\alpha} = 0, \end{aligned}$$

而 $n-m-\alpha > 1$, 故积分 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 绝对收敛.

(2) 若 $n = m+1$. 我们证明此时 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$

条件收敛. 事实上, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_0}{b_0}$, 故存

在 $A_0 > a$, 使当 $x \geq A_0$ 时, 恒有 $\left| \frac{x P_m(x)}{P_n(x)} \right| > \frac{|a_0|}{2|b_0|}$,

于是

$$\begin{aligned} & \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \right| dx \\ &= \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{x P_m(x)}{P_n(x)} \right| \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \\ &\geq \frac{|a_0|}{2|b_0|} \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty, \end{aligned}$$

故 $\int_a^{+\infty} \left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \right| dx$ 发散. 此外, 易知 ($n=m+1$ 时)

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right)' &= \frac{1}{[P_n(x)]^2} \left\{ -a_0 b_0 x^{2m} \right. \\ &\quad \left. - 2a_1 b_0 x^{2m-1} + \dots + (a_{m-1} b_{m+1} \right. \\ &\quad \left. - a_m b_m) \right\}, \end{aligned}$$

故若 $a_0 b_0 > 0$, 则当 x 充分大时, $\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right)' < 0$,

函数 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 减小; 若 $a_0 b_0 < 0$, 则当 x 充分大时,

$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right)' > 0$, 函数 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 增加. 总之, 当 $x \rightarrow$

$+\infty$ 时, $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 单调地趋于零. 又显然可知

$\left| \int_a^A \sin x dx \right| \leq 2$, 故积分 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 收

敛.

(3) 若 $n < m + 1$ ，由于 n, m 都是非负整数，故 $n \leq m$ ，因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } n = m; \\ +\infty, & \text{若 } n < m \text{ 且 } a_0 b_0 > 0; \\ -\infty, & \text{若 } n < m \text{ 且 } a_0 b_0 < 0. \end{cases}$$

于是，存在 $A^* > a$ 及 $\tau > 0$ ，使当 $x \geq A^*$ 时 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

保持定号且 $\left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right| > \tau$ ，今对任何 $A > a$ ，可取正

整数 N ，使 $2N\pi + \frac{\pi}{4} \geq \max\{A, A^*\}$ ，令 $A' = 2N\pi$

$+\frac{\pi}{4}$ ， $A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$ ，则

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \, dx \right| &> \tau \int_{A'}^{A''} \sin x \, dx \\ &= \frac{\tau\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

它不能小于任意的 $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{\tau\sqrt{2}}{2} \right)$ ，故

$\int_a^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_n(x)} \sin x \, dx$ 发散。

最后，我们得出： $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \, dx$ 当 $n >$

$m + 1$ 时绝对收敛；当 $n = m + 1$ 时条件收敛。

2384. 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛，则当 $x \rightarrow +\infty$ 时是否必有 $f(x) \rightarrow 0$ ？

研究例子:

$$(a) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx, \quad (b) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx.$$

解 不一定. 例如

(a) 积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ 收敛. 事实上, 它是 2380 题之特例: $p=0$, $q=2$. 但是, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x^2)$ 不存在;

(b) 先证积分 $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$ 收敛. 事实上, 对任何 $A > 0$, 存在唯一的非负整数 n , 使 $\sqrt{n} \leq A < \sqrt{n+1}$. 显然 $A \rightarrow +\infty$ 相当于 $n \rightarrow \infty$. 当 $\sqrt{k} \leq x < \sqrt{k+1}$ (k —非负整数) 时, $[x^2] = k$. 于是

$$\begin{aligned} & \int_0^A (-1)^{[x^2]} dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^k dx + (-1)^n (A - \sqrt{n}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} + (-1)^n (A - \sqrt{n}). \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ 递减趋于 0 (当 $k \rightarrow \infty$ 时), 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \text{ 存在有限 (参看 2656 题}$$

前面的变号级数的莱布尼兹判别法), 设为 S . 又显然

$$|(-1)^n (A - \sqrt{n})| < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A (-1)^{[x^2]} dx = S$, 因此

积分 $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$ 收敛.

但显然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x^2]}$ 不存在.

2385. 于 $[a, b]$ 上有定义的, 无界函数 $f(x)$ 可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

看作对应的积分和式

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

的极限? 式中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

解 不能. 因为若 $c (a \leq c \leq b)$ 是瑕点, 则对于 $[a, b]$ 的任何分法, 不论其 $\max |\Delta x_i|$ 多么小, 当分法确定以后, 设 $c \in [x_i, x_{i+1}]$, 则总可以取 ξ_i , 使

$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ 大于任何预先给定的值. 因此, 当

$\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ 不可能具有有限极限.

2386. 设:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

收敛, 函数 $\varphi(x)$ 有界, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (2)$$

是否必定收敛? 举出适当的例子.

若积分(1)绝对收敛, 问积分(2)的收敛性如何?

解 不. 例如, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛*), 且 $\varphi(x) = \sin x$ 有界, 但是积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

是发散的**).

若积分(1)绝对收敛, $\varphi(x)$ 有界, 则积分(2)一定是绝对收敛的. 事实上, 设 $|\varphi(x)| \leq L$, 则由不等式

$$|f(x)\varphi(x)| \leq L \cdot |f(x)|$$

及 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 的收敛性即可获证.

*) 利用2378题的结果.

**) 利用2368题的结果.

2387. 证明, 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $f(x)$ 为单调函数, 则

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)^{*)}$$

证 不妨设 $f(x)$ 单调减小. 先证当 $x \geq a$ 时, $f(x) \geq 0$. 若不然, 则存在点 $c \geq a$, 使 $f(c) < 0$. 由于 $f(x)$ 单调减小, 故当 $x \geq c$ 时, $f(x) \leq f(c)$, 从而

$$\int_c^{+\infty} f(x) dx \leq \int_c^{+\infty} f(c) dx = -\infty.$$

因此, 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

发散, 这与积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛矛盾. 于是, $f(x)$ 为非负的单调函数.

下面证明 $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$. 由于积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $A > a$, 使当 $x > A$ 时, 恒有

$$\left| \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

但是

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \right| &= \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \geq f(x) \cdot \left(x - \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{x}{2} f(x), \end{aligned}$$

故当 $x > A$ 时,

$$0 \leq x f(x) < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 \quad \text{或} \quad f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

如果 $f(x)$ 单调增大, 则可考虑 $-f(x)$ (它是单调减小的), 同法可证得 $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

*) 原题为 $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, 现在的结果更好.

2388. 设函数 $f(x)$ 于区间 $0 < x \leq 1$ 内是单调的函数, 且在点 $x = 0$ 的邻域内是无界的, 证明若

$$\int_0^1 f(x) dx$$

存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

证 设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是单调下降的. 这时 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$. 先设 $f(x) \geq 0$ ($0 < x \leq 1$ 时).

由于积分

$$\int_0^1 f(x) dx$$

存在, 故把区间 $[0, 1]$ n 等分后, 即得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$< \int_0^1 f(x) dx + \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}.$$

另一方面，又有

$$\int_0^1 f(x) dx > \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}.$$

从而就有

$$0 < \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) < \int_0^1 f(x) dx.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx = 0$ ，故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

如果不满足 $f(x) \geq 0$ ，即 $f(x)$ 可正可负，则函数 $\varphi(x) = f(x) - f(1)$ 满足 $\varphi(x) \geq 0$ ($0 < x \leq 1$)，且同样是单调下降， $\lim_{x \rightarrow +0} \varphi(x) = +\infty$ 。故根据已证的结果，知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(x) dx,$$

即

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(1) \right] \\ &= \int_0^1 \left[f(x) - f(1) \right] dx, \end{aligned}$$

由此即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

当 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调增加时 (这时 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$)，只需对函数 $-f(x)$ 应用上述结果即获证。

2389. 证明：若函数 $f(x)$ 于区间 $0 < x < a$ 内是单调的，且

$$\int_0^a x^p f(x) dx$$

存在，则

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

证 不妨设 $f(x)$ 在 $0 < x < a$ 是单调递减的。先设存在 $0 < \delta < a$ 使在 $0 < x < \delta$ 时 $f(x) \geq 0$ 。这时，当 $0 < x < \delta$ 时，有

$$\begin{aligned} \int_{\frac{x}{2}}^x t^p f(t) dt &\geq f(x) \int_{\frac{x}{2}}^x t^p dt \\ &= C_p x^{p+1} f(x) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } C_p = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}}{p+1}, & \text{当 } p \neq -1 \text{ 时,} \\ \ln 2, & \text{当 } p = -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

故 C_p 是正的常数。

于是，由 $\int_0^a x^p f(x) dx$ 存在，知

$$\lim_{x \rightarrow +0} \int_{\frac{x}{2}}^x t^p f(t) dt = 0, \text{ 从而 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

再设不存在上述 δ 。于是，根据 $f(x)$ 的递减性，

知当 $0 < x < a$ 时恒有 $f(x) < 0$ 。于是，当 $0 < x < \frac{a}{2}$

时, 有

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} t^p f(t) dt &\leq f(x) \int_x^{2x} t^p dt \\ &= C_p^* x^{p+1} f(x) \leq 0, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } C_p^* = \begin{cases} \frac{2^{p+1} - 1}{p+1}, & \text{当 } p \neq -1 \text{ 时;} \\ \ln 2, & \text{当 } p = -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

故 C_p^* 也是正的常数.

$$\text{于是, } |x^{p+1} f(x)| \leq \frac{1}{C_p^*} \left| \int_x^{2x} t^p f(t) dt \right|.$$

根据 $\int_0^2 x^p f(x) dx$ 的存在性, 知

$$\lim_{x \rightarrow +0} \int_x^{2x} t^p f(t) dt = 0,$$

从而 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0$. 证完.

2390. 证明

$$(a) \quad V, P. \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0,$$

$$(b) \quad V, P. \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0;$$

$$(B) \quad V, P. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx = 0.$$

证 (a) 由于

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{0+\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \varepsilon) = 0,$$

所以

$$V.P. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0;$$

(6) 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+\varepsilon}^b \frac{dx}{1-x^2} \right) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+b}{1-b} \right| \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon} \right| = 0, \end{aligned}$$

所以

$$V.P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0;$$

(B) 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos b + \cos b) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx = 0.$$

2391. 证明: 当 $x \geqslant 0$ 且 $x \neq 1$ 时,

$$\operatorname{li} x = V.P. \int_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}$$

存在*)。

证 当 $0 \leq x < 1$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} = 0$, 故将 $\frac{1}{\ln x}$ 在 $x = 0$ 处补充定义后成为连续函数, 于是积分存在。

当 $x > 1$ 时, 首先注意到下面这样一个结论: 当 $a \rightarrow c \rightarrow b$ 时,

$$\begin{aligned} V.P. \int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) \\ &= \ln \frac{b-c}{c-a}. \end{aligned}$$

其次, 利用具比亚诺型余项的台劳公式, 有

$$\ln x = (x-1) + [\alpha(x)-1] \frac{(x-1)^2}{2},$$

式中 $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) = 0$ 。由此即得

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}[\alpha(x)-1]}{1 + \frac{[\alpha(x)-1](x-1)}{2}},$$

上述等式右端的第二项在 $x = 1$ 的附近保持有界, 且对于任意的 x 值连续, 因而是可积分的。第一项的“主值”如前所述, 它是存在的。

于是, 当 $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $\ln x$ 存在。

*) 原题误为“当 $x \geq 0$ 时, ...”。

求下列积分:

$$2392. \quad V.P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ \eta \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + \int_{1+\varepsilon}^{2-\eta} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \right. \\ & \quad \left. + \int_{2+\eta}^b \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \right) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ \eta \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\ln \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} - \ln 2 + \ln \frac{\eta}{1-\eta} - \ln \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right. \\ & \quad \left. + \ln \left| \frac{b-2}{b-1} \right| - \ln \frac{\eta}{1+\eta} \right) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ \eta \rightarrow +0}} \left(\ln \frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon} - \ln 2 + \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right) \\ &= -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$V.P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \ln \frac{1}{2}.$$

$$2393. \quad V.P. \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

解 由于

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x \ln x} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\ln |\ln(1-\varepsilon)| - \ln(\ln 2) + \ln(\ln 2) \\
&\quad - \ln |\ln(1+\varepsilon)|] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} \right| = \ln \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} \right| \\
&= \ln \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\frac{-1}{1-\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}} \right| = \ln 1 = 0,
\end{aligned}$$

所以

$$V.P. \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x} = 0.$$

$$2394. \quad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

解 由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \frac{1+x}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctg b - \arctg(-b) + \frac{1}{2} \ln(1+b^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln(1+b^2) \right] \\
&= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \pi,
\end{aligned}$$

所以

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi.$$

$$2395. \quad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \operatorname{arctg} x \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[b \operatorname{arctg} b - (-b) \operatorname{arctg}(-b) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \ln(1+b^2) + \frac{1}{2} \ln(1+b^2) \right] = 0, \end{aligned}$$

所以

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x \, dx = 0.$$

§ 5 . 面积的计算法

1° 直角坐标系中的面积 由两条连续的曲线 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ [$y_2(x) \geq y_1(x)$] 与 Ox 轴的两条垂线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的面积 $S = A_1 A_2 B_2 B_1$ (图4.14) 等于

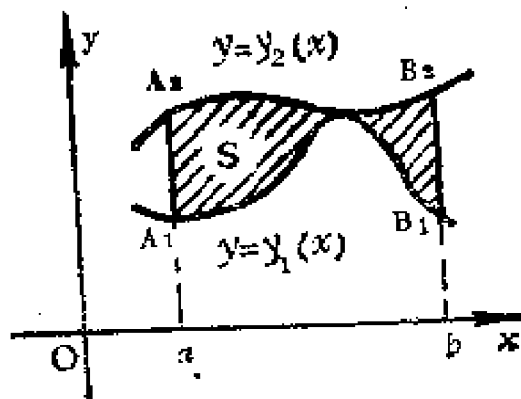


图 4.14

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

2° 参数形状表出的曲线所围成的面积 若 $x = x(t)$, $y = y(t)$ [$0 \leq t \leq T$] 为一逐段平滑的简单封闭曲线 C 的参数方程式, 面积 S 表由此曲线所围在它左侧的面积 (图

4.15), 则

$$S = - \int_0^T y(t)x'(t)dt = \int_0^T x(t)y'(t)dt$$

或

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt.$$

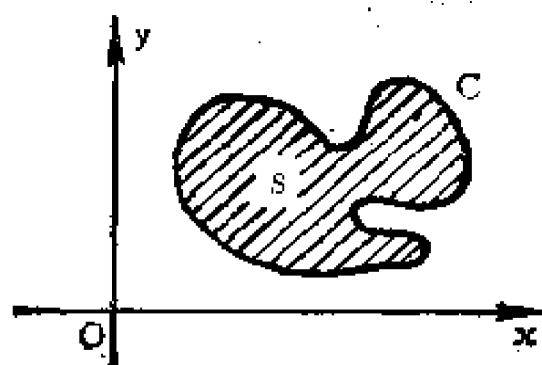


图 4.15

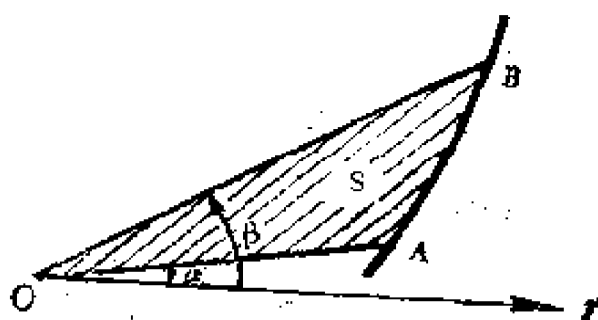


图 4.16

3° 极坐标系中的面积 由连续的曲线 $r = r(\varphi)$ 和两条半射线 $\varphi = \alpha$ 和 $\varphi = \beta$ 所围成的面积 $S = OAB$ (图4.16) 等于

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

2396. 证明 正抛物线拱的面积等于

$$S = \frac{2}{3}bh,$$

式中 b 为底, h 为拱的高 (图4.17)。

证 设抛物线的方程为

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

则当 $x = \pm \frac{b}{2}$ 时, 得

$$y = \frac{Ab^2}{4} \pm \frac{Bb}{2} + C = 0;$$

当 $x = 0$ 时, 得

$$y = C = h.$$

解之得

$$A = -\frac{4h}{b^2}, \quad B = 0.$$

从而

$$y = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{b}{2}} \left(h - \frac{4h}{b^2}x^2 \right) dx \\ &= 2 \left(hx - \frac{4h}{3b^2}x^3 \right) \Big|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{2}{3}bh. \end{aligned}$$

求下列直角坐标方程所表曲线围成的面积*).

2397. $ax = y^2, \quad ay = x^2.$

解 如图4.18所示, 交点为

$$A(a, a) \text{ 及 } O(0, 0).$$

所求的面积为

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx$$

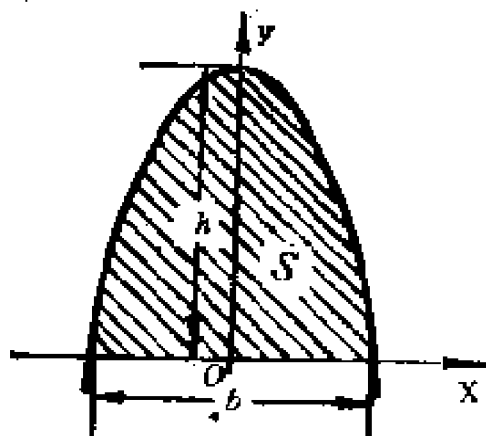


图 4.17

*) 在第四章的这一节和以后各节都把一切的参数当作是正的。

$$= \left[\frac{2}{3a} - (ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a} x^3 \right] \Big|_0^a = \frac{a^2}{3}.$$

2398. $y = x^2$, $x + y = 2$.

解 如图4.19所示, 交点为

$A(-2, 4)$ 及 $B(1, 1)$.

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 [(2-x) - x^2] dx \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = 4\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

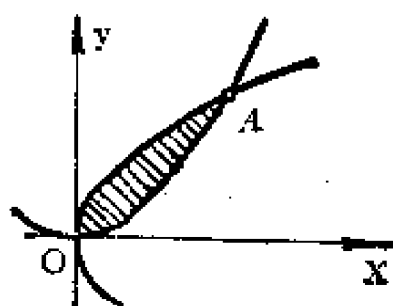


图 4.18

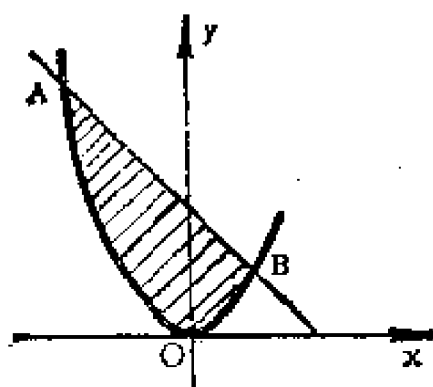


图 4.19

2399. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.

解 如图4.20所示, 交点为

$A(3, -3)$ 及 $O(0, 0)$.

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)] dx \\ &= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^3 = 4\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2400. $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0.1$, $x = 10$.

解 如图4.21所示, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= - \int_{0.1}^1 \lg x dx + \int_1^{10} \lg x dx \\ &= (-x \lg x + x \lg e) \Big|_{0.1}^1 \\ &\quad + (x \lg x - x \lg e) \Big|_1^{10} \\ &= 9.9 - 8.1 \lg e \doteq 6.38. \end{aligned}$$

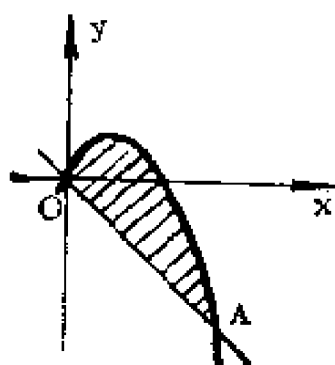


图 4.20

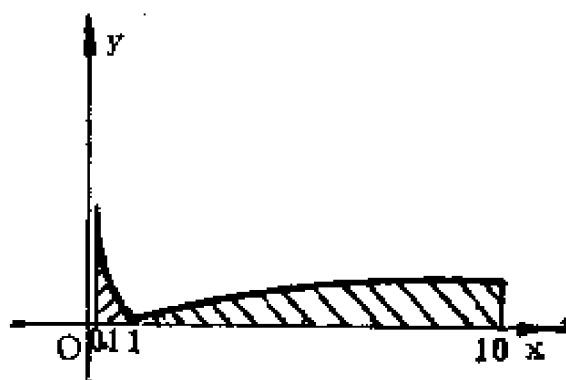


图 4.21

2401. $y = x$, $y = x + \sin^2 x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi (x + \sin^2 x - x) dx \\ &= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2402. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = 0$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2+x^2} dx = 2a^3 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} \\ &= 2a^3 \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} b = \pi a^2. \end{aligned}$$

2403. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= \frac{4b}{a} \left(\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \right) \Big|_0^a \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

2404. $y^2 = x^2(a^2 - x^2).$

解 如图4.22所示, 图形对称于原点.

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a x \sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{4}{3} (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a \\ &= \frac{4}{3} a^3. \end{aligned}$$

2405. $y^2 = 2px, 27py^2 = 8(x-p)^3.$

解 曲线 $L_1: 27py^2 = 8(x-p)^3$ 与曲线 $L_2: y^2 = 2px$ 在第一象限内的交点为

$$A(4p, 2\sqrt{2}p),$$

如图4.23所示. 所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^{2\sqrt{2}p} \left[\left(p + \frac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \right) - \frac{1}{2p} y^2 \right] dy \\
 &= 2 \left(py + \frac{9}{10} p^{\frac{1}{3}} y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{6p} y^3 \right) \Big|_0^{2\sqrt{2}p} \\
 &= \frac{88}{15} \sqrt{2} p^2.
 \end{aligned}$$

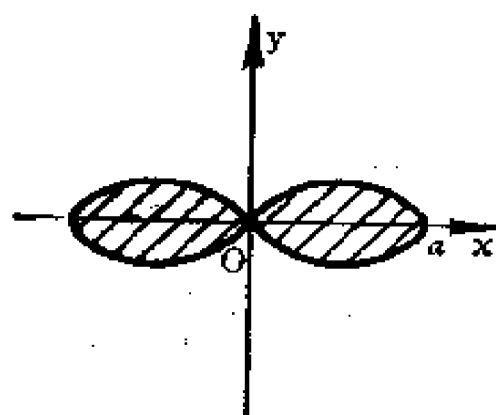


图 4.22

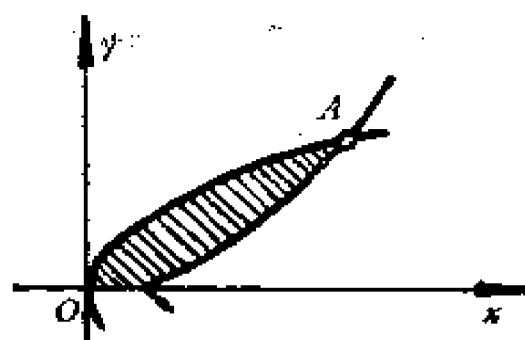


图 4.23

2406. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ ($AC - B^2 > 0$).

解 解此方程, 得

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

及

$$y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C}.$$

当 $B^2x^2 - C(Ax^2 - 1) \geq 0$, 即 $|x| \leq \sqrt{\frac{C}{AC - B^2}}$ 时,

y_1 及 y_2 才有实数值.

设

$$a = \sqrt{\frac{C}{AC - B^2}},$$

则所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^a (y_2 - y_1) dx \\ &= \frac{2}{C} \int_{-a}^a \sqrt{C^2 - (AC - B^2)x^2} dx \\ &= \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \cdot \frac{\pi}{2} a^2 = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}. \end{aligned}$$

2407. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (蔓叶线), $x=2a$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{2a} x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx \\ &= 16a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(t^2+1)^3} dt^{**}) \\ &= 16a^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{2}{(t^2+1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(t^2+1)^3} \right] dt \\ &= 16a^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{3}{8} \arctg t - \frac{5t}{8(t^2+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{4(t^2+1)^2} \right\}^{**}) \Big|_0^t \end{aligned}$$

$$= 3\pi a^2.$$

*) 设 $t = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}$.

**) 利用1921题的递推公式.

2408. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$

$-\sqrt{a^2 - y^2}$ (曳物线),

$y = 0$.

解 如图4.24所示, 所求的面积为

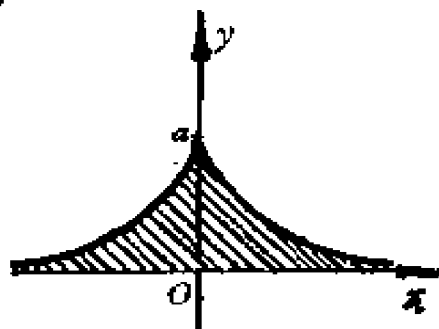


图 4.24

$$S = 2 \int_0^a \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \right) dy$$

$$= 2a \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy -$$

$$- 2 \left(\frac{y}{2} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{y}{a} \right) \Big|_0^a$$

$$= 2a \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(y \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right.$$

$$\left. + a \arcsin \frac{y}{a} \right) \Big|_{\epsilon}^a - \frac{\pi a^2}{2}$$

$$= \pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

2409. $y^2 = \frac{x^n}{(1+x^{n+2})^2} (x > 0; n > -2).$

解 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}} dx \\
&= 2 \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^b \frac{2}{n+2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \quad *) \\
&= 2 \cdot \frac{2}{n+2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg t \Big|_0^b = \frac{2\pi}{n+2}.
\end{aligned}$$

*) 设 $t = x^{\frac{n+2}{2}}$.

2410. $y = e^{-x} \sin x$, $y = 0$ ($x \geq 0$).

解 令 $\sin x = 0$, 得 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
 当 $x \geq 0$ 时, 由于 $\sin x$ 在 $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi), \dots$,
 $((2k+1)\pi, 2k\pi), \dots$ 中的值为负, 而在 $(0, \pi),$
 $(2\pi, 3\pi), \dots, (2k\pi, (2k+1)\pi), \dots$ 中的值为正,
 故所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx \\
&\quad + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx - \dots + \\
&\quad + (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx + \dots \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2} \left[e^{-(k+1)\pi} \cos(k+1)\pi \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-kx} \cos k\pi \Big] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \cdot (-1)^{k+1} \{ (-1)^{k+1} e^{-(k+1)x} \\
&\quad - (-1)^k e^{-kx} \} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left[e^{-(k+1)x} + e^{-kx} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 2e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kx} + e^{-(n+1)x} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 2e^{-x} \cdot \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} + e^{-(n+1)x} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} = 0.545.
\end{aligned}$$

2411. 抛物线 $y^2 = 2x$ 分圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的面积为两部分, 这两部分的比如何?

解 抛物线 $y^2 = 2px$ 和圆 $x^2 + y^2 = 8$ 在第一象限内的交点为 $A(2, 2)$.

设这两部分的面积分别为 S_1 及 S_2 (图4.25), 则有

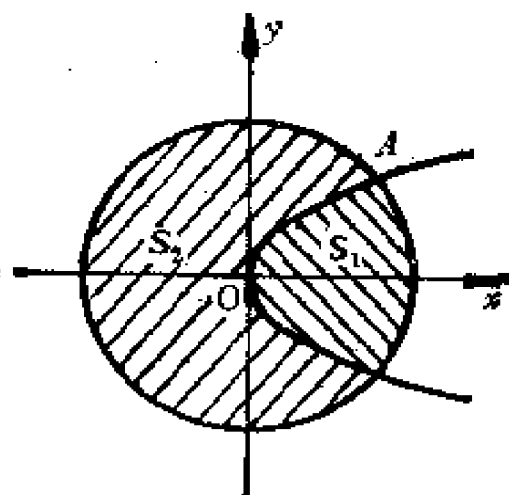


图 4.25

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 2 \int_0^2 \left(\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy \\
 &= 2 \left(\frac{y}{2} \sqrt{8-y^2} + \frac{8}{2} \arcsin \frac{y}{2\sqrt{2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{6} y^3 \right) \Big|_0^2 = 2\pi + \frac{4}{3},
 \end{aligned}$$

及

$$S_2 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3} \right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

于是，它们之比为

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi + \frac{4}{3}}{6\pi - \frac{4}{3}} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$

2412. 把双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 上的点 $M(x, y)$ 的坐标表成为双曲线扇形 $S = OM'M$ 面积的函数。这个扇形是由双曲线的弧 $M'M$ 与二射线 OM 及 OM' 所围成，其中 $M'(x, -y)$ 是对于 Ox 轴与 M 对称的点。

解 如图4.26所示，则有

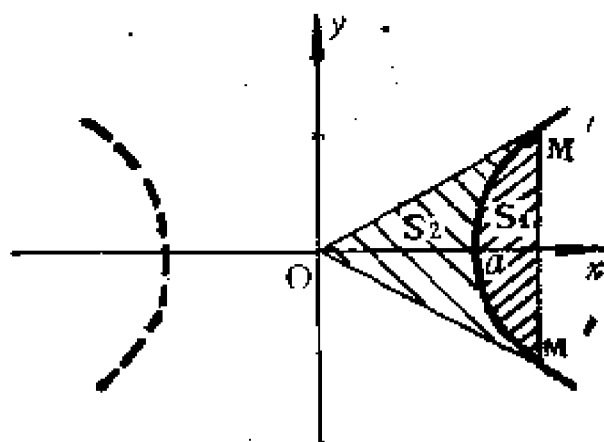


图 4.26

$$\begin{aligned}
\frac{S_1}{2} &= \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx \\
&= \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right]_a^x \\
&= \frac{1}{2} xy - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x+y}{a}
\end{aligned}$$

及

$$S_2 = 2 \left(\frac{xy}{2} - \frac{S_1}{2} \right) = a^2 \ln \frac{x+y}{a}$$

若记 $S_2 = S$, 则由上式得

$$x+y = ae^{\frac{S}{a^2}} \quad (1)$$

以 (1) 式代入 $x^2 - y^2 = a^2$ 中, 易得

$$x-y = ae^{-\frac{S}{a^2}} \quad (2)$$

由 (1) 式及 (2) 式, 解得

$$x = a \cdot \frac{e^{\frac{S}{a^2}} + e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a \operatorname{ch} \frac{S}{a^2}$$

及

$$y = a \cdot \frac{e^{\frac{S}{a^2}} - e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a \operatorname{sh} \frac{S}{a^2}$$

求由下列参数方程式所表曲线围成的面积:

2413. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (摆线) 及 $y = 0$.

解 所求的面积为

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 3\pi a^2.$$

由此可见, 所求摆线一拱的面积等于原来母圆面积的三倍.

2414. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

解 当 $t = 0$ 及 2 时, $x = 0$, $y = 0$,

当 $0 < t < 2$ 时,

$$x > 0,$$

$$y > 0,$$

当 $t < 0$ 时,

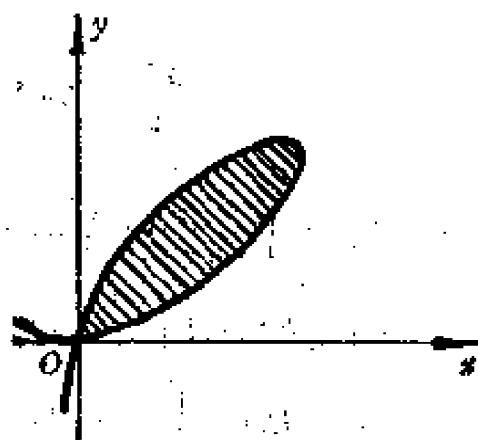
$$x < 0,$$

$$y > 0,$$

当 $t > 2$ 时,

$$x < 0,$$

$$y < 0.$$



如图4.27所示, 所求的面积为

图 4.27

$$S = - \int_0^2 (2t^2 - t^3) \cdot 2(1-t) dt$$

$$= -2 \int_0^2 (t^4 - 3t^3 + 2t^2) dt$$

$$= \frac{8}{15}.$$

2415. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (圆的渐伸线) 及 $x = a$, $y \leq 0$.

解 所求面积为

$$S = - \int_0^{2\pi} a(\sin t - t \cos t) \cdot at \cos t dt$$

$$= - \int_{AB} y dx$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{4} t^2 \sin 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_{AB} y dx$$

$$= \frac{a^2}{3} (4\pi^3 + 3\pi) - \int_{AB} y dx,$$

其中 $\int_{AB} y dx$ 表沿着从点 $A(a, -2\pi a)$ 到点 $B(a, 0)$ 的直线 \overline{AB} 上的积分. 由于在 \overline{AB} 上 $x \equiv a$, 故 $dx = 0$, 从而 $\int_{AB} y dx = 0$. 于是, 得

$$S = \frac{a^2}{3} (4\pi^3 + 3\pi).$$

2416. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.

解 所求面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy'_t - yx'_t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(2\cos t - \cos 2t) + a(2\cos t \\
&\quad - 2\cos 2t) - a(2\sin t - \sin 2t) \\
&\quad + a(-2\sin t + 2\sin 2t)] dt \\
&= 3a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t) dt \\
&= 3a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = 6\pi a^2
\end{aligned}$$

2417. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ ($c^2 = a^2 - b^2$) (椭圆
的渐屈线)。

解 如图4.28所示, 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2}{b} \sin^3 t \cdot \frac{3c^2}{a} \cos^2 t \sin t dt \\
&= \frac{12c^4}{ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t (1 - \sin^2 t) dt \\
&= \frac{3\pi c^4}{8ab}.
\end{aligned}$$

求由下列极坐标
方程式所表曲线
围成的面积 S :

2418. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

(双纽线)。

解 如图4.29所
示, 所求的面积
为

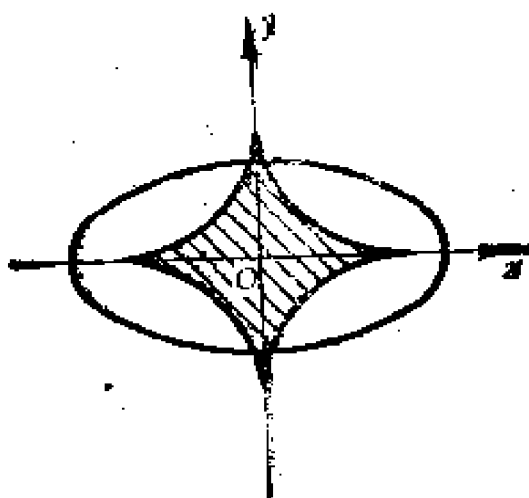


图 4.28



图 4.29

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = a^2.$$

2419. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (心脏形线).

解 如图4.30所示, 所求的面积为

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

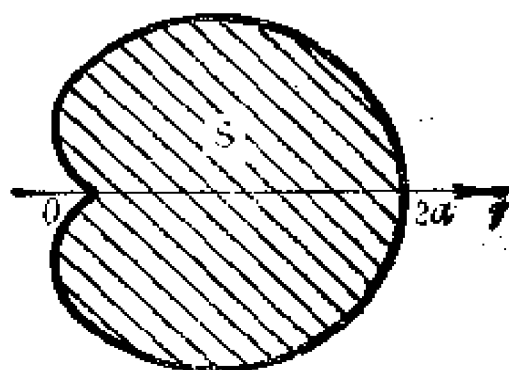


图 4.30

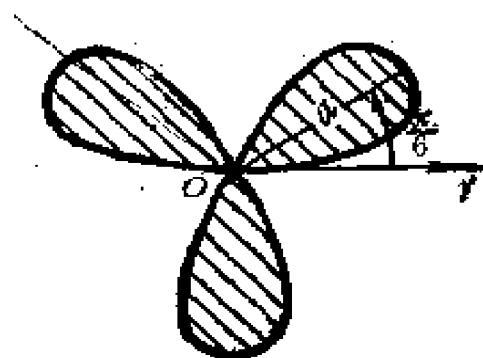


图 4.31

2420. $r = a \sin 3\varphi$ (三叶线)

解 如图4.31所示, 所求的面积为

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2 3\varphi \, d\varphi = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2421. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (抛物线), $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^2}{(1 - \cos \varphi)^2} d\varphi \\
&= \frac{p^2}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{csc}^4 \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
&= -\frac{p^2}{4} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{p^2}{6} (4\sqrt{2} + 3)^{*}).
\end{aligned}$$

$$*) \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}.$$

2422. $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ ($0 < \varepsilon < 1$) (椭圆).

解 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{p^2 d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} \\
&= p^2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}.
\end{aligned}$$

设

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t,$$

并记

$$a^2 = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

则有

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \int \frac{2(t^2 + 1)dt}{(1 - \varepsilon)^2(t^2 + a^2)^2}.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(1-e)^2} \int \frac{dt}{t^2+a^2} \\
&\quad + \frac{2(1-a^2)}{(1-e)^2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} \\
&= \frac{2}{a(1-e)^2} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \\
&\quad + \frac{2(1-a^2)}{(1-e)^2} \left\{ \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \right\}^* + C.
\end{aligned}$$

当 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 时, $0 \leq t < +\infty$, 从而得一广义积分. 于是, 经计算得

$$\begin{aligned}
S &= \left\{ -\frac{\pi}{a(1-e)^2} + \frac{(1-a^2)\pi}{2a^3(1-e)^2} \right\} \cdot p^2 \\
&= \frac{\pi p^2}{(1-e^2)^2}.
\end{aligned}$$

*) 利用1921题的递推公式.

2423. $r = a \cos \varphi$, $r = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$ ($M(-\frac{a}{2}, 0) \in S$).

解 如图4.32所示,

$$|OA| = a,$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4},$$

阴影部分即为所求的面积.

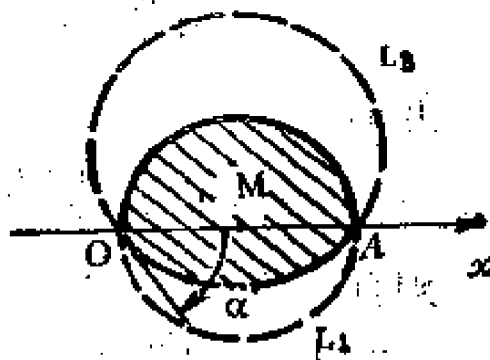


图 4.32

曲线 $L_1: r = a \cos \varphi,$

$L_2: r = a(\cos \varphi + \sin \varphi).$

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 a^2 (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{a^2(\pi - 1)}{4}. \end{aligned}$$

2424⁺. 求由曲线 $\varphi = r \operatorname{arctg} r$ 及二射线 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

所围成之扇形的面积.

解 当 φ 由 0 变到 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, r 从 0 变到 $\sqrt{3}$, 而

$$d\varphi = \left(\frac{r}{1+r^2} + \operatorname{arctg} r \right) dr.$$

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} r^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{r^3}{1+r^2} + r^2 \operatorname{arctg} r \right) dr \\ &= \left[\frac{1}{6} r^2 - \frac{1}{6} \ln(1+r^2) + \frac{1}{6} r^3 \operatorname{arctg} r \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{6} \pi. \end{aligned}$$

2425. 求封闭曲线

$$r = \frac{2at}{1+t^2}, \quad \varphi = \frac{\pi t}{1+t}$$

所包围的面积.

解 当曲线封闭时, t 由 0 变化到 $+\infty$. 所求的面积

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} r^2 d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2} dt \\ &= 2\pi a^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \int_0^t \frac{dt}{4(1+t)^2} - \frac{1}{4} \int_0^t \frac{dt}{1+t^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{t dt}{(1+t^2)^2} \right\} \\ &= 2\pi a^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{4} \arctg t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right\} \Big|_0^t \\ &= \pi a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

变为极坐标, 以求下列曲线所围成的面积:

2426. $x^3 + y^3 = 3axy$ (笛卡尔叶形线).

解 $r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$,

于是

$$r = \frac{3a \sin\varphi \cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

当 $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 时, $r \geq 0$, 且当 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

时, $r = 0$. 所以, 从 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 叶形线位于第一象限部分所围成的面积, 即为所要求的面积 (图

4.33)

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi$$

$$= \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} \quad *)$$

$$= \frac{9a^2}{\sqrt{2}} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{3(1+t^3)} \right|_0^b$$

$$= \frac{3a^2}{2}.$$

*) 设 $\operatorname{tg} \varphi = t$.

2427. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$

解 $r^4(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = a^2 r^2,$

于是

$$r = \frac{\sqrt{2} a}{\sqrt{2 - \sin^2 2\varphi}}.$$

如图4.34所示, 所求的面积为

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2a^2}{2 - \sin^2 2\varphi} d\varphi$$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 - \sin^2 t} dt$$

$$= \frac{2a^2}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2} - \sin t} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sin t} \right) dt$$

$$= \sqrt{2} a^2 \left\{ 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1 \right) \right\}$$

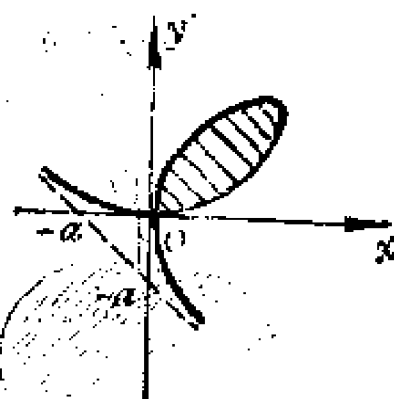


图 4.33

$$\begin{aligned}
& + 2 \arctan \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
& = 2\sqrt{2}a^2 \{ \arctan(\sqrt{2}-1) + \arctan(\sqrt{2}+1) \} \\
& = 2\sqrt{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi a^2.
\end{aligned}$$

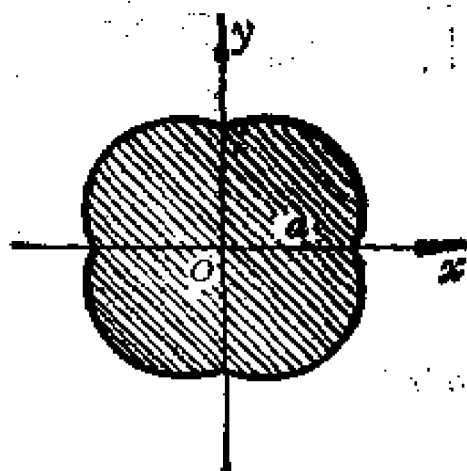


图 4.34

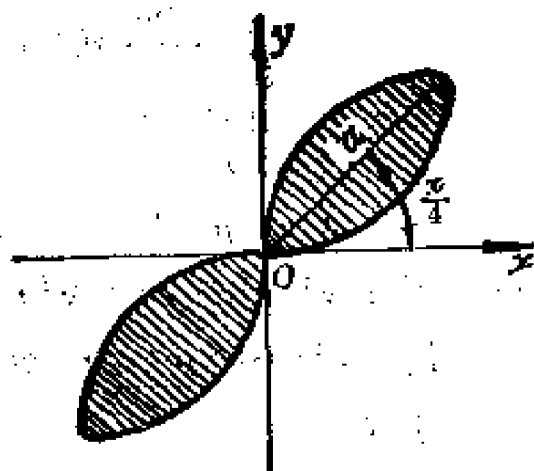


图 4.35

2428. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (双纽线).

解 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ (图4.35).

所求的面积为

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin 2\varphi = a^2.$$

化方程式为参数式的形状,以求下列曲线所围成的面积:

2429. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (内摆线).

解 设

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t,$$

其中 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 它对应于四分之一的面积。所求的面积为其四倍, 即

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-3a^2 \sin^4 t \cos^2 t) dt \\ &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

2430. $x^4 + y^4 = ax^2 y$.

解 设

$$y = tx,$$

则曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{at}{1+t^4}, \\ y = \frac{at^2}{1+t^4}. \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

利用对称性知, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= -2 \int_0^{+\infty} \frac{at^2}{1+t^4} \cdot \frac{a(1-3t^4)}{(1+t^4)^2} dt \\ &= -2a^2 \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt \right. \\ &\quad \left. - 3 \int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^3} dt \right). \end{aligned}$$

因为

$$\int \frac{x^2 dx}{(a+bx^4)^n}$$

$$= \frac{x^{n-3}}{(n+1-4m)b \cdot (a+bx^4)^{m-1}} \\ - \frac{(n-3)a}{b(n+1-4m)} \int \frac{x^{n-4}}{(a+bx^4)^m} dx^{**},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^3} dt \\ = - \frac{t^3}{5(1+t^4)^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{3}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt \\ = \frac{3}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt,$$

于是

$$S = \frac{8}{5} a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt.$$

又因

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m} \\ = \frac{x^{n+1}}{4a(m-1)(a+bx^4)^{m-1}} \\ + \frac{4m-n-5}{4a(m-1)} \int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^{m-1}}, \quad (**)$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt \\ = \frac{t^3}{8(1+t^4)^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{5}{8} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt$$

$$= \frac{5}{8} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt$$

$$= \frac{5}{8} \left[-\frac{t^3}{4(1+t^4)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4} \right]$$

$$= \frac{5}{32} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt,$$

于是

$$S = \frac{1}{4} a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

利用

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2}{a+bx^4} dx \\ &= \frac{1}{4b \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{x^2 - \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}x + \sqrt{\frac{a}{b}}}{x^2 + \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}x + \sqrt{\frac{a}{b}}} \right. \\ & \quad \left. + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x^2} \right\}^{***} \quad (ab > 0), \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned} & \int \frac{t^2}{1+t^4} dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right. \\ & \quad \left. + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right\} + C. \end{aligned}$$

考虑到上述式子右端的函数 $\arctg \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 中的 $t=1$ 点间断, 并且

$$\lim_{t \rightarrow 1+0} \arctg \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} = -\frac{\pi}{2},$$

及

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \arctg \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} = \frac{\pi}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt &= \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 + \sqrt{2}t + 1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + 2 \arctg \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right\} \Big|_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 + \sqrt{2}t + 1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \right. \\ &\quad \left. + 2 \arctg \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right\} \Big|_1^{+\infty} \\ &= -\frac{2}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4}, \end{aligned}$$

最后得所求的面积为

$$S = \frac{\sqrt{2}\pi}{16} a^2.$$

*) 参阅“函数表与积分表”(И.М.雷日克, И.С.格拉德什坦)第64页“(2.133)2”.

**) 参阅同书第64页“(2.133)1”.

***) 参阅同书第64页“(2.132)3”.

§6. 弧长的计算法

1° 在直角坐标系中的弧长 平滑(连续可微分的)曲线

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

上一段弧的长度等于

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

2° 参数方程所表曲线的弧长 若曲线C用参数方程式给出

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_0 \leq t \leq T),$$

式中 $x(t)$, $y(t)$ 为在闭区间 $[t_0, T]$ 内可微分的连续函数, 则曲线C的弧长等于

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

3° 极坐标系中的弧长 若

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta),$$

式中 $r(\varphi)$ 及其导函数 $r'(\varphi)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上皆是连续的, 则曲线上对应的一段弧长等于

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

关于空间曲线的弧长可参阅第八章.

求下列曲线的弧长:

2431. $y = x^{\frac{3}{2}} (0 \leq x \leq 4).$

解 所求的弧长为

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

2432. $y^2 = 2px \ (0 \leq x \leq x_0).$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{p}{y}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{x_0} \sqrt{p+2x} d(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{x(p+2x)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p}{2\sqrt{2}} \ln \left(\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{p}{2}} \right) \right\} \Big|_0^{x_0} \\ &= 2\sqrt{x_0 \left(x_0 + \frac{p}{2} \right)} \\ &\quad + p \ln \left(\frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}} \right). \end{aligned}$$

2433. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 从点 $A(0, a)$ 至点 $B(b, h)$.

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx \\ &= a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{h^2 - a^2} \quad *) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *) \quad \text{由于 } h &= a \operatorname{ch} \frac{b}{a}, \text{ 故 } \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{h^2 - a^2}. \end{aligned}$$

2434. $y = e^x$ ($0 \leq x \leq x_0$).

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + e^{2x}} dx \\ &= \left(\sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right) \Big|_0^{x_0} \\ &= \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x_0}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x_0}} + 1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^{2x_0}} \\ &\quad - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2x_0}}}{1 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$2435. \quad x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y \quad (1 \leq y \leq e).$$

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y}\right)^2} dy \\ &= \int_1^e \frac{1+y^2}{2y} dy = \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$

$$2436. \quad y = a \ln \frac{a^2}{a^2-x^2} \quad (0 \leq x \leq b < a).$$

$$\text{解} \quad y' = \frac{2ax}{a^2-x^2} \cdot \sqrt{1+y'^2} = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$$

所求的弧长为

$$s = \int_0^b \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} dx = a \ln \frac{a+b}{a-b} - b.$$

$$2437. \quad y = \ln \cos x \quad (0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}).$$

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx \\ &= \int_0^a \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right). \end{aligned}$$

$$2438. \quad x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (0 < b \leq y \leq a).$$

$$\text{解} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{a}{y}.$$

所求的弧长为

$$s = \int_b^a \frac{a}{y} dy = a \ln \frac{a}{b}.$$

2439. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x} \left(0 \leq x \leq \frac{5}{3}a \right)^{*)}$

解 如图4.36所示.

设 $y = tx$, 得

$$\begin{cases} x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{2at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$

当 $0 \leq x \leq \frac{5}{3}a$ 时, $0 \leq t$

$\leq \sqrt{5}$ (一半弧长).

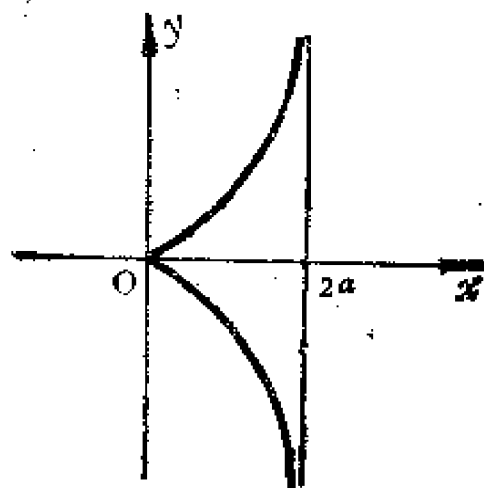


图 4.36

$$x'_t = \frac{4at}{(t^2+1)^2}, \quad y'_t = \frac{2at^4 + 6at^2}{(t^2+1)^2},$$

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}.$$

所求的弧长为

$$s = \int_0^{\sqrt{5}} 2 \frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1} dt$$

$$= 32a \cdot \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta (1+3\sin^2 \theta)} \quad (**)$$

$$= \frac{32a}{3} \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^2(z^2 - \frac{4}{3})} \quad (***)$$

$$= \frac{32a}{3} \left\{ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \ln \frac{z - \frac{2}{\sqrt{3}}}{z + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right\} \Big|_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$= 4a \left(1 + 3\sqrt{3} \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right).$$

*) 原题误为 $y^2 = \frac{x^2}{2a-x}$, 现按原答案予以改正.

**) 设 $t = 2 \operatorname{tg} \theta$.

***) 设 $z = \cos \theta$.

2440. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (内摆线).

解 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, \sqrt{1+y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$

所求的弧长为

$$s = 4 \int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx = 6a.$$

2441. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, c^2 = a^2 - b^2$ (椭圆的渐屈线).

解 $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}$

$$= \frac{3c^2}{ab} \sin t \cos t \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}.$$

所求的弧长为

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3c^2}{ab} \sin t \cos t \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{12c^2}{3ab(a^2 - b^2)} \left\{ b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t \right\}^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4(a^3 - b^3)}{ab}.
\end{aligned}$$

2442⁺. $x = a \cos^4 t$, $y = a \sin^4 t$.

解 $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 4a \sin t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}$.

所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a \sin t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} dt \\
&= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}} d \left(\sin^2 t - \frac{1}{2} \right) \\
&= 2a \left[-\frac{\sin^2 t - \frac{1}{2}}{2} \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \sin^2 t - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4 t + \sin^4 t)} \right| \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) \right] a.
\end{aligned}$$

2443. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 所求的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a.$$

2444. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (圆的渐伸线).

解 $x'_t = a t \cos t$, $y'_t = a t \sin t$,

$$\sqrt{x'_t{}^2 + y'_t{}^2} = at.$$

所求的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} at \, dt = 2\pi^2 a.$$

2445⁺. $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ ($0 \leq t \leq T$).

解 $\sqrt{x'_t{}^2 + y'_t{}^2} = \sqrt{2} a \cdot \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch} t}.$

所求的弧长为

$$s = \int_0^T \sqrt{2} a \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch} t} \, dt$$

$$= \sqrt{2} a \int_1^{\operatorname{ch} T} \sqrt{\frac{\theta - 1}{\theta + 1}} d\theta^{**}$$

$$= 2\sqrt{2} a \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{ch} T}} \frac{\sin^2 z}{\cos^3 z} dz^{**}$$

$$= 2\sqrt{2} a \left\{ \frac{\sin z}{2 \cos^2 z} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right) \right\} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{ch} T}}$$

$$= \sqrt{2} a (\sqrt{\operatorname{ch} T} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ch} T} - \sqrt{2})$$

$$- \sqrt{2} a [\ln(\sqrt{\operatorname{ch} T} + \sqrt{1 + \operatorname{ch} T})$$

$$- \ln(1 + \sqrt{2})]$$

$$= 2a \left(\operatorname{ch} \frac{T}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{ch} T + 1} \right).$$

$$= \sqrt{2} a \ln \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{T}{2} + \sqrt{\operatorname{ch} T}}{\sqrt{2} + 1} \quad (***)$$

*) 设 $\theta = \operatorname{ch} t$,

**) 设 $\theta = \operatorname{tg}^2 z$,

***) $\sqrt{1 + \operatorname{ch} T} = \sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{T}{2}$.

2446. $r = a\varphi$ (阿基米得螺线) ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} d\varphi \\ &= a \left\{ \frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) \right\} \Big|_0^{2\pi} \\ &= a \left\{ \pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \right\}. \end{aligned}$$

2447. $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) 当 $0 < r < a$.

解 $0 < r < a$, $-\infty < \varphi < 0$.

所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{a^2 e^{2m\varphi} + a^2 m^2 e^{2m\varphi}} d\varphi \\ &= a \sqrt{m^2 + 1} \int_{-\infty}^0 e^{m\varphi} d\varphi \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{m\varphi} d\varphi = \frac{a \sqrt{1 + m^2}}{m}. \end{aligned}$$

2448. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

解 $\sqrt{r^2 + r'^2} = 2a \cos \frac{\varphi}{2}.$

所求的弧长为

$$s = 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a.$$

2449. $r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \right).$

解 $r' = \frac{p \sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2},$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{2p \cos \frac{\varphi}{2}}{(1 + \cos \varphi)^2}.$$

所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2p \cos \frac{\varphi}{2}}{(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{p}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi \\ &= \frac{p}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec \frac{\varphi}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi \\ &= p \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sec^2 \frac{\varphi}{2} - 1} d \left(\sec \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \\ &= 2p \left\{ \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right) + \frac{\sec \frac{\varphi}{2}}{2} \sqrt{\sec^2 \frac{\varphi}{2} - 1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \ln \left(\sec \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 & = p \{ \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \}.
 \end{aligned}$$

2450. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

解 $\sqrt{r^2 + r'^2} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} (0 \leq \varphi \leq 3\pi)$ (图 4.37).

所求的弧长为

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi \\
 &= \frac{3\pi a}{2}.
 \end{aligned}$$

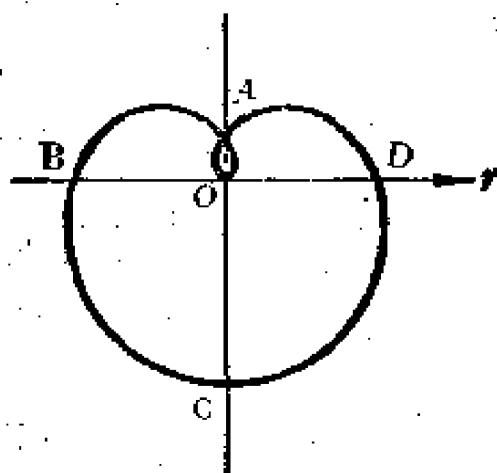


图 4.37

我们甚至可以证明

1° 弧 \widehat{AB} 为弧 \widehat{OABC} 的

三分之一;

2° \widehat{OA} , \widehat{AB} , \widehat{BC} 之间

依次是等差的, 其公差为 $\frac{3a}{8}\sqrt{3}$.

不仅如此, 我们还可证明更一般的情况:

曲线 $r = a \sin^n \left(\frac{\theta}{n} \right)$ (n 为正整数) 之全长为

$$s = \begin{cases} \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} 4ka, & \text{当 } n=2k \text{ 时,} \\ \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \pi a, & \text{当 } n=2k+1 \text{ 时.} \end{cases}$$

2451. $r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi),$

解 $r' = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}},$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} + 1}$$

$$= \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \varphi + 1}$$

$$= \frac{a \operatorname{ch} \varphi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{a \operatorname{ch} \varphi}{1 + \operatorname{ch} \varphi}$$

$$= a \left(1 - \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \varphi} \right)$$

$$= a \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \right).$$

所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} a \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \right) d\varphi = a \left(\varphi - \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= a (2\pi - \operatorname{th} \pi). \end{aligned}$$

2452. $\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \quad (1 \leq r \leq 3).$

解 $r^2 - 2r\varphi + 1 = 0$, 两边对 φ 求导函数, 得

$$2rr' - 2\varphi r' - 2r = 0$$

即

$$r' = \frac{r}{r-\varphi},$$

从而

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{r\varphi}{r-\varphi} = \frac{r^3 + r}{r^2 - 1},$$

$$d\varphi = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)dr.$$

所求的弧长为

$$\begin{aligned}s &= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{r^3 + r}{r^2 - 1} \cdot \frac{r^2 - 1}{r^2} dr \\&= \frac{1}{2} \int_1^3 \left(r + \frac{1}{r}\right) dr = 2 + \frac{1}{2} \ln 3.\end{aligned}$$

2453. 证明: 椭圆

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

的弧长等于正弦曲线 $y = c \sin \frac{x}{b}$ 的一波之长, 其中

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

证 对于椭圆, 其全长为

$$\begin{aligned}s_1 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t} dt \\&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt \\&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt.\end{aligned}$$

对于正弦曲线，其一波（ x 由0到 $2\pi b$ ）之长为

$$\begin{aligned} s_2 &= \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} \cos^2 \frac{x}{b}} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + c^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt, \end{aligned}$$

所以 $s_1 = s_2$ ，本题得证。

2454. 抛物线 $4ay = x^2$ 沿 Ox 轴滚动。证明抛物线的焦点划成悬链线。

解 如图4.38所示，设抛物线切 Ox 轴于点 $A(s, 0)$ ， O' 为抛物线的顶点， P' 为焦点， $O'Y'$ 为对称轴， $O'X' \perp O'Y'$ ，过 A 作 $AB \perp O'X'$ 。

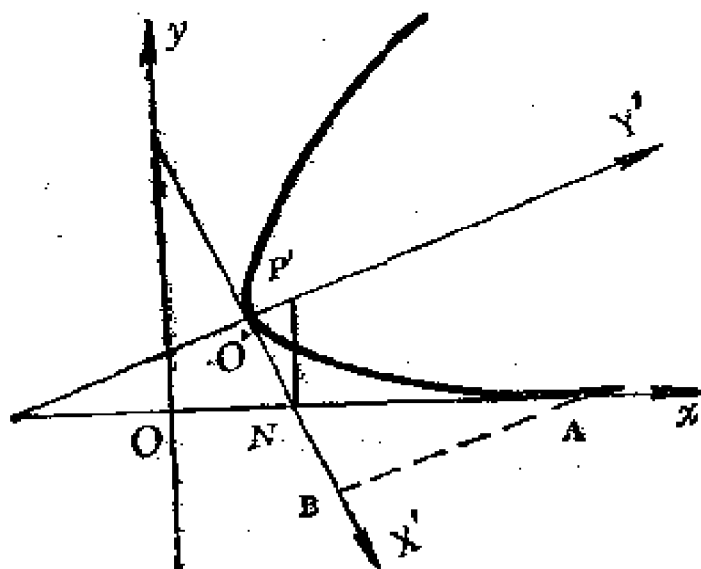


图 4.38

引入参数 $O'N = t$ ，则由抛物线的性质易知：
 $P'N \perp Ox$ ， $O'B = 2O'N = 2t$ ，从而有

$$AB = \frac{(2t)^2}{4a} = \frac{t^2}{a}, \quad AN = t \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}},$$

$$s = \int_0^{2t} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} dx$$

$$= t \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} + a \ln \left(\frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} \right),$$

$$P'N = a \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

于是，焦点 P' 的坐标 x, y 由参数 t 表出：

$$\begin{cases} x = s - AN = a \ln \left(\frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} \right), & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = P'N = a \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}. & (2) \end{cases}$$

由 (1) 式得

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2},$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = -\frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

上面两式相加，得

$$e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} = 2 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

再以 (2) 式代入上式，最后得

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \cosh \frac{x}{a}.$$

这说明抛物线的焦点划成悬链线.

2455. 求环线

$$y = \pm \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x}$$

所包围的面积与周长等于这曲线的围线长的圆面积之比.

解 当 $x=0$ 及 $x=\frac{1}{3}$ 时, $y=0$. 此环线的面积为

$$S_1 = 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x} dx = \frac{8}{135\sqrt{3}}.$$

此环线的周长为

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} \right)^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} \right) dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

按题设有 $\frac{4}{3\sqrt{3}} = 2\pi R$, 所以 $R = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi}$. 圆面

积

$$S_2 = \pi R^2 = \frac{4}{27\pi}.$$

于是,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \approx 0.73.$$

§7. 体积的计算法

1° 由已知横切面计算物体体积 若物体的体积 V 存在及 $S = S(x)$ ($a \leq x \leq b$) 为用平面切下的物体的横断面积, 而此横断面为经过 x 点垂直于 Ox 轴者, 则

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

2° 旋转体的体积 面积

$$a \leq x \leq b; \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

式中 $y(x)$ 为单值连续函数, 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_r = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

更普遍的情形: 面积

$$a \leq x \leq b; \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

式中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负的连续函数, 绕 Ox 轴旋转所成的环形的体积等于

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx.$$

2456. 求顶楼的体积, 其底是边长等于 a 及 b 的矩形, 其顶的棱边等于 c , 而高等于 h .

解 如图4.39所示的顶楼, 取 x 轴向下, 则有

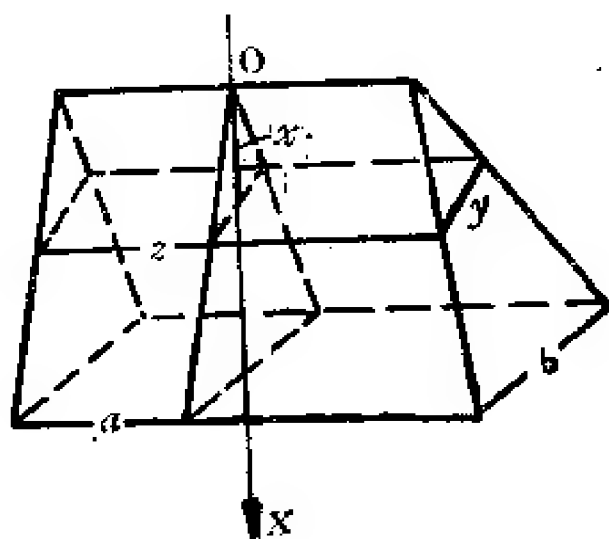


图 4.39

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{h} \quad \text{或} \quad y = \frac{b}{h}x,$$

$$\frac{z-c}{a-c} = \frac{x}{h} \quad \text{或} \quad z = \frac{a-c}{h}x + c.$$

于是, 所求顶楼的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h yz dx = \int_0^h \frac{b}{h} x \left(\frac{a-c}{h}x + c \right) dx \\ &= \frac{b}{h} \cdot \frac{a-c}{h} \cdot \frac{1}{3}h^3 + \frac{bc}{h} \cdot \frac{1}{2}h^2 \\ &= \frac{bh}{6}(2a+c). \end{aligned}$$

2457. 求截楔形的体积, 其平行的上下底为边长分别等于 A , B 和 a , b 的矩形, 而高等于 h .

解 如图4.40所示,

$$OO' = \frac{A}{2},$$

$$QQ' = \frac{a}{2},$$

$$OQ = h.$$

设 $OP = x$, 则

$$PP' = \frac{a}{2} + \frac{h-x}{h} \left(\frac{A-a}{2} \right).$$

同样可得

$$LP' = \frac{b}{2} + \frac{h-x}{h} \left(\frac{B-b}{2} \right).$$

从而

$$\begin{aligned} \text{面积 } KLMN &= ab + (A-a)(B-b) \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2 \\ &\quad + [a(B-b) + b(A-a)] \left(1 - \frac{x}{h} \right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

所求截楔形的体积为

$$V = \int_0^h f(x) dx = \frac{h}{6} [(2A+a)B + (2a+A)b].$$

2458. 求截锥体的体积, 其上下底为半轴长分别等于 A , B 和 a , b 的椭圆, 而高等于 h .

解 同2457题, 任一平行于上下底且距离下底为 x 的截面为一椭圆, 其半轴分别为

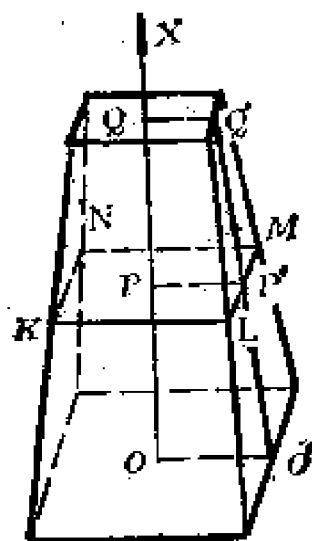


图 4.40

$$a' = a + \left(1 - \frac{x}{h}\right)(A - a)$$

及

$$b' = b + \left(1 - \frac{x}{h}\right)(B - b),$$

从而此截面的面积为

$$S(x) = \pi a' b'$$

$$= \pi \left\{ ab + (A - a)(B - b) \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \right.$$

$$\left. + [a(B - b) + b(A - a)] \left(1 - \frac{x}{h}\right) \right\}.$$

所求的体积为

$$V = \int_0^h S(x) dx = \frac{\pi h}{6} [(2A + a)B + (A + 2a)b].$$

2459. 求旋转抛物体的体积，其底为 S ，而高等于 H 。

解 不失一般性，假设抛物线方程为

$$y^2 = 2px,$$

绕 Ox 轴旋转，如图 4.41 所示。

记 $OA = H$ ，

$OB = x$ ，按假设有

$$S = \pi \cdot \overline{AC}^2$$

$$= \pi(2pH)$$

$$= 2\pi pH,$$

距原点为 x 的截面面

积为

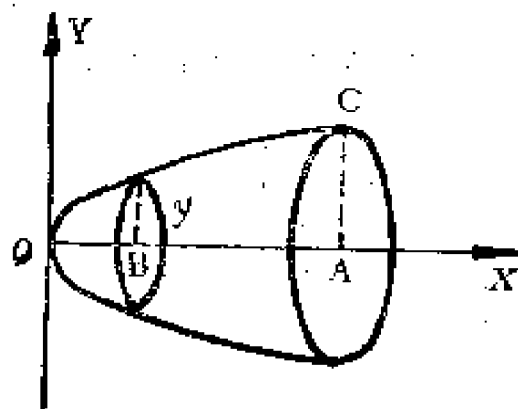


图 4.41

$$S(x) = \pi y^2 = 2\pi px.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \int_0^H S(x) dx = \pi p H^2 = \frac{SH}{2}.$$

2460. 设立体之垂直于 Ox 轴的横截面的面积 $S = S(x)$, 依下面的二次式规律变化:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad [a \leq x \leq b],$$

其中 A, B 及 C 为常数.

证明此物体之体积等于

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right],$$

其中 $H = b - a$ (辛普森公式).

$$\begin{aligned} \text{证} \quad V &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx \\ &= \frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b - a) \\ &= \frac{b-a}{6} [2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(a+b) + 6C] \\ &= \frac{H}{6} [(Aa^2 + Ba + C) + (Ab^2 + Bb + C) \\ &\quad + A(a^2 + 2ab + b^2) + 2B(a+b) + 4C] \\ &= \frac{H}{6} \left[S(a) + S(b) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

2461. 物体是点 $M(x, y, z)$ 的集合, 其中 $0 \leq z \leq 1$, 而且若 z 为有理数时, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$; 若 z 为

无理数时, $-1 \leq x \leq 0$, $-1 \leq y \leq 0$. 证明虽然对应的积分为

$$\int_0^1 S(z) dz = 1,$$

但此物体的体积不存在.

证 显然, 对任何 $0 \leq z \leq 1$, 不论 z 是有理数还是无理数, 都有 $S(z) = 1$. 从而

$$\int_0^1 S(z) dz = \int_0^1 dz = 1.$$

下证此物体 (V) 的体积不存在. 显然, 无完全含于 (V) 内的多面体 (X) 存在, 从而这种 (X) 的体积的上确界为零, 即 (V) 的内体积 $V_* = \sup \{X\} = 0$. 另一方面, (V) 的外体积 $V^* = \inf \{Y\}$, 其中的下确界是对所有完全包含着 (V) 的多面体 (Y) 的体积 Y 来取的. 由于 $0 \leq z \leq 1$ 中的有理数和无理数都在 $0 \leq z \leq 1$ 中是稠密的, 故, 显然, 上述任何完全包含着 (V) 的多面体 (Y) 都必完全包含着点集 $(Y_0) = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{ 以及 } -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0\}$. 而 (Y_0) 又完全包含着 (V) , 并且 (Y_0) 的体积 $Y_0 = 2$. 由此可知 $V^* = \inf \{Y\} = 2$, 于是 $V_* \neq V^*$. 故 (V) 的体积不存在.

求下列曲面所围成的体积:

$$2462. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{c}{a}x, \quad z = 0.$$

解 如图 4.42 所示. 用垂直 Oy 轴的平面截割, 得一

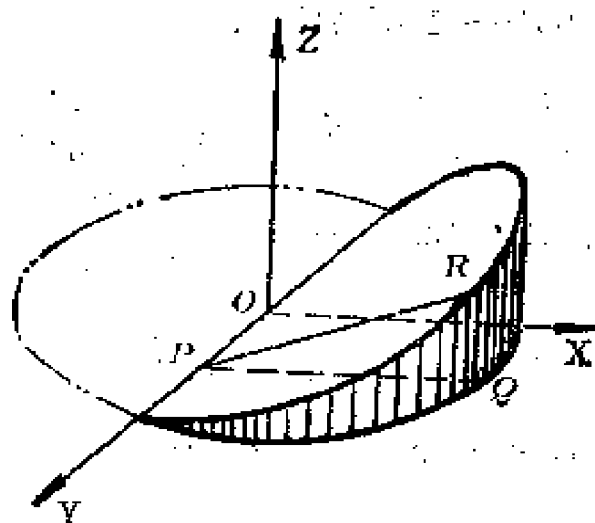


图 1.42

直角三角形 PQR .

设 $OP = y$, 则高 $QR = \frac{c}{a}x$, 从而它的面积为

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a} x^2 = \frac{ac}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

于是, 所求体积为

$$V = 2 \int_0^b \frac{ac}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy = \frac{2}{3} abc.$$

2463. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (椭球).

解 用垂直于 Ox 轴的平面截椭球得截痕为一椭圆, 它在 $yo z$ 平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} = 1.$$

由此显见其半轴分别为

$$b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{及} \quad c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

从而此椭圆的面积为

$$S(x) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

于是, 所求的椭球的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \pi bc dx \\ &= \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

2464. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c.$

解 方程的图形为单叶双曲面, 用平面 $z = h$ 截得椭圆

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right)} = 1,$$

其面积为

$$S(x) = \pi ab \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right).$$

于是, 所求的体积为

$$V = \pi ab \int_{-c}^c \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right) dh = \frac{8}{3} \pi abc.$$

2465. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2.$

解 如图4.43所示, 过点 $M(0, 0, z)$ 垂直于 Oz 轴作一平面, 在所给立体上截出一正方形, 其边长为 $\sqrt{a^2 - z^2}$, 所以其面积为

$$S(z) = a^2 - z^2,$$

于是, 所求的体积为

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \frac{16}{3} a^3.$$

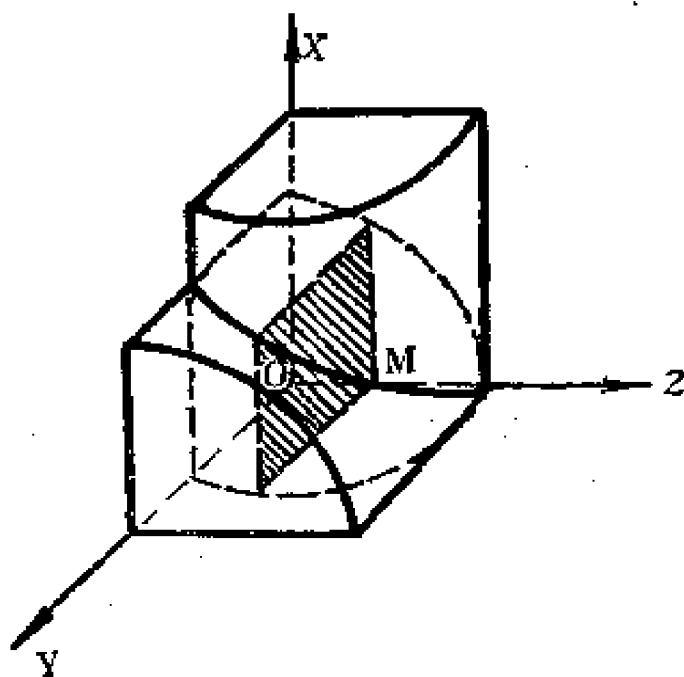


图 4.43

2466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$

解 如图4.44所示, 过点 $M(x, 0, 0)$ 垂直于 Ox 轴作一平面, 在所给立体上截出一曲边梯形, 其曲边由方程

$$z = \sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}$$

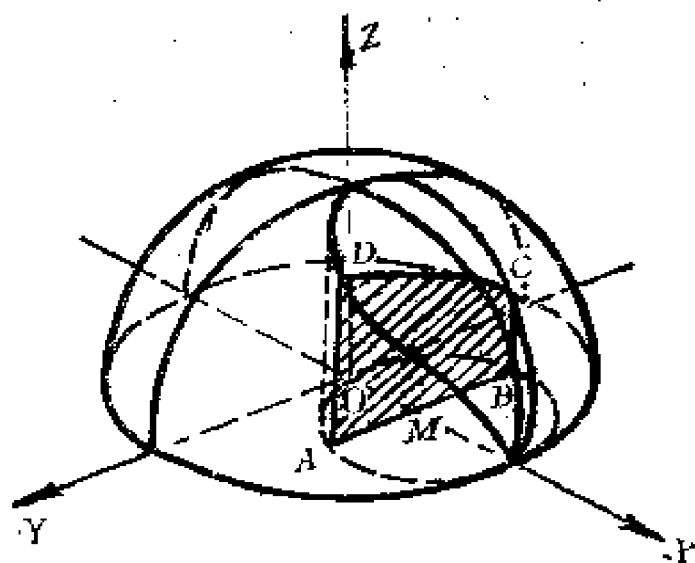


图 4.44

给出（上半面），

其变化范围为：

$$-\sqrt{ax-x^2} \leq y \leq \sqrt{ax-x^2} \quad (\text{如图中} ABCD).$$

从而其截面积为

$$\begin{aligned} S(x) &= 2 \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{(a^2-x^2)-y^2} dy \\ &= a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + (a^2-x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}. \end{aligned}$$

于是，所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^a S(x) dx \\ &= 2 \int_0^a \left\{ a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + (a^2-x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left\{ \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{5} a^3 + \left[\left(\frac{\pi a^3}{4} - \frac{1}{2} a^3 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{12} \pi a^3 - \frac{13}{90} a^3 \right) \right] \right\} \\
&= \frac{2}{3} a^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right).
\end{aligned}$$

2467. $z^2 = b(a-x)$, $x^2 + y^2 = ax$.

解 先求体积的四分之一部分, 截面积为

$$\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{b(a-x)} dy \\
&= \sqrt{ax-x^2} \cdot \sqrt{b(a-x)}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} V &= \int_0^a S(x) dx = \int_0^a \sqrt{ax-x^2} \cdot \sqrt{b(a-x)} dx \\
&= \sqrt{b} \int_0^a \sqrt{x} (a-x) dx \\
&= \frac{4}{15} a^2 \sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

于是, 所求的体积为

$$V = \frac{16}{15} a^2 \sqrt{ab}.$$

2468. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ ($0 \leq z \leq a$).

解 固定 z , 则截面为一椭圆, 其面积为

$$P(z) = \pi a z.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \int_0^a P(z) dz = \pi a \int_0^a z dz = \frac{\pi a^3}{2}.$$

2469⁺. $x + y + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

解 固定 z , 则截面为一直角三角形, 其面积为

$$P(z) = \frac{1}{2}(1 - z^2)^2.$$

故所求体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z^2)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2z^2 + z^4) dz = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

注意, 曲面 $x + y + z^2 = 1$ 关于平面 $z = 0$ 对称, 故它与三个平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 围成的图形有两个, 一个位于 Oxy 平面之上, 一个位于 Oxy 平面之下, 彼此是对称的 (关于 Oxy 平面), 从而它们的体积相等. 我们以上求的是位于 Oxy 平面之上的那一个图形的体积.

2470. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$.

解 不妨设 $a > 0$. 此为一有心椭球面. 固定 z , 得在平面 xOy 上的投影为

$$x^2 + xy + y^2 + zx + zy + (z^2 - a^2) = 0,$$

此截面的面积为

$$S(z) = -\frac{\pi \Delta}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{8\pi \Delta}{3\sqrt{3}},$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & \frac{z}{2} & z^2 - a^2 \end{vmatrix} = \frac{2z^2 - 3a^2}{4},$$

所以

$$S(z) = \frac{2(3a^2 - 2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}.$$

z 的变化范围为适合下述不等式的集合:

$$2z^2 - 3a^2 \leq 0,$$

即

$$|z| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}|a|}^{\sqrt{\frac{3}{2}}|a|} \frac{2(3a^2 - 2z^2)\pi}{3\sqrt{3}} dz = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}a^3.$$

*) 此公式详见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第一分册第330目7.

2471. 证明: 将面积

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

(式中 $y(x)$ 为连续函数) 绕 Oy 轴旋转所成的旋转体体积等于

$$V_x = 2\pi \int_a^b xy(x) \cdot dx.$$

$$\begin{aligned}\Delta V_x &= \pi[(x+\Delta x)^2 - x^2]y(x) \\ &\approx 2\pi xy(x)\Delta x.\end{aligned}$$

于是, 所求的体积为

$$V_x = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

求下列曲线旋转所成曲面包围的体积:

2472. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (0 \leq x \leq a)$ 绕 Ox 轴 (半三次抛物线)。

解 所求的体积为

$$V_x = \pi b^2 \int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3}{7} \pi ab^2.$$

2473. $y = 2x - x^2, y = 0$; (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

解 令 $y = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = 2$.

于是, 所求的体积为

$$(a) \quad V_x = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15},$$

$$(b) \quad V_y = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \frac{8\pi}{3}.$$

2474. $y = \sin x, y = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi)$; (a) 绕 Ox 轴, (b) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

$$(a) \quad V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2},$$

$$(b) \quad V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi^2.$$

2475. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$; (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

解 交点为 (a, b) 及 $(-a, b)$.

所求的体积为

$$(a) V_x = 2\pi \int_0^a \left(b^2 \frac{x^2}{a^2} - b^2 \frac{x^4}{a^4}\right) dx$$

$$= \frac{4\pi}{15} ab^2;$$

$$(b) V_y = \pi \int_0^b \left(\frac{a^2 y}{b} - \frac{a^2 y^2}{b^2}\right) dy$$

$$= \frac{\pi a^2 b}{6}.$$

2476. $y = e^{-x}$, $y = 0$ ($0 \leq x < +\infty$); (a) 绕 Ox 轴;
(b) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

$$(a) V_x = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2};$$

$$(b) V_y = \pi \int_0^1 (-\ln y)^2 dy = 2\pi.$$

2477. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) 绕 Ox 轴.

解 $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, $y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$

($-a \leq x \leq a$).

所求的体积为

$$V_x = \pi \int_{-a}^a (y_1^2 - y_2^2) dx$$

$$= 8b\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b.$$

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ 绕 Ox 轴.

解 原方程即 $y^2 - xy + x^2 - a^2 = 0$, 从而

$$y = \frac{x \pm \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2},$$

函数的定义域为 $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}a, \frac{2}{\sqrt{3}}a\right]$. 与 Ox 轴的交

点分别为 $x = -a$ 与 $x = a$.

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V_x &= 2 \left\{ \pi \int_0^a \frac{1}{4} \left(x + \sqrt{4a^2 - 3x^2} \right)^2 dx \right. \\ &\quad + \pi \int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} \left[\frac{1}{4} \left(x + \sqrt{4a^2 - 3x^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \left(x - \sqrt{4a^2 - 3x^2} \right)^2 \right] dx \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^a (4a^2 - 2x^2 + 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2}) dx \\ &\quad + 2\pi \int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} x\sqrt{4a^2 - 3x^2} dx \\ &= \pi \left[2a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{9} \left(4a^2 - 3x^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a \\ &\quad - \frac{2}{9} \left(4a^2 - 3x^2 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} = \frac{8}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

2479. $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x < +\infty$) 绕 Ox 轴.

解 函数定义域为 $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, ($n=0, 1, 2, \dots$), 故所求的体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-2x} \sin x dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{5} e^{-2x} (-2 \sin x - \cos x) \Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\ &= \frac{\pi}{5} (e^{-2\pi} + 1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-4n\pi} \\ &= \frac{\pi}{5} \cdot \frac{e^{-2\pi} + 1}{1 - e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})}. \end{aligned}$$

2480. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$),
 $y = 0$;

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (B) 绕直线 $y = 2a$.

解 所求的体积为

$$(a) V_x = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3;$$

$$\begin{aligned} (b) V_y &= 2\pi \int_0^{2\pi} a^3 (t - \sin t) (1 - \cos t)^2 dt \\ &= 6\pi^3 a^3; \end{aligned}$$

(B) 作平移: $y = \bar{y} + 2a$, $x = \bar{x}$, 则曲线方程为

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a(t - \sin t), \quad \bar{y} = -a(1 + \cos t), \text{ 及} \\ \bar{y} &= -2a. \end{aligned}$$

于是, 所求的体积为

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} [4a^2 - a^2(1 + \cos t)^2] a(1 - \cos t) dt \\ = 7\pi^2 a^3.$$

2481. $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

$$(a) V_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b^2 \cos^6 t)(3a \sin^2 t \cos t) dt \\ = 6\pi ab^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 t dt \right) \\ = 6\pi ab^2 \left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!} \right)^{*}) \\ = \frac{32}{105} \pi ab^2;$$

(b) 利用对称性, 只须将上述答案中 a, b 对调即得

$$V_y = \frac{32}{105} \pi a^2 b.$$

*) 利用2282题的结果.

2482. 证明把面积

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r(\varphi)$$

(φ 与 r 为极坐标) 绕极轴旋转所成的体积等于

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

证 证法一:

微面积 $dS = r d\varphi dr$ 绕极轴旋转所得微环形体积

$$dV = 2\pi r \sin \varphi dS = 2\pi r^2 \sin \varphi d\varphi dr.$$

于是, 所求的体积

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b \sin \varphi d\varphi \int_a^{r(\varphi)} r^2 dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_a^b r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

证法二:

应用直角坐标系下的古尔金第二定理*) 来证明. 对于微小面积元, 它的重心可以看成在点 $(\frac{2}{3} r \cos \varphi,$

$\frac{2}{3} r \sin \varphi)$ 处 (图

4.45).

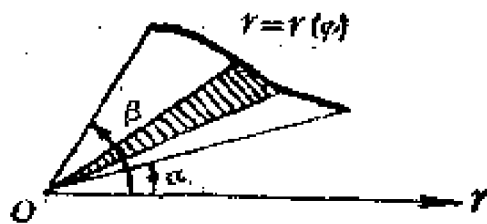


图 4.45

于是面积元素 $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, 其所对应的绕极轴旋转所成的体积元素为

$$dV = 2\pi \frac{2}{3} r \sin \varphi \cdot \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

所以

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_a^b r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

*) 参看2506题.

求下列由极坐标所表出的面积经旋转后所得的体积:

2483. $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$);

(a) 绕极轴; (6) 绕直线 $r \cos \varphi = -\frac{a}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{解 (a) } V &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3 (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{8\pi a^3}{3}; \end{aligned}$$

(6) 方法一:

所求的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^\pi r^2 \left(\frac{2}{3} r \cos \varphi + \frac{a}{4} \right) d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^3 \cos \varphi d\varphi \\ &\quad + \frac{\pi a^3}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi \\ &= \left(4\pi a^3 + \frac{\pi a^3}{2} \right) \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \\ &\quad + \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^\pi \cos^4 \varphi d\varphi + \frac{\pi^2 a^3}{2} \\ &= \left(4\pi a^3 + \frac{\pi a^3}{2} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \pi + \frac{\pi^2 a^3}{2} \\ &= \frac{13}{4} \pi^2 a^3. \end{aligned}$$

注 (1) 在 V 的表达式中 $\frac{2}{3} r \cos \varphi$ 的系数 $\frac{2}{3}$ 是把微小

面积集中在其重心 $(\frac{2}{3}r, \varphi)$ 处得出的。

$$(2) \int_0^{\pi} \cos^{2k+1} \varphi d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos^{2k} \varphi d\varphi = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2} \pi.$$

方法二:

心脏线 $r = a(1 + \cos \varphi)$ 的面积为 $\frac{3\pi a^2}{2}$ *, 而其

重心为 $\varphi_0 = 0, r_0 = \frac{5}{6}a$ **). 根据古尔金第二定理可得所求的体积为

$$V = 2\pi \left(\frac{5a}{6} + \frac{a}{4} \right) \frac{3\pi a^2}{2} = \frac{13}{4}\pi^2 a^3.$$

*) 利用2419题的结果。

**) 利用2512题的结果。

2484. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2);$

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (B) 绕直线 $y = x$.

解 (a) 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2(2\cos^2 \varphi - 1).$$

$$V_x = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^2(2\cos^2 \varphi - 1)]^{\frac{3}{2}} \sin \varphi d\varphi.$$

由于

$$\int (2\cos^2 \varphi - 1)^{\frac{3}{2}} \sin \varphi d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \int ((\sqrt{2} \cos \varphi)^2 - 1)^{\frac{3}{2}} d(\sqrt{2} \cos \varphi) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{8} (4 \cos^2 \varphi \right. \\
&\quad \left. - 5) \sqrt{2 \cos^2 \varphi - 1} + \frac{3}{8} \ln (\sqrt{2} \cos \varphi \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{2 \cos^2 \varphi - 1}) \right] + C.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
V_x &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2} \cos \varphi}{8} (4 \cos^2 \varphi \right. \\
&\quad \left. - 5) \sqrt{2 \cos^2 \varphi - 1} + \frac{3}{8} \ln (\sqrt{2} \cos \varphi \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{2 \cos^2 \varphi - 1}) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left[\frac{3}{8} \ln (\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{8} \right] \\
&= \frac{1}{4} \pi a^3 \left[\sqrt{2} \ln (\sqrt{2} + 1) - \frac{2}{3} \right].
\end{aligned}$$

(6) 利用对称性知, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
V_v &= \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cos \varphi d\varphi \\
&= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi} \cos \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

令 $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x$, 则 $\sqrt{\cos 2\varphi} = \cos x$,

$\cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \, dx$, 并且 x 的变化范围为

$(0, \frac{\pi}{2})$. 于是, 得

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^4 x \, dx$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

(B) 利用对称性知所求的体积为

$$V = \frac{4\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi} \cos \varphi d\varphi.$$

若用本题 (6) 的变换, 即得

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^4 x \, dx$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

2485. 求绕极轴把面积

$$a \leq r \leq a \sqrt{2 \sin 2\varphi}$$

旋转而成的旋转体体积.

解 $r = a$ 及 $r = a \sqrt{2 \sin 2\varphi}$, 在第一象限部分的交

点的极角分别为 $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 及 $\beta = \frac{5\pi}{12}$. 利用对称性知,

所求的体积应为

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} [(a \sqrt{2 \sin 2\varphi})^3 - a^3] \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (4\sqrt{2} \sqrt{\sin 2\varphi} \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ &\quad - \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

为求上述积分, 令

$$I_1 = \int \sqrt{\sin 2\varphi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

$$I_2 = \int \sqrt{\sin 2\varphi} \cos^2 \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

$$\text{则 } I_2 - I_1 = \frac{1}{3} \cos \varphi (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} I_1$$

即

$$I_2 - \frac{5}{3} I_1 = \frac{1}{3} \cos \varphi \cdot (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}. \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned} I_2 + I_1 &= \int \sqrt{\sin 2\varphi} \cos \varphi d\varphi \\ &= \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \sqrt{\operatorname{ctg} \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

令 $\operatorname{tg} \varphi = t$ ，就可将上述积分化成二项式的微分的积分。积分之，得

$$\begin{aligned} I_2 + I_1 &= \frac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{\sin 2\varphi} + \frac{1}{2} \ln (\sin \varphi + \cos \varphi \\ &\quad - \sqrt{\sin 2\varphi}) + \frac{1}{4} [\ln (\sin \varphi + \cos \varphi \\ &\quad + \sqrt{\sin 2\varphi}) + \arcsin (\sin \varphi \\ &\quad - \cos \varphi)]. \end{aligned} \quad (2)$$

(2) - (1)，得

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{3}{8} \left\{ \frac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{\sin 2\varphi} + \frac{1}{2} \ln (\sin \varphi + \cos \varphi \right. \\ &\quad - \sqrt{\sin 2\varphi}) + \frac{1}{4} [\ln (\sin \varphi + \cos \varphi \\ &\quad + \sqrt{\sin 2\varphi}) + \arcsin (\sin \varphi - \cos \varphi)] \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \cos \varphi \cdot (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \right\} + C. \end{aligned}$$

从而，得

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sqrt{\sin 2\varphi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{64} \pi. \end{aligned}$$

因此, 所求的体积为

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} \left[4\sqrt{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{3\pi}{64} \right) + \cos \varphi \left| \frac{\frac{8\pi}{12}}{\frac{\pi}{12}} \right| \right]$$

$$= \frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}.$$

§8. 旋转曲面表面积的算法

平滑的曲线 AB 绕 Ox 轴旋转所成曲面的面积等于

$$P = 2\pi \int_A^B y \, ds,$$

式中 ds 为弧的微分.

求旋转下列曲线所成曲面的面积:

2486. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}} \quad (0 \leq x \leq a)$ 绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}.$

于是, 所求的表面积为

$$P_s = 2\pi \int_0^a x \sqrt{\frac{x}{a}} \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}} \, dx$$

$$= \frac{3\pi}{a} \int_0^a x \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} \, dx$$

$$= \frac{3\pi}{a} \int_0^a \left(x + \frac{2a}{9} \right) \sqrt{\left(x + \frac{2a}{9} \right)^2 - \left(\frac{2a}{9} \right)^2} \, d\left(x + \frac{2a}{9} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2a}{9}) - \frac{3\pi}{a} \cdot \frac{2a}{9} \int_0^a \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} dx \\
& = \frac{3\pi}{a} \frac{1}{3} \left(x^2 + \frac{4ax}{9} \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a \\
& \quad - \frac{2\pi}{3} \left\{ \frac{x + \frac{2a}{9}}{2} \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{4a^2}{81} \ln \left(x + \frac{2a}{9} + \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} \right) \right\} \Big|_0^a \\
& = \frac{13\sqrt{13}}{27} \pi a^2 - \frac{11\sqrt{13}}{81} \pi a^2 \\
& \quad + \frac{4\pi a^2}{243} \ln \frac{11 + 3\sqrt{13}}{2} \\
& = \frac{4\pi a^2}{243} \left(21\sqrt{13} + 2 \ln \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right).
\end{aligned}$$

2487. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$) 绕 Ox 轴.

解 $y' = -\frac{\pi a}{2b} \sin \frac{\pi x}{2b},$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2b} \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}}.$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned}
P_s &= 2\pi \int_{-b}^b y \sqrt{1 + y'^2} dx \\
&= 2\pi \int_{-b}^b \frac{a}{2b} \cos \frac{\pi x}{2b} \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \pi a \sin \frac{\pi x}{2b} \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4b^2}{2} \ln \left| \pi a \sin \frac{\pi x}{2b} + \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}} \right| \right] \Big|_0^b \\
&= 2a \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2} \\
&\quad + \frac{8b^2}{\pi} \ln \frac{\pi a + \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2}}{2b}.
\end{aligned}$$

2488. $y = \operatorname{tg} x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$ 绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\sec^4 x} = \frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x}.$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned}
P_s &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \cdot \frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x} dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4 x + 1} d\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \\
&= \pi \left[\frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x} - \ln(\cos^2 x \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\cos^4 x + 1}) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \pi \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} \right].
\end{aligned}$$

$$+ \ln \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2} \Big].$$

2489. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$): (a) 绕 Ox 轴,
(6) 绕 Oy 轴.

解 (a) $\sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}.$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \cdot \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}} dx \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[(2x_0 + p) \sqrt{2px_0 + p^2} - p^2 \right]. \end{aligned}$$

$$(6) \sqrt{1+x_y'^2} = \frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}.$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_y &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2px_0}} x \sqrt{1+x_y'^2} dy \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2px_0}} \frac{y^2}{2p} \cdot \frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p} dy \\ &= \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{p^2+y^2} dy \\ &= \frac{2\pi}{p^2} \left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8} \sqrt{p^2+y^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p^4}{8} \ln(y + \sqrt{y^2+p^2}) \right] \Big|_0^{\sqrt{2px_0}} \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(p+4x_0) \sqrt{2x_0(p+2x_0)} \right. \end{aligned}$$

$$-p^2 \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}} \Big\}.$$

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b \leq a$): (a) 绕 Ox 轴;

(6) 绕 Oy 轴.

解 (a) $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$, $yy' = -\frac{b^2}{a^2}x$,

$$\begin{aligned} y \sqrt{1+y'^2} &= \sqrt{y^2 + (yy')^2} \\ &= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 x^2}. \end{aligned}$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_1 &= 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - e^2 x^2} dx \\ &= 2\pi \frac{b}{a} \left(a \sqrt{a^2 - e^2 a^2} + \frac{a^2}{e} \arcsin e \right) \\ &= 2\pi b \left(b + \frac{a}{e} \arcsin e \right), \end{aligned}$$

其中 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 是椭圆之离心率.

(6) 将 x, y 轴对调, 即将 x 轴作为短轴. 于是在所得出的 $y \sqrt{1+y'^2}$ 中仅需将 a 与 b 的位置对调一下即可, 即

$$y \sqrt{1+y'^2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2-b^2}{b^2}x^2}$$

$$= \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2}.$$

于是, 所求表面积为

$$\begin{aligned} P_s &= 2\pi \int_{-b}^b \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2} dx \\ &= 2\pi a \left[\frac{x}{2} \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^2}{2c} \ln \left(\frac{c}{b} x + \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2} x^2} \right) \right] \Big|_{-b}^b \\ &= 2\pi a \left(\sqrt{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{2c} \ln \left[\frac{\sqrt{b^2 + c^2} + c}{\sqrt{b^2 + c^2} - c} \right] \right) \\ &= 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{2c} \ln \left[\frac{a+c}{a-c} \right] \right) \\ &= 2\pi a \left(a + \frac{b^2}{2a} \cdot \frac{1}{e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \\ &= 2\pi a \left\{ a + \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{e} \ln \left[\frac{a}{b} (1+e) \right] \right\}. \end{aligned}$$

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ ($b \geq a$) 绕 Ox 轴.

解 此圆分成两单值支

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2} \text{ 及 } y = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_s &= 2\pi \int_{-a}^a (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &\quad + 2\pi \int_{-a}^a (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

$$= 4\pi^2 ab.$$

2492. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 绕 Ox 轴.

解 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, \sqrt{1+y'^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \cdot 2\pi \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= -\frac{12\pi a^{\frac{1}{3}}}{5} (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}} \Big|_0^a \\ &= \frac{12\pi a^2}{5}. \end{aligned}$$

2493. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$): (a) 绕 Ox 轴;

(b) 绕 Oy 轴.

解 (a) $\sqrt{y'^2 + 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} + 1} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi a \int_{-b}^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx \\ &= 2\pi a \int_0^b \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx \\ &= \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad P_s &= 2\pi \int_0^b x \sqrt{1+y'^2} dx \\
 &= 2\pi \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx \\
 &= 2\pi a \left(a + b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right).
 \end{aligned}$$

2494. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 绕 Ox 轴.

解 $x'_y = \mp \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \sqrt{1+x'^2} = \frac{a}{y}$

$(0 \leq y \leq a).$

于是, 所求的表面积为

$$P_s = 2 \cdot 2\pi \int_0^a y \frac{a}{y} dy = 4\pi a^2.$$

2495. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi):$

(a) 绕 Ox 轴; (6) 绕 Oy 轴; (в) 绕直线 $y = 2a$;

解 先求 ds :

$$ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt.$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned}
 (a) \quad P_s &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt \\
 &= 16\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 u du = \frac{64}{3}\pi a^2.
 \end{aligned}$$

$$(6) \quad P_s = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi^2 a^2.$$

(B) 作平移 $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y + 2a$ 则

$$\bar{y} = -a(1 + \cos t),$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_{\bar{x}} &= \left| 2\pi \int_0^{2\pi} \left[-a(1 + \cos t) \right] 2a \sin \frac{t}{2} dt \right|^{*}) \\ &= \frac{32}{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

*) 在此取绝对值, 是由于被积函数始终不为正之故.

2496. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 绕直线 $y = x$.

解 先求 ds :

$$ds = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} dt$$

$$= \begin{cases} 3a \sin t \cos t dt, & \text{当 } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ -3a \sin t \cos t dt, & \text{当 } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

利用对称性, 并作旋转, 即得所求的表面积为

$$\begin{aligned} P &= 2 \left[2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{yx}{\sqrt{2}} \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{y-x}{\sqrt{2}} \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (a \sin^3 t - a \cos^3 t) \cdot 3a \sin t \cos t \, dt \right. \\
&\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (a \sin^3 t - a \cos^3 t) \cdot 3a \sin t \cos t \, dt \right] \\
&= \frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{5} \sin^5 t + \frac{1}{5} \cos^5 t \right) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad - \left(\frac{1}{5} \sin^5 t + \frac{1}{5} \cos^5 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \Big] \\
&= \frac{3}{5} \pi a^2 (4\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

2497. $r = a(1 + \cos \varphi)$ 绕极轴.

解 $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\varphi = 2a \cos \frac{\varphi}{2} \, d\varphi,$

$$\begin{aligned}
y &= r \sin \varphi = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \\
&= 4a \cos^3 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}.
\end{aligned}$$

于是, 所求的表面积为

$$P = 2\pi \int_0^\pi 8a^2 \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{32}{5} \pi a^2.$$

2498. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; (a) 绕极轴; (b) 绕轴 $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

(B) 绕轴 $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

解 (a) $y = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi, ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi.$

于是, 所求的表面积为

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin \varphi \, d\varphi = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}).$$

$$(6) \quad x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right).$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \\ &= 2\pi a^2 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$(B) \quad x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, \quad y = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi,$$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi.$$

注意到在 $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ 内恒有 $x - y \geq 0$, 于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x-y}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 4\pi a^2. \end{aligned}$$

2499. 由抛物线 $ay = a^2 - x^2$ 及 Ox 轴所包围的图形绕 Ox 轴旋转而构成一旋转体, 求其表面积与等体积球的表面

积之比。

解 首先求此旋转体的表面积。

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}{a},$$

从而

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \cdot 2\pi \int_0^a \left(a - \frac{x^2}{a}\right) \cdot \frac{2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}{a} dx \\ &= 8\pi \int_0^a \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} dx - \frac{8\pi}{a^2} \int_0^a x^2 \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} dx \\ &= 8\pi \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a^2}{8} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \right) \right\} \Big|_0^a \\ &\quad - \frac{8\pi}{a^2} \left\{ \frac{x(2x^2 + \frac{a^2}{4})}{8} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^4}{128} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \right) \right\} \Big|_0^a \\ &= \frac{\pi a^2}{8} \left[7\sqrt{5} + \frac{17}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right]; \end{aligned}$$

其次, 求旋转体的体积。

$$V_x = \pi \int_{-a}^a \left(a - \frac{x^2}{a}\right)^2 dx = \frac{16\pi a^3}{15}.$$

设与其等体积球的半径为 R , 则

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{16\pi a^3}{15}.$$

所以

$$R = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}a.$$

于是, 此球的表面积为

$$P = 4\pi R^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{16}{25}}a^2.$$

最后得到

$$\frac{P_x}{P} = \frac{\frac{\pi a^2}{8} \left[7\sqrt{5} + \frac{17}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right]}{\frac{8\pi a^2}{5} \sqrt[3]{10}}$$

$$= \frac{5(14\sqrt{5} + 17 \ln(2 + \sqrt{5}))}{128 \cdot \sqrt[3]{10}}$$

$$\approx 1.013.$$

*) 利用1820题的结果.

2500. 由直线 $x = \frac{p}{2}$ 与抛物线 $y^2 = 2px$ 所包围的图形绕直线 $y = p$ 而旋转, 求这旋转体的体积和表面积.

$$\text{解 } V_{x=p} = \int_0^{\frac{p}{2}} \pi (p + \sqrt{2px})^2 dx$$

$$+ \int_0^{\frac{p}{2}} \pi (p - \sqrt{2px})^2 dx$$

$$= 4\pi p \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px} dx$$

$$= \frac{4}{3} \pi p^3.$$

旋转体的侧面积为

$$\begin{aligned}
 S_{\text{侧}} &= \int_{(1)} 2\pi (p + \sqrt{2px}) ds \\
 &\quad + \int_{(1)} 2\pi (p - \sqrt{2px}) ds \\
 &= 4\pi p \int_{(1)} ds = 4\pi p \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy \\
 &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{y^2 + p^2} dy \\
 &= 4\pi \left(\frac{y}{2} \sqrt{y^2 + p^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p^2}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 + p^2}) \right) \Big|_0^1 \\
 &= 2\pi p^2 [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})],
 \end{aligned}$$

而底面积为

$$S_{\text{底}} = \pi(2p)^2 = 4\pi p^2,$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned}
 P &= S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} \\
 &= 2\pi p^2 [(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) + 2].
 \end{aligned}$$

§9. 矩的计算法. 重心的坐标

1° 矩 若在 Oxy 平面上, 密度为 $\rho = \rho(y)$ 的质量 M 充满了某有界连续统 Ω (曲线, 平面的区域), 而 $\omega = \omega(y)$ 为 Ω 中纵标不超过 y 的部分的对应的度量 (弧长, 面积), 则数

$$M_k = \lim_{\max |\Delta y_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(y_i) y_i^k \Delta \omega(y_i) \\ = \int_G \rho y^k d\omega(y) \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

称为质量 M 对于 Ox 轴的 k 次矩。

特殊情形，当 $k=0$ 时得质量 M ，当 $k=1$ 时得静力矩，当 $k=2$ 时得转动惯量。

同样地可定义出质量对于坐标平面的矩。

若 $\rho=1$ ，则对应的矩称为几何矩（线矩，面积矩，体积矩等等）。

2° 重心 均匀平面图形 S 的重心的坐标 (x_0, y_0) 根据下面的公式来定义

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中 $M_1^{(y)}$ ， $M_1^{(x)}$ 为面积 S 对于 Oy 轴和 Ox 轴的几何静力矩。

2501. 求半径为 a 的半圆弧对于过此弧两端点直径的静力矩和转动惯量。

解 取此直径所在的直线作为 Ox 轴，圆心作为原点，则圆的方程为

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

从而

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

及

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{a}{y} dx = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx.$$

于是, 所求的静力矩和转动惯量^{*}为

$$M_1 = \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2a^2$$

及

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{-a}^a (a^2-x^2) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= 2a \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

2502. 求底为 b , 高为 h 的均匀三角形薄板对于其底边的静力矩和转动惯量 ($\rho = 1$).

解 取坐标系如图 4.46 所示.

$$\begin{aligned} M_1^{(*)} &= \frac{1}{2} \int_0^c y^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^c y_1^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_c^b y_2^2 dx. \end{aligned}$$

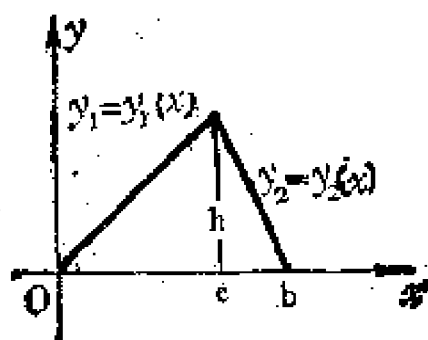


图 4.46

由于

$$y_1 = y_1(x) = \frac{h}{c} x,$$

^{*}) 这里假定 $\rho = 1$. 今后有类似情况, 不再说明.

$$y_2 = y_2(x) = \frac{h}{c-b}(x-b),$$

于是, 所求的静力矩为

$$\begin{aligned} M_1^{(x)} &= \frac{1}{2} \int_0^b \frac{h^2}{c^2} x^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{h^2}{(c-b)^2} (x-b)^2 dx \\ &= \frac{bh^2}{6}. \end{aligned}$$

又由于

$$x_1 = x_1(y) = -\frac{c}{h}y,$$

$$x_2 = x_2(y) = b + \frac{c-b}{h}y,$$

于是, 所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} M_2^{(x)} &= \int_0^h y^2 (x_2 - x_1) dy \\ &= \int_0^h y^2 \left(b - \frac{b}{h}y \right) dy = \frac{bh^2}{12}. \end{aligned}$$

2503. 求半轴长为 a 和 b 的均匀椭圆形薄板对于其主轴的转动惯量 ($\rho = 1$).

解 不妨设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

则上、下半椭圆方程为

$$x_1 = -\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

$$x_2 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

于是, 所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} M_2^{(x)} &= \int_{-b}^b y^2 (x_2 - x_1) dy \\ &= 2 \int_{-b}^b \frac{a}{b} y^2 \sqrt{b^2 - y^2} dy \\ &= 4ab^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi^{*}) \\ &= \frac{\pi a^3 b^3}{4}. \end{aligned}$$

至于 $M_2^{(y)}$, 由对称性知: 只须在 $M_2^{(x)}$ 的结果中将 a, b 对调即得. 所以

$$M_2^{(y)} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

*) 设 $y = b \sin \varphi$.

2504. 求底半径为 r 和高为 h 的均匀圆锥对于其底平面的静力矩和转动惯量 ($\rho = 1$).

解 取坐标系如图 4.47 所示, 则

$$M_1 = \int_0^h x \cdot P(x) dx,$$

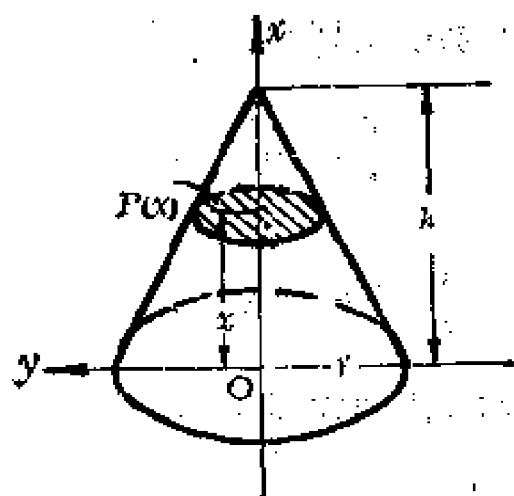


图 4.47

其中

$$P(x) = \pi y^2 = \pi \left[\frac{r}{h}(h-x) \right]^2.$$

于是, 所求的静力矩和转动惯量分别为

$$M_1 = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x (h-x)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^2}{12},$$

$$M_2 = \int_0^h x^2 \cdot P(x) dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 (h-x)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^3}{30}.$$

2505. 证明古尔金第一定理: 弧 C 绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转面的面积, 等于这个弧的长度与这弧的重心所划出的圆周之长的乘积.

证 重心 (ξ, η) 具有这样的性质, 即如把曲线的全部“质量”都集中到它上面, 则此质量对于任何一个轴的静力矩, 都与曲线对此轴的静力矩相同. 即

$$\xi s = M_y = \int_0^l x ds,$$

$$\eta s = M_x = \int_0^l y ds,$$

式中 s 表示弧长.

于是

$$2\pi\eta \cdot s = 2\pi \int_0^l y ds.$$

上式的右端是弧 C 旋转而成的曲面面积, 左端 $2\pi\eta$ 表示弧 C 绕 Ox 轴旋转时其重心所划出的圆周之长. 从而定理得证.

2506. 证明古尔金第二定理: 面积 S 绕不与它相交的轴旋转而成的旋转体, 其体积等于面积 S 与这面积的重心所划出的圆周之长的相乘积.

证 由于

$$\eta \cdot S = M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx,$$

所以

$$2\pi\eta \cdot S = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

上式右端即为旋转体的体积, 从而定理得证.

2507. 求圆弧: $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ ($|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$) 重心的坐标.

解 显见

$$\eta = 0,$$

圆弧长

$$s = 2a\alpha.$$

由于

$$M_y = \int_0^s x \, ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} a^2 \cos \varphi \, d\varphi = 2a^2 \sin \alpha,$$

所以

$$\bar{x} = \frac{2a^2 \sin \alpha}{2a\alpha} = \frac{a \sin \alpha}{\alpha}.$$

即重心为 $\left(\frac{a \sin \alpha}{\alpha}, 0 \right)$.

2508. 求抛物线: $ax = y^2$, $ay = x^2$ ($a > 0$) 所围成面积的重心的坐标.

解 利用古尔金第二定理来解此题. 首先, 此面积为

$$S = \frac{a^2}{3},$$

体积为

$$V = \pi \int_0^a \left(ax - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = \frac{3\pi a^3}{10}.$$

于是

$$2\pi\eta \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{3\pi a^3}{10},$$

所以

$$\eta = \frac{9a}{20}.$$

利用对称性知

$$\xi = \eta = \frac{9a}{20}.$$

即所求的重心为 $(\frac{9a}{20}, \frac{9a}{20})$.

*) 利用2397题的结果.

2509. 求面积

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b)$$

的重心的坐标.

解 首先, 我们已知第一象限椭圆的面积等于 $\frac{\pi ab}{4}$.

其次, 我们再求椭圆绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积. 因为

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

所以

$$V = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi ab^2.$$

按古尔金第二定理, 我们有

$$2\pi \eta \frac{\pi ab}{4} = \frac{2}{3} \pi ab^2,$$

所以

$$\eta = \frac{4b}{3\pi}.$$

同理可求得

$$\xi = \frac{4a}{3\pi}.$$

事实上，只须在结果中将 a 和 b 对调即得。于是，所求的重心为 $(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi})$ 。

2510. 求半径为 a 的均匀半球的重心坐标。

解 取圆心作为原点，则球的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

设重心为 (ξ, η, ζ) ，显见 $\xi = \eta = 0$ 。而

$$V_{\text{半球}} = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

将圆

$$y^2 + z^2 = a^2$$

绕 Oz 轴旋转，即得球。

又

$$\begin{aligned} M_1^{(z)} &= \int_{(V)} z dV = \pi \int_0^a z y^2 dz \\ &= \pi \int_0^a z(a^2 - z^2) dz = \frac{\pi a^4}{4}. \end{aligned}$$

最后得到

$$\zeta = \frac{M_1^{(z)}}{V} = \frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}} = \frac{3a}{8}.$$

于是，所求重心为 $(0, 0, \frac{3a}{8})$ 。

2511. 求对数螺线

$$r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0)$$

上由点 $O(-\infty, 0)$ 到点 $P(\varphi, r)$ 的弧 OP 的重心 $C(\varphi_0, r_0)$ 之坐标. 当 P 点移动时, C 点画出怎样的曲线?

解 重心的直角坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\int_{(l)} x ds}{\int_{(l)} ds} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\varphi} r \cos \varphi \cdot \sqrt{a^2(1+m^2)} e^{m\varphi} d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{a^2(1+m^2)} e^{m\varphi} d\varphi} \\ &= \frac{a \int_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\varphi} \cos \varphi d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi} e^{m\varphi} d\varphi} \\ &= \frac{mae^{m\varphi} (\sin \varphi + 2m \cos \varphi)}{4m^2 + 1} \end{aligned}$$

同法可得

$$\eta = \frac{\int_{(l)} y ds}{\int_{(l)} ds} = \frac{mae^{m\varphi} (2m \sin \varphi - \cos \varphi)}{4m^2 + 1}$$

于是, 重心的极坐标为

$$r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{ma}{4m^2 + 1} \sqrt{4m^2 + 1} e^{m\varphi}$$

$$= \frac{mr}{\sqrt{4m^2 + 1}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2m \operatorname{tg} \varphi + 1}{\operatorname{tg} \varphi + 2m} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2m}}{1 + \frac{1}{2m} \operatorname{tg} \varphi},$$

即 $\varphi_0 = \varphi - \alpha$, 其中 $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2m}$.

当 P 点移动时, $C(\varphi_0, r_0)$ 画出的曲线为

$$r_0 = \frac{ma}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{-m\varphi} = \frac{ma}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{-m(\varphi_0 + \alpha)}.$$

这也是一条对数螺线.

2512. 求曲线 $r = a(1 + \cos \varphi)$ 所围面积的重心坐标.

解 计算时, 将小扇形的重量集中在其重心

$(\frac{2}{3}r \cos \varphi, \frac{2}{3}r \sin \varphi)$ 处. 由对称性知 $\eta = 0$, 而

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\int_{(I)} xy \, dx}{\int_{(I)} y \, dx} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \int_0^\pi r \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi}{\int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi} \\ &= \frac{2}{3} \frac{\int_0^\pi a^3 (1 + \cos \varphi)^2 \cos \varphi \, d\varphi}{\int_0^\pi a^2 (1 + \cos \varphi)^2 \, d\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2a}{3} \frac{\int_0^{\pi} (1 + 3\cos \varphi + 3\cos^2 \varphi + \cos^3 \varphi) \cos \varphi d\varphi}{\int_0^{\pi} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi} \\
&= \frac{5a}{6}.
\end{aligned}$$

于是, 重心的极坐标为 $\varphi_0 = 0$, $r_0 = \frac{5a}{6}$.

2513. 求摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的第一拱与 Ox 轴所围成面积的重心的坐标.

解 由对称性知 $\xi = \pi a$. 由于面积 $S = 3\pi a^2$ *) 及面积 S 绕 Ox 轴旋转而成的曲面包围的体积 $V_x = 5\pi^2 a^2$ **), 利用古尔金第二定理, 即得重心 (ξ, η) 适合下列关系式

$$2\pi\eta \cdot S = V_x$$

或

$$\eta = \frac{V_x}{2\pi S} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5a}{6}.$$

于是, 重心为 $(\pi a, \frac{5a}{6})$.

*) 利用2413题的结果.

**) 利用2480题(a)的结果.

***) 参看2506题.

2514. 求面积 $0 \leq x \leq a$, $y^2 \leq 2px$ 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的重心的坐标.

解 由对称性知 $\eta = 0$. 又

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\int_0^a \frac{x\pi y^2 dx}{\pi y^2 dx} = \frac{\int_0^a \frac{2px^2 dx}{2px dx}}{\int_0^a 2px dx} \\ &= \frac{2}{3}a.\end{aligned}$$

于是, 所求的重心为 $(\frac{2}{3}a, 0)$.

2515. 求半球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$) 的重心的坐标.

解 由对称性知

$$\xi = \eta = 0.$$

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\int_0^a \frac{2 \cdot 2\pi x \sqrt{1+x'^2} dz}{2\pi x \sqrt{1+x'^2} dz} \quad *) \\ &= \frac{\int_0^a \frac{2\pi z \sqrt{a^2 - z^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz}{2\pi \sqrt{a^2 - z^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz} \\ &= \frac{2\pi a \int_0^a z dz}{2\pi a \int_0^a dz} = \frac{2\pi a \cdot \frac{1}{2}a^2}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

于是, 所求的重心为 $(0, 0, \frac{a}{2})$.

*) 在此是将 $x^2 + z^2 = a^2$ 绕 Oz 轴旋转而得半球面.

§10. 力学和物理学中的问题

作成适当的积分和并找出它们的极限，来解下列问题：

2516. 轴的长度 $l=10$ 米，若该轴的线性密度按定律 $\delta=6+0.3x$ 千克/米而变更，其中 x 为距轴两端点中之一端的距离，求轴的质量。

解 将轴 n 等分，每份的长 $\Delta x = \frac{10}{n}$ 。把每小段近似地看成是均匀的，并以右端点的密度作为小段的密度。这样，便得到轴的质量 M 的近似值，即

$$M \approx \sum_{i=1}^n \left(6 + 0.3 \times \frac{10}{n} i \right) \frac{10}{n}.$$

显然， n 愈大愈近似，于是，得轴的质量

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(6 + 0.3 \times \frac{10}{n} i \right) \frac{10}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[60 + \frac{15 \times (n+1)}{n} \right] = 75 \text{ (千克)}. \end{aligned}$$

2517. 把质量为 m 的物体从地球（其半径为 R ）表面升高到高度为 h 的地位，需要化费多大的功？若物体远离至无穷远去，则功等于什么？

解 由牛顿万有引力定律

$$f = k \frac{mM}{r^2},$$

其中 M 为地球的质量， r 为物体离开地球中心的距

离， k 为比例常数。将 h 分成 n 等份，在每份上把引力近似地看作是不变的，在第 i 份上取

$$r_i = \sqrt{\left[\frac{h}{n}(i-1) + R\right]\left[\frac{h}{n}i + R\right]}, \text{ 则力}$$

$$f_i = k \frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1) + R\right]\left[\frac{h}{n}i + R\right]},$$

于是所要求的功

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n k \frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1) + R\right]\left[\frac{hi}{n} + R\right]} \cdot \frac{h}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} k m M n \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{h(i-1) + nR} - \frac{1}{hi + nR} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} k m M n \left[\frac{1}{nR} - \frac{1}{n(R+h)} \right] \\ &= \frac{kmMh}{(R+h)R}, \end{aligned}$$

其中 g 为重力加速度， $k = \frac{gR^2}{M}$ 为引力常数。若物体远离至无穷远去，则功

$$A_{\infty} = \lim_{h \rightarrow \infty} W = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{kmMh}{(R+h)R} = mgR.$$

2518. 若1千克的力能使弹簧伸长1厘米，现在要使这弹簧伸长10厘米，问需要花费多大的功？

解 由虎克定律知, 弹性恢复力 F 与伸长量 x 成正比, 即

$$F = kx.$$

由条件知: $k = 1$, 因而 $F = x$.

现将10厘米 n 等分, 每份上恢复力的大小近似地看作是不变的, 并取右端点来作和, 即得功 W 的近似值

$$W \approx \sum_{i=1}^n \frac{10}{n} i \cdot \frac{10}{n}.$$

显然, n 愈大愈近似. 于是, 所要求的功

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{10}{n} i \cdot \frac{10}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 50 \frac{n+1}{n}$$

$$= 50 \text{ (千克厘米)} = 0.5 \text{ (千克米)}.$$

2519. 直径为 20 厘米, 长为 80 厘米的圆柱被压力为 10 千克/厘米² 的蒸汽充满着. 假定气体的温度不变, 要使气体的体积减小一半, 须要化费多大的功?

解 由波义耳—马利奥特定律有

$$pv = C,$$

其中 p 表示气体的压力, v 表示体积, C 为常量. 由条件知, 常量

$$C = 10 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 80 = 800\pi \text{ (千克米)}.$$

设初始时气体体积为 v_0 , 将区间 $\left[\frac{v_0}{2}, v_0\right]$ 分成 n 个小区间, 分点依次为

$$\frac{v_0}{2}, \frac{v_0}{2}q, \frac{v_0}{2}q^2, \dots, \frac{v_0}{2}q^{i-1}, \dots, \frac{v_0}{2}q^n = v_0,$$

其中 $q = \sqrt[n]{\frac{v_0}{\frac{v_0}{2}}} = \sqrt[n]{2}$ ，由于气体体积从 $\frac{v_0}{2}q^{i+1}$ 减小

至 $\frac{v_0}{2}q^i$ 须要化费功的近似值为

$$C\left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{v_0}{2}q^{i+1}-\frac{v_0}{2}q^i\right),$$

于是，所要求的功

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n C \left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1} \left(\frac{v_0}{2}q^{i+1} - \frac{v_0}{2}q^i\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} Cn \left(\sqrt[n]{2} - 1\right) = C \ln 2 \quad *) \\ &= 800 \pi \cdot \ln 2 \approx 1742 \text{ (千克米)}. \end{aligned}$$

*) 利用541题的结果。

2520. 求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为半圆形，半径为 a 且其直径位于水的表面上。

解 为求出水对半圆形的压力，只要计算出作用于四分之一圆上的压力，然后再把它两倍起来，现将四分之一圆等分成 n 个圆心角为 $\angle\theta$ 的小扇形（图4.48），作用于该小扇形上的压力的近似值为

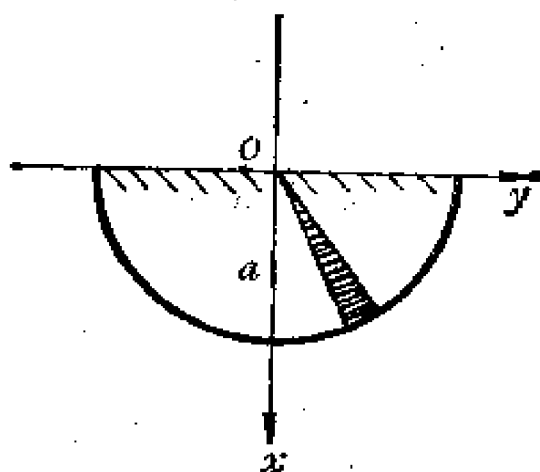


图 4.48

$$\frac{1}{2}a^2 \Delta\theta \cdot \frac{2}{3}a \sin \theta_i,$$

其中 $\Delta\theta = \frac{\pi}{2n}$, $\theta_i = \frac{i\pi}{2n}$.

于是, 作用于半圆上的压力

$$P = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}a \sin \frac{i\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n}$$

$$= \frac{2a^3}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{2a^3}{3} \cdot *$$

*) 利用2187题的结果.

2521. 求水对于垂直壁上的压力, 这壁的形状为梯形, 其下底 $a = 10$ 米, 上底 $b = 6$ 米, 高 $h = 5$ 米, 下底沉没于水面下的距离为 $c = 20$ 米.

解 取坐标系如图

4.49所示. AB 所满足的方程为

$$y = \frac{4}{5}x - 6.$$

将区间 $[15, 20]$

n 等分, 每份长

$\Delta x = \frac{5}{n}$, 对应于 Δx

的小条上所受的压力的

近似值为

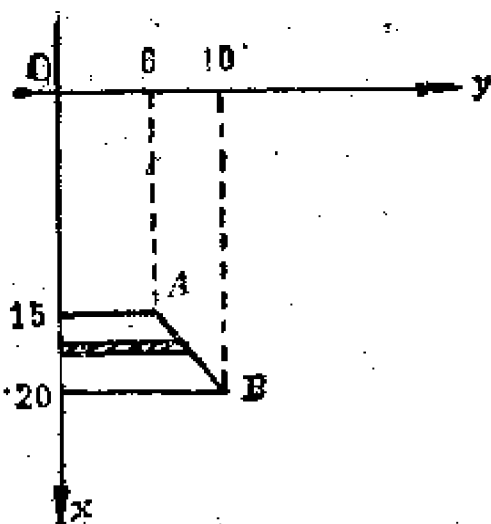


图 4.49

$$\left[\frac{4}{5} \left(15 + \frac{5i}{n} \right) - 6 \right] \left(15 + \frac{5i}{n} \right) \frac{5}{n}.$$

于是, 所要求的压力

$$\begin{aligned} P &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{4}{5} \left(15 + \frac{5i}{n} \right) - 6 \right] \left(15 + \frac{5i}{n} \right) \frac{5}{n} \\ &= 708 \frac{1}{3} \text{ (吨)}^*) \end{aligned}$$

*) 仿照2185题和2518题的作法。

作出微分方程式以解下列问题:

2522. 点运动的速度是按下面的规律而变化:

$$v = v_0 + at.$$

问在闭间隔 $[0, T]$ 内这点经过的路程怎样?

解 设路程为 s , 则由导数的力学意义知

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 + at,$$

即 dt 时间内经历的路程

$$ds = (v_0 + at) dt,$$

于是,

$$s = \int_0^T (v_0 + at) dt$$

$$= v_0 T + \frac{1}{2} a T^2.$$

2523. 半径为 R 而密度为 δ 的均匀球体以角速度 ω 绕其直径而旋转。求此球的动能。

解 已知半径为 R 质量为 M 的盘绕垂直盘心的轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$. 不妨设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则考察以 dz 为厚度的垂直于 z 轴的圆盘, 其转动惯量为

$$\begin{aligned} dJ_z &= \frac{1}{2}\pi(R^2 - z^2)\delta \cdot (R^2 - z^2)dz \\ &= \frac{1}{2}\pi\delta(R^2 - z^2)^2 dz. \end{aligned}$$

从而球体的转动惯量

$$J_z = \int_{-R}^R \frac{1}{2}\pi\delta(R^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi\delta R^5.$$

于是, 球的动能

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{4}{15}\pi\delta\omega^2 R^5.$$

注 原题误为球壳, 现根据原答案予以改正.

2524. 具不变的线性密度 μ_0 的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点?

解 取坐标系如图 4.50 所示, $|AO| = a$. 设引力在坐

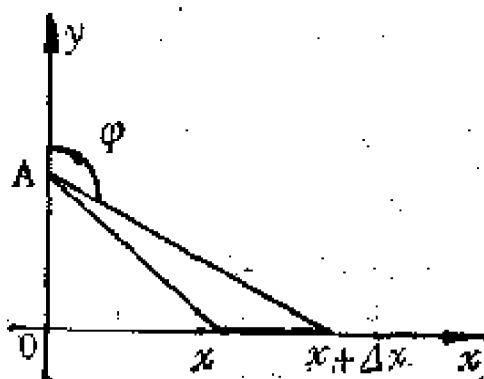


图 4.50

标轴上的射影为 F_x 、 F_y 。由于

$$\begin{aligned} dF_x &= k \frac{m\mu_0 dx}{(a^2+x^2)} \cos \varphi \\ &= -\frac{k m \mu_0 a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} F_x &= -2km\mu_0 a \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -2km\mu_0 a \cdot \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} \Big|_0^{+\infty} \\ &= -\frac{2km\mu_0}{a}. \end{aligned}$$

由对称性知, $F_x=0$ 。事实上, 我们有

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k m \mu_0 \sin \varphi}{a^2+x^2} dx \\ &= km\mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = 0. \end{aligned}$$

其中 k 为引力常数。由上述分析知, 引力指向 y 轴的负向。

2525. 计算半径为 a 及固定的表面密度为 δ_0 的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P , 此质点位于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的垂直线上, 最短距离 PQ 等于 b 。

解 取坐标系如图4.51所示。显然，引力指向 y 轴的正向。对于以 x 为半径的圆环，其质量为 $dm = \delta_0 \cdot 2\pi x dx$ ，对质点 P 的引力

$$\begin{aligned} dF_y &= 2km\delta_0 \pi \frac{\cos\theta}{b^2 + x^2} dx \\ &= 2km\delta_0 \pi \frac{bx}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx, \end{aligned}$$

于是，所要求的引力

$$\begin{aligned} F_y &= 2km\delta_0 \pi \int_0^a \frac{bx}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= 2km\delta_0 \pi \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{aligned}$$

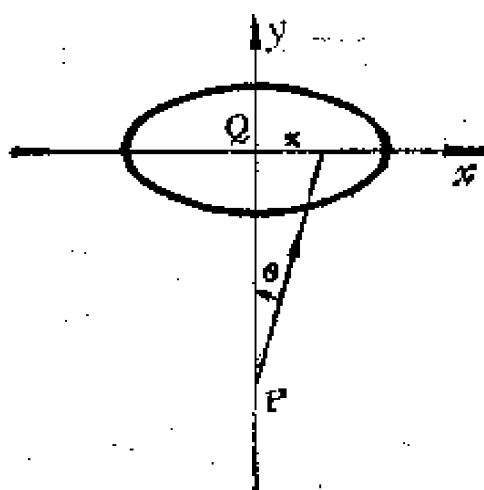


图 4.51

2526. 根据托里拆利定律，液体从容器中流出的速度等于

$$v = c\sqrt{2gh},$$

式中 g 为重力加速度， h 为液体表面在开孔上之高，

$c=0.6$ 为实验系数。

直径为 $D=1$ 米及高为 $H=2$ 米的直立圆柱形大桶，充满之后从其底上直径为 $d=1$ 厘米的圆孔流出，须要多长时间，完全流空？

解 取坐标系如图4.52

所示。对于 dt 时间，从圆孔流出的液体体积

$$dv = 0.15\pi\sqrt{2gx} dt,$$

而桶内液体体积的减少量为

$$dv = -\pi(50)^2 dx,$$

其中 x 随时间 t 的增大而减小，流出的量应等于桶内减少的量，于是

$$\begin{aligned} -0.15\pi\sqrt{2gx} dt \\ = \pi(50)^2 dx. \end{aligned}$$

积分，得

$$\int_0^t dt = - \int_{200}^x \frac{2500}{0.15} \frac{dx}{\sqrt{2gx}},$$

即

$$t = -33333 \frac{1}{\sqrt{2g}} (\sqrt{x} - \sqrt{200}),$$

其中 $g=980$ 厘米/秒²。当 $x=0$ 时， t 表示水流完所需的时间，因而所要求的时间

$$t = \frac{33333\sqrt{200}}{\sqrt{2 \times 980}} = 10648 \text{ (秒)}.$$

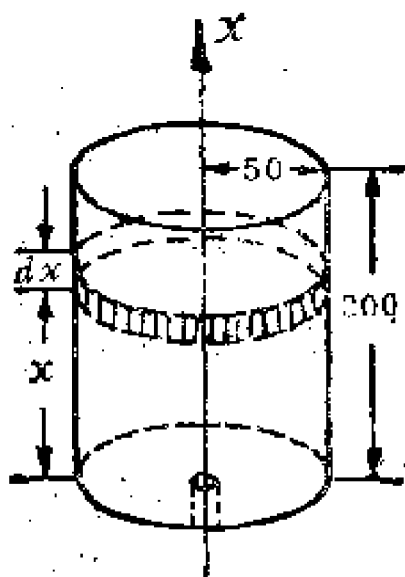


图 4.52

2527. 旋转体的容器应当是什么形状, 才能使液体流出时, 液体表面的下降是均匀的?

解 取坐标系如图4.53所示. 不妨设流出孔的半径为单位厘米.

仿上题分析, 得

$$\begin{aligned}\pi x^2 dy &= -\pi v dt \\ &= -\pi c \sqrt{2gy} dt,\end{aligned}$$

即

$$dy = -c \sqrt{\frac{2g}{x^2}}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{y}}{x^2} dt.$$

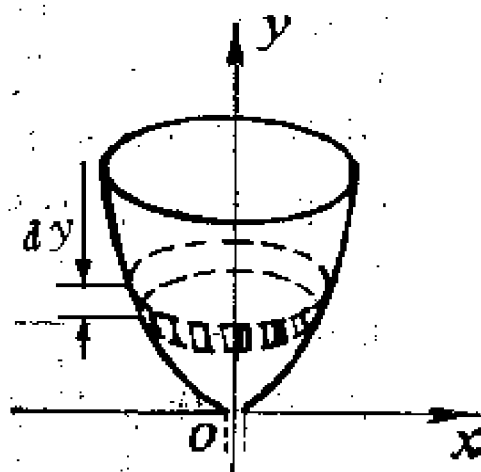


图 4.53

其中 c 为实验系数, g 为重力加速度.

由题意知

$$\frac{dy}{dt} = -c \sqrt{2g} \frac{\sqrt{y}}{x^2}$$

应等于常数 k , 即

$$-c \sqrt{2g} \frac{\sqrt{y}}{x^2} = k,$$

于是

$$y = Cx^4,$$

其中 C 为常数. 所以, 容器应当是把曲线 $y = Cx^4$ 绕铅直轴 Oy 旋转而得的曲面所构成的.

2528. 镭在每一时刻的分解速度与其现存的数量成比例, 设在开始的时刻 $t = 0$ 有镭 Q_0 克, 经过时间 $T = 1600$ 年

它的量减少了一半。求镭分解的规律。

解 设 Q 为镭现存的量，按题设有

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ,$$

其中 k 为比例系数。即

$$\frac{dQ}{Q} = -k dt,$$

两端积分

$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}} \frac{dQ}{Q} = \int_0^{1600} -k dt,$$

从而

$$k = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

于是

$$\int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = -\frac{\ln 2}{1600} \int_0^t dt,$$

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = \ln 2 \cdot -\frac{t}{1600},$$

所以，镭的分解规律为

$$Q = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1600}}.$$

2529⁺. 变换物质 A 为物质 B 的二阶化学反应之速度与此二物质的浓度相乘之积成正比。问经过 $t = 1$ 小时在容器中所含有的物质 B 之百分率如何？设 $t = 0$ 分时有 20% 的物质 B ，而当 $t = 15$ 分它变成 80%。

解 设 x 为生成物 B 的浓度，按题设有

$$\frac{dx}{dt} = kx(1-x),$$

其中 k 为比例常数, 即

$$\frac{dx}{x(1-x)} = k dt.$$

两端积分

$$\int_{0.2}^{0.6} \frac{dx}{x(1-x)} = \int_0^{15} k dt,$$

从而

$$k = \frac{1}{15} \ln 16.$$

于是,

$$\int_{0.2}^x \frac{dx}{x(1-x)} = \int_0^t k dt = \frac{t}{15} \ln 16,$$

即

$$t = \frac{15}{\ln 16} \ln \frac{4x}{1-x}.$$

以 $t = 60$ 代入上式, 得

$$x = \frac{16^4}{16^4 + 4} = 99.99\%.$$

所以, 经过 $t = 1$ 小时在容器中所含有的物质 B 之百分率为 99.99%.

2530. 根据虎克定律, 棒的相对伸长率 ϵ 与在对应的横断面上的应力 σ 成比例, 即是说

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

式中 E 为杨氏模数.

求圆锥形重棒的伸长, 此锥形的顶向下而底固定, 设底半径等于 R , 圆锥的高为 H , 比重为 γ .

解 取坐标系如图 4.54 所示.

设 $z=h$ 截面处, 对于高度为 dh 的锥体伸长为 dl , 则有

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{dl}{dh} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\pi r^2(H-h)\gamma}{\pi r^2 E} \\ &= \frac{1}{3} \frac{(H-h)}{E} \gamma,\end{aligned}$$

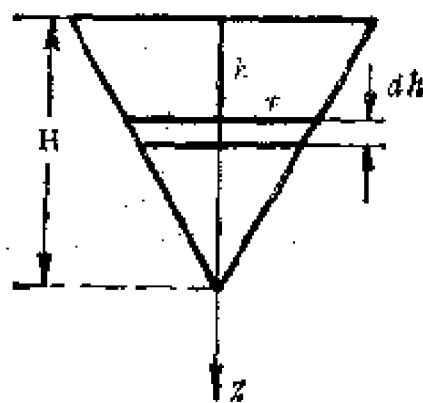


图 4.54

即

$$dl = \frac{1}{3} \frac{(H-h)}{E} \gamma dh.$$

于是圆锥形重棒总的伸长量为

$$l = \int_0^H \frac{1}{3} \frac{(H-h)\gamma}{E} dh = \frac{\gamma H^2}{6E}.$$

§11. 定积分的近似算法

1° 矩形公式 若函数 $y = y(x)$ 于有穷的闭区间 $[a, b]$

上连续且可微分充分多次数, 并且 $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $y_i = y(x_i)$, 则

$$\int_a^b y(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} y'(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2° 梯形公式 用相同的记号有

$$\int_a^b y(x) dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi') \quad (a \leq \xi' \leq b).$$

3° 抛物线公式 (辛普森公式) 命 $n = 2k$, 得

$$\begin{aligned} \int_a^b y(x) dx = \frac{h}{3} [& (y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \dots \\ & + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots \\ & + y_{2k-2})] + R_n, \end{aligned}$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi'') \quad (a \leq \xi'' \leq b).$$

2531. 利用矩形公式($n=12$), 近似地计算

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$$

并把结果同精确答数比较。

解 $h = \frac{\pi}{6}$.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad y_1 = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = 0.2618;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}, \quad y_2 = \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} = 0.9069;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}, \quad y_3 = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 1.5708;$$

$$x_4 = \frac{2\pi}{3}, \quad y_4 = \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 1.8138;$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{6}, \quad y_5 = \frac{5\pi}{6} \sin \frac{5\pi}{6} = 1.3090;$$

$$x_6 = \pi, \quad y_6 = \pi \sin \pi = 0;$$

$$x_7 = \frac{7\pi}{6}, \quad y_7 = \frac{7\pi}{6} \sin \frac{7\pi}{6} = -1.8326;$$

$$x_8 = \frac{4\pi}{3}, \quad y_8 = \frac{4\pi}{3} \sin \frac{4\pi}{3} = -3.6276;$$

$$x_9 = \frac{3\pi}{2}, \quad y_9 = \frac{3\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2} = -4.7124;$$

$$x_{10} = \frac{5\pi}{3}, \quad y_{10} = \frac{5\pi}{3} \sin \frac{5\pi}{3} = -4.5345;$$

$$x_{11} = \frac{11\pi}{6}, \quad y_{11} = \frac{11\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{6} = -2.8798.$$

按矩形公式，得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx \\ &= \frac{\pi}{6} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \\ & \quad + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}) \\ &= -6.1390. \end{aligned}$$

实际上，

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx \\ &= -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x \, dx \\ &= -6.2832. \end{aligned}$$

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差：

$$2532. \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8).$$

$$\text{解} \quad h = \frac{1}{8} = 0.125.$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1; \quad \frac{y_0 + y_8}{2} = 0.75,$$

$$x_8 = 1, \quad y_8 = 0.5;$$

$$x_1 = \frac{1}{8} = 0.125, \quad y_1 = 0.88889;$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= 0.25, & y_2 &= 0.8; \\
 x_3 &= 0.375, & y_3 &= 0.72727; \\
 x_4 &= 0.5, & y_4 &= 0.66667; \\
 x_5 &= 0.625, & y_5 &= 0.61538; \\
 x_6 &= 0.75, & y_6 &= 0.57143; \\
 x_7 &= 0.875, & y_7 &= 0.53333 \quad (+
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^7 y_i = 4.80297.$$

按梯形公式，得

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dx}{1+x} &= h \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + \sum_{i=1}^7 y_i \right) \\
 &= 0.125(0.75 + 4.80297) \\
 &= 0.69412,
 \end{aligned}$$

误差为

$$|R_n| = \left| \frac{1}{12 \times 8^2} \cdot \frac{2}{(1+\xi)^3} \right| \quad (0 \leq \xi \leq 1),$$

于是，

$$|R_n| \leq \frac{2}{12 \times 8^2} < 0.0027 = 2.7 \times 10^{-3}$$

实际上，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 = 0.69315.$$

2533. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \quad (n=12).$

解 $h = \frac{1}{12} = 0.08333.$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$\frac{y_0 + y_{12}}{2} = 0.75,$$

$$x_{12} = 1, \quad y_{12} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$x_1 = \frac{1}{12}, \quad y_1 = 0.99942;$$

$$x_2 = \frac{1}{6}, \quad y_2 = 0.99539;$$

$$x_3 = \frac{1}{4}, \quad y_3 = 0.98462;$$

$$x_4 = \frac{1}{3}, \quad y_4 = 0.96429;$$

$$x_5 = \frac{5}{12}, \quad y_5 = 0.93254;$$

$$x_6 = \frac{1}{2}, \quad y_6 = 0.88889;$$

$$x_7 = \frac{7}{12}, \quad y_7 = 0.83438;$$

$$x_8 = \frac{2}{3}, \quad y_8 = 0.77143;$$

$$x_9 = \frac{3}{4}, \quad y_9 = 0.70330;$$

$$x_{10} = \frac{5}{6}, \quad y_{10} = 0.63343;$$

$$x_{11} = \frac{11}{12}, \quad y_{11} = 0.56489 \quad (+$$

$$\sum_{i=1}^{11} y_i = 9.27258.$$

按梯形公式，得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} &= h \left(\frac{y_0 + y_{12}}{2} + \sum_{i=1}^{11} y_i \right) \\ &= 0.0833(0.75 + 9.27258) \\ &\doteq 0.83518, \end{aligned}$$

误差为

$$|R_n| = \left| \frac{1}{12 \times 12^2} \cdot \frac{12\xi^4 - 6\xi}{(1+\xi^3)^3} \right| \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

利用求极值的方法，估计得 $\left| \frac{12\xi^4 - 6\xi}{(1+\xi^3)^3} \right|$ 在 $[0, 1]$ 上不超过 2。于是，

$$|R_n| \leq \frac{2}{12 \times 12^2} < 0.00116 = 1.16 \times 10^{-3}.$$

实际上，

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} &= \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ &\doteq 0.83565. \end{aligned}$$

*) 利用1881题的结果.

$$2534. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} dx \quad (n = 6).$$

解 $h = \frac{\pi}{12} = 0.2618,$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1; \quad \frac{y_0 + y_6}{2} = 0.9330,$$

$$x_6 = \frac{\pi}{2}, \quad y_6 = 0.8660;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12}, \quad y_1 = 0.9916;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6}, \quad y_2 = 0.9682;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{4}, \quad y_3 = 0.9354;$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}, \quad y_4 = 0.9014;$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{12}, \quad y_5 = 0.8756 \quad (+$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i = 4.6722.$$

按梯形公式, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} dx &= h \left(\frac{y_0 + y_6}{2} + \sum_{i=1}^5 y_i \right) \\ &= 0.2618 (0.9330 + 4.6724) \\ &\approx 1.4674. \end{aligned}$$

误差为

$$|R_n| = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12 \times 6^2} |y''(\xi)|,$$

式中 $y = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x}$, $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$. 利用 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq 1$ 及 $y^2 = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 x$, 依次求导可得 $|y''| \leq \frac{\sqrt{3}}{6}$. 于是,

$$|R_n| \leq \frac{\pi^3}{8 \times 12 \times 6^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} < 2.59 \times 10^{-8}.$$

利用辛普森公式计算下列积分:

2535. $\int_1^9 \sqrt{x} dx \quad (n=4).$

解 $h = 2$.

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1;$$

$$x_1 = 3, \quad y_1 = \sqrt{3} = 1.732;$$

$$x_2 = 5, \quad y_2 = \sqrt{5} = 2.236;$$

$$x_3 = 7, \quad y_3 = \sqrt{7} = 2.646;$$

$$x_4 = 9, \quad y_4 = 3.$$

按辛普森公式, 得

$$\begin{aligned} \int_1^9 \sqrt{x} dx &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] \\ &= \frac{2}{3} [4 + 4(1.732 + 2.646) + 2(2.236)] \end{aligned}$$

$$\approx 17.323.$$

实际上,

$$\int_1^9 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = \frac{52}{3} \approx 17.333.$$

$$2536. \int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} dx \quad (n=6).$$

$$\text{解 } h = \frac{\pi}{6}.$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 2;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad y_1 = \sqrt{3 + \cos \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3.866} = 1.966;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}, \quad y_2 = \sqrt{3 + \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3.5} = 1.871;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}, \quad y_3 = \sqrt{3 + \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} = 1.732;$$

$$x_4 = \frac{2\pi}{3}, \quad y_4 = \sqrt{3 + \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2.5} \\ = 1.581;$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{6}, \quad y_5 = \sqrt{3 + \cos \frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2.134} \\ = 1.461;$$

$$x_6 = \pi, \quad y_6 = \sqrt{3 + \cos \pi} = \sqrt{2} = 1.414.$$

按辛普森公式, 得

$$\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{18} [(2 + 1.414) + 4(1.966 + 1.736 + 1.461) + \\
&\quad + 2(1.871 + 1.581)] \\
&= 5.4053.
\end{aligned}$$

$$2537^+. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n=10).$$

$$\text{解} \quad h = \frac{\pi}{20}.$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{20}, \quad y_1 = \frac{20}{\pi} \sin \frac{\pi}{20} = 0.99589,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{10}, \quad y_2 = \frac{10}{\pi} \sin \frac{\pi}{10} = 0.98363,$$

$$x_3 = \frac{3\pi}{20}, \quad y_3 = \frac{20}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{20} = 0.96340,$$

$$x_4 = \frac{\pi}{5}, \quad y_4 = \frac{5}{\pi} \sin \frac{\pi}{5} = 0.93549,$$

$$x_5 = \frac{\pi}{4}, \quad y_5 = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} = 0.90032,$$

$$x_6 = \frac{3\pi}{10}, \quad y_6 = \frac{10}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{10} = 0.85839,$$

$$x_7 = \frac{7\pi}{20}, \quad y_7 = \frac{20}{7\pi} \sin \frac{7\pi}{20} = 0.81033,$$

$$x_8 = \frac{2\pi}{5}, \quad y_8 = \frac{5}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{5} = 0.75683,$$

$$x_9 = \frac{9\pi}{20}, \quad y_9 = \frac{20}{9\pi} \sin \frac{9\pi}{20} = 0.69865,$$

$$x_{10} = \frac{\pi}{2}, \quad y_{10} = \frac{2}{\pi} = 0.63662.$$

按辛普森公式，得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 \\ &\quad + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] \\ &= \frac{\pi}{60} [(1 + 0.63662) + 4(0.99589 \\ &\quad + 0.96340 + 0.90632 + 0.81033 \\ &\quad + 0.69865) + 2(0.98363 + 0.93549 \\ &\quad + 0.85839 + 0.75683)] \\ &= 1.37076. \end{aligned}$$

$$2538^+. \int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} \quad (n=5).$$

解 $h = \frac{1}{6}.$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1;$$

$$x_1 = \frac{1}{6}, \quad y_1 = 1.0812;$$

$$x_2 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = 1.1587;$$

$$x_3 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = 1.2332;$$

$$x_4 = \frac{2}{3}, \quad y_4 = 1.3051;$$

$$x_5 = \frac{5}{6}, \quad y_5 = 1.3748;$$

$$x_6 = 1, \quad y_6 = 1.4427.$$

按辛普森公式，得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} &= \frac{h}{3} [(y_6 + y_0) + 4(y_1 + y_3 + y_5) \\ &\quad + 2(y_2 + y_4))] \\ &= \frac{1}{18} [(1 + 1.4427) + 4(1.0812 \\ &\quad + 1.2332 + 1.3748) + 2(1.1587 \\ &\quad + 1.3051)] \\ &= 1.2293. \end{aligned}$$

2539. 取 $n = 10$ ，计算加达郎常数

$$C = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x} dx.$$

解 $h = \frac{1}{10}.$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$x_1 = 0.1, \quad y_1 = 0.99669;$$

$$x_2 = 0.2, \quad y_2 = 0.98698;$$

$$x_3 = 0.3, \quad y_3 = 0.97152;$$

$$x_4 = 0.4, \quad y_4 = 0.95127;$$

$$x_5 = 0.5, \quad y_5 = 0.92730;$$

$$x_6 = 0.6, \quad y_6 = 0.90070;$$

$$x_7 = 0.7, \quad y_7 = 0.87247;$$

$$x_8 = 0.8, \quad y_8 = 0.84343;$$

$$x_9 = 0.9, \quad y_9 = 0.81424;$$

$$x_{10} = 1, \quad y_{10} = 0.78540.$$

按辛普森公式，得

$$\begin{aligned} G &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) \\ &\quad + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] \\ &= \frac{1}{30} (1.78540 + 18.32888 + 7.36476) \\ &= 0.91597. \end{aligned}$$

2540. 利用公式

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

计算数 π 精确到 10^{-6} .

解 利用辛普森公式计算其误差

$$R_n(x) = -\frac{(b-a)^6}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

现在 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，事实上，它是 $y = \arctg x$

的导数，因而

$$f^{(4)}(x) = (\arctg x)^{(5)}.$$

利用第二章1218题的结果得知

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} \sin\left(5\arctg \frac{1}{x}\right).$$

在区间 $[0, 1]$ 上,

$$|f^{(4)}(x)| \leq 24,$$

所以

$$|R_n(x)| \leq \frac{24}{180n^4}.$$

欲误差小于0.00001, 只需

$$\frac{24}{180n^4} \leq \frac{1}{100000},$$

即只需取 $n = 12$, 就有 $|R_n| \leq 6.5 \times 10^{-6}$.

其次, 我们还必须加进近似于函数值的误差, 设法使这个新的误差小于 3.6×10^{-6} , 这样, 就能保证总误差小于 10^{-5} . 为了这个目的, 只要计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 的值到六位小数精确到 0.5×10^{-6} 就够了.

现取 $n = 12$, 则有

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$x_1 = \frac{1}{12}, \quad y_1 = 0.993103;$$

$$x_2 = \frac{1}{6}, \quad y_2 = 0.972973;$$

$$x_3 = \frac{1}{4}, \quad y_3 = 0.941176;$$

$$x_4 = \frac{1}{3}, \quad y_4 = 0.900000;$$

$$x_5 = \frac{5}{12}, \quad y_5 = 0.852071;$$

$$x_6 = \frac{1}{2}, \quad y_6 = 0.800000,$$

$$x_7 = \frac{7}{12}, \quad y_7 = 0.746114,$$

$$x_8 = \frac{2}{3}, \quad y_8 = 0.692308,$$

$$x_9 = \frac{3}{4}, \quad y_9 = 0.640000,$$

$$x_{10} = \frac{5}{6}, \quad y_{10} = 0.590164,$$

$$x_{11} = \frac{11}{12}, \quad y_{11} = 0.543396,$$

$$x_{12} = 1, \quad y_{12} = 0.500000.$$

最后得到

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{36} \{ (y_0 + y_{12}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 \\ &\quad + y_{11}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10}) \} \\ &= 0.785398, \end{aligned}$$

所以

$$\pi = 0.785398 \times 4 = 3.14159,$$

精确到0.00001.

2541. 计算

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

精确到0.001.

解 采用辛普森公式计算, 则其误差

$$R_n(x) = -\frac{1}{180n^4} 2e^{t^2} (8\xi^4 + 24\xi^2 + 6) \\ (0 < \xi < 1),$$

$$\text{故有 } |R_n(x)| < \frac{1}{180n^4} \cdot 2e \cdot 38.$$

要 $|R_n(x)| < 10^{-3}$, 只须 $\frac{2 \cdot 38 \cdot e^1}{180 n^4} < 10^{-3}$, 即只须取 $n=6$.

现取 $n=6$, 则有

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$x_1 = \frac{1}{6}, \quad y_1 = e^{\frac{1}{36}} = 1.0282;$$

$$x_2 = \frac{1}{3}, \quad y_2 = e^{\frac{1}{9}} = 1.1175;$$

$$x_3 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = e^{\frac{1}{4}} = 1.2840;$$

$$x_4 = \frac{2}{3}, \quad y_4 = e^{\frac{4}{9}} = 1.5596;$$

$$x_5 = \frac{5}{6}, \quad y_5 = e^{\frac{25}{36}} = 2.0026;$$

$$x_6 = 1, \quad y_6 = e = 2.7183.$$

于是,

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{1}{18} [(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5)]$$

$$+2(y_2 + y_4)] \doteq 1.463.$$

2542. 计算

$$\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx \text{ 精确到 } 10^{-4}.$$

解 对于函数 $f(x) = e^x$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上采用台劳展式以及相应的拉格朗日余项公式来估算误差:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \Delta_{n+1},$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \\ &= \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

于是,

$$|\Delta_{n+1}| \leq \frac{e}{(n+1)!} x^{n+1},$$

从而原来的积分数值为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k \ln \frac{1}{x} dx + R_{n+1}, \end{aligned}$$

其中

$$|R_{n+1}| = \left| \int_0^1 \Delta_{n+1} \ln \frac{1}{x} dx \right|$$

$$\leq \frac{e}{(n+1)!} \int_0^1 x^{n+1} \ln \frac{1}{x} dx.$$

记 $I_k = \int_0^1 x^k \ln \frac{1}{x} dx$ ($k \geq 1$), 则有

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{k+1} \int_0^1 \ln \frac{1}{x} d(x^{k+1}) \\ &= \left. \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln \frac{1}{x} \right|_0^1 + \frac{1}{k+1} \int_0^1 x^k dx \\ &= \frac{1}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

如果取 $n = 5$, 则有

$$\begin{aligned} |R_6| &\leq \frac{e}{6!} I_6 = \frac{e}{6!} \cdot \frac{1}{7^2} = \frac{e}{7 \times 7!} \\ &= \frac{e}{35280} < \frac{3}{35280} < \frac{1}{1.1 \times 10^4} < 10^{-4}. \end{aligned}$$

记 $I = J + R_6$, 则有

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k!} I_k = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{(k+1)! (k+1)} \\ &= \frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{4!4} + \frac{1}{5!5} + \frac{1}{6!6} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{4320} \\ &= 0.31787^+ = 0.3179 + \mathcal{A}', \end{aligned}$$

其中 $|\Delta'| \leq 0.00004 = 4 \times 10^{-5}$ 且 $\Delta' < 0$.

注意到由 $\Delta_{n+1} > 0$ 即可推知 $R_{n+1} > 0$, 于是

$$\begin{aligned} I &= J + R_6 = 0.3179 + (R_6 + \Delta') \\ &= 0.3179 + (R_6 - |\Delta'|) = 0.3179 + \Delta, \end{aligned}$$

且有 $I \doteq 0.3179$, 而此时其相应的误差已有

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \left| R_6 - |\Delta'| \right| \leq \begin{cases} R_6, & \text{若 } |\Delta'| \leq R_6, \\ |\Delta'|, & \text{若 } |\Delta'| > R_6 \end{cases} \\ &\leq \max(R_6, |\Delta'|) < 10^{-4}. \end{aligned}$$

注 本题不能直接利用辛普森公式来计算所给的定积分的近似值, 因为被积函数 $(e^x - 1) \ln \frac{1}{x}$ 的四阶导函数在 $x=0$ 的右近旁是无界的, 从而不能估计出误差. 所以, 上面我们用台劳公式来作近似计算. 这样, 计算以及估计误差都较为简单. 当然, 也可间接地利用辛普森公式来计算所给定积分的近似值, 这时需要或者改变被积函数或者把积分区间分成两个. 例如, 我们可以改变被积函数如下: 令

$$I = \int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx = - \int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx,$$

设 $f(x) = (e^x - 1) \ln x$, 若补充定义

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$$

则 $f(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数. 由于

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \ln x + \frac{e^x - 1}{x} \\ &= f(x) + \frac{e^x - 1}{x} + \ln x \quad (0 < x \leq 1), \end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx \\ + \int_0^1 \ln x dx.$$

注意到

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = 0,$$

$$\int_0^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1,$$

得

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = 1.$$

于是, 我们把求 $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ 的近似值问题, 归

结为求 $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ 的近似值问题. 令 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$,

并补充定义

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1,$$

则 $g(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数. 由求高阶导数的莱布尼兹法则, 易得

$$g^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x) - (-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad (0 < x \leq 1),$$

其中 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k k! x^{n-k} \quad (n=1, 2, \dots).$

下面证明 $g^{(n)}(0)$ 存在并且 $g^{(n)}(0) = -\frac{1}{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$). 首先, 由洛比塔法则, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +0} g^{(n)}(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x P_n(x) - (-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x [P_n(x) + P'_n(x)]}{(n+1)x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x x^n}{(n+1)x^n} = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

于是, 根据中值定理, 得

$$\begin{aligned}g'(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\xi \rightarrow +0} g'(\xi) \\ &= \frac{1}{2} \quad (0 < \xi < x).\end{aligned}$$

今假定 $g^{(n)}(0)$ 存在且 $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$. 于是,

$$\begin{aligned}g^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow +0} g^{(n+1)}(\eta) = \frac{1}{n+2} \quad (0 < \eta < x).\end{aligned}$$

根据数学归纳法, 知 $g^{(n)}(0)$ 存在且

$$g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

由此又知 $g^{(n)}(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数 ($n=1, 2, \dots$). 令 $h(x) = e^x P_n(x) - (-1)^n n!$. 由于

$$h'(x) = e^x [P_n(x) + P_n'(x)] = e^x x^n > 0$$

(当 $0 < x \leq 1$ 时),

故 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是严格增大的, 从而

$$h(x) > h(0) = 0 \quad (\text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时}).$$

因此, 当 $0 < x \leq 1$ 时 $g^{(n)}(x) > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 所以

$g^{(n-1)}(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的严格增函数 ($n=1, 2, \dots$).

特别, $g^{(4)}(x)$ 当然是 $0 \leq x \leq 1$ 上的严格增函数. 于是, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有

$$\frac{1}{5} = g^{(4)}(0) \leq g^{(4)}(x) \leq g^{(4)}(1).$$

由于当 $0 < x \leq 1$ 时,

$$g^{(4)}(x) = \frac{e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) - 24}{x^5},$$

故 $g^{(4)}(1) = 9e - 24 < 0.5$. 因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$0.2 \leq g^{(4)}(x) \leq 0.5.$$

代入辛普森公式的误差表达式, 得

$$|R_n(x)| = \left| -\frac{g^{(4)}(\xi'')}{180 \cdot n^4} \right| \leq \frac{1}{360n^4},$$

$$R_n(x) < 0.$$

取 $n=4$, 有

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{360n^4} < 1.1 \times 10^{-5}.$$

计算得

$$g(0)=1, \quad g\left(\frac{1}{4}\right)=1.13610, \quad g\left(\frac{1}{2}\right)=1.29744,$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right)=1.48933, \quad g(1)=1.71828.$$

于是，代入后最终得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 g(x) dx - 1 = \frac{1}{12} \left\{ g(0) + g(1) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left[g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) \right] \right\} - 1 \\ &= 1.3179 - 1 = 0.3179, \end{aligned}$$

其误差的绝对值显然小于 $0.0001 = 10^{-4}$ 。

也可不改变被积函数，而把积分区间分成两个，步骤如下：

$$\text{令 } u = \frac{1-x}{x} \quad (0 < x < 1), \quad \text{则 } \frac{1}{x} = 1 + u \quad (u > 0).$$

于是，当 $0 < x < 1$ 时，有

$$0 < (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} = (e^x - 1) \ln(1 + u)$$

$$< (e^x - 1) u = \frac{1-x}{x} (e^x - 1) < \frac{e^x - 1}{x}.$$

前面已证函数 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上是严格增

大的（注意，规定 $g(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ），故当

$0 < x < 1$ 时，有

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < g(1) = e - 1 < 2;$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^{10^{-5}} (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx < \int_0^{10^{-5}} \frac{e^x - 1}{x} dx \\ &< 2 \int_0^{10^{-5}} dx = 0.2 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

求出函数 $(e^x - 1) \ln \frac{1}{x}$ 的四阶导函数的表达式后，易知它在闭区间 $10^{-5} \leq x \leq 1$ 上是连续的，从而是有界的，并且不难估计出其绝对值的上界。因此，可利用辛普森公式计算积分

$$\int_{10^{-5}}^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$$

的近似值，使误差的绝对值小于 0.8×10^{-4} 。显然，若以此作为积分 $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ 的近似值，则其误差的绝对值小于 10^{-4} 。由于计算较繁，从略。

2543. 近似地计算概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

解 作变换

$$x = \frac{t}{1-t},$$

则积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \frac{1}{(1-t)^2} dt.$$

由于题中对精确度未提出明确要求,故 n 可任取.例如

取 $n=2k=18$, $\Delta t = \frac{1}{18}$, 则有

$$t_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{1}{18}, \quad 4y_1 = 4.46894;$$

$$t_2 = \frac{1}{9}, \quad 2y_2 = 2.49201;$$

$$t_3 = \frac{1}{6}, \quad 4y_3 = 5.53415;$$

$$t_4 = \frac{2}{9}, \quad 2y_4 = 3.04696;$$

$$t_5 = \frac{5}{18}, \quad 4y_5 = 6.61414;$$

$$t_6 = \frac{1}{3}, \quad 2y_6 = 3.50460;$$

$$t_7 = \frac{7}{18}, \quad 4y_7 = 7.14411;$$

$$t_8 = \frac{4}{9}, \quad 2y_8 = 3.41685;$$

$$t_9 = \frac{1}{2}, \quad 4y_9 = 5.88607;$$

$$t_{10} = \frac{5}{9}, \quad 2y_{10} = 2.12232;$$

$$t_{11} = \frac{11}{18}, \quad 4y_{11} = 2.23855;$$

$$t_{12} = \frac{2}{3}, \quad 2y_{12} = 0.32968;$$

$$t_{13} = \frac{13}{18}, \quad 4y_{13} = 0.06009;$$

$$t_{14} = \frac{7}{9}, \quad 2y_{14} = 0.00010;$$

$$t_{15} = \frac{5}{6}, \quad 4y_{15} = 0;$$

$$t_{16} = \frac{8}{9}, \quad 2y_{16} = 0;$$

$$t_{17} = \frac{17}{18}, \quad 4y_{17} = 0;$$

$$t_{18} = 1, y_{18} = \lim_{t \rightarrow 1} e^{-(\frac{t}{1-t})^2} \left(\frac{1}{1-t} \right)^2 = 0.$$

按辛普森公式，得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \int_0^1 e^{-(\frac{t}{1-t})^2} \frac{1}{(1-t)^2} dt \\ &= \frac{1}{54} (1 + 4.46894 + 2.49201 \\ &\quad + 5.53415 + 3.04696 + 6.61414 \\ &\quad + 3.50460 + 7.14411 + 3.41685 \\ &\quad + 5.88607 + 2.12232 + 2.23855 \end{aligned}$$

$$+0.32968+0.06009+0.00010)$$

$$= \frac{47.85857}{54} \doteq 0.88627.$$

2544. 近似地求出半轴为 $a=10$ 及 $b=6$ 的椭圆的周长.

解 设椭圆的参数方程为

$$x=10 \cos t, \quad y=6 \sin t.$$

$$\text{于是有 } ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 10 \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt,$$

从而得椭圆的周长为

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = 40 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt.$$

现取 $n=2k=6$ 近似计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt.$$

$$\text{注意到 } \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}, \quad \sin^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4},$$

$$h = \frac{\pi}{12}, \text{ 即有}$$

$$t_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{12}, \quad 4y_1 = 4\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})}$$

$$= 3.913;$$

$$t_2 = \frac{\pi}{6}, \quad 2y_2 = 2\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{4}} = 1.833;$$

$$t_3 = \frac{\pi}{4}, \quad 4y_3 = 4\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{2}} = 3.293,$$

$$t_4 = \frac{\pi}{3}, \quad 2y_4 = 2\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{3}{4}} = 1.442,$$

$$t_5 = \frac{5\pi}{12}, \quad 4y_5 = 4\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3})} \\ = 2.539;$$

$$t_6 = \frac{\pi}{2}, \quad y_6 = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 0.6.$$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt \\ = \frac{h}{3} [(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] \\ = \frac{\pi}{36} (1 + 0.6 + 3.913 + 3.298 + 2.539 + 1.833 \\ + 1.442) \\ = 1.276,$$

所以，椭圆周长的近似值为

$$s = 40 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt \\ = 40 \times 1.276 = 51.04.$$

2545. 取 $\Delta x = \frac{\pi}{3}$ ，按点子作出函数

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

的图形。

解 取 $n=2k=6$ 计算函数 $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 的值。

先计算 $y = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt$ 。由于 $h = \frac{\pi}{18}$ ，且

$$t_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{18}, \quad 4y_1 = 3.980;$$

$$t_2 = \frac{\pi}{9}, \quad 2y_2 = 1.960;$$

$$t_3 = \frac{\pi}{6}, \quad 4y_3 = 3.820;$$

$$t_4 = \frac{2\pi}{9}, \quad 2y_4 = 1.841;$$

$$t_5 = \frac{5\pi}{18}, \quad 4y_5 = 3.511;$$

$$t_6 = \frac{\pi}{3}, \quad y_6 = 0.827.$$

按辛普森公式，得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt &= \frac{\pi}{54} (1 + 0.827 + 3.980 + 3.820 \\ &\quad + 3.511 + 1.960 + 1.841) \\ &\doteq 0.99. \end{aligned}$$

再计算 $y = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt$. 由于 $h = \frac{\pi}{9}$, 且

$$t_0 = 0, \quad y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{9}, \quad 4y_1 = 3.919;$$

$$t_2 = \frac{2\pi}{9}, \quad 2y_2 = 1.841;$$

$$t_3 = \frac{\pi}{3}, \quad 4y_3 = 3.308;$$

$$t_4 = \frac{4\pi}{9}, \quad 2y_4 = 1.411;$$

$$t_5 = \frac{5\pi}{9}, \quad 4y_5 = 2.257;$$

$$t_6 = \frac{2\pi}{3}, \quad y_6 = 0.413.$$

所以,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt &= \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ &\quad + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ &\doteq 1.65. \end{aligned}$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85; \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72;$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下（图4.55）：

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.95	1.72	1.52	1.42

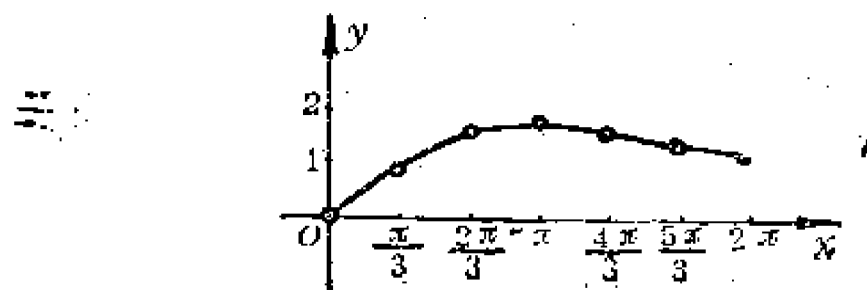


图 4.55

И. И. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

第一分册

上海科学技术出版社

51.610.55

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

(四)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解

(四)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东人民印刷厂印刷

*

中一

787×1092毫米32开本 19印张 406千字
1980年8月第1版 1983年6月第3次印刷
印数: 110,401—165,000

【书号: 15·20¹ 定价: 2.65元】

出版说明

吉米多维奇 (Б.П. ДЕМИДОВИЧ) 著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇编成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻

易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目 录

第五章 级 数	1
§1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法 ...	1
§2. 变号级数收敛性的判别法	78
§3. 级数的运算	133
§4. 函数项级数	148
§5. 幂级数	239
§6. 福里叶级数	376
§7. 级数求和法	441
§8. 利用级数求定积分之值	500
§9. 无穷乘积	514
§10. 斯特林格公式	573
§11. 用多项式逼近连续函数	578

第五章 级数

§1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法

1° 一般概念 对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (级数的和)

存在, 式中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则称级数 (1) 为收敛的. 反之, 则称级数 (1) 为发散的.

2° 哥西准则 级数 (1) 收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\varepsilon > 0$, 都存在有数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

成立.

特别是, 若级数收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

3° 比较判别法 I. 设除级数 (1) 外, 还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \quad (2)$$

若当 $n \geq n_0$, 不等式

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

成立, 则 1) 从级数 (2) 收敛可推得级数 (1) 收敛; 2) 从级数 (1) 发散可推得级数 (2) 发散.

特别是, 当 $n \rightarrow \infty$ 若 $a_n \sim b_n$, 则正项级数 (1) 和 (2) 同时收敛或同时发散.

4° 比较判别法 I. 设

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^{\textcircled{1}},$$

则 (a) 当 $p > 1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $p \leq 1$ 时级数 (1) 发散.

5° 达朗伯判别法 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $q > 1$ 时级数 (1) 发散.

6° 哥西判别法 若 $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $q > 1$ 时级数 (1) 发散.

7° 拉阿伯判别法 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则 (a) 当 $p > 1$ 时级数 (1) 收敛, (b) 当 $p < 1$ 时级数 (1) 发散.

8° 高斯判别法 若 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 及

^① 记号 O^* 的意义参阅第一章 §6, 1°.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中 $|\theta_n| < C$ 而 $\varepsilon > 0$, 则 (a) 当 $\lambda > 1$ 时级数 (1) 收敛,

(b) 当 $\lambda < 1$ 时级数 (1) 发散; (B) 当 $\lambda = 1$ 时, 若 $\mu > 1$ 则级数 (1) 收敛; 若 $\mu \leq 1$ 则级数 (1) 发散.

9° 哥西积分的判别法 若 $f(x)$ ($x > 0$) 是非负的不增函数, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

与积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

同时收敛或同时发散.

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和:

$$2546. \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

解 由于

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}},$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

即所给级数收敛, 且其和为 $\frac{2}{3}$ (以下有关各题省略这两句话).

$$2547. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$2548. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

解 由于

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right),$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

2549. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

2550. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right), \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

2551. (a) $q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots$ ($|q| < 1$);

(b) $q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots$ ($|q| < 1$).

解 令 $z = q(\cos \alpha + i \sin \alpha) = qe^{i\alpha}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$.

于是得 $|z| = |q| < 1$, 并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha + i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin n\alpha \quad (1)$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-q\cos\alpha - i q\sin\alpha} \\ &= \frac{(1-q\cos\alpha) + i q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

比较 (1)、(2) 两式的实部及虚部, 即得

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin \alpha = \frac{q \sin \alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2},$$

$$\begin{aligned} (b) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha - 1 \\ &= \frac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2} - 1 = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha + q^2}. \end{aligned}$$

2552. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$

解 由于

$$S_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned}
& +(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-2\sqrt{5} \\
& +\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) \\
& =1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2} \\
& +\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},
\end{aligned}$$

故得

$$S=\lim_{n\rightarrow\infty}S_n=1-\sqrt{2}.$$

2553. 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的收敛性.

解 记 $x=k\pi$. 若 k 为整数, 则由 $\sin nx=0$ 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 是收敛的, 且其和为零. 若 k 非整数, 我们以下将证 $\sin nx$ 并不趋于零, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 发散.

可采用反证法. 假设

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \sin nx=0,$$

则当 $n\rightarrow\infty$ 时也有 $\sin(n+1)x\rightarrow 0$. 但是

$$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin x,$$

由 $\sin(n+1)x\rightarrow 0$ 及 $\sin nx\rightarrow 0$ (当 $n\rightarrow\infty$ 时) 知 $\cos nx\sin x\rightarrow 0$ (当 $n\rightarrow\infty$ 时), 而 $\sin x=\sin k\pi\neq 0$, 故必有

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \cos nx=0.$$

但

$$1=\sin^2 nx+\cos^2 nx.$$

令 $n\rightarrow\infty$, 两端取极限, 即得左端为 1 而右端为 0, 这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假

设不真，也即 $\sin nx \neq 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时)，从而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的发散性获证。

2554. 证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ 其中 } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1=1, p_1 < p_2 < \dots)$$

也收敛且有相同的和。反之不真，举出例子。

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和叙列为

$$l_1, l_2, \dots, l_n, \dots,$$

$$\text{则 } l_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S 。因此，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_{n+1}-1} = S,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的，且与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和。

反之不真。例如，级数

$$1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1}+\dots$$

是发散的，但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\dots+(1-1)+\dots$$

却是收敛的。

2555. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的, 而把这级数的项经过组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 记其和为 S . 考虑原级数的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 并注意到 $a_k \geq 0$ ($k=1, 2, \dots$), 故存在 n_0 , 使

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{l=1}^{n_0} A_l < S.$$

显然 $S_n < S_{n+1}$ 对一切 n 成立. 于是, $\{S_n\}$ 单调上升且有界. 因此, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在有限, 即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性:

2556. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$.

解 由于通项 $a_n = (-1)^{n-1}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限不存在, 更不可能趋于零, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散.

2557. $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \dots$.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0.001} = 1 \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$ 发散.

$$2558. \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) - 1 = e - 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛, 且其和为 $e - 1$.

$$2559. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots.$$

解 由于 $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 也发散.

$$2560. \frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \cdots + \frac{1}{1000n+1} + \cdots.$$

解 由于 $\frac{1}{1000n+1} \geq \frac{1}{1001n}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1001n}$ 发散,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$ 也发散.

$$2561. 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \cdots + \frac{n}{2n-1} + \cdots.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ 发散.

$$2562. \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots.$$

解 由于 $0 < \frac{1}{(2n-1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 也收敛.

$$2563. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots.$$

解 由于 $0 < \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 也收敛.

$$2564. \quad \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots.$$

解 由于 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2n} > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ 也发散.

2565. 证明, 由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} [a + (n-1)d]$, 其中 d 为公差.

当 $d > 0$ 时, 总存在正整数 n_0 , 使 $a < (n_0-1)d$, 则当 $n \geq n_0$ 时, 总有 $a + (n-1)d < 2(n-1)d$. 于是,

$$\frac{1}{a + (n-1)d} > \frac{1}{2(n-1)d} > \frac{1}{2nd} > 0,$$

注意到级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2nd}$ 发散, 因而级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a+(n-1)d}$

发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+(n-1)d}$ 也发散.

当 $d=0$ 时, a 不可能为零, 此时级数 $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a} + \cdots$ 显然发散.

当 $d < 0$ 时, 将此级数的各项乘以 -1 即化为 $d > 0$ 的情形, 于是, 这级数也发散.

综上所述, 不论 d 为何值, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+(n-1)d}$ 均发散.

2566. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (A)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (B)$ 皆收敛且 $a_n \leq$

$c_n \leq b_n (n=1, 2, \cdots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (C)$ 也收敛.

若级数 (A) 与 (B) 皆发散, 问级数 (C) 的收敛性若何?

证 当级数 (A) 及 (B) 收敛时, 由于 $a_n \leq c_n \leq b_n$,

故 $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$, 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 也收敛, 再由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n$

$- a_n)$ 的收敛性即得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + (c_n - a_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

也收敛.

若级数 (A) 与 (B) 皆发散, 则级数 (C) 可能收敛, 也可能发散. 例如, 级数

$$-1-1-1-\cdots \quad \text{及} \quad 1+1+1+\cdots$$

皆发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 当 $c_n = 0$ ($-1 < c_n < 1$) 时收敛;

当 $c_n = \frac{1}{2}$ ($-1 < c_n < 1$) 也发散.

2567. 设已知二发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

的各项不为负数, 问下列二级数的收敛性若何:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) \quad \text{及} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)?$$

解 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 可能收敛, 也可能发散. 例

如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2}$ 皆发散, 但

是 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = 0+0+\cdots+0+\cdots$ 却收敛. 又如,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 皆发散, 但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 也发散.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 一定发散. 事实上,

$$\max(a_n, b_n) \geq a_n \geq 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 也发散.

2568. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 倒过来不成立, 举出例子.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 于是, 总存在 n_0 . 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $0 \leq a_n < 1$. 从而, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $0 \leq a_n^2 < a_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当然级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 从而, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

反之不真. 例如, $a_n = \frac{1}{n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 却发散.

2569. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

证 由于 $0 \leq 2|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

其次, 由于 $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 皆收敛, 故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 也收敛.

最后, 设 $b_n = \frac{1}{n}$, 利用第一个结果即证得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \text{ 收敛.}$$

2570. 证明, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 $n a_n = \frac{a_n}{\frac{1}{n}}$. 不妨设 $a > 0$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a$, 故对

于任给的 $0 < \varepsilon < a$, 总存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} > a - \varepsilon > 0 \quad \text{或} \quad a_n > (a - \varepsilon) \frac{1}{n} > 0.$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 也收敛, 从而

会得出级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛的错误结论. 因此, 原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散.}$$

2571. 证明, 若各项为正且其值单调减少的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

证 对于任何的 m 与 $n > m$, 我们有

$$(n-m)a_n < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_n < \alpha_n,$$

其中 α_n 为该收敛级数的余式，由此得

$$na_n < \frac{n}{n-m} \alpha_n.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，我们可取定某 m_0 ，使

$$\alpha_{m_0} < \varepsilon.$$

其次，由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-m_0} = 1$ ，故存在 n_0 ($n_0 > m_0$)，使当 $n \geq n_0$ 时，有

$$\frac{n}{n-m_0} < 2.$$

于是，当 $n \geq n_0$ 时，有

$$0 < na_n < 2\varepsilon,$$

因此， $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ ，本题获证。

2572. 若当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时， $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0$ ，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛？

解 若当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0, \quad (1)$$

并不一定有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。例如，取 $a_n = \frac{1}{n}$ ，显然

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，但却有

$$0 < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 0.$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n+p} < \frac{p}{n+1},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n+1} = 0$, 故对一切 p , (1) 式均成立.

这个事实与哥西准则并不矛盾, 因为在哥西准则中, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 其中的 N 只依赖于 ε , 而与 p 无关. 本题的叙述中, 条件并没有排除 N 要与 p 有关.

利用哥西准则, 证明下列正项级数的收敛性:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$ ($|a_n| \leq 10$).

$$\begin{aligned} \text{证 } |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p-1}}{10^{n+p-1}} \right| \\ &\leq \frac{|a_n|}{10^n} + \frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{|a_{n+p-1}|}{10^{n+p-1}} \\ &\leq \frac{1}{10^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{p-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^p}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9 \cdot 10^{n-2}}. \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{10^{n-2}} < 9\varepsilon$, 即只要

$$n > 2 + \lg \frac{1}{9\varepsilon}.$$

取 $N = 2 + \left\lceil \lg \frac{1}{9\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对一切正整数 p 皆成立, 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ 收敛.

$$2574. \quad \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}}. \end{aligned} \quad (1)$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故按哥西准则, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 对任意正整数 p , 有

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} < \varepsilon. \quad (2)$$

由 (1) 式及 (2) 式得知, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对一切正整数 p 皆成立. 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

$$\begin{aligned} 2575. \quad & \frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \dots \\ & + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } S_{n+p} - S_n &= \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{\cos ix - \cos(i+1)x}{i} \\
 &= \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \cos(i+1)x \\
 &\quad - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } |S_{n+p} - S_n| &\leq \frac{1}{n+1} + \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) + \frac{1}{n+p} \\
 &= \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.
 \end{aligned}$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，取正整数 $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$ ，则当 $n > N$ 时，对于一切正整数 p ，有

$$|S_{n+p} - S_n| < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ 收敛。

利用哥西准则，证明下列级数的发散性：

$$2576. \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

解 取 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ 。不论 n 多大，若令 $p = n$ ，则有

$$\begin{aligned}
 |S_{n+p} - S_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ 项}} \\
 &= \frac{1}{2} > \varepsilon_0.
 \end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

$$2577. \quad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

解 取 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{6}$. 不论 n 多大, 若令 $p = 3n$, 则有

$$\begin{aligned} |S_{3n+p} - S_{3n}| &= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n} + \frac{1}{3n+3} \\ &\quad + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n+3} + \dots + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} \\ &\quad - \frac{1}{6n} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &> \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} \right)}_{n \text{ 项}} = \frac{1}{6} > \varepsilon_0. \end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right)$ 发散.

运用达朗伯耳哥西或比较判别法, 研究下列级数的收敛性:

$$2578. \quad \frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ 收敛.

$$2579. \frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \cdots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \cdots$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4} < 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛.

$$2580. \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \cdots + \frac{n!}{n^n} + \cdots$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \right] = e^{-1} < 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛.

$$2581. (a) \frac{2 \cdot 1!}{1^1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{2^n n!}{n^n} + \cdots;$$

$$(b) \frac{3 \cdot 1!}{1^1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \cdots + \frac{3^n n!}{n^n} + \cdots$$

解 (a) 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \frac{2}{e} < 1,\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(6) 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \frac{3}{e} > 1,\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ 发散.

$$2582. \quad \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots$$

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} \\ &= 0 < 1,\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛.

$$2583. \quad \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000+n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000 \cdot 1001 \cdots (1000+n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ 收敛。

$$2584. \quad \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \cdots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n+2)}$ 收敛。

$$2585. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[2]{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[2]{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt[2]{2} - \sqrt[2n+1]{2}).$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[2]{2} - \sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt[2]{2} - 1 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[2]{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[2]{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt[2]{2} - \sqrt[2n+1]{2})$ 收敛。

$$2586. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ 收敛.

2587. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}.$

解 $\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n-1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \sqrt[n]{n} > 0,$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \sqrt[n]{n},$$

由于其通项趋于 $\frac{1}{e} \neq 0$, 故它是发散的. 因此, 原级数也是发散的.

注意, 若用达朗伯判别法, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$,

无明确结论, 此时还应改用高斯判别法.

2588. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$

解 当 $n > 1$ 时, $\ln n < n$, 于是,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > 0.$$

对于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$, 故它是发散的. 因此, 原

级数也发散。

注意：若用达朗伯耳判别法，将遇到与2587题类似的情况。

$$2589. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

解 由于

$$0 < \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{n^2},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数也收敛。

注意：若用达朗伯耳判别法，则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2n^2+5n+4)^{\frac{n+2}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{(2n^2+5n+4)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}} \\ &= e \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \end{aligned}$$

也可证得原级数收敛。

$$\begin{aligned} 2590. \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots \end{aligned}$$

解 方法一

$$\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}} = 2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} &= \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}} \\ &= \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}} = 2\sin\frac{\pi}{16},\end{aligned}$$

利用数学归纳法，可证得通项为

$$a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= \frac{1}{2} < 1,\end{aligned}$$

故级数收敛。

方法二

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.\end{aligned}$$

利用数学归纳法，可证得

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{重根号}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{重根号}}}} \\
 &= \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{(n-1) \text{重根号}}} .
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{重根号}}}} \\
 &= \frac{1}{2} *) < 1 ,
 \end{aligned}$$

故级数收敛.

*) 利用637题的结果.

2591. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (a_n > 0),$$

则 $a_n = o(q_1^n)$, 其中 $q_1 > q$.

证 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 故利用141题的结果, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

令 $\varepsilon = \frac{1}{2}(q_1 - q) > 0$, 则由上式知存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon,$$

从而有

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon = \lambda q_1 \quad (n \geq n_0),$$

其中 $\lambda = \frac{q_1 + q}{2q_1} < 1$. 利用 $\lambda^n = o(1)$, 即证得

$$a_n = \lambda^n q_1^n = o(q_1^n) .$$

2592. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \quad (a_n > 0) ,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

相反的结论不真. 研究例子

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots .$$

证 取 $0 < \varepsilon < 1 - q$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 ,$$

故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = l < 1 .$$

从而

$$0 \leq a_n \leq a_{n_0} l^{n-n_0} \quad (n \geq n_0) .$$

由于级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} l^{n-n_0}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

反之不真, 例如, 级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

显然是收敛的，但是，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, & \text{当 } n=2m+1; \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m, & \text{当 } n=2m, \end{cases}$$

故有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

2593. 证明，若对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{A})$$

存在，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (\text{B})$$

也存在。

相反的结论不真：若极限(B)存在，则极限(A)可以不存在，研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}.$$

证 利用141题的结论，本题的前半部分即得证。

反之不真。例如，对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3 + (-1)^n}}{2 \cdot \sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2}.$$

但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2[3 + (-1)^n]} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

2594. 证明, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (a_n \geq 0),$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (b) 当 $q > 1$ 时这级数发散 (哥西判别法的推广).

证 (a) 取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(1-q)$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$,

故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon.$$

从而

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < \frac{q+1}{2} \quad (n \geq n_0)$$

或

$$0 < a_n < \left(\frac{q+1}{2}\right)^n \quad (n \geq n_0).$$

由于 $0 \leq q < 1$, 故 $0 < \frac{q+1}{2} < 1$. 又因级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{q+1}{2}\right)^n \text{ 收敛, 故级数 } \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ 收敛, 从而}$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(b) 由于 $q > 1$, 故对于数列 $\{a_n\}$, 必有无穷多

个 a_n , 能使不等式

$$\sqrt[n]{a_n} > 1$$

成立, 从而

$$a_n > 1.$$

于是当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 不可能趋于零, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

研究级数的收敛性:

$$2595. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2 + (-1)^n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ 收敛.

$$2596. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}.$$

$$\text{解 } 0 < \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}.$$

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

故它是收敛的, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 也是收敛的.

$$2597. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}.$$

$$\text{解 } 0 < \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \leq \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}.$$

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{3} < 1, \end{aligned}$$

故它是收敛的, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$ 也是收敛的.

利用拉阿伯和高斯判别法, 研究下列级数的收敛性:

$$2598. \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots,$$

$$\text{解 } \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p. \text{ 由于}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{p}{2}, \end{aligned}$$

故当 $\frac{p}{2} > 1$ 即 $p > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p$ 收敛.

$$2599. \quad \frac{a}{b} + \frac{a(a-d)}{b(b-d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots \quad (a > 0, \\ b > 0, d > 0).$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b+nd}{a+nd} - 1 \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)n}{a+nd} = \frac{b-a}{d},$$

故当 $\frac{b-a}{d} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d) \cdots [a+(n-1)d]}{b(b+d) \cdots (b+(n-1)d)}$ 收敛.

$$2600. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}.$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n! e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p} - 1}{\frac{1}{n}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e} (1+x)^{\frac{1}{x}+p} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e} e^{(\frac{1}{x}+p) \ln(1+x)} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e} e^{1 + (p - \frac{1}{2})x + o(x)} - 1}{x} = p - \frac{1}{2},$$

故当 $p - \frac{1}{2} > 1$ 即 $p > \frac{3}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$ 收敛.

$$2601. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2 + \sqrt{1})(2 + \sqrt{2}) \cdots (2 + \sqrt{n})}.$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = +\infty, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2 + \sqrt{1})(2 + \sqrt{2}) \cdots (2 + \sqrt{n})}$ 收敛.

$$2602. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1) \cdots (q+n)} \quad (p > 0, q > 0).$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1} \right)$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1} \right) - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p \left(1 + \frac{qx}{1+x} \right) - 1}{x} = p+q, \end{aligned}$$

故当 $p+q>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ 收敛.

$$2603. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p>0, q>0).$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^q \frac{1+n}{p+n}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q \frac{1+n}{p+n} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+x)^{q+1}}{1+px} - 1}{x} = q+1-p, \end{aligned}$$

故当 $q+1-p>1$ 即 $q>p$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$ 收敛.

$$2604. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^q$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^q - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^p (1+x)^q - 1}{x} = q + \frac{p}{2}, \end{aligned}$$

故当 $q + \frac{p}{2} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$ 收敛.

$$2605. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right)^n \quad (p > 0).$$

解 令 $a_n = \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right)^n$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \ln n}{n} = 0$, 故当 n 充分大时, $a_n > 0$.

当 $x = 0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 它当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散, 当 $x \neq 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \ln(a_n n^{p+x}) &= x \ln n + n \ln \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right) \\ &= n u_n + n \ln(1 - u_n) = n u_n^2 \cdot \frac{u_n + \ln(1 - u_n)}{u_n^2}, \end{aligned}$$

其中 $u_n = \frac{x \ln n}{n}$, $u_n \neq 0 (n > 1)$, $u_n \rightarrow 0$, $n u_n^2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

由洛比塔法则, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n + \ln(1 - u_n)}{u_n^2} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v + \ln(1 - v)}{v^2} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1-v}}{2v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{2(v-1)} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n n^{p+x}) = 0 \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{p+x}}} = 1.$$

由此可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+x}}$ 有相同的敛散性,

故当 $p+x > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而当 $p+x \leq 1$

时发散。

综上所述，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 仅当 $x > 1 - p$ 时收敛。

2606. 证明：若 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$) 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则 $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$ ($\varepsilon > 0$)。

证 下面记 $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n, \beta''_n, \varepsilon_n$ 为无穷小量，即

$$\alpha_n = o(1), \alpha'_n = o(1), \beta_n = o(1), \beta'_n = o(1),$$

$$\beta''_n = o(1), \varepsilon_n = o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

由题设知，当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \frac{\alpha_n}{n}.$$

取对数，即得

$$\ln a_n - \ln a_{n+1} = \ln \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{\alpha_n}{n} \right)$$

$$= \frac{p}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}(p + \alpha'_n).$$

令 $n=1, 2, \dots, N-1$ 并求和，则得

$$\ln a_1 - \ln a_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}(p + \alpha'_n).$$

由143题（在其中令 $x_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n}$ ， $y_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$ ）知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n} \right) / \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha'_N = 0.$$

又由146题知

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} = C + \ln(N-1) + \varepsilon_N,$$

其中 C 是尤拉常数, $\varepsilon_N \rightarrow 0$. 于是, 令 $\beta_N = \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n} \right) / \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \right)$, 有

$$\begin{aligned} \ln a_1 - \ln a_N &= (p + \beta_N) \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \\ &= (p + \beta_N) [C + \ln(N-1) + \varepsilon_N] \\ &= (p + \beta_N) \ln(N-1) + k + \beta'_N, \end{aligned}$$

其中 $k = Cp$ 为常数. 于是,

$$\ln a_N = -(p + \beta_N) \ln(N-1) + k' - \beta'_N,$$

其中 $k' = \ln a_1 - k$ 为常数, 从而

$$\begin{aligned} a_N &= e^{k' - \beta'_N} \cdot (N-1)^{-(p + \beta_N)} \\ &= e^{k' - \beta'_N} \cdot \left(\frac{N-1}{N} \right)^{-(p + \beta_N)} \cdot N^{\beta''_N} \cdot N^{-p}. \end{aligned}$$

其中 $\beta'_N = -\beta_N$. 由于 $\beta'_N = o(1)$, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 当 N 充分大时, 有 $|\beta''_N| < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而 $N^{\beta''_N} < N^{\frac{\varepsilon}{2}}$. 再注意到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{-(p + \beta_N)} = 1,$$

即知: 当 N 充分大时, 有

$$0 < a_N \leq k'' \cdot N^{\frac{p}{2}} \cdot N^{-p} = O\left(\frac{1}{N^{p-\frac{p}{2}}}\right),$$

其中 k'' 是常数. 于是, 得

$$a_N = o\left(\frac{1}{N^{p-\frac{p}{2}}}\right).$$

本题获证.

求出通项 a_n 的减小的阶, 从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 设:

$$2607. \quad a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}, \quad \text{其中 } n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q > 0.$$

解 由于 $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$, 故当 $q - p > 1$ 即 $q > 1 + p$ 时, 级数收敛.

$$2608. \quad a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}.$$

解 由于 $a_n \geq 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}} = \pi \quad \text{或} \quad a_n = O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

故仅当 $1 + p > 1$ 即 $p > 0$ 时, 级数收敛.

$$2609. \quad a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} \quad (n \geq 1).$$

解 由于 $a_n < 0$, 且

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)^p \ln \left(1 + \frac{2}{n+1} \right) \\ = O^* \left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}} \right),$$

故仅当 $\frac{p}{2} + 1 > 1$ 即 $p > 0$ 时, 级数收敛.

2610. $a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n} \right),$

解 由于 $a_n > 0$ ($n > 2$ 时), 且

$$a_n = \frac{1}{2^p} \ln^p \left(1 + \lg^2 \frac{\pi}{n} \right) \sim \frac{1}{2^p} \lg^{2p} \frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{2^p} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{2p} \\ = O^* \left(\frac{1}{n^{2p}} \right),$$

故仅当 $2p > 1$ 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 级数收敛.

2611. $a_n = \lg_{b^n} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) \quad (a > 0, b > 0).$

解 显然 $b \neq 1$ (否则, a_n 无意义). 由于

$$a_n = \frac{\ln \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right)}{n \ln b} \sim \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{\sqrt[n]{a}}{n^2} = O^* \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

故级数收敛.

2612. $a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p.$

解 $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$

$$= e^n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O^*\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]$$

$$= e^{1 - \frac{1}{2n} + O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

由于 $a_n > 0$, 且

$$\begin{aligned} a_n &= \left[e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right) \right]^n \\ &\sim e^n \left[\frac{1}{2n} + O^*\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^n = O^*\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故仅当 $p > 1$ 时, 级数收敛.

$$2613. \quad a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{k}{\ln n}}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} a_n &= n^{-\left(1 + \frac{k}{\ln n}\right)} = e^{-\left(1 + \frac{k}{\ln n}\right) \ln n} = e^{-(\ln n + k)} \\ &= \frac{1}{n} e^{-k}, \end{aligned}$$

故级数显然发散.

$$2614. \quad a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{n}}}.$$

解 由于

$$a_n = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}} = O^*\left(\frac{1}{n}\right),$$

故级数发散.

$$2615. \quad \text{证明: 若有 } \alpha > 0 \text{ 使当 } n \geq n_0 \text{ 时 } \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha (a_n > 0),$$

$$\text{则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0) \text{ 收敛; 若 } n \geq n_0 \text{ 时 } \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1,$$

则这级数发散 (对数判别法) .

证 若 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$, 则 $\frac{1}{a_n} \geq n^{1+\alpha}$ 或 $a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$. 由

于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

若 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$, 则 $\frac{1}{a_n} \leq n$ 或 $a_n \geq \frac{1}{n}$. 由于级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

研究具如下通项的级数的收敛性:

2616. $a_n = n^{\ln x}$ ($x > 0$) .

解 由于

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{-\ln x \cdot \ln n}{\ln n} = -\ln x,$$

故利用2615题的对数判别法, 即知仅当 $-\ln x > 1$ 或 $x < \frac{1}{e}$ 时, 级数收敛.

2617. $a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ ($n > 1$) .

解 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \ln[\ln(\ln n)]$. 对于 $\alpha > 0$, 显然存在 n_0 ,

使当 $n \geq n_0$ 时, $\ln[\ln(\ln n)] \geq 1 + \alpha$, 故级数收敛.

2618. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ ($n > 1$) .

解 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}$. 由洛比塔法则知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \ln x)^2}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \ln x}{\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln x} = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} = 0$, 从而存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时,

有 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$, 利用 2615 题的结论, 即知级数发散.

利用哥西积分判别法, 研究具如下通项的级数的收敛性:

$$2619. a_n = \frac{1}{n \ln^p n}.$$

解 由于不论 p 为何数, 当 x 充分大时, 函数 $\frac{1}{x \ln^p x}$ 都是非负递减的, 并且

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \begin{cases} \left. \frac{1}{(1-p) \ln^{p-1} x} \right|_2^{+\infty}, & p \neq 1; \\ \left. \ln \ln x \right|_2^{+\infty}, & p = 1 \end{cases}$$

仅当 $p > 1$ 时收敛, 故级数仅当 $p > 1$ 时收敛.

$$2620. a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n \geq 2).$$

解 易知函数 $f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^p (\ln \ln x)^q}$ (不论 p ,

q 为何实数) 的导函数当 x 充分大时是负的, 故当 x 充分大时, $f(x)$ 是非负递减函数.

若 $p = 1$, 则

$$\begin{aligned} & \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^q} \\ &= \begin{cases} \left. \frac{1}{(1-q)(\ln \ln x)^{q-1}} \right|_3^{+\infty}, & q \neq 1; \\ \ln \ln \ln x \Big|_3^{+\infty}, & q = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

当 $q > 1$ 时收敛, $q \leq 1$ 时发散, 故由哥西积分判别法知, 原级数当 $p = 1$, $q > 1$ 时收敛, $p = 1$, $q \leq 1$ 时发散.

若 $p \neq 1$, 作代换 $\ln x = t$, 有

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^p (\ln \ln x)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}.$$

当 $p > 1$ 时, 取 $\eta > 0$ 使 $p - \eta > 1$. 由于 (不论 q 为何实数)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p-\eta} \cdot \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^\eta (\ln t)^q} = 0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 收敛, 从而原级数收敛; 当 $p < 1$ 时, 取 $\tau > 0$ 使 $p + \tau < 1$. 由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p+\tau} \cdot \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\tau}{(\ln t)^q} = +\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 发散, 从而原级数发散.

综上所述, 可知原级数仅当 $p=1$, $q>1$ 及 $p>1$, q 任意时收敛.

2621 研究级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

的收敛性.

解 由于

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k < n \ln n,$$

故

$$\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n \ln n} > 0.$$

利用2619题中 $p=1$ 的结果, 知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散.

故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 也发散.

2622. 证明: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调减小, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

证 设 $S_{2^n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n}$, 则因

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{2^n} > a_{2^n+1} > \cdots > 0,$$

故得

$$\begin{aligned} 0 &< S_{2^n} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &< a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n}, \end{aligned} \quad (1)$$

且有

$$S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4)$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\
& \geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} \\
& = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2a_{2^2} \\
& + \cdots + 2^na_{2^n}) \geq 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

由 (1) 式得知: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

由 (2) 式得知: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

由此本题获证.

注意, 在此命题中, 用作比较的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

可以用更普遍的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^n a_{m^n}$$

来代替, 其中 m 为任一自然数. 证法类似.

2623. 设 $f(x)$ 为单调不增加的正值函数. 证明, 若级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, 则对于其余项 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下
的估计:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n \leq f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$$

利用此式, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和精确到 0.01.

解 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的收敛性, 根据哥西积分判别法,

知积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 由于 $f(x)$ 单调不增加, 故

$$f(n+k+1) \leq \int_{n+k}^{n+k+1} f(x) dx \leq f(n+k)$$

$$(k=1, 2, 3, \dots).$$

将这些不等式相加, 得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n+k+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(n+k),$$

即

$$R_n - f(n+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n,$$

或

$$\begin{aligned} \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx &\leq R_n \leq f(n+1) \\ &+ \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx, \end{aligned} \quad (1)$$

这就是所需证的不等式.

注意, 原题中将 (1) 中的“ \leq ”误写为“ $<$ ”, 这是不对的. 例如, 若令

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ 当 } n \leq x < n+1 \text{ 时 } (n=1, 2, \dots),$$

则不等式 (1) 中左端的“ \leq ”号成为“ $=$ ”号:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx = R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots;$$

若令

$$f(x) = \frac{1}{n^2}, \text{ 当 } n < x \leq n+1 \text{ 时 } (n=1, 2, \dots),$$

则不等式 (1) 中右端的“ \leq ”成为“ $=$ ”号:

$$\begin{aligned} R_n &= f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \end{aligned}$$

最后, 利用不等式 (1) 来求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和, 精确到 0.01. 易知, 当取 $n=8$ 时, 即有

$$R_8 \leq \frac{1}{9^3} + \int_9^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < 0.008,$$

故取 $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{k^3} = 1.20$ 作为级数和的近似值, 即可保证误差不超过 0.01.

2624. 证明厄耳玛可夫判别法: 设 $f(x)$ 为单调减少的正值函数, 又设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

若 $\lambda < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛; 若 $\lambda > 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在

$N > 0$, 使当 $x > N$ 时, 有

$$e^x f(x) < (\lambda + \varepsilon) f(x).$$

当 $\lambda < 1$ 时, 取 e 使 $\lambda + e = \rho < 1$, 则有

$$e^x f(e^x) < \rho f(x) .$$

于是, 当 $m > N$ 时有

$$\int_N^m e^x f(e^x) dx < \rho \int_N^m f(x) dx ,$$

即

$$\int_{e^{-N}}^{e^{-m}} f(x) dx < \rho \int_N^m f(x) dx ,$$

也即

$$\begin{aligned} (1-\rho) \int_{e^{-N}}^{e^{-m}} f(x) dx &< \rho \int_N^m f(x) dx \\ &= \rho \int_N^{e^{-m}} f(x) dx \\ &= \rho \int_N^{e^{-N}} f(x) dx - \rho \int_m^{e^{-m}} f(x) dx . \end{aligned}$$

由于 N 充分大且 $m > N$, 故 $m < e^m$. 又因 $f(x) \geq 0$, 故 $\int_m^{e^m} f(x) dx \geq 0$. 从而

$$\begin{aligned} (1-\rho) \int_{e^{-N}}^{e^{-m}} f(x) dx &< \rho \int_N^{e^{-N}} f(x) dx , \\ \int_{e^{-N}}^{e^{-m}} f(x) dx &< \frac{\rho}{1-\rho} \int_N^{e^{-N}} f(x) dx . \end{aligned}$$

固定 N , 让 $m \rightarrow +\infty$, 取极限即得

$$\int_{e^{-N}}^{+\infty} f(x) dx \leq \frac{\rho}{1-\rho} \int_N^{e^{-N}} f(x) dx = \text{常数} .$$

于是, 由哥西积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

当 $\lambda > 1$ 时, 则取 N 为充分大, 可得

$$e^x f(e^x) \geq f(x) \quad (x > N).$$

从而

$$\int_N^m e^x f(e^x) dx \geq \int_N^m f(x) dx,$$

即

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x) dx \geq \int_N^m f(x) dx$$

或

$$\int_{e^N}^m + \int_m^{e^m} \geq \int_N^{e^N} + \int_{e^N}^m,$$

故

$$\int_m^{e^m} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx \quad (m > N).$$

今设 $e_0 = N + 1$, $e_1 = e^{e_0}$, $e_2 = e^{e_1}$, \dots , $e_{k+1} = e^{e_k}$,

\dots , 并分别取 $m = e_0, e_1, e_2, \dots$, 则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

$$\int_{e_2}^{e_3} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

.....

$$\int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

.....

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x) dx$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_N^{e^N} f(x) dx = +\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x) dx$ 为发散的, 故由哥西积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

2625. 证明罗巴契夫斯基判别法: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调趋于零, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$$

同时收敛或同时发散, 其中 p_m 是满足不等式

$$a_n \geq 2^{-n} \quad (n=1, 2, \dots, p_m)$$

的项 a_n 的最大的指标.

证 由题设 p_m 是满足不等式 $a_n \geq 2^{-n}$ 的项 a_n 的最大指标, 故有

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_{m-1}+1} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_{m-1}+2} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

.....

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_m} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$a_{p_m+1} < \frac{1}{2^m}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \cdots + a_{p_m} \\ & \geq (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \cdots + a_{p_m} \\ & \leq (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

将 (1) 式及 (2) 式对 m 从 1 到 N 求和 (其中 N 为任意正整数), 得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N (a_{p_{m-1}+1} + \cdots + a_{p_m}) & \geq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m}, \\ \sum_{m=1}^N (a_{p_{m-1}+1} + \cdots + a_{p_m}) & \leq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

由上述两个不等式可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1}) \frac{1}{2^{n-1}}$ 同时收敛或同时发散. 因此, 我们如果能

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1}) \frac{1}{2^{n-1}}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n 2^{-n}$ 同时收敛或同时发散, 则命题即获证.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n 2^{-n}$ 的收敛性易得 $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1}) \frac{1}{2^{n-1}}$ 的

收敛性. 反之, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1}) \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 则

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n 2^{-n}$ 也收敛. 事实上, 记 $A = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1})$

$\frac{1}{2^{n-1}}$, 由于 $p_n - p_{n-1} \geq 0$ ($n = 1, 2, \cdots$), 故有

$$\begin{aligned}
A &\geq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} \\
&= \sum_{m=1}^N p_m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} - \sum_{m=1}^N p_{m-1} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \\
&= \sum_{m=1}^N p_m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} - \sum_{l=0}^{N-1} p_l \cdot \frac{1}{2^l} \\
&= -\frac{1}{2^{N-1}} p_N + \sum_{m=1}^{N-1} p_m \left(\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^m} \right) - p_0 \\
&= \sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m} + \frac{1}{2^{N-1}} p_N - p_0.
\end{aligned}$$

若记 $S_N = \sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m}$, 则由上式得

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} + p_0 - \frac{1}{2^{N-1}} p_N \\
&\leq p_0 + \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} \leq p_0 + A.
\end{aligned}$$

因而数列 $\{S_N\}$ 单调上升且有界, 故 $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ 存在有限,

即级数 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 收敛. 证毕.

研究下列级数的收敛性:

2626. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a}.$

解 由于

$$0 < \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^a} = \frac{4}{n^a(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})},$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\alpha}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})} \bigg/ \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} = 2,$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 仅当 $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ (即 $\alpha > \frac{1}{2}$) 时

收敛, 即知原级数仅当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时收敛.

2627. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}).$

解 利用公式

$$\alpha - \beta = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)},$$

得

$$\begin{aligned} & \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b} \\ &= \frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}. \end{aligned}$$

由此可知, 不论 $a = \frac{1}{2}$ 还是 $a \neq \frac{1}{2}$, 当 n 充分大时, 上式右端均保持定号, 故原级数可当成正项级数处理.

若 $a = \frac{1}{2}$, 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})} \bigg/ \\ & \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2 - b}{4}, \end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛;

若 $a \neq \frac{1}{2}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a-1)n + a^2 - b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})} \\ = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2a-1}{4} \neq 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故原级数发散.

2628. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right),$

解 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - 1 \right) + \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right) \right].$$

分别考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} \right) \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right),$$

它们都是正项级数. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{32},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2}\right)$ 发

散, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right)$ 收敛, 从而, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right)$$

发散.

2629. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right).$

解 当 $x \neq 0$ 及 $-1 < x < +\infty$ 时, 有

$$\ln(1+x) < x.$$

利用上式, 即得

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1}$$

$$= -\ln \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1},$$

即

$$-\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}} < \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}} < \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数也收敛.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}.$

解 先设 $\alpha > 2$. 利用斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

即得

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} &= \frac{\ln 2\pi}{2n^{\alpha}} + \frac{\ln n}{2n^{\alpha}} + \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} \\
&\quad + \frac{\theta_n}{12n^{\alpha+1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

显然, 当 $\alpha > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{n^{\alpha+1}}$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 均收敛, 故原级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$ 收敛.

现设 $\alpha \leq 2$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$, 利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty,$$

从而

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n^2} \bigg/ \frac{1}{n^{2-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty, \end{aligned}$$

再注意到此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-1}}$ 发散, 即知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2}$ 发散.

2631. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}.$

解 方法一

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left(e^{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} - 1 \right) \\ &= \frac{e^{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} - 1}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} \cdot n(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} \\ &= 0, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} = +\infty,$$

利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = +\infty$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$ 收敛.

方法二

当 t 充分大时, 有

$$e^t \geq At^4 \quad (A \text{ 为大于零的常数}),$$

故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$e^{\sqrt[3]{n}} \geq An^{\frac{4}{3}}.$$

从而

$$e^{-\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{A} n^{-\frac{4}{3}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ 收敛, 故原级数收敛.

2632. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$

解 当 t 充分大时, 有 $e^t \geq Bt^7$ ($B > 0$ 为常数), 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < n^2 e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{B} n^{-\frac{7}{2} + 2} = \frac{1}{B} n^{-\frac{3}{2}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故原级数收敛.

$$2633. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right).$$

$$\text{解 } a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} \sim \frac{\ln n}{n^2}.$$

又由于存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $0 < \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{A}{n^{\frac{3}{2}}}$

($A > 0$, 常数), 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$ 收敛.

$$2634. \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}.$$

解 先设 $c \neq 0$. 若 $bc - ad \neq 0$, 应用拉阿伯判别法, 我们有

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left[\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d} - \frac{a \ln(n+1) + b}{c \ln(n+1) + d} - 1 \right] \\ &= n \left\{ e^{\frac{(bc-ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{(c \ln n + d) [c \ln(n+1) + d]}} - 1 \right\} \\ &= \frac{e^{\frac{(bc-ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{(c \ln n + d) [c \ln(n+1) + d]}} - 1}{\frac{(bc-ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{(c \ln n + d) [c \ln(n+1) + d]}} \cdot \frac{(bc-ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{(c \ln n + d) [c \ln(n+1) + d]}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述等式右端的第一个因子趋于 1, 第二个因子趋于 $bc - ad$, 第三个因子趋于零. 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 0.$$

从而级数发散; 若 $bc - ad = 0$, 此时 $a_n = \text{常数} > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 故级数发散.

若 $c = 0$, 则

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{e^{-\frac{a \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{d}} - 1}{-\frac{a}{d} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}$$

$$\left(-\frac{a}{d} \right) \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow -\frac{a}{d} \quad (d \neq 0).$$

于是, 如果 $-\frac{a}{d} > 1$ 即 $\frac{a}{d} < -1$, 则级数收敛; 如果 $-\frac{a}{d} < 1$, 则级数发散; 若 $-\frac{a}{d} = 1$, 则 $a_n = \frac{C}{n}$ ($C > 0$ 是常数), 从而级数发散.

2635. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}.$

解 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}}$. 由于

$$\frac{\frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)}} = \left(\frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \frac{1}{n}} \right)^2$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\text{故 } \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n} \right)} \sim \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln^2 n}.$$

又当 $n > 1$ 时, $0 < \ln n < \sqrt{n}$, 故 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$. 由于

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散, 从而原级数发散.

2636. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}.$

解 若 $a = 0$, 级数显然发散.

若 $a \neq 0$. 由于

$$\begin{aligned} \sqrt[n^3]{a_n} &= \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \cos \frac{a}{n}} \\ &= e^{n^2 \ln \left[1 - \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right]} \\ &= e^{n^2 \left[-\frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right]} = e^{-\frac{a^2}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \end{aligned}$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^2}$ 当 $a \neq 0$ 时收敛.

$$2637. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right).$$

$$\text{解 } a_n = \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}},$$

$$\text{其中 } \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \operatorname{sh} \pi x + \pi \sin \pi x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2 \operatorname{ch} \pi x + \pi^2 \cos \pi x}{2} = \pi^2, \end{aligned}$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n^2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\
& \quad \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \\
&= 1 \cdot \pi^2 \cdot 1 = \pi^2,
\end{aligned}$$

故存在常数 $k > 0$, 有 $\left| \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} \right| \leq k$ (n 充分大), 即 $|a_n| \leq$

$k \cdot \frac{1}{n^2}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

2638. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

解 由于

$$n! > \left(\frac{n}{e} \right)^n,$$

故有

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} > \frac{1}{e^n} n^{n - \sqrt{n}} = b_n.$$

但 $\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{e} n^{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 因此级数

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 从而原级数发散.

*) 利用74题的结论.

$$2639. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

$$\text{解 } a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \frac{e^{(\ln n)^2}}{e^{n \ln(\ln n)}} = e^{-[n \ln(\ln n) - \ln^2 n]}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(\ln n) - \ln^2 n}{n} = +\infty,$$

故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$n \ln(\ln n) - \ln^2 n \geq An,$$

其中 A 为大于零的常数. 从而有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{e^{n \ln(\ln n) - \ln^2 n}} \leq \frac{n^2}{e^{An}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

于是, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛.

$$2640. \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right) \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right]$$

$$= \ln a - \frac{1}{2} \left(\ln b + \ln c \right) = \ln \frac{a}{\sqrt{bc}}.$$

当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时 $\ln \frac{a}{\sqrt{bc}} \neq 0$, 且当 n 充分大时, 级数的项不变号, 故当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{2^n}} - \frac{b^{\frac{1}{2^n}} + c^{\frac{1}{2^n}}}{2} \right)$ 发散.

当 $a = \sqrt{bc}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{\left(b^{\frac{1}{2^n}} - c^{\frac{1}{2^n}} \right)^2}{2} \right]$. 由

于当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{\frac{\left(b^{\frac{1}{2^n}} - c^{\frac{1}{2^n}} \right)^2}{2}}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{8} (\ln b - \ln c)^2,$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{\left(b^{\frac{1}{2^n}} - c^{\frac{1}{2^n}} \right)^2}{2} \right]$ 收

敛, 即当 $a = \sqrt{bc}$ 时, 原级数收敛.

2641. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^a} - 1).$

解 当 $a \geq 0$ 时, $a_n = n^{n^a} - 1 \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数发散.

当 $-1 \leq a < 0$ 时, 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x^a} - 1}{x^{|a|+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} - 1}{\frac{1}{x^{|a|+1}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} \left(\frac{1}{x^{|a|+1}} - |a| \cdot \frac{\ln x}{x^{|a|+1}} \right)}{-|a| \cdot \frac{1}{x^{|a|+1}}} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} (\ln x - |a|^{-1}) = +\infty,
\end{aligned}$$

故对于 $a_n = n^{n^a} - 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|a|}}} \rightarrow +\infty.$$

因此, 存在常数 $k > 0$, 使 $a_n \geq k \cdot \frac{1}{n^{|a|}}$. 但当 $|a| \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|a|}}$ 发散, 从而当 $-1 \leq a < 0$ 时, 原级数发散.

当 $a < -1$ 时, 取 β 使 $a < \beta < -1$, 于是 $|a| > |\beta| > 1$. 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x^a} - 1}{x^{|\beta|+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|+1}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}} \left(\frac{1}{x^{|\beta|+1}} - |a| \cdot \frac{\ln x}{x^{|\beta|+1}} \right)}{-|\beta| \cdot \frac{1}{x^{|\beta|+1}}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}} \left(\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \frac{\ln x}{x^{|\alpha|+|\beta|}} - \frac{1}{|\beta|} \cdot \frac{1}{x^{|\alpha|+|\beta|}} \right) \\ = 0,$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}} = 0,$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛, 从而当 $\alpha < -1$ 时, 原级数收敛.

2642. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^{\alpha}} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^{\alpha}} \right) \right].$

解 $a_n = \ln \frac{1}{n^{\alpha}} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^{\alpha}} \right)$. 显然必需设 $\alpha \geq 0$. 因若 $\alpha < 0$, 则对于某些 n , $\ln(\sin n^{-\alpha})$ 可能无意义. 当 $\alpha = 0$ 时, $a_n = -\ln \sin 1 = \text{常数} > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 故此时级数发散. 当 $\alpha > 0$ 时, 将 a_n 改写为

$$a_n = \ln \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\sin \frac{1}{n^{\alpha}}} = \ln \left[1 + \left(\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\sin \frac{1}{n^{\alpha}}} - 1 \right) \right] \\ = \left(\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\sin \frac{1}{n^{\alpha}}} - 1 \right) \ln \left[1 + \left(\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\sin \frac{1}{n^{\alpha}}} - 1 \right) \right] \frac{\sin \frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}} - \sin \frac{1}{n^{\alpha}}}.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^{\alpha}}{\sin x^{\alpha}} - 1}{x^{2\alpha}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y}{\sin y} - 1}{y^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{y^2 \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{y^3} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{3y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{6y} = \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{2a}}} = \frac{1}{6}.$$

从而得知：当 $2a > 1$ 即 $a > \frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

而当 $2a \leq 1$ 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

2643. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} \quad (a > 0).$

解 $a_n = a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)}$. 当 $a = 1$ 时，显然 $a_n = 1$ ，因而级数发散。当 $a \neq 1$ 时，考虑

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = (b + c \ln n) \ln a.$$

利用2615题的结果（对数判别法），即知：

(1) 当 $c = 0$ ， $b \ln a > 1$ ，即 $a^b > e$ 时，原级数收敛；而当 $c = 0$ ， $b \ln a \leq 1$ ，即 $a^b \leq e$ 时，原级数发散。

(2) 当 $c \neq 0$ ， $c \ln a > 0$ ，即 $a^c > 1$ 时，原级数收敛；而当 $c \neq 0$ ， $c \ln a < 0$ 即 $a^c < 1$ 时，原级数发散。

综上所述，仅当 $c = 0$ ， $a^b > e$ 及 $a^c > 1$ 时，原级数收敛。

$$2644. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \quad (a>0, b>0).$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}}{\frac{1}{n^{a+b}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b} \left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}} = \frac{1}{e^a \cdot e^b} \\ &= e^{-(a+b)}, \end{aligned}$$

故当 $a+b>1$ 时, 级数收敛; 而当 $a+b \leq 1$ 时, 级数发散.

$$2645. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}.$$

解 $a_n = \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+2)^n}{(n+3) \cdots (2n+2)} < \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \\ &= \left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}\right]^{-1} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad (\text{当 } n \rightarrow \\ & \quad +\infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

于是由2592题的结论知原级数收敛.

研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性, 其通项如下:

$$2646. u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}.$$

解 由于

$$0 < u_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{1} dx = n^{-\frac{3}{2}},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2647. u_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}.$$

解 由于

$$0 < u_n \leq \frac{1}{\int_0^n x dx} = \frac{2}{n^2},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2648. u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

解 由于

$$u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2(n+1)} > 0.$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

$$2649. u_n = \int_1^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

解 由于

$$0 < u_n \leq e^{-\sqrt{n}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ 是收敛的^{*)}，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

*) 事实上， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = 0$ ，利用

比较判别法即获证。

$$2650. u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx.$$

解 由于函数 $\sin^3 x$ 在 $(0, \frac{\pi}{n})$ ($n \geq 2$) 内是单调增加的，故有

$$0 \leq u_n \leq \frac{\sin^3 \frac{\pi}{n}}{1+0} \cdot \frac{\pi}{n} \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \quad (n \geq 2).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

$$2651. u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n \leq \frac{n \cdot n!}{n!(n+1) \cdots (2n)} = \frac{n}{(n+1) \cdots (2n)} \\ &\leq \frac{1}{(2n-1) \cdot n} \quad (\text{当 } n \text{ 足够大}), \end{aligned}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

$$2652. \quad u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^a}.$$

解 首先, 我们证明: 当 $\alpha > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

事实上,

$$0 < u_n \leq \frac{n \ln^2 n}{n^a} = \frac{\ln^2 n}{n^{a-1}},$$

取 $\delta > 0$ 使 $\alpha - 1 - \delta > 1$, 由于

$$\frac{\ln^2 n}{n^{a-1}} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1-\delta}}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n^{\delta}} = 0$, 故当 n 充分大时, 有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{a-1}} \leq \frac{C}{n^{\alpha-1-\delta}} \quad (C \text{ 为正的常数}).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1-\delta}}$ 收敛, 故当 $\alpha > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

其次, 我们证明: 当 $\alpha \leq 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

事实上, 当 n 充分大时, 有

$$u_n \geq \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n^2} = \frac{\ln n!}{n^2}.$$

因为当 $1 \leq r \leq n$ 时, $(n-r)(r-1) \geq 0$, 故有

$$r(n-r+1) \geq n.$$

令 $r=1$, 得 $1 \cdot n = n$;

$r=2$, 得 $2(n-1) \geq n$;

.....

$r=n$, 得 $n \cdot 1 = n \geq n$;

连乘得

$$(n!)^2 \geq n^n \quad \text{或} \quad n! \geq n^{\frac{n}{2}}.$$

利用上述不等式, 可得

$$u_n \geq \frac{\ln n^{\frac{n}{2}}}{n^2} = \frac{\ln n}{2n} > \frac{1}{n} > 0 \quad (\text{当 } n \geq n_0 \text{ 时}),$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用对应的级数来代替叙列 x_n ($n=1, 2, \dots$), 然后研究它们的收敛性, 设:

$$2653. \quad x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

$$\text{解} \quad x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 记 $x_0 = 0$, 故

$$x_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

2654. $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$

$$\begin{aligned} \text{解 } x_n - x_{n-1} &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \{ (\ln n)^2 - [\ln(n-1)]^2 \} \\ &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln \frac{n}{n-1} \cdot \ln [n(n-1)] \\ &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \left[\ln n^2 + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \left[2 \ln n - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= \frac{\ln n}{n} - \left\{ \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \right\} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \end{aligned}$$

考虑级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$. 由级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 的收敛

性可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 收敛, 于是

$$x_n = \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

2655. 假如

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad (b)^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!},$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!},$$

约需取级数的多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5} .

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) \text{ 余项 } R_N &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

欲精确到 10^{-5} , 只要 $\frac{1}{N} < 10^{-5}$, 即只要

$$N > 10^5 = 100000.$$

(b) 余项 $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$. 利用 74 题的不等式

$$k! > \left(\frac{k}{e} \right)^k \quad (k=1, 2, \dots),$$

于是当 $n \geq N+1$, 有

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{(n+1)!} &< 2^n \left(\frac{e}{n+1} \right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{2e}{n+1} \right)^n \leq \frac{1}{N+2} \left(\frac{2e}{N+2} \right)^N \end{aligned}$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

$$= \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2} \right)^{N+2} \cdot \left(\frac{2e}{N+2} \right)^{n-(N+1)}.$$

因此得

$$\begin{aligned} R_N &\leq \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2} \right)^{N+2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{2e}{N+2} \right)^{n-(N+1)} \\ &= \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2} \right)^{N+2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2e}{N+2} \right)^i. \end{aligned}$$

取 $N \geq 4$, 则 $\frac{2e}{N+2} < 1$, 此时又有

$$R_N \leq \frac{1}{2e} \left(\frac{2e}{N+2} \right)^{N+2} \frac{1}{1 - \frac{2e}{N+2}}.$$

取 $N=11$, 则有

$$R_N = \frac{1}{2e \times 13} \frac{1}{1 - \frac{2e}{13}} = \Delta_N.$$

利用对数对于 Δ_N 作数值计算, 有

$$\Delta_N \leq \frac{13}{15.126e} \left(\frac{2e}{13} \right)^{13} \approx 10^{-5.4221} < 10^{-5},$$

即此级数取 $N \geq 11$ 项求和就可保证精确到 10^{-5} .

(B) 余项 $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$. 仍用不等式

$$k! \geq \left(\frac{k}{e} \right)^k \quad (k=1, 2, \dots),$$

则有

$$\begin{aligned}
 R_N &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2n-1} \right)^{2n-1} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1} \right)^{2n-1} \\
 &= \left(\frac{e}{2N+1} \right)^{2N+1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1} \right)^{2l}.
 \end{aligned}$$

取 $N \geq 1$, 则 $\frac{e}{2N+1} < 1$, 故有

$$R_N < \left(\frac{e}{2N+1} \right)^{2N+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{e}{2N+1} \right)^2}.$$

今取 $N = 5$, 则有

$$R_N < \left(\frac{e}{11} \right)^{11} \cdot \frac{121}{113.614} \approx 10^{-6.6374} < 10^{-6},$$

即此级数取 $N \geq 5$ 项求和就可保证精确到 10^{-5} 。

§2. 变号级数收敛性的判别法

1° 级数的绝对收敛性 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$$

称为绝对收敛, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (2)$$

收敛, 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 绝对收敛级数的和与项相加的顺序无关.

要确定级数 (1) 的绝对收敛性, 只须把对于同号级数

收敛性的已知判别法应用于级数 (2) 就够了.

若级数 (1) 收敛, 而级数 (2) 发散, 则称级数 (1) 为条件收敛 (非绝对收敛). 条件收敛级数的各项顺序加以改变后可使其和等于任何数 (黎曼定理).

2° 莱布尼兹判别法 交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$$

($b_n \geq 0$) 收敛 (一般说来, 非绝对地), 若 (a) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n=1, 2, \cdots$) 和 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 在这种情形下, 对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

3° 亚伯耳判别法 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (3)$$

收敛, 若 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 2) 数 b_n ($n=1, 2, \cdots$) 形成一单调并有界的数列.

4° 迪里黑里判别法 级数 (3) 收敛若: 1) 部分和 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 是有界的; 2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时 b_n 单调地趋近于零.

2656. 证明: 可把非绝对收敛级数的各项不变更其顺序而分群组合起来使所得的新级数绝对收敛.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数. 利用哥西准则, 即知:

对于给定的 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, 存在 N_1 , 使对于任意自然数 m_1 , 有

$$|a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_1+m_1}| < \varepsilon_1;$$

对于给定的 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, 存在 N_2 (可取 $N_2 \geq N_1$), 使对于任意自然数 m_2 , 有

$$|a_{N_2+1} + \cdots + a_{N_2+m_2}| < \varepsilon_2;$$

.....

对于给定的 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 存在 N_k (可取 $N_k \geq N_{k-1}$), 使对于任意自然数 m_k , 有

$$|a_{N_k+1} + \cdots + a_{N_k+m_k}| < \varepsilon_k .$$

.....

$$\text{令 } A_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1},$$

$$A_1 = a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_{N_2},$$

.....

$$A_k = a_{N_{k-1}+1} + a_{N_{k-1}+2} + \cdots + a_{N_k},$$

.....

则有 $|A_k| < \varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ ($k=1, 2, \cdots$), 且 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 是原级数的各项不变更其顺序而分群组合起来所得的新级数. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

收敛, 故级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$ 收敛, 即级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收

敛，证毕。

2657. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，若 (a) 当 $n \rightarrow \infty$ 时，此级数的通项 a_n 趋于零；(b) 由组合已给级数的各项但不变更原有顺序所得的某一级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛；(B) 在项 $A_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i$ ($p_1 < p_2 < \dots$) 中相加项 a_i 的数目是有界的，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的。

证 设 A_n 中相加项的数目不超过某一固定的自然数 m ，即

$$p_{n+1} - p_n \leq m \quad (n=1, 2, \dots).$$

任给 $\varepsilon > 0$ ，考虑 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2m+1} > 0$ 。由 $a_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时)，故存在 N' ，使当 $n \geq N'$ 时，有

$$|a_n| < \varepsilon_1.$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的收敛性知，存在 $N_1 \geq N'$ ，使当 $n \geq N_1$ 及 p 为任意自然数时，有

$$|A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+p}| < \varepsilon_1.$$

今取 $N = p_{N_1}$ ，当 $n \geq N$ 时，对任意自然数 s ，考察 $\Delta_{n,s} = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+s}$ ，注意每一个 a_i 必属于某一个 A_k 。记 A_k 内各项 a_i 元素的集合为 \tilde{A}_k ，即知：当 $i < j$ 时，若 $a_i \in \tilde{A}_k$ ， $a_j \in \tilde{A}_l$ ，则必有 $k \leq l$ 。今在 $\Delta_{n,s}$ 中看各项，显然 $a_n \in \tilde{A}_{N_1+r}$ ($r \geq 0$)。再看以后各项，便

有

$$A_{n,s} = B + A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q} + B',$$

其中 $B = a_n + \cdots + a_{p_{N_1+r+1}} - 1$, $B' = a_{p_{N_1+r+q+1}} + \cdots + a_{n+s}$. 很明显, B 是 A_{N_1+r} 中一部分项之和, B' 是 $A_{N_1+r+q+1}$ 中一部分项之和, 于是 (注意 $n \geq N \geq N_1 \geq N'$)

$$|B| \leq (p_{N_1+r+1} - p_{N_1+r}) \varepsilon_1 \leq m \varepsilon_1,$$

$$|B'| \leq (p_{N_1+r+q+2} - p_{N_1+r+q+1}) \varepsilon_1 \leq m \varepsilon_1,$$

$$|A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| \leq \varepsilon_1,$$

从而 (当 $n \geq N$, s 为任何自然数)

$$\begin{aligned} |A_{n,s}| &\leq |B| + |A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| \\ &\quad + |B'| \leq (2m+1)\varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

根据哥西收敛准则即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证毕.

2658. 证明: 若将收敛级数的各项重新排列, 而使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置 (m 为预先给定的数), 则其和不变.

证 设原收敛级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 当然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 又记

重排出的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 再记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 N 项部分和

为 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$, 记 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的前 N 项部分和为 $\sigma_N = \sum_{n=1}^N b_n$.

当然有 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$. 今证 σ_N 的极限也存在, 且等于 S .

考察 σ_N 与 S_N 之差

$$\Delta_N = \sigma_N - S_N.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2m} > 0$, 则存在 N_1 , 使当 $n \geq N_1$

时, 有 $|a_n| < \varepsilon_1$. 今取

$$N \geq N_1 + 2m,$$

又记 S_i 内各 a_n 项元素集合为 \tilde{S}_i , 记 σ_i 内各 b_n 项元素集合为 $\tilde{\sigma}_i$, 则有

$$\Delta_N = \sum_{b_n \in \tilde{\sigma}_N} b_n - \sum_{a_n \in \tilde{S}_N} a_n.$$

今从 a_1 查起, 看 a_1, a_2, \dots 至 a_N , 注意每一个 a_i 被重排成 b_j 时, i 与 j 的标号差不超过 m . 因此, 对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j = a_i$. 反过来, 从 b_1 查起, 看 b_1, b_2, \dots 至 b_N , 对每一个 b_i 总可以在 a_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_j = b_i$. 但也可能且只有那种可能: 最后一段不超过 m 个元素的 a_i , 即 $a_N, a_{N-1}, \dots, a_{N-m}$ 之内若干个元素可能被迁到 b_N 之后, 从而在 σ_N 内找不到搬迁元素, 但个数 (设为 r 个) 不超过 m . 同样, 也有可能最后一段不超过 m 个元素的 b_i , 即 $b_N, b_{N-1}, \dots, b_{N-m}$ 之内若干个元素在 S_N 内找不到搬迁元素, 但个数 (设为 s 个) 不超过 m . 除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应. 于是,

$$|\Delta_N| = \left| \sum_{\substack{b_n \in \tilde{\sigma}_N \\ b_n \notin \tilde{S}_N}} b_n - \sum_{\substack{a_n \in \tilde{S}_N \\ a_n \notin \tilde{\sigma}_N}} a_n \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\substack{b_n \in \widetilde{\sigma}_N \\ b_n \notin \widetilde{S}_N}} |b_n| + \sum_{\substack{a_n \in \widetilde{S}_N \\ a_n \notin \widetilde{\sigma}_N}} |a_n| \\
&\leq s\varepsilon_1 + r\varepsilon_1 \leq m\varepsilon_1 + m\varepsilon_1 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

上式中 a_n 的下标 $n \geq N_1 + m > N_1$, 故 $|a_n| < \varepsilon$. 而 b_n 的下标 $n \geq N_1 + m$, 记住 b_n 由某 a_i 搬迁而来, 其下标 i 在 n 的前后距离不超过 m , 故此时 $i \geq N_1$, 因而此时 $|b_n| = |a_i| < \varepsilon_1$. 从而上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0,$$

也即有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S.$$

从而命题获证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和:

2659. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$.

解 $S_n = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}},$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} S_n &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{2n-3}{2^{n-1}} \\
&\quad + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n},
\end{aligned}$$

将上面两式相加, 得

$$\frac{3}{2} S_n = 1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{2}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-1}}$$

$$+(-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n}.$$

于是,

$$3S_n = 2 - 2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{2^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-2}}$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} \rightarrow \frac{2}{3}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{9}.$$

因此, 原级数收敛, 其和为 $\frac{2}{9}$.

2660. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots$.

解 显然该级数绝对收敛, 从而它是收敛的. 记其和为 S . 考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n} = \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-3}} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-2}} \right)$$

$$- \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{3n-1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}},
\end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{10}{7}.$$

2661. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

解 考虑部分和 S_m . 当 $m = 2n$ 时, 有

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= C + \ln 2n + \varepsilon_{2n} - 2 \cdot \frac{1}{2}(C + \ln n + \varepsilon_n) \quad *1 \\
&= \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n = \ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

于是得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2.$$

同样, 当 $m = 2n + 1$ 时, 也有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \ln 2.$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2,$$

即原级数收敛，其和为 $\ln 2$ 。

*) 利用146题的结果。

2662. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ ，求从已知级数把各项重排后所成级数：

$$(a) \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$(b) \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

的和。

解 (a) 考虑部分和 S_m 。当 $m=3n$ 时，有

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

记 $\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $l_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$
 $+ (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 则

$$l_{2n} = \sigma_{2n} - \sigma_n, \quad l_{4n} = \sigma_{4n} - \sigma_{2n}$$

且有

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sigma_{4n} - \frac{1}{2} \sigma_{2n} - \frac{1}{2} \sigma_n \\ &= (\sigma_{4n} - \sigma_{2n}) + \frac{1}{2} (\sigma_{2n} - \sigma_n) \\ &= l_{4n} + \frac{1}{2} l_{2n}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} l_{2n} = \ln 2$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2.$$

易证当 $m=3n+1$ 及 $m=3n+2$ 时, 有

$$S_{3n+1} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad S_{3n+2} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们与 S_{3n} 有相同的极限, 从而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{3}{2} \ln 2,$$

即原级数收敛, 其和为 $\frac{3}{2} \ln 2$.

(6) 部分和

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \\
&\quad - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) \\
&= \sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n - \frac{1}{2}\sigma_{2n} = \frac{1}{2}(\sigma_{2n} - \sigma_n) \\
&= \frac{1}{2}I_{2n},
\end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{1}{2} \ln 2$ ，同样有

$$S_{3n+1} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad S_{3n+2} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时，它们与 S_{3n} 有相同的极限，从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \ln 2,$$

即原级数收敛，其和为 $\frac{1}{2} \ln 2$ 。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的项重排，使它成发散的。

解 我们这样进行重排：先取两个正项，然后取一个负项，得

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \\ & + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots, (1) \end{aligned}$$

将上述重排后所得的级数 (1) 每相邻三项结合而得一个新级数，如果它发散，当然上述重排后所得的级数也发散。由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} > \frac{1}{\sqrt{4n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{4n-1}} > \frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} > \frac{2}{\sqrt{4n}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}}, \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ & > \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}} > 0 \quad (n=1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

发散, 从而, 重排后所得的级数 (1) 也发散.
研究变号级数的收敛性:

$$2664. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}.$$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数绝对收敛, 从而也是收敛的.

$$2665. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n.$$

解 $a_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

故原级数绝对收敛, 从而也是收敛的.

$$2666. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

解 将此级数每相邻三项组合得一新级数, 它是交错级数, 满足莱布尼兹判别法的两个条件, 因而它是收敛的. 利用2657题的结果, 即知原级数收敛. 显然此级数仅为条件收敛.

$$2667. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

解 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\ln^{100} n}{n}$ 单调下降趋于零, 且

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}$$

为有界的, 故按迪里黑里判别法即知原级数收敛.

2668. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

解 将通项改写为

$$(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = (-1)^n \frac{1}{2n} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}.$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$ 收敛. 下面证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 也收敛. 事实上, 部分和

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\cos 2n}{2n} - \sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2} \right]} \frac{2 \cos 4n}{4n} \\ &= S_N^{(1)} - S_N^{(2)}. \end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2n}$ 均收敛 (因为当 $k \rightarrow \infty$

时, $\frac{1}{2k}$ 单调趋于零, 且 $\left| \sum_{n=1}^k \cos 2n \right| = \left| \frac{\sin(2k+1) - \sin 1}{2 \sin 1} \right|$

$\leq \frac{1}{\sin 1}$, 故由迪里黑里判别法即获证), 记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 及 $S^{(2)}$, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, $S_N \rightarrow S^{(1)} - S^{(2)}$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛. 从而原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} \text{ 收敛.}$$

2669. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

解 $(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

显见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛, 故原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \text{ 收敛.}$$

2670. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

解 $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发

散, 故原级数发散.

$$2671. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}).$$

$$\text{解} \quad \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = \sin\left[n\pi\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]$$

$$= \sin n\pi\left[1 + \frac{k^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

$$= \sin\left[n\pi + \frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$= (-1)^n \sin\left[\frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$= (-1)^n \frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^2\pi}{2n}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛, 故原级数收敛.

$$2672. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$$

解 这级数首先出现三个负项, 之后出现五个正项, 如此下去, 若将这些相邻且具相同符号的几项合并成一项, 则所得的新级数为一交错级数:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k & \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} \right. \\ & \left. + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

容易证明不等式

$$\begin{aligned} \frac{2}{k+1} &< \underbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots}_{k \text{ 项}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{k^2+k} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}}_{(k+1) \text{ 项}} < \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

事实上, 开头 k 项的和小于 $k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$, 而后面 $k+1$ 项的和小于 $(k+1) \cdot \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k}$, 所以整个和数小于 $\frac{2}{k}$. 左面的不等式可由整个和数大于 $k \cdot \frac{1}{k^2+k} + (k+1) \cdot \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2}{k+1}$ 而得.

于是, 级数 (1) 的通项当 $k \rightarrow \infty$ 时趋于零, 并且它的绝对值单调减小, 由莱布尼兹判别法即知级数 (1) 收敛.

注意, 原级数的部分和恰好包含在级数 (1) 的某相邻两部分和之间, 由级数 (1) 的收敛性知此两相邻部分和趋于同一极限, 因此原级数部分和有极限, 从而原级数收敛.

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{(\sqrt{n})}}{n} \right|$ 发散, 故原级数仅为条件收敛.

2673. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 即通项不趋于零, 故级数发散.

2674. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) > 0,$$

则交错级数 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$ ($b_n > 0$) 收敛.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = A$, 我们取 $\varepsilon > 0$, 使得 $A - \varepsilon > 0$, 则存在自然数 N , 使当 $n \geq N$ 时, 有

$$A - \varepsilon < n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) < A + \varepsilon$$

或

$$1 < 1 + \frac{A - \varepsilon}{n} < \frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{A + \varepsilon}{n}.$$

因此当 $n \geq N$ 时, $b_n > b_{n+1}$, 即 b_n 单调下降.

下面证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 事实上, 利用 2606 题的结果即

知

$$b_n = o \left(\frac{1}{n^{A-\varepsilon}} \right).$$

例如, 取 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, 于是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $b_n \rightarrow 0$.

因此, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ 收敛.

研究下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

$$2675. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

解 当 $p < 0$ 时, 由于 $n^{-p} \rightarrow +\infty$, 故级数发散.

当 $p = 0$ 时, 由于 $n^{-p} = 1$, 故级数也发散.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于 $a_n > a_{n+1}$ 且 $a_n \rightarrow 0$ (其中 $a_n = \frac{1}{n^p}$), 故此交错级数收敛; 然当 $0 < p \leq 1$ 时,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 仅为条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \text{ 绝对收敛.}$$

$$2676. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}.$$

解 首先研究此级数当 p 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

且当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故当 $p > 1$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}} \text{ 绝对收敛.}$$

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

下面研究当 $0 < p \leq 1$ 时原级数的收敛性. 将通项改写成 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛, 而数列 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 为一单调上升且趋于 1 的数列, 故由亚伯耳判别法即知级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 收敛. 但因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 当 $0 < p \leq 1$

时发散, 故当 $0 < p \leq 1$ 时, 原级数仅为条件收敛.

$$2677. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right].$$

$$\text{解} \quad \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$$

考虑级数

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}, \quad (3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3p}}.$$

显然当 $p > 1$ 时, 级数 (1), (2), (3) 均绝对收敛, 故当 $p > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 (1) 条件收敛, 级数 (2) 及 (3) 均绝对收敛, 故当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时原级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 由于通项不趋于零, 故原级数发散.

最后, 设 $0 < p \leq \frac{1}{2}$. 令 m 是满足

$$mp \leq 1 < (m+1)p$$

的唯一正整数 (显然 $m \geq 2$)，我们有

$$\begin{aligned} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2p}} \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{4p}} + \cdots + (-1)^{m-1} \\ &\cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}} + O \left(\frac{1}{n^{(m+1)p}} \right). \end{aligned}$$

若 m 为偶数，则由于交错级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}$,

\cdots , $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)n}}{n^{(m-1)p}}$ 均收敛 (条件收敛)，级数

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{(m+1)p}}$ (绝对) 收敛，而级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2p}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{4p}} + \cdots + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n^{mp}} \right)$$

显然发散，故知原级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right]$ 发散；若

m 为奇数，则可类似地证明原级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right]$

也发散。

2678. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2^n} x}{n}.$

解 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2^n} x}{n}$. 考虑

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2} \sin x)^2}{\sqrt[n]{n}} \\ &= (\sqrt{2} \sin x)^2, \end{aligned}$$

故当 $\sqrt{2} \sin^2 x < 1$, 即 $|x - n\pi| < \frac{\pi}{4}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

当 $\sqrt{2} \sin^2 x = 1$, 即当 $|x - n\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, 它为条件收敛.

当 $\sqrt{2} \sin^2 x > 1$ 时, 例如可选取 α , 使 $\sqrt{2} \sin^2 x > \alpha > 1$.

当 n 充分大时, 有

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \alpha \text{ 或 } |a_n| \geq \alpha^n > 1,$$

上式表明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 并非趋于零, 故此时原级数发散.

2679. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$

解 当 x 为负整数时, 级数显然无意义.

当 x 不为负整数时, 此交错级数满足莱布尼兹判别法的条件, 故它是收敛的. 但因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ 发散, 故原级数当 x 不为负整数时仅为条件收敛.

2680. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}.$

解
$$\frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} = \frac{(-1)^n}{n^p \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^p}$$
$$= \frac{(-1)^n}{n^p} \left[1 - \frac{p \cdot (-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right).$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+2}}$ 绝对收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 通项不趋于零, 原级数显然发散.

2681.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} \left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right]^{-p} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} - \frac{p}{n^{\frac{p}{2}+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

故原级数当 $p > 2$ 时绝对收敛, 而当 $p \leq 0$ 时原级数显然发散. 下面我们再来研究当 $0 < p \leq 2$ 时原级数的收敛性.

当 $1 < p \leq 2$ 时, 由 (1) 式第一项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛, 而由第二项、第三项组成的级数显然收敛, 故此时原级数条件收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由第一项及第三项组成的级数收敛, 但由第二项组成的级数发散, 故此时原级数发散.

$$2682. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

$$\text{解} \quad \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left(1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right)^{-1}$$

$$= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left[1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \right]$$

$$= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$$

当 $2p > 1$ 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 由第二项及第三项所组成的级数均收敛, 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ 且 $\frac{1}{n^p}$ 单调减小, 又

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}},$$

故由迪里黑里判别法知它是收敛的. 从而当 $p > \frac{1}{2}$

时, 原级数收敛. 又因 $\left| \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \right| \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p} = \frac{1}{2n^p}$

$-\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^p}$, 且当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^p}$

收敛, 故当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| \sin \frac{n\pi}{4} \right|}{n^p}$ 发散, 从而此时原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级

数绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n^{2p}} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{2n} \geq 0,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n}$

发散, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ 发散. 再仿2677题

$0 < p \leq \frac{1}{2}$ 情形之证, 即易知原级数发散.

$$2683. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{100\sqrt{n}}.$$

解 通项为

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{100\sqrt{n}} \\ &= (-1)^n \frac{1}{100\sqrt{n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{100\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right). \end{aligned}$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$ 绝对收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{100\sqrt{n}}$ 条件收敛, 故原级数条件收敛.

$$2684. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n},$$

解 考虑绝对值组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{2} < 1,$$

故原级数绝对收敛.

$$2685. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2}} = e^0 = 1,$$

从而知通项 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时并不趋于零, 故原级数发散.

$$2686. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}.$$

解 由于 $\frac{1}{\ln n}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时单调下降趋于零, 又部分和

$$\left| \sum_{n=2}^n \sin \frac{n\pi}{12} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{24} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{12}}{2 \sin \frac{\pi}{24}} \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{12}}$$

有界, 故级数收敛.

但是

$$\left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right| \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{12}}{\ln n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n}$$

$$= \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n},$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛, 故级数

$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right|$ 发散, 从而, 原级数仅为条件收敛.

2687. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

解 记 $A_l = \{n | [\sqrt{n}] = l\}$ ($l=1, 2, \dots$), 显然 A_l 中的元素 n 满足

$$l^2 \leq n < (l+1)^2,$$

于是 A_l 中元素的个数为 $2l+1$. 考虑,

$$u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p},$$

则有

$$u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^l}{n^p} = (-1)^l v_l,$$

其中

$$v_l = \sum_{n \in A_l} \frac{1}{n^p}.$$

当 $p > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} v_l - v_{l+1} &= \sum_{s=0}^{2l} \frac{1}{(l^2+s)^p} - \sum_{s=0}^{2(l+1)} \frac{1}{[(l+1)^2+s]^p} \\ &= \sum_{s=0}^{2l} \left\{ \frac{1}{(l^2+s)^p} - \frac{1}{[(l+1)^2+s]^p} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 1]^p} \\
&= \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 2]^p} \\
&= \sum_{i=0}^{2l} \frac{[(l+1)^2 + s]^p - (l^2 + s)^p}{(l^2 + s)^p [(l+1)^2 + s]^p} \\
&= \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 1]^p} \\
&= \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 2]^p} .
\end{aligned}$$

考虑函数 $f(x) = x^r$ ($r > 1$)，当 $x > y > 0$ 时，由微分学中值公式，有

$$x^r - y^r = r\xi^{r-1} (x - y) \geq r y^{r-1} (x - y),$$

其中 $y < \xi < x$ 。

于是，令 $r = 2p$ ， $x = \sqrt{(l+1)^2 + s}$ ， $y = \sqrt{l^2 + s}$ ，

则当 $p > \frac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}
&[(l+1)^2 + s]^p - (l^2 + s)^p \\
&= (\sqrt{(l+1)^2 + s})^{2p} - (\sqrt{l^2 + s})^{2p} \\
&\geq 2p \cdot (\sqrt{l^2 + s})^{2p-1} \{ \sqrt{(l+1)^2 + s} - \sqrt{l^2 + s} \} \\
&= 2p (\sqrt{l^2 + s})^{2p-1} \cdot \frac{2l+1}{\sqrt{(l+1)^2 + s} + \sqrt{l^2 + s}} \\
&\geq \frac{2p l^{2p-1} (2l+1)}{2 \sqrt{l^2 + 4l + 1}},
\end{aligned}$$

从而当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} v_l - v_{l+1} &\geq \frac{pl^{2l-1}(2l+1)^2}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}} - \frac{2}{(l^2+4l+2)^p} \\ &\geq \frac{2l^{2l-1}\left(l^2+l+\frac{1}{4}\right)}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}} \\ &\quad \cdot \left[2p - \frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2l-1}\left(l^2+l+\frac{1}{4}\right)}\right]. \end{aligned}$$

由于 $2p > 1$, 而

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2l-1}\left(l^2+l+\frac{1}{4}\right)} = 1,$$

故当 l 充分大时, $v_l - v_{l+1} > 0$.

于是存在 l_0 , 使当 $l \geq l_0$ 时, v_l 是单调下降的叙列. 又当 $n \in A_l$, $p > 0$ 时有

$$\frac{1}{(l+1)^{2p}} < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{l^{2p}},$$

故

$$\frac{2l+1}{(l+1)^{2p}} \leq v_l \leq \frac{2l+1}{l^{2p}}.$$

上述不等式说明, 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, v_l 是单调下降且趋于零的叙列 (当 $l \rightarrow +\infty$), 从而知级数

$$\sum_{l=1}^{\infty} u_l = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l v_l$$

是一个收敛级数. 显然当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 仅为条件收敛. 当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 绝对收敛. 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 发散.

现在看原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. 记其部

分和为 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$, 又记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $\sigma_M = \sum_{n=1}^M u_n$.

那末任意一个部分和 S_N 均被包含在某相邻两个部分和 σ_M 与 σ_{M+1} 之间, 即有

$$|S_N - \sigma_M| \leq |\sigma_{M+1} - \sigma_M|.$$

注意, 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 而当 $p > 1$

时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 此时记其和为 σ , 则有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma.$$

因此,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma,$$

也即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有同样的收敛结论. 从而当 $\frac{1}{2} < p$

≤ 1 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛; 当 $p > 1$ 时绝对收

敛, 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散 (否则这时的 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛), 其中

当 $p=1$ 时就是 2672 题.

$$2688. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}.$$

解 记 $a_n = \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$. 为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性,

我们引进集合

$$A_k = \{n \mid [\ln n] = k\} \quad (k=1, 2, \dots),$$

那末集合 A_k 内的元素 n 具有性质

$$k \leq \ln n < k+1,$$

或写成

$$e^k \leq n < e \cdot e^k,$$

其个数 $p_k = [(e-1)e^k]$. 将 A_k 内的元素从小到大排列, 可记为

$$n_k, n_k+1, \dots, n_k+p_k-1.$$

现考虑

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{n \in A_k} a_n = \sum_{n \in A_k} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n} \\ &= (-1)^k \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} = (-1)^k v_k, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} v_k &= \sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} = \sum_{v=0}^{p_k-1} \frac{1}{n_k+v} \geq \sum_{v=0}^{p_k-1} \frac{1}{e \cdot e^k} \\ &= \frac{p_k}{e \cdot e^k} = \frac{1}{e \cdot e^k} [(e-1)e^k] \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{e \cdot e^k} - \frac{1}{2}(e-1)e^k = \frac{e-1}{2e}.$$

下面我们证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是发散的. 采用反证法, 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由哥西准则, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在

N_0 , 使当 $n \geq N_0$ 时, 对于一切自然数 p , 均有

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

今取 $\varepsilon = \frac{e-1}{4e} > 0$, 对于由此 ε 所找到的 N_0 ,

在 $n \geq N_0$ 中选一数 n_k , 此处 k 是适当大的一个自然数, 有 $n_k \in A_k$, 即

$$e^k \leq n_k < e \cdot e^k.$$

又取自然数 $p = p_k - 1$, 则此时应有

$$|a_{n_k} + a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_k+p_k-1}| < \varepsilon. \quad (1)$$

但另一方面却有

$$|a_{n_k} + a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_k+p_k-1}|$$

$$= |u_k| = v_k \geq \frac{e-1}{2e} = 2\varepsilon > \varepsilon. \quad (2)$$

(1)式与(2)式矛盾. 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2889. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$

解 设 $a_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$

当 $p \leq 0$ 时, 显然 $|a_n| \geq 1$, 故 a_n 不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$), 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

当 $0 < p \leq 2$ 时, 记 $a_n = (-1)^{n-1} b_n$, 其中

$$b_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right]^p.$$

由 $\left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p < 1$ 易知

$$b_n > \left[\frac{2n+1}{2(n+1)} \right]^p b_n = b_{n+1} \quad (n=1, 2, \cdots),$$

且有 (见第10题的不等式)

$$0 < b_n < \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)^p \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故由莱布尼兹判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但由 2598

题的结果知, 当 $0 < p \leq 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 于是, 当 $0 < p \leq 2$ 时, 原级数条件收敛.

当 $p > 2$ 时, 由 2598 题的结果知, 原级数绝对收敛.

2690.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}.$$

解 记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n \cdot \sin n^2$. 显然 $\{a_n\}$ 单调下降趋于零, 且

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [\cos n(n-1) - \cos n(n+1)] \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} [\cos 0 - \cos N(N+1)] \right| \leq 1, \end{aligned}$$

有界 ($N=1, 2, \dots$), 故由迪里黑里判别法知级数收敛.

$$2691. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2.$$

解 我们即将指出 $\sin n^2$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时并不趋于零, 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ 发散. 现用反证法, 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0,$$

于是, $\sin^2(n^2) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 由 $\sin^2(n^2) + \cos^2(n^2) = 1$ 知 $\cos^2(n^2) \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 由于

$$\begin{aligned} \sin(n+1)^2 &= \sin(n^2 + 2n + 1) \\ &= \sin n^2 \cos(2n+1) + \cos n^2 \sin(2n+1), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\cos^2(n^2) \sin^2(2n+1) \\ &= [\sin(n+1)^2 - \sin n^2 \cos(2n+1)]^2. \end{aligned}$$

让 $n \rightarrow \infty$, 注意 $\sin n^2 \rightarrow 0$, 于是, 由

$$\sin(n+1)^2 \rightarrow 0 \text{ 及 } \cos^2(n^2) \rightarrow 1,$$

便有 $\sin^2(2n+1) \rightarrow 0$, 因此 $\sin(2n+1) \rightarrow 0$. 同理可得 $\sin(2n-1) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$). 又从

$$\sin(2n+1) + \sin(2n-1) = 2\sin 2n \cos 1$$

知还有 $\sin 2n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 即有

$$\sin m \rightarrow 0 \quad (\text{当 } m \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

从而也有 $\sin^2 n \rightarrow 0$ 及 $\cos^2 n \rightarrow 1$, 但

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1,$$

或写成

$$\cos^2 n \sin^2 1 = [\sin(n+1) - \sin n \cos 1]^2.$$

让 $n \rightarrow \infty$, 于上式的两端取极限, 并注意到 $\sin^2 1 \neq 0$, $\cos^2 n \rightarrow 1$, 从而产生左端为 $\sin^2 1$ 而右端为零的矛盾. 因此, 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0$$

不真, 即原命题 $\sin n^2 \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 成立. 因

此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ 发散.

2692. 设

$$R(x) = \frac{a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \dots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q}$$

为有理函数, 式中 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ 及当 $x \geq n_0$ 时, $|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q| > 0$.

研究级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$

的绝对收敛性和条件收敛性.

解 首先考虑绝对收敛性.

当 $q - p > 1$ 即当 $q > p + 1$ 时, 由于

$$|R(n)| = \left| \frac{a_0 + a_1 n^{-1} + \dots + a_p n^{-p}}{b_0 n^{q-p} + b_1 n^{q-p-1} + \dots + b_q n^{-p}} \right|$$

$$\sim \frac{|a_0|}{|b_0| n^{q-p}},$$

而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 绝对收敛.

当 $q \leq p+1$ 时, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} |R(n)|$ 发散.

但当 $p < q$ 时, $(-1)^n R(n) \sim (-1)^n \frac{a_0}{b_0 n^{q-p}}$,

容易验证原级数符合莱布尼兹判别法的条件, 故当

$p < q \leq p+1$ 时, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 条件收敛.

当 $p \geq q$ 时, 显见 $R(n) \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级

数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性:

$$2693. \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \dots$$

解 当 $p > 1, q > 1$ 时, 显然级数绝对收敛.

当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 显然级数并非绝对收敛, 但由莱布尼兹判别法知级数收敛. 因此, 当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 级数条件收敛.

当 p, q 中有一个小于或等于零时, 由于通项不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$), 故级数发散.

$$2694. 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

解 当 $p > 1$ 时, 由于原级数是由绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ 交换项数重排而得来的, 因此它也是绝对收敛的. 下面我们再讨论条件收敛性.

当 $0 < p < 1$ 时, 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1}{(4n-3)^p} + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} \\
 &= \frac{1}{(4n)^p \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^p} + \frac{1}{(4n)^p \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^p} - \frac{1}{(2n)^p} \\
 &= \frac{1}{(4n)^p} \left[1 + \frac{3p}{4n} + 1 + \frac{p}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{(2n)^p} \\
 &= \frac{1}{2^p (2n)^p} \left[2 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{(2n)^p} \\
 &= \frac{1}{(2n)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - 1 \right) + \frac{4p}{(4n)^{p+1}} \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \tag{1}
 \end{aligned}$$

由第一项组成的级数发散到 $+\infty$, 而由其余各项分别组成的级数均收敛. 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 易证原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散 (这可用部分和作比较而得), 从而当 $0 < p < 1$ 时, 原级数发散.

当 $p = 1$ 时, (1) 式第一项为零, 而由第二项及第三项分别组成的级数显然收敛, 故当 $p = 1$ 时, 原级数收敛, 并且显然不是绝对收敛的, 即原级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

$$2695. \quad 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$$

解 易证原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散,

其中

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{(4n-3)^p} + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p} \\ &= \frac{1}{2^p(2n)^p} \left[2 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{(2n)^p} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^p} \\ &= \frac{1}{(2n)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - 1 \right) + \frac{1}{2^p} \left(\frac{p}{2^p} - \frac{p}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

当 $p > 1$ 时, 级数显然绝对收敛.

当 $0 < p < 1$ 时, 由 (1) 式第一项组成的级数发散, 而由 (1) 式第二项及第三项所分别组成的级数均收敛. 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 从而当 $0 < p < 1$ 时, 原级数发散.

当 $p = 1$ 时, 原级数条件收敛. 事实上, 此时 (1) 式中第一项及第二项均为零, 而由第三项所组成的级数收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 从而原级数收敛. 但级数

$$1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \dots$$

是发散的.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

$$2696. \quad 1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \dots$$

解 当 $p > 1$, $q > 1$ 时, 记 $\delta = \min(p, q) > 1$. 由于级数

$$1 + \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \dots \quad (1)$$

的前 N 项部分和 S_N 有

$$S_N \leq \sum_{k=1}^N \frac{2}{k^\delta} = 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\delta} < +\infty,$$

故 $\{S_N\}$ 单调上升且有界, 从而 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ 存在. 于是,

原级数当 $p > 1$, $q > 1$ 时绝对收敛.

当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 由于级数 (1) 的 S_N 有

$$S_N \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } N \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故原级数并不绝对收敛. 但当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 可考

虑级数 $(1 - \frac{2}{2^p}) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, 其中

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{(3k)^p} + \frac{1}{(3k+1)^p} - \frac{2}{(3k+2)^p} \\ &= \frac{1}{(3k)^p} \left[1 - \left(1 + \frac{2}{3k} \right)^{-p} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(3k+1)^p} \left[1 - \left(1 + \frac{2}{3k+1} \right)^{-p} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(3k)^p} \left[\frac{2p}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{(3k+1)^p} \left[\frac{2p}{3k+1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \\
&= \frac{2p}{(3k)^{p+1}} + \frac{2p}{(3k+1)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right) \\
&= \frac{4p}{(3k)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right).
\end{aligned}$$

因此, 显然 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛. 易证原级数与级数 $(1 - \frac{2}{2^p}) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 同时收敛或同时发散. 因而原级数当 $0 < p = q \leq 1$ 时条件收敛.

当 p, q 中有一个小于或等于零时, 原级数显然发散.

2697. 证明: 级数

$$(a) \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots,$$

$$(b) \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

在区间 $(0, \pi)$ 内不绝对收敛.

$$\begin{aligned}
\text{证 (a)} \quad \left| \frac{\sin nx}{n} \right| &\geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1 - \cos 2nx}{2n} \\
&= \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}.
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 发散到 $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2^n}$ 收敛 (这是因为 $\frac{1}{2^n}$

单调趋于零, 且 $\sum_{n=1}^N \cos 2nx$ 有界, 故由迪里黑里判别法即获证), 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n} \right|$$

在 $(0, \pi)$ 内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此, 原级数在 $(0, \pi)$ 内仅为条件收敛.

(6) 可用 (a) 的方法证明. 事实上, 由

$$\left| \frac{\cos nx}{n} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos 2nx}{2n}$$

即知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n} \right|$$

在 $(0, \pi)$ 内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此, 原级数在 $(0, \pi)$ 内仅为条件收敛.

2698. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

对全体参数 (p, x) 定出: (a) 绝对收敛域; (6) 非绝对收敛域.

解 当 $p > 1$ 时, 由于

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}, \quad \left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p} \quad (0 < x < \pi),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，故这两个级数当 $p > 1$ 时，对于 $(0, \pi)$ 内任一 x 值均绝对收敛。

当 $0 < p \leq 1$ 时，由于 $\frac{1}{n^p}$ 单调下降趋于零，且部分和 $\sum_{n=1}^N \cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^N \sin nx$ 均有界 ($0 < x < \pi$)，故由迪里黑里判别法知两级数均收敛。但绝对值组成的级数均发散。事实上，

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

$$\left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散到 $+\infty$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^p}$

当 $0 < p \leq 1$ 时收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos nx|}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0 < p \leq 1$ 时均发散。因此，当 $0 < p \leq 1$ 时，对于 $(0, \pi)$ 内任一 x 值，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛。

当 $p \leq 0$ 时，两级数显然发散。

总之，当 $0 < x < \pi$ 时，两级数的 (a) 绝对收敛域为 $p > 1$ ；(b) 条件收敛域为 $0 < p \leq 1$ 。

2699. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}$$

定出: (a) 绝对收敛域; (6) 条件收敛域.

解 记 $a_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}$. 为研究级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 的绝对收敛性, 可考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中 $u_n = |(-1)^{n-1} a_n| = a_n$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n+1+p} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right)^q \\ &= \left(1 - \frac{p}{n+1+p} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^q \\ &= \left[1 - \frac{p}{n} + \frac{p(p+1)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \\ &\quad \cdot \left[1 + \frac{q}{n} + \frac{q(q-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \\ &= 1 + \frac{q-p}{n} + \Delta_n, \end{aligned}$$

其中 $\Delta_n = \left[\frac{1}{2}q(q-1) - pq + p(p+1) \right] \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$,

故由高斯判别法知: 当 $q > p+1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 从而原级数绝对收敛. 当然 $p = -1, -2, \dots$ 时原级数也绝对收敛. 当 $q \leq p+1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 从而原级

数并不绝对收敛. 但当 $p < q \leq p+1$ 时原级数是条件收敛的. 因为当 n 足够大时, 易见 $a_n > a_{n+1}$, 即 a_n 单调下降. 记 $q = p + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, 则

$$a_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^{p+\varepsilon}},$$

取对数, 有

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{p}{k}\right) - (p+\varepsilon) \ln n \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{p}{k} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^2}\right) - (p+\varepsilon) \ln n \\ &= p \ln n + pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - p \ln n - \varepsilon \ln n \\ &= pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - \varepsilon \ln n \rightarrow -\infty \quad (\text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

其中 r 及 A_1 为某些常数, 从而知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛. 因此, 当 $p < q \leq p+1$ 时, 原级数条件收敛.

当 $q = p$ 时, 有

$$\ln a_n = pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow pr + A_1 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

也即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{pr+A_1} \neq 0$, 原级数发散.

当 $q < p$ 时, 对于足够大的 n 有 $a_n < a_{n+1}$, 可见通项也不趋于零, 故原级数也发散.

总之, (a) 级数的绝对收敛域为 $q > p+1$,

(6) 级数的条件收敛域为 $p < q \leq p + 1$.

2700. 研究级数

$$\sum_{n=1}^m \binom{m}{n}$$

的收敛性, 其中 $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$

解 记 $a_n = \binom{m}{n}$, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \left| \frac{n+1}{m-n} \right| \\ &= \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left[1 + \frac{m}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \right| \\ &= 1 + \frac{m+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故由高斯判别法知: 当 $m+1 > 1$ 即当 $m > 0$ 时, 级数绝对收敛. 当 $m < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 至于当 $m = 0$ 时, 级数每一项为零, 因此, 级数显然绝对收敛.

下面我们证明: 当 $-1 < m < 0$ 时, 级数收敛, 从而知级数条件收敛. 事实上, 当 n 足够大之后, 易

见 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{m}{n}$ 为交错级数. 又因 $-1 < m < 0$, 故

$\left| \frac{m-n}{n+1} \right| < 1$, 它等价于 $|a_{n+1}| < |a_n|$, 这表明级数

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 的通项的绝对值是单调减少的. 现在再证明

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. 为此, 取对数, 有

$$\begin{aligned} \ln |a_n| &= \ln \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \right| \\ &= \ln \left| \left(1 - \frac{m+1}{1}\right) \left(1 - \frac{m+1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right). \end{aligned}$$

由于当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right) / \left(-\frac{m+1}{k}\right) \rightarrow 1$,

而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散致 $+\infty$, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right)$ 发散到 $-\infty$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. 由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

当 $m \leq -1$ 时, 由于级数的通项不趋于零, 故级数发散.

总之, 当 $m \geq 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ 绝对收敛; 当 $-1 < m < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ 条件收敛.

2701. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

則可否断定級數 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收斂？

解 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正項級數，則由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂可断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收斂，但当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不一定都是正項級數時，則由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收斂性不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收斂。例如，級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

是收斂的，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1,$$

但級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$$

却是發散的。事實上，它是由收斂級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及發散級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 相加而得的，故它是發散的。

2702. 設 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 為非絕對收斂的級數及

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| + a_i}{2}, \quad N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| - a_i}{2},$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$.

证 首先注意, 非绝对收敛即条件收敛. 若级数发散, 本命题不一定成立. 例如, 取 $a_i = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 0$; 若 $a_i = 1$ (当 $i = 1 \pmod{2}$ 时) 或 $a_i = -\frac{1}{2}$ (当 $i = 0 \pmod{2}$ 时), 此时将有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = \frac{1}{2}$, 等等.

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, 有

$$\frac{N_n}{P_n} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i| - \sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n a_i} = \frac{1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}} .$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|} = 0 ,$$

从而即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1.$$

2703. 证明: 对于每一个 $p > 0$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和是在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

证 首先, 由于此级数的前 $2n$ 项的和

$$\begin{aligned} S_{2n} = & \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \cdots \\ & + \left[\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right] \end{aligned}$$

中每一个括号内的数大于零, 故 $\{S_{2n}\}$ 是一个单调上升的数列. 又因

$$\begin{aligned} S_{2n} = & 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) - \left(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p}\right) - \cdots \\ & - \left[\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p}\right] - \frac{1}{(2n)^p} < 1, \end{aligned}$$

故 $\{S_{2n}\}$ 是以 1 为上界的数列. 从而知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在且不超过 1.

由于此级数当 $p > 0$ 时是收敛的, 故对于数列 $\{S_{2n}\}$, 它的极限与级数的和相等, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \leq 1 \quad (p > 0)$$

(对于 $p = 1$, 此级数的和为 $\ln 2$).

其次，我们证明此和不小于 $\frac{1}{2}$ 。仍考虑前 $2n$ 项的部分和 S_{2n} ，则有 $S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \tilde{S}_{2n}$ ，其中

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{2n} &= \sum_{k=2}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^p} - \frac{1}{(2k)^p} \right] \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},\end{aligned}$$

这里 $0 < \theta_k < 1$ ($k=2, 3, \dots, n$)。由于 $p > 0$ 以及

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}} \geq \frac{1}{(2k)^{p+1}} \quad (k=2, 3, \dots),$$

即得

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{2n} &\geq \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k)^{p+1}} = \frac{p}{2^{p+1}} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{p+1}} \\ &\geq \frac{p}{2^{p+1}} \left[\int_2^n \frac{dx}{x^{p+1}} + \frac{1}{n^{p+1}} \right] \\ &= \frac{1}{2^{p+1}} \left[-\frac{1}{p x^p} \Big|_2^n + \frac{1}{n^{p+1}} \right] \\ &= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} + \frac{p}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^{p+1}} \\ &= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2p+1}} + A_n,\end{aligned}$$

此处

$$\Delta_n = \frac{-1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^p}\right) \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)}.$$

于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_0 , 使当 $n \geq N_0$ 时, 有 $|\Delta_n| < \varepsilon$. 这时有

$$S_{2^k} = 1 - \frac{1}{2^p} + \tilde{S}_{2^k} \geq 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} - \varepsilon.$$

但当 $p > 0$ 时,

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2},$$

这是因为

$$2^p + \frac{1}{2^p} > 2,$$

故得

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} > \frac{2}{2^p} \text{ 或 } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2^p}.$$

从而

$$S_{2^k} > \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

故收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^k} \geq \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得 $S \geq \frac{1}{2}$. 综上所述,

$$\frac{1}{2} \leq S \leq 1.$$

2704. 证明: 若把级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

的各项重新安排，而使挨次 p 个正项的一组与挨次 q 个负项的一组相交替，则新级数的和为

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

证 按题意，我们欲证

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q} \\ & + \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \dots \\ & = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}. \end{aligned} \quad (1)$$

首先，我们有

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n,$$

其中 C 为尤拉常数，而 ε_n 为无穷小，由此即得

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} H_m = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \varepsilon_m,$$

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} = H_{2k} - \frac{1}{2} H_k$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln k + \frac{C}{2} + \varepsilon_{2k} - \frac{1}{2} \varepsilon_k.$$

于是，若把级数(1)的 p 项或 q 项的数串组合起来，考虑

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{2(n-1)q} + \frac{1}{2(n-1)p+1} \\
& + \cdots + \frac{1}{2np-1} \\
& = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2np}{2(n-1)q} + \alpha_n \\
& = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \alpha'_n,
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_n \rightarrow 0$, $\alpha'_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$) ; 又因

$S_{2n+1} = S_{2n} + \beta_n$, 其中 $\beta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \ln 2. \text{ 从而级数 (1)}$$

的和为 $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

2705. 证明: 若将调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

之项的符号改变使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项 ($p \neq q$), 但不变更原来的顺序, 则此级数始终是发散的. 仅当 $p = q$ 时为收敛的.

证 若 $p \neq q$, 不妨设 $p > q$, 记

$$\begin{aligned}
a_k = & \frac{1}{(p+q)k+1} + \cdots + \frac{1}{(p+q)k+p} \\
& - \frac{1}{(p+q)k+p+1} - \cdots - \frac{1}{(p+q)k+p+q}.
\end{aligned}$$

由于其中正项的项数比负数的项数为多, 且所有正项

中任一项均比任一负项的绝对值为大, 故有

$$a_k > \frac{1}{(p+q)k+1} > 0 \quad (k=1, 2, \dots).$$

但 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散, 故 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 发散, 从而比较一下即知所得级数发散 (若 $p < q$ 同理可证).

若 $p = q$, 记

$$b_k = \frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + \dots + \frac{1}{kp+p} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

考虑 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$. 显然 $b_k > 0$, $b_k > b_{k+1}$ ($k=0, 1, 2, \dots$), 且 $b_k \rightarrow 0$ (当 $k \rightarrow \infty$ 时), 故由莱布尼兹判别法知级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ 收敛. 易见所得级数与级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ 同时收敛或同时发散. 因此, 当 $p = q$ 时, 所得级数收敛.

§3. 级数的运算

二级数的和与积 我们定义:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n);$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

式中 $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛，则等式 (a) 非仅有形式上的意义，而等式 (6) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛，并且其中最少有一个是绝对收敛的，则也有同样的意义。

2706. 若两个级数，(a) 一个收敛，而另一个发散；(6) 两个级数都发散，问这两个级数的和可以说成什么？

解 (a) 一定发散。因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，如果其和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛，得出矛盾。于是，此时两级数的和一定发散。

(6) 可为收敛，可为发散。例如：

(1) 设 $a_n = (-1)^n$ ， $b_n = (-1)^{n+1}$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，但 $c_n = 0$ ，故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，

(2) 设 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ ，则 $c_n = \frac{2}{n}$ 。显见，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

均发散。

2707. 求二级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right].$$

解 两级数显然是收敛的，因此，它们的和也是收敛的。逐项相加，即可求得两级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{4}{3^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

求下列级数的和：

$$2708. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right].$$

解 此级数是由两收敛级数逐项相加而得的，因此它是收敛的，且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \frac{3}{4}.$$

$$2709. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$$

解 原级数显然绝对收敛，记其和为 S ，则有

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1.$$

设将 $n=0, 1, 2, \dots$ 分成三类：

$$A_1 = \{n | n=3k, k=0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_2 = \{n | n=3k+1, k=0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_3 = \{n | n=3k+2, k=0, 1, 2, \dots\},$$

则

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} &= \sum_{n \in A_1} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} \\
 &+ \sum_{n \in A_2} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} + \sum_{n \in A_3} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi + \frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}} \\
 &= \left[1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2^2} \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3} \right)^k \\
 &= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7},
 \end{aligned}$$

以上计算是合理的，因为上述三个级数均绝对收敛，

故其和为 $\frac{5}{7}$ ，从而知原级数的和为

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1 \\
 &= \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}.
 \end{aligned}$$

$$2710. \sum_{n=0}^{\infty} x^{\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (|xy| < 1).$$

解 设将 $n=0, 1, 2, \dots$ 分成二类：

$$A_1 = \{n \mid n=2k, k=0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_2 = \{n | n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots\},$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\binom{n}{2}} y^{\binom{n+1}{2}} &= \sum_{n \in A_1} x^{\binom{n}{2}} y^{\binom{n+1}{2}} \\ &\quad + \sum_{n \in A_2} x^{\binom{n}{2}} y^{\binom{n+1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^{k+1}. \end{aligned}$$

显然上式右端两级数当 $|xy| < 1$ 时绝对收敛, 故原级数收敛, 且其和为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\binom{n}{2}} y^{\binom{n+1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \\ &= (1+y) \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}. \end{aligned}$$

2711. 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

证 此两级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛, 其中

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n!},$$

故可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!} \right] \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \cdot \frac{n!}{i! (n-i)!} \\
&= \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0 \quad (n=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

从而知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

当然, 由 e 的定义知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \text{ 及 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1},$$

从而也就可以直接计算得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e \cdot e^{-1} = 1.$$

2712. 证明:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n \quad (|q| < 1).$$

证 由 $|q| < 1$ 知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对收敛, 故可写成

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

其中

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{i=0}^n q^i \cdot q^{n-i} = q^n \cdot \sum_{i=0}^n 1 = (n+1) q^n \quad (n=0, \\
&1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

因此,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n.$$

2713. 证明: 收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散级数.

证 如果此级数的平方收敛, 则可写其积为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right). \end{aligned}$$

由于括号中的每一项都大于 $\frac{1}{n}^{*})$, 故 $|c_n| > 1$, 这与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛相矛盾. 因此, 级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2$ 发散.

*) 只要证 $k(n-k+1) < n^2$ 或 $n^2 - nk + k^2 - k > 0$.

由于

$$n^2 - nk + k^2 - k = \left(n - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2 - 4k}{4},$$

故只要证 $3k^2 - 4k > 0$. 但 $3k^2 - 4k = 3k\left(k - \frac{4}{3}\right)$, 可见对于 $k = 2, 3, \dots$ 上式成立. 至于当 $k = 1$ 时, 显然有 $1 \cdot (n - 1 + 1) = n \leq n^2$ 或 $\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. 因而不等式 $k(n - k + 1) < n^2$ 成立.

2714. 证明: 下面二级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0) \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta > 0)$$

的积当 $\alpha + \beta > 1$ 时是收敛级数, 而当 $\alpha + \beta < 1$ 时是发散级数.

证 记

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \end{aligned}$$

按乘法法则应有

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{(-1)^{i-1}}{i^{\alpha}} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i+1)^{\beta}} \right] \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i+j=n+1}} \frac{1}{i^{\alpha} j^{\beta}} = (-1)^{n-1} d_n, \end{aligned}$$

其中

$$d_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \quad (n=1, 2, \dots).$$

(1) 当 $\alpha + \beta \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} d_n &\geq \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{(n-i+1)^\beta} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha} \sum_{\frac{n}{2} < j \leq n} \frac{1}{j^\beta} \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha} \int_{\frac{n}{2}}^n \frac{dt}{t^\beta} \\ &= 2^\alpha \cdot \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\beta}}\right) n^{1-(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

于是, 当 $\alpha + \beta < 1$ 时, $d_n \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时); 当 $\alpha + \beta = 1$ 时, $d_n \geq 2^\alpha \cdot \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\beta}}\right) > 0$, 即当 $\alpha + \beta \leq 1$ 时, d_n 不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而知

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} d_n$$

为发散级数.

(2) 当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} + \sum_{\frac{n}{2} < i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\ &= \sum_1 + \sum_2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\sum_1 &= \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\
&\leq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^\beta} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha} \\
&\leq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^\beta} \left(1 + \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^\alpha}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + O\left(n^{-\beta} \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^\alpha}\right) \\
&= O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}),
\end{aligned}$$

同理有

$$\sum_2 \leq O(n^{-\alpha}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}).$$

由于 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1-(\alpha+\beta) < 0$, 故有 d_n 趋于零:

$$\begin{aligned}
d_n &\leq O(n^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}) \rightarrow 0 \\
&\quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).
\end{aligned}$$

记 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和为

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

考虑原两级数的部分和

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^\beta}.$$

今考察下列差数

$$\Delta_n = A_n B_n - S_n = \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right) - S_n \\
& = \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j^\beta} \right) \\
& \quad - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta} \\
& = \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j^\beta} \right) \\
& \quad - \sum_{\substack{2 \leq i+j \leq n+1 \\ 1 \leq i, j \leq n}} \left(\frac{(-1)^i}{i^\alpha} \right) \left(\frac{(-1)^j}{j^\beta} \right) \\
& = \sum_{s=1}^{2n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i+j=s+1}} \frac{(-1)^{s+1}}{i^\alpha j^\beta} - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{(-1)^{k-1}}{i^\alpha j^\beta} \\
& = \sum_{s=n+1}^{2n-1} (-1)^{s-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i+j=s+1}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta}.
\end{aligned}$$

为估计上述差数各项，可看下列乘法表（图5.1）。 $A_n B_n$ 表示下列乘法表正方形各交点上乘积的全部和，而 S_n 表示下列乘法表对角线左上角各交点上乘积项（圆点号处的乘积项）的总和。于是，剩下的差数实指下列乘法表对角线的右下部分各交点处乘积项（打×号处的乘积项）的总和。

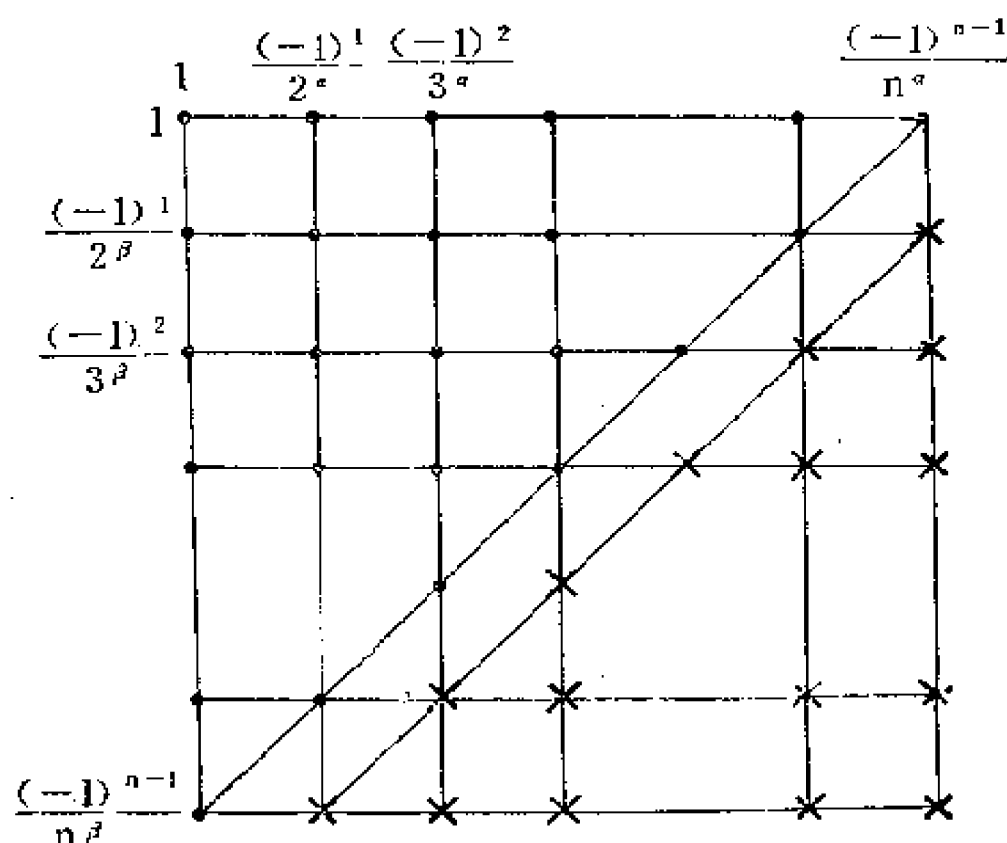


图 5.1

于是有

$$\begin{aligned}
 \Delta_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \left[\frac{(-1)^1}{2^\alpha} + \frac{(-1)^2}{3^\alpha} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right] + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^\beta} \\
 &\quad \cdot \left[\frac{(-1)^2}{3^\alpha} + \frac{(-1)^3}{4^\alpha} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right] \\
 &\quad + \dots + \frac{(-1)^1}{2^\beta} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right] \\
 &= (-1)^n \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(n-1)^\beta} \left(\frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right) \\ + \cdots + \frac{1}{2^\beta} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) \} .$$

因此得

$$\begin{aligned} |\Delta_n| &= \frac{1}{n^\beta} \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \\ &+ \frac{1}{(n-1)^\beta} \left(\frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \right) \\ &+ \cdots + \frac{1}{2^\beta} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) \\ &\leq \frac{1}{n^\beta} \cdot \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(n-1)^\beta} \cdot \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \\ &= \sum_{\substack{i+j=n+2 \\ 2 \leq i, j \leq n}} \frac{1}{j^\beta i^\alpha} \leq \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n+1 \\ i+j=n+2}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta} \\ &= d_{n+1} . \end{aligned}$$

由前已证：当 $\alpha + \beta > 1$ 时， $d_n \rightarrow 0$ （当 $n \rightarrow \infty$ 时），故有 $\Delta_n \rightarrow 0$ （当 $n \rightarrow \infty$ 时），于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n B_n - \Delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right), \end{aligned}$$

其中右端两级数的收敛性是由 $\alpha > 0$ ， $\beta > 0$ ，按莱布尼兹判别法获得的。于是，当 $\alpha + \beta > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ （ $\alpha > 0$ ）与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}$ （ $\beta > 0$ ）

的积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为收敛级数.

2715. 验证下面二发散级数

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ 和 } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的积是绝对收敛级数.

证 记 $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

其中

$$u_1 = 1, \quad u_2 = -\frac{3}{2}, \quad u_3 = -\left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad \dots, \quad u_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad (n=2, 3, \dots),$$

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 2 + \frac{1}{2^2}, \quad v_3 = \frac{3}{2} \left(2^2 + \frac{1}{2^3}\right), \quad \dots, \\ v_m = \left(\frac{3}{2}\right)^{m-2} \left(2^{m-1} + \frac{1}{2^m}\right) \quad (m=2, 3, \dots).$$

因此 $c_1 = u_1 v_1 = 1$. 一般地, 在

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

中, 按乘积定义有

$$\begin{aligned}
c_n &= u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1 \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \\
&\quad \cdot \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \cdots + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right] \\
&\quad \cdot \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[\left(2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \cdots - 2 - 2^0\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[\left(2^{n-1} - \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \right] \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{3}{2^n} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛。

§4. 函数项级数

1° 收敛域 使函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (1)$$

收敛的 x 值的总体 X 叫做此级数的收敛域，而函数

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (x \in X)$$

称为级数的和。

2° 一致收敛性 对于函数叙列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

如果：1) 存在有极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (a < x < b);$$

2) 对于任何的数 $\varepsilon > 0$ 可以确定 $N = N(\varepsilon)$ ，使得当 $n > N$ 和 $a < x < b$ 时，

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

成立，则称这函数叙列在区间 (a, b) 内为一致收敛。此种情形写： $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 。

若函数项级数(1)的部分和叙列：

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

在区间 (a, b) 内一致收敛，则称(1)在此已知区间内为一致收敛。

3° 哥西判别准则 级数(1)在已知区间 (a, b) 内一致收敛的充分而且必要的条件为：对于每一个 $\varepsilon > 0$ ，有数 $N =$

$N(\varepsilon)$ 存在, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \varepsilon \quad (a < x < b)$$

成立.

4° 外耳什特拉斯判别法 对于级数 (1), 若有收敛的数项级数

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots \quad (2)$$

存在, 使对于 $a < x < b$ 下列不等式都成立

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则级数 (1) 在区间 (a, b) 内绝对并一致收敛.

5° 亚伯耳判别法 如果: 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛; 2) 函数 $b_n(x) (n = 1, 2, \cdots)$ 全体是有界的并对每一个 x 形成一单调的叙列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \quad (3)$$

于区间 (a, b) 内一致收敛.

6° 迪里黑里判别法 如果 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的; 2) 叙列 $b_n(x) (n = 1, 2, \cdots)$ 对于每一个 x 都是单调的, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时在 (a, b) 内一致地趋于零, 则级数 (3) 在区间 (a, b) 内一致收敛.

7° 函数项级数的性质 (a) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

(6) 若函数项级数 (1) 在区间 (a, b) 内一致收敛且有有穷的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = A_n (n = 1, 2, \cdots)$, 则 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛,

2) 下之等式成立:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \right\}.$$

(H) 若收敛级数(1)的各项当 $a < x < b$ 时皆可微分并且导函数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛, 则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

(I) 若级数(1)的各项连续, 并且此级数在有穷区间 (a, b) 内一致收敛, 则

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (4)$$

一般说来, 若当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\int_a^b R_n(x) dx \rightarrow 0$, 则公式(4)

为真, 这里 $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. 这个最后的条件对于积分的

限是无穷大的时候也适合.

定出下列函数项级数的(绝对的和条件的)收敛域.

2716. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$

解 令 $\frac{1}{x} = y$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n y^n.$$

显然上式右端级数的收敛半径为 1. 因此, 仅当

$|y| = \left| \frac{1}{x} \right| < 1$ 即 $|x| > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

$$2717. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^n}{2n-1} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \right|} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ 即 $(1-x)^2 < (1+x)^2$ 或 $x > 0$ 时, 级数绝对收敛.

当 $x = 0$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, 显见它为条件收敛. 当 $x < 0$ 时, 原级数通项不趋于零, 故发散.

$$2718. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{x}{2x+1} \right| < 1$ 即 $x^2 < 4x^2 + 4x + 1$ 或

$$(3x+1)(x+1) > 0 \quad (1)$$

时, 级数绝对收敛, 解不等式(1), 得

$$x > -\frac{1}{3} \text{ 或 } x < -1,$$

即为所求的绝对收敛域。当 $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = -1$ 时，原级数通项不趋于零，故发散。

$$2719. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1$ 时，级数绝对收敛。解此不等式：

$$4x^2 < 1 + 2x^2 + x^4, \quad (x^2 - 1)^2 > 0,$$

即 $|x| \neq 1$ 。于是，当 $|x| \neq 1$ 时，级数绝对收敛。

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时，原级数为 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

由 2689 题的结果知它是条件收敛的。

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时，原级数为 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \text{ 仍由问题}$$

的结果知它是发散的。

$$2720. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n}}{\frac{(n+1)3^{2n+2}}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3^2(n+1)} = \frac{2}{9},$$

故仅当 $|x(1-x)| < \frac{2}{9}$ 时, 级数绝对收敛. 解此不等式:

$$-\frac{2}{9} < x(1-x) < \frac{2}{9}.$$

于是, x 的值应为

$$x^2 - x - \frac{2}{9} < 0 \text{ 及 } x^2 - x + \frac{2}{9} > 0$$

的公共部分, 也即

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{6} \text{ 及 } x > \frac{2}{3} \text{ 或 } x < \frac{1}{3}$$

的公共部分, 合并得

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3} \text{ 及 } \frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6},$$

此即级数的绝对收敛域.

当在此二区间的端点时, 级数显然发散.

2721.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

故仅当 $|\sin x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数绝对收敛. 解之, 得

$$|x - k\pi| < \frac{\pi}{6} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $|x - k\pi| = \frac{\pi}{6}$ 时, 由绝对值组成的级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ 它是收敛的.}$$

因此, 当 $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 级数绝对收敛.

$$2722. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}.$$

解 当 $p > 1$ 及 $x \neq k$ ($k = -1, -2, \dots$) 时, 级数显然绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 及 $x \neq k$ ($k = -1, -2, \dots$) 时, 级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 级数发散.

$$2723. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \quad (q > 0; 0 < x < \pi).$$

解 由于

$$\frac{|\sin nx|}{2n^{q-p}} \leq \left| \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \right| \leq \frac{1}{n^{q-p}},$$

故当 $q - p > 1$ 即 $q > p + 1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $q \leq p + 1$ 时, 由绝对值组成的级数发散 (理由可参看 2698 题的题解).

当 $p < q \leq p + 1$ 时, 由于对 $0 < x < \pi$ 内任一

固定的 x , $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ 有界, 且

$$\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}} \longrightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故级数收敛.

当 $q \leq p$ 时, 级数显然发散.

总之, 当 $q > p+1$ 时, 级数绝对收敛, 而当 $p < q \leq p+1$ 时, 级数条件收敛.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (拉伯耳特级数).

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (\text{A}) \quad \text{与} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad (\text{B}).$$

当 $|x| < 1$ 时, 级数 (B) 绝对收敛. 根据亚伯耳判别法, 以单调递减且有下界的因子 $\frac{1}{1-x^{2^n}}$ 乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2^n}} \quad (\text{B})$$

也收敛, 且为绝对收敛.

同理, 再以单调递减且有界的因子 x^n 乘级数 (B) 的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$$

仍然收敛, 且为绝对收敛. 由于

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1-x^{2^n}} + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^n}},$$

故原级数当 $|x| < 1$ 时绝对收敛.

当 $|x| = 1$ 时, 级数(A)显然无意义.

当 $|x| > 1$ 时, 级数(B)显然发散. 下证级数(A)也发散. 若不然, 当 $|x| > 1$ 时, 由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛, 再根据亚伯耳判别法, 我们就会推出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \text{ 也收敛. 从而会得出}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

也收敛, 这是错误的. 因此, 当 $|x| > 1$ 时, 级数(A)发散.

2725. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n.$

解 记 $a_n = \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n = x^n \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$, 则当 $|x| > 1$ 时, 显然 $a_n \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数发散. 当 $|x| = 1$ 时, $|a_n| \rightarrow e^{\pm 1} \neq 0$ (当 $n \rightarrow \infty$, $x = \pm 1$ 时), 故级数也发散. 当 $|x| < 1$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (|x| \cdot \left| 1 + \frac{x}{n} \right|) = |x| < 1,$$

故级数绝对收敛.

$$2726. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2^n}}.$$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{1+x^{2^n}}$, 则当 $|x| < 1$ 时, 有 $|a_n| \leq |x|^n$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 收敛, 故当 $|x| < 1$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $|x| = 1$ 时, $|a_n| = \frac{1}{2}$, 它不趋于零, 故原级数发散.

当 $|x| > 1$ 时, 原级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2^n}}$.

由于 $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, 再根据上面的讨论, 故原级数绝对收敛.

总之, 当 $|x| \neq 1$ 时, 原级数绝对收敛.

$$2727. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}.$$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$, 则当 $|x| < 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|} = |x| < 1,$$

故级数绝对收敛.

当 $|x| > 1$ 时, 级数可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}, \quad (1)$$

其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 当 $|x| > 1$ 即 $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ 时绝对收敛. 与 $|x| < 1$ 的情况一样, 得知级数 (1) 当 $|x| > 1$ 时绝对收敛.

当 $x = -1$ 时, 通项无意义. 但当 $x = 1$ 时, 原级数的通项 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 显然级数收敛.

总之, 当 $x \neq -1$ 时, 原级数绝对收敛.

2728. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{n e^{-nx}} = e^{-x},$$

故当 $x > 0$ 时, $e^{-x} < 1$, 级数绝对收敛. 而当 $x = 0$ 时, 级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 显然发散. 又当 $x < 0$ 时, $e^{-x} > 1$, 级数发散.

2729. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1+a^{2^n}x^2}.$

解 记 $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1+a^{2^n}x^2}$, 则当 $x = 0$ 时,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n},$$

故原级数发散. 当 $x \neq 0$ 时:

(1) 当 $|a| > 1$ 时, 有

$$0 < a_n < \frac{1}{a^{2^n} x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{|a|} \right)^{2^n},$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{|a|} \right)^{2^n}$ 的收敛性即知原级数绝对收敛.

(2) 当 $|a| \leq 1$ 时, 有

$$|a_n| \geq \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{n},$$

故原级数发散.

2730. $\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}}) \cdots (2-x^{\frac{1}{n}}) (x \geq 0).$

解 记 $a_n = (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}}) \cdots (2-x^{\frac{1}{n}}).$

(1) 当 $x = 2$ 时, 显然 $a_n = 0$ ($n=1, 2, \dots$), 故级数绝对收敛.

(2) 当 $x \neq 2$ 时, 注意 $x \geq 0$, 故有 $x^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$). 因此, 当 n 足够大时, a_n 不变号, 从而若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则必绝对收敛. 今用阿拉伯判别法, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}}, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} \right) = \ln x, \end{aligned}$$

故当 $\ln x > 1$ 即 $x > e$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x < e$ 时, 原级数发散. 而当 $x = e$ 时, 此时有 (考虑当 n 足

够大时)

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1 - (e^{\frac{1}{n}} - 1)} = 1 + (e^{\frac{1}{n}} - 1) + O((e^{\frac{1}{n}} - 1)^2),$$

但 $e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$,

故得

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}),$$

按高斯判别法, 原级数发散.

总之, 当 $x=2$ 及当 $x>e$ 时, 原级数绝对收敛.

2731. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$

解 对于任意的 x , 只要 n 足够大, 该项就为正. 因此, 它可以看成正项级数. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

故利用正项级数的判别法知: 当 $x>1$ 时, 级数收敛, 且为绝对收敛; 当 $x \leq 1$ 时, 级数发散.

2732. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} \quad (x>0, y>0).$

解 若 $x < 1$, 将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^n}.$$

由于

$$0 < \frac{x^n}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n} \leq x^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛, 故原级数绝对收敛.

同理, 当 $y < 1$ 时, 原级数绝对收敛.

总之, 当 $0 < \min(x, y) < 1$ 时, 原级数绝对收敛.

2733. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \geq 0).$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \geq 0).$

(1) 当 $|x| < 1$ 时, 易见

$$|a_n| \leq |x|^n \quad (n=1, 2, \dots).$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 的收敛性知原级数绝对收敛.

(2) 当 $x = 1$ 时, 1° 若 $y > 1$, 则由

$$|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

易见原级数绝对收敛, 2° 若 $0 \leq y \leq 1$, 由于

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+y^n} \rightarrow 1 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

易见原级数发散.

(3) 当 $x = -1$ 时, 1° 若 $y > 1$, 由

$$|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots),$$

易见原级数绝对收敛。2°若 $0 \leq y \leq 1$ ，由

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+y^n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

易见原级数条件收敛。

(4) 当 $|x| > 1$ 时，1°若 $y = 0$ ，则由

$$a_n = \frac{x^n}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

易见原级数发散。2°若 $y > 0$ ，则当 $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$ 即 $|x| < y$ 时，有

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} < \left| \frac{x}{y} \right|^n,$$

故原级数绝对收敛。当 $\left| \frac{x}{y} \right| \geq 1$ 时，若 $y > 1$ ，有

$$|a_n| = \left| \frac{x}{y} \right|^n \cdot \frac{1}{1 + \frac{n}{y^n}} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时});$$

若 $0 \leq y \leq 1$ ，有

$$|a_n| > \frac{|x|^n}{n+1} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故当 $\left| \frac{x}{y} \right| \geq 1$ 时，原级数发散。

总之，当 $|x| < 1$ ， $0 \leq y < +\infty$ ；当 $|x| = 1$ ， $y > 1$ 及当 $|x| > 1$ ， $|x| < y$ 时，原级数绝对收敛。当 $x = -1$ ， $0 \leq y \leq 1$ 时，原级数条件收敛。

2734. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}.$

解 由于

$$a_n = \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}$$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2} + \left(\frac{|y|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2}} \\ \cdot (\max(|x|, |y|))^1$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \max(|x|, |y|)$, 故当 $\max(|x|, |y|) < 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $\max(|x|, |y|) \geq 1$ 时, 级数发散; 当 $\max(|x|, |y|) = 1$ 时, 由于 $a_n \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$), 故级数发散.

2735. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^p} \quad (x \geq 0).$

解 (1) 当 $0 \leq x < 1$ 时, 此级数可与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ 相比, 它们具有相同的敛散性. 事实上,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} = 1,$$

且这两个级数均为正项级数. 对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}, \quad (1)$$

其通项 $\frac{x^n}{n^p} \leq n^{1/p} x^n = b_n \quad (n=1, 2, \dots)$, 但因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = x < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且为绝对收敛. 因此, 级数 (1)

绝对收敛，从而原级数也是绝对收敛的。

(2) 当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$ 。于是，当 $y>1$ 时收敛，且为绝对收敛；当 $y\leq 1$ 时发散。

(3) 当 $x>1$ 时，原级数的通项可写成

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y} &= \frac{\ln x^n (1 + \frac{1}{x^n})}{n^y} \\ &= \frac{\ln x}{n^{y-1}} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^n})}{n^y}.\end{aligned}$$

由上式右端第一项所组成的级数当 $y-1>1$ 即 $y>2$ 时收敛，而当 $y\leq 2$ 时发散。由上式右端第二项所组成的级数，利用 $0 < \frac{1}{x^n} \leq 1$ 及最初讨论的结果，得知它对任意的 y 值均收敛。因此，原级数当 $x>1$ ， $y>2$ 时收敛，且为绝对收敛。

总之，当 $0 \leq x < 1$ ， $-\infty < y < +\infty$ ；当 $x=1$ ， $y>1$ 及当 $x>1$ ， $y>2$ 时，原级数绝对收敛。

2736. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n(x + \frac{y}{n}).$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \operatorname{tg}^n(x + \frac{y}{n}) \right|} = |\operatorname{tg} x|,$$

故当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (其中 k 为整数) 时， $|\operatorname{tg} x| < 1$ ，

从而级数绝对收敛。而当 $|x - k\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ 时，由于

$\lg^n(x + \frac{y}{n}) \rightarrow \infty$, 故级数发散.

2737. 证明: 若劳郎级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ ($|x_1| < |x_2|$) 时收敛, 则此级数当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时也收敛.

证 由于劳郎级数当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 时收敛, 故级数

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n},$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$$

均收敛. 于是, 由 (3) 知, 当 $|x| < |x_2|$ 时, 级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 由 (2) 知, 当 $|\frac{1}{x}| < |\frac{1}{x_1}|$ 即当 $|x_1| < |x|$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛. 因而, 当 $|x_1| < |x|$

$< |x_2|$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 均收敛, 也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

2738. 求劳郎级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

的收敛域并求它的和.

解 考虑级数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} x^{-n}.$$

显然仅当 $|x| < 2$ 时, 级数 (1) 收敛; 仅当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数 (2) 收敛. 因此, 当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 原级数收敛.

当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 记级数 (1) 的和为 $S_+(x)$, 级数 (2) 的和为 $S_-(x)$. 显然有

$$S_-(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{-n} = -S_+\left(\frac{1}{x}\right).$$

今求 $S_+(x)$. 注意当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

均收敛, 且有

$$\begin{aligned} S_+(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \\ &= \frac{x}{2} S_+(x) + \frac{x}{2-x}, \end{aligned}$$

得

$$S_+(x) = \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2x}{(2-x)^2}.$$

从而

$$S_-(x) = -\frac{2 + \frac{1}{x}}{\left(2 - \frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{2x}{(2x-1)^2},$$

故当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 有

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{1+n}} x^n = S_+(x) + S_-(x) = 2x \cdot \left[-\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2x-1)^2} \right] = \frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}.$$

2739. 求牛顿级数的(绝对的与条件的)收敛域:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!};$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n},$$

其中 $x^{[n]} = x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$.

解 (a) 由 2700 题的结果知: 当 $x \geq 0$ 时, 级数绝对收敛; 当 $-1 < x < 0$ 时, 级数条件收敛.

(b) 由于

$$\begin{aligned} x^{[n]} &= x(x-1)\cdots[x-(n-1)] \\ &= (-1)^{n-1} (n-1-x)(n-2-x)\cdots(2-x)(1-x)x \\ &= -(-1)^{n-1} (n+t)(n-1+t)\cdots(3+t)(2+t)(1+t), \end{aligned}$$

其中 $t = -(1+x)$, 故原级数可改写为

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}{n! n^p}.$$

利用 2699 题的结果知: 当 $p > t+1$ 即 $p > -x$ 时, 原级

数绝对收敛。当然，当 $x = 0, 1, 2, \dots$ 时，原级数也绝对收敛。当 $t \leq p \leq t+1$ 即 $-(1+x) \leq p \leq -x$ 时，原级数条件收敛。

(B) 令 $t = -(1+y)$ ，则有

$$y^{[n]} = (-1)^n (1+t)(2+t)\cdots(n+t).$$

记 $a_n = \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$ ，显然，当 x 为任意数， $y = 0$ ，

$1, 2, \dots$ 时， $a_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)。于是， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝

对收敛。研究一下 $y \neq k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 的情形，有

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= -\frac{n+1}{n+1+t} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= -\frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

(1) 当 $|x| < 1$ 时，由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left| \frac{n+1}{n-y} \right| \cdot \frac{1}{e|x|} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{|x|} > 1, \end{aligned}$$

故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛。

(2) 当 $|x| \geq 1$ 且 n 充分大时，有 $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ ，故

$a_n \not\rightarrow 0$ ，从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

(3) 当 $|x| = 1$ (考虑 n 足够大) 时，有

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \\
 &= \left[1 + \frac{1+y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\
 &= 1 + \frac{1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
 \end{aligned}$$

于是, 1° 当 $y > \frac{1}{2}$ 时, 由高斯判别法知, 此时级数绝对收敛. 2° 当 $y \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 但当 $|y| < \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{1}{x} \left[1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right],$$

其中 $0 < \mu < 1$. 显然, 当 $x = -1$ 时, a_n 不变号, 因此可看成正项级数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为交错级数, 且当 n 足够大时,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1,$$

也即 $|a_n|$ 单调下降. 此外, 还有

$$|a_n| = |y|(1-y)(2-y)\cdots(n-1-y) \frac{e}{n^y}$$

$$= e|y| \cdot \frac{1-y}{n} \cdot \frac{2-y}{n} \cdots \frac{n-1-y}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{e|y|}{n} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty).$$

由莱布尼兹判别法, 便知当 $x=1$, $|y| \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 条件收敛.}$$

总之, 当: (1) $|x| < 1$, y 为任意数; (2) $|x| = 1$, $y > \frac{1}{2}$; (3) x 为任意数, $y = 0, 1, 2, \dots$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x=1$, $|y| \leq \frac{1}{2}$ 时, 原级数条件收敛.

2740. 证明: 若迪里黑里级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x=x_0$ 收敛, 则此级数当 $x > x_0$ 时也收敛.

证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 并且 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 当 $x > x_0$ 时单调下降趋于零, 故根据

亚伯耳判别法即知: 当 $x > x_0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

2741. 证明: 叙列 $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分而且必要的条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0,$$

式中 $\gamma_n(x) = |f(x) - f_n(x)|.$

证 先证必要性.

由于 $f_n(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $f(x)$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $N(\varepsilon) > 0$, 使当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 对于区间 (a, b) 内的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 有

$$\sup_{a < x < b} \{ \gamma_n(x) \} \leq \varepsilon,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0.$$

再证充分性.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$,

总存在 $N(\varepsilon) > 0$, 使当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 有

$$\sup_{a < x < b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

于是, 对于 (a, b) 内的一切 x 值, 只要当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $f(x)$.

2742. 叙列 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$): (a) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛; (b) 在每一个有穷的区间 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$ 上一致收敛; (B) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛是什么意思?

解 (a) 对于任意的 $\varepsilon > 0$ 及任意的 $x_0 < x < +\infty$, 都存在一个正整数 $N = N(\varepsilon, x)$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称数列 $f_n(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛. 要注意的是, N 不仅与 ε 有关, 而且与值 x 有关.

(6) 对每一个 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$, 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $N = N(\varepsilon, a, b)$, 使当 $n > N$ 时, 对于 (a, b) 内的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛.

(B) 如果对于任给的 $\varepsilon > 0$, 都有正整数 $N = N(\varepsilon)$ 存在 ($N(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关), 使当 $n > N$ 时, 对所有的 $x_0 < x < +\infty$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛.

2743. 对于数列

$$f_n(x) = x^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

求出其项的最小号码 $N = N(\varepsilon, x)$, 使从这项起数列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001, 设

$$x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \dots$$

此数列在已知区间 $(0, 1)$ 内是否一致收敛?

解 显见极限函数为零. 于是考虑

$$|x^n - 0| < \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon = 0.001$. 当 $0 < x < 1$ 时, 上式即 $x^n < \varepsilon$ 或

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg x}, \text{ 故最小号码为 } N = \left\lceil \frac{\lg \varepsilon}{\lg x} \right\rceil.$$

当 $x = \frac{1}{10}$ 时, $N = 3$;

当 $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 时, $N = 6$;

.....

当 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{10}}$ 时, $N = 3n$,

.....

下面研究此叙列在 $(0, 1)$ 内的一致收敛性. 由于当 x 趋于 1 时, $\lg x$ 趋于零, 故

$$\frac{\lg \varepsilon}{\lg x} \longrightarrow +\infty \quad (0 < \varepsilon < 1, x \rightarrow 1 - 0),$$

即 $-\frac{\lg \varepsilon}{\lg x}$ 无限增加. 因此, 不可能找到一个公共的 N

(它仅与 ε 有关) 值, 使当 $n \geq N$ 时, 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 值, 皆有 $x^n < \varepsilon$. 因此, 叙列

$$f_n(x) = x^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

在区间 $(0, 1)$ 内不一致收敛.

2744. 应当取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

的若干项方可使部分和 $S_n(x)$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时与级数的和之差小于 ε . 设:

$$(a) \varepsilon = 0.1; \quad (b) \varepsilon = 0.01;$$

$$(B) \varepsilon = 0.001.$$

求出 n 的数值来.

解 易证此级数收敛, 记其和为

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

如果取 n 项, 其部分和为 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k(k+1)}$. 欲使

其误差 $\Delta_n(x) = |S(x) - S_n(x)|$ 小于 ε , 问项数 n 为若干? 可用下列估计法:

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| = \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{|\sin kx|}{k(k+1)} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

若令 $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, 也即当 $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ 时就有 $\Delta_n(x) < \varepsilon$.

记 $N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \right\} - 1 = N_0 - \left(1 - \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \right\} \right)$ 时, 即有 $\Delta_n(x) < \varepsilon$, 其中 $\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \right\}$ 表示 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的零头部分. 也即可取

$$n = N_0, N_0 + 1, N_0 + 2, \dots$$

均有 $\Delta_n(x) < \varepsilon$. 所取的项数 N_0 与 ε 的关系, 按题设数值, 可有

ε	(a) 0.1	(b) 0.01	(B) 0.001
N_0	10	100	1000

2745⁺. 对怎样的 n , 不等式

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001 \quad (0 \leq x \leq 10)$$

能保证成立?

解 由台劳公式, 有

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1}, \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$. 欲 $\Delta_n(x) < 0.001$, 只要

$$\frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1} < \frac{1}{1000}.$$

也即要求 n , 使

$$e^{10} 10^{n+4} < (n+1)!$$

为此, 两边取对数, 有

$$10 + (n+4) \ln 10 < \sum_{k=2}^{n+1} \ln k = p_n. \quad (1)$$

注意到

$$p_n \geq \int_1^{n+1} \ln t dt = (n+1) \ln(n+1) - n.$$

若能有

$$(n+1)\ln(n+1) > n(1+\ln 10) + 10 + 4\ln 10, \quad (2)$$

就可保证 (1) 式成立, 从而 $\Delta_n(x) < 0.001$. 为解 (2) 中的 n , 可用估算法, 例如当 $n=39$ 时, (2) 式就成立, 故对于 n 取 39, 即取 39 项时就能保证 $|e^x -$

$$\sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} | < 0.001 \quad (0 \leq x \leq 10).$$

研究叙列在所示区间上的一致收敛性:

$$2746. f_n(x) = x^n; \quad (a) 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad (b) 0 \leq x \leq 1.$$

解 (a) 当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, 即只要

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}.$$

取 $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, \frac{1}{2}]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x) = x^n$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上一致收敛于零.

$$(b) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x = 1; \\ 0, & \text{若 } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,

就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

2747. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $0 \leq x \leq 1$.

解 当 $x = 0$ 或 1 时, $f_n(x) = 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. 因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{n+1} = g(x).$$

由于 $g'(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$, 故若令 $g'(x) = 0$,

即求得 $x = \frac{n}{n+1}$. 显然, 当 $0 < x < \frac{n}{n+1}$ 时,

$g'(x) > 0$; 当 $\frac{n}{n+1} < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 故

$g(x)$ 在 $x = \frac{n}{n+1}$ 达到 $[0, 1]$ 上的最大值. 于是, 对

于 $0 \leq x \leq 1$, 有

$$g(x) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n+1}$

$< \varepsilon$, 即只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时,

对于 $(0, 1)$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上一致收敛于零.

2748. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$; $0 \leq x \leq 1$.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{2n}.$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{4}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,

就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{4} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上收敛而不一致收敛.

2749. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

解 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$,

即只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 0$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内一致收敛于零.

2750. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}; \quad 0 \leq x \leq 1.$

解: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x = f(x),$$

并有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{nx}{1+n+x} - x \right| \\ &= \frac{x+x^2}{1+n+x} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{2}{\varepsilon}$.

取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - x| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上一致收敛于 x .

2751. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n};$ (a) $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$; (b) $1 - \varepsilon \leq x$

$\leq 1 + \varepsilon$; (B) $1 + \varepsilon \leq x < +\infty$, 其中 $\varepsilon > 0$.

解 (a) 当 $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} < (1-\varepsilon)^n.$$

任给 $\varepsilon' > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$, 只要 $(1-\varepsilon)^n < \varepsilon'$, 即只要 $n > \frac{\lg \varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)}$. 取 $N = \left[\frac{\lg \varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)} \right]$, 则

当 $n > N$ 时, 对于 $(0, 1-\varepsilon)$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1-\varepsilon)$ 上一致收敛于零.

$$(6) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 1-\varepsilon \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 1, \\ 1, & \text{若 } 1 < x \leq 1+\varepsilon. \end{cases}$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{3}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,

就有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{3} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ 上收敛而不一致收敛.

(B) 当 $1+\varepsilon \leq x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x^n} < \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}.$$

任给 $\varepsilon' > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$, 只要 $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}$

$< \varepsilon'$, 即只要 $n > \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}$. 取 $N = \left\lceil \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)} \right\rceil$, 则

当 $n > N$ 时, 对于 $x \geq 1 + \varepsilon$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 1| < \varepsilon$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛于 1.

2752. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$; (a) $0 \leq x \leq 1$; (b) $1 < x < +\infty$.

解 (a) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$,

就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1 > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上不一致收敛.

(b) 当 $1 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{2nx}{n^2x^2} < \frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{2}{\varepsilon}$.

取 $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 1$ 的一切 x 值,

均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2753. f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}; \quad -\infty < x < +\infty,$$

解 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x| = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} < \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取

$N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切实数 x , 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2754. f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right); \quad 0 < x < +\infty.$$

解 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left[\left(x + \frac{1}{n} \right) - x \right]}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

若取 $x = \frac{1}{n}$, 则有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| n \left(\sqrt{\frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{n} \left| \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} + 1)} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2} + 1)^2} > \frac{1}{18} \sqrt{n}.
\end{aligned}$$

当 n 充分大时, 它就可以大于指定的 $\varepsilon_0 > 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2755. (a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}; \quad -\infty < x < +\infty; \quad (b) f_n(x)$

$$= \sin \frac{x}{n}; \quad -\infty < x < +\infty.$$

解 (a) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切实数 x , 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(b) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{n\pi}{2}$,

就有

$$\left| f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right) - f\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| = 1 > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2756. (a) $f_n(x) = \arctg nx$; $0 < x < +\infty$; (b) $f_n(x) = x \arctg nx$; $0 < x < +\infty$.

解 (a) 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg nx = \frac{\pi}{2} = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{4}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$,

就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \arctg 1 - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

(b) 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} x = f(x),$$

并有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= x \left| \arctg nx - \frac{\pi}{2} \right| \\ &= x \left| -\arctg \frac{1}{nx} \right| \\ &\leq x \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 0$ 的一切 x 值,

均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

2757. $f_n(x) = e^{n(x-1)}; \quad 0 \leq x \leq 1.$

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 \leq e^{-1}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = 1 - \frac{1}{n}$,

就有

$$\left| f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = e^{n\left(1 - \frac{1}{n} - 1\right)} = e^{-1} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上收敛而不一致收敛.

2758. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}; \quad (a) -1 \leq x \leq 1$, 其中 l 为任意的正数; (b) $-\infty < x < +\infty$.

解 (a) 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有 (当 $n \geq [l]$ 时)

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{-(x-n)^2} \leq e^{-(n-1)^2}.$$

任给 $\varepsilon > 0$ (可设 $\varepsilon \leq 1$), 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

只要 $n \geq [l]$ 且 $e^{-(n-1)^2} < \varepsilon$, 即只要 $n \geq l + \ln \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

取 $N = \left[l + \ln \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right]$, 则当 $n \geq N$ 时, 对于 $(-1, 1)$

上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上一致收敛.

(6) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x=n$, 就有

$$|f_n(n) - f(n)| = 1 > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2759. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}; \quad 0 < x < 1.$

解 当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$. 又 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right|.$$

任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0$, 故存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$,

使当 $0 < t < \delta$ 时, 恒有 $|t \ln t| < \varepsilon$. 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil$,

则当 $n > N$ 时, $\frac{1}{n} < \delta$, 从而对一切 $0 < x < 1$, 都

有 $0 < \frac{x}{n} < \delta$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上一致收敛.

2760. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n; \quad (a)$ 在有穷的区间 (a, b) 上;

(6) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上.

解 (a) 当 $a < x < b$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right\} = e^x = f(x).$$

记 $C = \max\{|a|, |b|\}$. 由台劳公式知

$$\ln f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) = n \left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta x}{n} \right)^3} \cdot \frac{x^3}{n^3} \right],$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } 0 < \theta < 1, \quad \left| \frac{\theta x}{n} \right| &\leq \frac{c}{n}, \quad |x^3| \leq c^3, \quad \text{故 } \ln f_n(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

于是易知

$$f_n(x) = e^{x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^x \left[1 - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

取适当大的 N_1 , 则当 $n > N_1$ 时, 就有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= e^x \left| -\frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \\ &\leq \frac{c^2 e^c}{n} \quad (a < x < b). \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > N_1$,

且 $n > \frac{c^2 e^c}{\varepsilon}$. 取 $N = \max\left(N_1, \left\lceil \frac{c^2 e^c}{\varepsilon} \right\rceil\right)$, 则当

$n > N$ 时, 对于 (a, b) 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛.

$$(6) |f_n(x) - f(x)| = \left| \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - e^x \right|.$$

不论 n 多么大, 只要取 $x = n$, 就有

$$|f_n(n) - f(n)| = 2^n \left[\left(\frac{e}{2} \right)^n - 1 \right],$$

它趋于 $+\infty$, 不可能小于任给的 $\varepsilon > 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2761. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$; $1 \leq x \leq a$.

解 当 $1 \leq x \leq a$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x = f(x),$$

并有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n \ln[1 + (x^{\frac{1}{n}} - 1)]| \\ &= \left| n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n(x^{\frac{1}{n}} - 1) + \frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}} - 1)^2 \right. \\ &\quad \left. + n O\left((x^{\frac{1}{n}} - 1)^3\right) \right| \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right)^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{(\ln a)^2}{n} + A \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

其中 $A > 0$ 为常数, 上述不等式可在适当大的 N_1 取定后当 $n > N_1$ 时成立. 显然对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在

N_2 , 使当 $n > N_2$ 时, $\frac{(\ln a)^2}{n} + A \cdot \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, 于是,

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[1, a]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1, a]$ 上一致收敛.

$$2762. f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$\text{解 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(1) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \right| \\ &= \frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x^n)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + (1+x^n)^{\frac{1}{n}} + 1} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

(2) 当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt[n]{1+x^n} - x \right| \\ &= \frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}} + x \cdot (1+x^n)^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + x^{n-2} \cdot (1+x^n)^{\frac{1}{n}} + x^{n-1}} \\ &< \frac{1}{nx^{n-1}} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

因此, 对于 $0 \leq x \leq 2$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 2]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 2]$ 上一致收敛.

2763.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{若 } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x \right), & \text{若 } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{若 } x \geq \frac{2}{n}, \end{cases}$$

在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上.

解 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=0$, 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$.

当 $x \neq 0$ 时, 在 $[0, 1]$ 上, $x > 0$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取适当大的正整数 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 使 $\frac{2}{N} \leq x$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{2}{n} < \frac{2}{N} \leq x$. 于是, $f_n(x) = 0$. 因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n^2}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) - f\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

2764. 设 $f(x)$ 为定义于区间 (a, b) 内的任意函数, 且

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (a < x < b).$$

证 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |[nf(x)] - nf(x)| \leq \frac{1}{n},$$

故对任给的 $\varepsilon > 0$, 若取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n \geq N$ 时, 对于一切 $x \in (a, b)$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛于 $f(x)$.

2765. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内有连续的导函数 $f'(x)$, 且

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

证明: 在闭区间 $\alpha \leq x \leq \beta$ 上 (其中 $a < \alpha < \beta < b$), $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$.

证 考虑 $[\alpha', \beta']$, 其中 $a < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < b$. 由于 $f_n(x)$ (n 充分大) 在 $[\alpha', \beta']$ 上有连续的导函数, 故由微分学中值公式, 得

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = n f'\left(x + \frac{\theta}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= f'\left(x + \frac{\theta}{n}\right) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

又因 $f'(x)$ 在 $[\alpha', \beta']$ 上连续, 所以 $f'(x)$ 在 $[\alpha', \beta']$ 上一致连续, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使对于 $[\alpha', \beta']$ 上的任意点 x' 及 x'' , 只要当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就有 $|f'(x') - f'(x'')| < \varepsilon$. 今取 $N = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + 1 = N(\varepsilon)$, 则当 $n \geq N$ 时, 有 $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$. 于是, 对 $[\alpha, \beta]$ 上的一切 x 值, 只要 N 足够大, 就可保证 x 与 $x + \frac{\theta}{n}$ 均属于 $[\alpha', \beta']$. 于是, 对于 $[\alpha, \beta]$

上的一切值 x ，均有

$$|f_n(x) - f'(x)| = |f'(x + \frac{\theta}{n}) - f'(x)| < \varepsilon.$$

因此， $f_n(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 。

2766. 设 $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(x + \frac{i}{n})$ ，其中 $f(x)$ 为连续函数。

证明数列 $f_n(x)$ 在任何有穷闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛。

证 记 $f_n(x)$ 的极限函数为 $F(x)$ ，则

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}) \quad (0 \leq \theta_i \leq 1; \\ &\quad i = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上连续，故它在 $[a, b+1]$ 上一致连续，即对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，使对于 $[a, b+1]$ 上的任意点 x' 及 x'' ，只要当 $|x' - x''| < \delta$ 时，就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ 。今取

$N = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil + 1$ ，则当 $n > N$ ， $a \leq x \leq b$ 时，有

$$\left| \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n} - (x + \frac{i}{n}) \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta \text{ 且 } x + \frac{i}{n} \in [a, b$$

$$+ 1], \quad x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n} \in [a, b+1] \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

于是

$$\begin{aligned}
 |F(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left| f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) - f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| \\
 &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \varepsilon = \frac{1}{n} \cdot n\varepsilon = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性:

2767. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; (a) 在区间 $|x| < q$ 内, 此处 $q < 1$; (b) 在区间 $|x| < 1$ 内.

解 (a) 由于 $|x^n| < q^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛 ($0 < q < 1$),

故由外耳什特拉斯判别法知, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < q < 1$

内绝对并一致收敛.

(b) $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. 当 $|x| < 1$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}.$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$,

就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}} \right| > \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < 1$ 内收敛而不一致收敛.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, 在闭区间 $-1 \leq x \leq 1$ 上.

解 由于 $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由外耳什特拉
斯判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上绝对并一致
收敛.

2769. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$, 在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上.

$$\text{解 } S_n(x) = \sum_{k=0}^n (1-x)x^k = (1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}.$$

于是,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{若 } x = 1. \end{cases}$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$,

就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right) \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $(0, 1)$ 上收敛而不一致
收敛.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right); \quad -1 \leq x \leq 1.$

$$\text{解 } S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = x,$$

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

于是对任给的 $\varepsilon > 0$, 若取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $(-1, 1)$ 上的一切 x 值, 均有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$ 在 $(-1, 1)$ 上一致收敛.

$$2771. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}; \quad 0 < x < +\infty.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{nx+1}. \end{aligned}$$

当 $0 < x < +\infty$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1,$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

$$2772. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}; \quad 0 \leq x < +\infty.$$

解 由于 $\left| \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right| \leq \frac{1}{n^2} (x \geq 0)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 原级数在 $(0, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

$$2773. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)};$$

(a) $0 \leq x \leq \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$; (b) $\varepsilon \leq x < +\infty$.

解 当 $x = 0$ 时, 显然级数收敛于零.

当 $x > 0$ 时, 令

$$u_n(x) = \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+(n+1)x} \right] = 0 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛 ($x \geq 0$). 易见, 此时

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(1+x)\cdots(1+(k-1)x)} - \frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)} \right] \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \rightarrow 1$$

(当 $n \rightarrow \infty$),

因此有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x = 0; \\ 1, & \text{若 } x > 0. \end{cases}$$

(a) 当 $x > 0$ 时, 有

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

取 $0 < \varepsilon_0 < 1$. 对于任意大 (但固定的) n , 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = 1,$$

故可取 $0 < x_0 < \varepsilon$, 使

$$\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)} > \varepsilon_0,$$

即

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| > \varepsilon_0.$$

由此可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $0 \leq x \leq \varepsilon$ 上不一致收敛.

(6) 当 $x \geq \varepsilon$ 及 $n \geq 3$ 时, 由于

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &= \left| \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \right| < \frac{nx}{(1+x)^n} \\ &= \frac{nx}{1 + nx + \frac{1}{2!} n(n-1)x^2 + \cdots + x^n} \\ &< \frac{nx}{\frac{1}{3!} n(n-1)(n-2)x^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{6}{(n-1)(n-2)x^2} < \frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2},$$

且级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2}$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判

别法知, 原级数在 $[\varepsilon, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

2774. 利用外耳什特拉斯判别法, 证明下列函数项级数在所
指区间内的一致收敛性:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad -\infty < x < +\infty;$

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}, \quad -2 < x < +\infty;$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}, \quad 0 \leq x < +\infty;$

(Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, \quad |x| < +\infty;$

(Д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}, \quad |x| < a, \quad a \text{ 为任意正数,}$

(ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad |x| < +\infty;$

(з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad |x| < +\infty;$

(и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \quad |x| < +\infty;$

$$(K) \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}), \quad |x| < a;$$

$$(J) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$(M) \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2 + n^3}, \quad |x| < +\infty.$$

解 (a) 由于 $\left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(6) \text{ 考虑 } n \geq 2, \text{ 有 } \left| \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \right| < \frac{1}{2^n - 2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

($x > -2$), 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上一致收敛.

(B) 当 $x = 0$ 时, 级数显然收敛于零. 当 $x > 0$ 时,

$$1 + n^4 x^2 \geq 2n^2 x, \text{ 于是, } \left| \frac{x}{1 + n^4 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2}. \text{ 又因}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

(T) 当 $|x| < +\infty$ 时, $1 + n^5 x^2 \geq 2n^{\frac{5}{2}} x$, 于是,

$$\left| \frac{nx}{1 + n^5 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}. \text{ 又因 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} \text{ 收敛, 故级数}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^5 x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(A) 当 $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$ 时,

$$\left| \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \right| \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (|x|^n + |x|^{-n}) \leq \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}.$$

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$, 应用达朗伯耳判别法, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{\frac{(n+1)^2 2^{n+2}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{2}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0 < 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ 收敛. 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$ 当 $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$ 时一致收敛.

(B) 当 $n=2m$ 或 $2m+1$ 时, $u_n(x) = \frac{x^n}{m!}$. 考虑

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(x)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n+1}(x)$, 当 $|x| < a$ 时, 不论

$n=2m$ 还是 $n=2m+1$, 均有 $\left| \frac{x^n}{m!} \right| < \frac{a^n}{m!}$. 应用达

朗伯耳判别法易证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{m!}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{m!}$ 均收敛.

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(x)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n+1}(x)$ 当 $|x| < a$ 时绝

对并一致收敛. 从而, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2} \right]!}$ 当 $|x| < a$ 时

一致收敛.

(Ж) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, 且

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(З) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收

敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(И) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收

敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(К) 当 n 充分大 (即 $n \geq n_0$) 时, 对于 $|x| < a$, 有

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right) = \frac{x}{n \ln^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但当 $|x| < a$ 时, $\left| \frac{x}{n \ln^2 n} \right| \leq \frac{a}{n \ln^2 n}$, 而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a}{n \ln^2 n}$

收敛*) 以及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也收敛, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right)$

当 $|x| < a$ 时一致收敛.

*) 利用 2619 题的结果.

$$(Л) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } e^{nx} > 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2} > \frac{n^2 x^2}{2},$$

故 $e^{-nx} = \frac{2}{n^2 x^2}$. 于是, $|x^2 e^{-nx}| < \frac{2}{n^2}$, 此式对 $x = 0$

也成立. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 当 $0 \leq x < +\infty$ 时一致收敛.

$$(M) \text{ 由于 } x^2 + n^3 \geq 2n^{\frac{3}{2}} |x|, \text{ 故 } \left| \frac{x}{x^2 + n^3} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

当 n 充分大 ($n \geq n_0$) 时, 对于 $|x| < +\infty$, 有

$$\begin{aligned} \left| \arctg \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| &= \left| \frac{2x}{x^2 + n^3} + O\left(\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right)^2\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

又因 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 均收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{x^2 + n^3}$

当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (a) 在闭区间 $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ 上, 其中

$\varepsilon > 0$; (b) 在闭区间 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上.

解 (a) 当 $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$ 时,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}},$$

又 $\frac{1}{n}$ 趋于零并且不依赖于 x , 故由迪里黑里判别法知,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ 上一致收敛.

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上条件收敛*. 但

它不一致收敛，这可用反证法获证。设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在

$[0, 2\pi]$ 上一致收敛，其中 $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ($n=1, 2, \dots$)，

则应有：任给 $\varepsilon > 0$ ，例如取 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ，必存在 $N_1 = N_1(\varepsilon)$ （它与 x 无关），使当 $n \geq N_1$ 时，对于 $[0, 2\pi]$ 上的一切 x 值，均有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数。取 $N_2 \geq 2N_1$ ，记 $n_0 = \max \left(\left[\frac{N_2}{2} \right], \left[\frac{N_2+1}{2} \right] \right)$ ，则 $n_0 \geq N_1$ ，又取 p 使 $n_0 + p = N_2 + 1$ ，则应有

$$\left| u_{n_0+1}(x) + u_{n_0+2}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x) \right| < \varepsilon,$$

也即有

$$\left| \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n \leq N_2+2} u_n(x) \right| < \varepsilon = \frac{1}{4} \quad (x \in [0, 2\pi]). \quad (1)$$

今取 $x_0 = \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{\pi}{2}$ ，当然上式 (1) 也应成立。

但是另一方面，由于当 $\frac{N_2}{2} + 1 \leq n \leq N_2 + 2$ 时，

显然有 $0 < nx_0 \leq \frac{\pi}{2}$ ，故有 $\sin nx_0 \geq nx_0 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{n}{N_2+2}$ 。

于是， $u_n(x_0) = \frac{\sin nx_0}{n} \geq \frac{1}{N_2+2}$ ，从而有

$$\sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n \leq N_2+2} u_n(x_0) \geq \frac{1}{N_2+2} \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n \leq N_2+2} 1$$

$$\geq \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{1}{2} (N_2+2) = \frac{1}{2},$$

它与 (1) 中当 $x = x_0$ 时相矛盾. 这就证明了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi]$ 上条件收敛而不一致收敛的结论.

*) 利用 2698 题的结果.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}; \quad 0 < x < +\infty.$

解 记 $u_n(x) = 2^n \sin \frac{1}{3^n x} (n=1, 2, \dots)$, 当 $0 < x < +\infty$ 时, 由于

$$|u_n(x)| \leq 2^n \cdot \frac{1}{3^n x} = \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 故原级数绝对收敛, 从而收敛.

但它在 $(0, +\infty)$ 内并不一致收敛. 如若不然, 即设它一致收敛, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 例如取 $\varepsilon = 1$, 必存在 $N = N(\varepsilon)$ (它与 x 无关), 使当 $n \geq N$ 时, 对于 $(0, +\infty)$ 内的一切 x 值, 均有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 今取 $p = 1$, $n = N$, 则对于一切 $x \in (0, +\infty)$, 应有

$$|u_{N+1}(x)| < \varepsilon = 1.$$

取 $x_0 = \frac{2}{3^{N+1}\pi} \in (0, +\infty)$, 则也应有 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$. 但事实上却有

$$\begin{aligned} u_{N+1}(x_0) &= 2^{N+1} \sin \frac{1}{3^{N+1}x_0} = 2^{N+1} \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 2^{N+1} > 1, \end{aligned}$$

这与 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$ 矛盾. 证毕.

$$2777. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}; \quad 0 < x < +\infty.$$

解 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$. 当 $0 < x < +\infty$ 时, $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$, 它单调一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ 当 $0 < x < +\infty$ 时一致收敛.

$$2778. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}; \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

解 当 $0 \leq x \leq 2\pi$ 时, 显然 $\frac{1}{n+\sin x}$ 对于 n 单调递

减, 同时由于 $0 < \frac{1}{n+\sin x} < \frac{1}{n-1}$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上一致地趋于零. 又由于

$\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 故原级数在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛.

$$2779. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}; |x| \leq 10.$$

解 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \right| \leq 2$. 记 $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$,

由于 $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} > \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}}$,

故 $b_n(x)$ 单调下降. 又由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \rightarrow 0 \quad (|x| \leq 10),$$

故 $b_n(x)$ 单调一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数在 $[-10, 10]$ 上一致收敛.

$$2780. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}; -\infty < x < +\infty.$$

解 $\left| \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{3} \right| \leq \left| \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$. 又 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$

对于每一个 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是单调递减的, 且由于

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n},$$

故对每一个 x 一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2781. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; 0 \leq x < +\infty.$$

解 当 $x = 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 时,

$$\sum_{k=1}^n \sin x \sin kx = 0.$$

当 $x \neq 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 时,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| &= |\sin x| \cdot \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \\
&\leq |\sin x| \cdot \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \\
&= 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2.
\end{aligned}$$

于是, 对于一切 $x \in [0, +\infty)$, 均有

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| \leq 2.$$

又 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 对于每一个 $x \in [0, +\infty)$ 关于 n 都是单

调递减的, 且由 $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 x 在 $0 \leq x < +\infty$ 上一致地趋于零. 因

此, 由迪里黑里判别法知, 级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2782. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}; \quad 0 \leq x < +\infty.$$

$$\text{解} \quad \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}. \quad \text{由于}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \text{ 收敛}^{*)}, \text{ 且与 } x \text{ 无关, 故它对 } x \text{ 而}$$

言是一致收敛的.

另一方面, $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$ 对于每一个 $x \in (0, +\infty)$ 都

是单调递增的且有界: $\left| \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}} \right| \leq 1$.

因此, 由亚伯耳判别法知, 原级数在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

*) 利用 2672 题的结果.

2783. 不连续函数的叙列可否一致收敛于连续函数?

解 可以. 例如, 函数叙列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x) \quad (n=1, 2, \dots),$$

其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数;} \\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数.} \end{cases}$

显然, $f_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上每一点均不连续, 但由于

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots; -\infty < x < +\infty),$$

故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致趋于零. 而 $f(x) \equiv 0$ ($-\infty < x < +\infty$) 显然是连续函数. 此例说明, 不连续函数的叙列仍然可以一致收敛于连续函数.

2784. 证明: 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上也一致收敛.

证 由哥西准则及题设知: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n \geq N$ 时, 对于 $[a, b]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 由于

$$\begin{aligned} & |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \\ & \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

故根据一致收敛的哥西准则知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛.

2785. 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上是否必定一致收敛?

解 未必. 例如, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$$

在 $[0, 1]$ 上绝对并一致收敛, 但其绝对值级数不一致收敛. 事实上, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (1-x) x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x) x^n$$

在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛^{*)}。因此, 我们只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛就可以了。首先, 当 $x=0$ 及 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (1-x) x^n$ 显然收敛。当 $0 < x < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ 是交错级数且满足莱布尼兹条件, 故也收敛。要证其一致收敛, 只要证其余式 $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k (1-x) x^k$ 一致趋于零 (对 $0 \leq x \leq 1$) 即可。按满足莱布尼兹条件的交错级数的余式估计, 有

$$|R_n(x)| \leq (1-x) x^{n+1} \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (1)$$

令 $f(x) = (1-x) x^{n+1}$, 通过求导数易知此函数在 $x = \frac{n+1}{n+2}$ 时达到其在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值, 故当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有

$$0 \leq f(x) \leq f\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+2}.$$

于是, 由 (1) 式知

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+2} \quad (0 \leq x \leq 1; n=1, 2, \dots).$$

由此即知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $R_n(x)$ 关于 $0 \leq x \leq 1$ 一致趋于零。

*) 利用2769题的结果。

2786. 证明: 绝对收敛且一致收敛的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

其中

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1} \pi x), & \text{若 } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{若 } 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

不能用正项的收敛数项级数作为其强级数.

证 首先指出 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一致收敛的.

事实上, 当 $n \geq N$ 时, 哥西余项函数为

$$R_{N,p}(x) = f_{N+1}(x) + f_{N+2}(x) + \cdots + f_{N+p}(x).$$

于是, 当 $x \in [0, 1]$ 时, 有

$$R_{N,p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \sin^2(2^{N+2} \pi x), & \text{当 } x \in (2^{-(N+2)}, 2^{-(N+1)}); \\ \frac{1}{N+2} \sin^2(2^{N+3} \pi x), & \text{当 } x \in (2^{-(N+3)}, 2^{-(N+2)}); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{N+p} \sin^2(2^{N+p+1} \pi x), & \text{当 } x \in (2^{-(N+p+1)}, 2^{-(N+p)}); \\ 0, & \text{其它点 } x. \end{cases}$$

因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有

$$|R_{N,p}(x)| \leq \frac{1}{N}.$$

由此即知：对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，只要取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ ，则当 $n \geq N$ 时，对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值，均有 $|R_{N,p}(x)| < \varepsilon$ ，其中 p 为任意自然数。由哥西准则

知，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上绝对收敛且一致

收敛。下面证明：不可能用某正项收敛数项级数作为其强级数。采用反证法，假设有某收敛的强级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，其中 $a_n \geq 0$ 是常数，即在 $[0, 1]$ 上有

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，以下将说明由此引出矛盾。事实上，据

(1) 式对一切 $x \in [0, 1]$ 均成立。今取 $x_n = \frac{3}{2} 2^{-(n+1)}$ ，显然有

$$2^{-(n+1)} < x_n < 2^{-n}.$$

因此得

$$a_n \geq |f_n(x_n)| = \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1} \pi x_n) = \frac{1}{n} > 0.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也应收敛，这与众所周知的级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的发散结论相抵触。证毕。

2787. 证明：若各项是单调函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

在闭区间 $[a, b]$ 的端点绝对收敛，则此级数在闭区间

$[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

证 按题设, $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(b)|$ 均收敛. 令

$a_n = \max(|\varphi_n(a)|, |\varphi_n(b)|)$, 由于 $0 \leq a_n \leq |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|$, 故知

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收敛. 由于 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调的, 故

$$|\varphi_n(x)| \leq a_n \quad (a \leq x \leq b; n=1, 2, \dots).$$

由外耳什特拉斯判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

2788. 证明: 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的收敛区间为 $(-R, R)$ ($R > 0$), $[a, b] \subset (-R, R)$. 令

$$r = \max(|a|, |b|),$$

则当 $x \in [a, b]$ 时, 有

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot |r|^n = |a_n r^n|.$$

由题设知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ 收敛, 故原幂级数在 $[a, b]$ 上绝对

并一致收敛. 由 $[a, b]$ 的任意性, 本题获证.

2789. 设 $a_n \rightarrow \infty$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

在不包含点 a_n ($n = 1, 2, \dots$) 的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

证 设 E 是任一不包含点 a_n ($n = 1, 2, \dots$) 的有界闭集, 则存在常数 $M \geq 0$, 当 $x \in E$ 时有

$$|x| \leq M \text{ 且 } \left| \frac{x}{a_n} \right| \neq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0$. 因此, 存在 N , 使当 $n > N$, $x \in E$ 时,

$$\left| \frac{x}{a_n} \right| < \frac{1}{2}.$$

于是, 当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x - a_n} \right| &= \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{x}{a_n} \right|} \leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{a_n} \right|} \\ &\leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{|a_n|}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|a_n|}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{x - a_n} \right|$ 在 E 上绝对并一致收敛.

2790. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 迪里黑里级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

证 $0 < \frac{1}{n^x} \leq 1$, 且 $\frac{1}{n^x}$ 对每一个 $x \geq 0$ 是单调的. 又

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛, 故由亚伯耳判别法知,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

2791. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

在域 $x \geq 0$ 内一致收敛.

证 $0 < e^{-nx} \leq 1$, 且 e^{-nx} 对每一个 $x \geq 0$ 是单调的. 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛, 故由亚伯耳判别

法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

2792. 证明: 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

在域 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并有连续的导函数.

证 首先证明 $f(x)$ 连续. 事实上, 由 $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的收敛性即知, 原级数当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛. 又由于 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 的和 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

其次再证明 $f'(x)$ 连续。由于 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right)$

$= \frac{\cos nx}{n^2}$ 连续，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $-\infty < x < +\infty$

时一致收敛，故再次根据函数项级数一致收敛的性质，即知上述级数的和在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

2793. 证明：函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(a) 除 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外，在一切的点有定义并且是连续的；(b) 为周期函数，其周期等于 1。

证 考虑级数 (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及 (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 。

显然，当 $x \neq k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时，级数 (1) 收敛；当 $x \neq -l$ ($l = 1, 2, \dots$) 时，级数 (2) 收敛。因

此，当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时，级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 收敛。

(a) 因而在除 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外的一切点上 $f(x)$ 有定义。下面为了证明 $f(x)$ 在任一点 $x = x_0$ ($x_0 \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处 $f(x)$ 连续，我们可以在 $([x_0], [x_0] + 1)$ 内考虑一个包含 x_0 的区间 (a, b) ：

$$[x_0] < a < x_0 < b < [x_0] + 1.$$

记 $p = \max(|a|, |b|)$. 在 $[a, b]$ 上考虑级数 (1) 及 (2). 当 n 适当大时 (例如 $n \geq n_0$), 由于

$$\left| \frac{1}{(n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-p)^2},$$

$$\left| \frac{1}{(-n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-p)^2},$$

且 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-p)^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 从而, 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 也

即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 于是, 其和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 因而 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(6) 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 有 $f(x+1)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n-(x+1)]^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(n-1)-x]^2}, \quad \text{作指标变}$$

换 $m = n - 1$, 则当 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时有 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 因而得

$$f(x+1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m-x)^2} = f(x),$$

上式表明, 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, $f(x)$ 是一个以 1 为周期的周期函数. 证毕.

2794. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上收敛但不一致收敛，而它的和在此线段上是连续函数。

证 考虑部分和

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n [kxe^{-kx} - (k-1)xe^{-(k-1)x}] = nxe^{-nx},$$

显然在 $[0, 1]$ 上其极限函数 $S(x)$ 存在（即级数的和）且连续，

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0.$$

但此级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛。用反证法。若不然，即若一致收敛，则对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在数 $N = N(\varepsilon)$ ，使当 $n \geq N$ 时，对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值，均有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ 。今取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}e^{-1}$ ，应有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{2}e^{-1}.$$

取 $x = x_0 = \frac{1}{n}$ ，则也应有 $|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{2}e^{-1}$ 。但另一方面，却有

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| = S_n(x_0) = e^{-1} > \varepsilon_0,$$

矛盾，证毕。

2795. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的连续性，设：

$$(a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2};$$

$$(B) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

解 (a) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|x + \frac{1}{n}\right|^n} = |x|$, 故当 $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $|x| > 1$ 时, 级数发散. 当 $|x| = 1$ 时, 通项不趋于零, 因而级数也发散. 于是, $f(x)$ 的存在域为 $(-1, 1)$. 下面证明 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续. 设 $0 < \delta < 1$, 则当 $|x| \leq 1 - \delta$ 时, 有

$$\left|x + \frac{1}{n}\right|^n \leq \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right)^n.$$

上面已证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right)^n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ 上一致收敛, 从而 $f(x)$ 在该区间上连续. 由于 δ 可以任意地小, 故知 $f(x)$ 在开区间 $(-1, 1)$ 内连续.

$$(6) \quad \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2} = \frac{x}{x^2 + n^2} + (-1)^n \frac{n}{x^2 + n^2}.$$

由迪里黑里判别法易知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{x^2 + n^2}$ 在整个数轴上一致收敛, 故其和函数在整个数轴上连续. 又对于任意的 $M > 0$, 当 $x \in [-M, M]$ 时, 由于 $\left|\frac{x}{x^2 + n^2}\right| \leq \frac{M}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$ 在 $[-M, M]$ 上一致收敛, 从而其和函数在 $[-M, M]$ 上连续. 由 M 的任意性知上述和函数在整个数轴上连续.

于是, 作为这两个级数的和 $f(x)$ 在整个数轴上有定义且是连续的.

(B) 由于当 $-\infty < x < +\infty$ 且 $x \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}} = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

故此时级数绝对收敛. 显然当 $x = 0$ 时级数收敛于零. 于是, $f(x)$ 的存在域为 $(-\infty, +\infty)$.

注意在任一点 $x_0 \neq 0$ 上, 例如 $x_0 > 0$ 时, 我们可选 a, b 使 $0 < a < x_0 < b$. 考虑 $x \in [a, b]$, 显然有

$$\left| \frac{x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{(1+a^2)^n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ 在 (a, b) 上一致

收敛. 注意每一个 $\frac{x}{(1+x^2)^n}$ 连续, 因而和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 于是, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续 (对于 $x_0 < 0$ 的情况可同理证明), 而且易得

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{x} \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

由此可见

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0; \\ \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0, \end{cases}$$

即和函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 而在 $x \neq 0$ 处连续.

2796. 设 $r_k (k=1, 2, \dots)$ 表线段 $[0, 1]$ 上的有理数. 证明函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-r_k|}{3^k} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

具有下列性质：1)连续；2)在无理点可微分而在有理点不可微分。

证 1)由于当 $0 \leq x \leq 1$ 时，

$$\left| \frac{x-r_k}{3^k} \right| \leq \frac{1}{3^k}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ 收敛，故原级数在 $[0, 1]$ 上一致收敛，

又 $\frac{|x-r_k|}{3^k}$ 连续，故和函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续。

2)先设 x_0 为 $[0, 1]$ 中的无理点。当 $x \neq x_0$ 时，我们有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x), \quad (1)$$

其中 $v_k(x) = \frac{|x-r_k| - |x_0-r_k|}{3^k(x-x_0)} \quad (k=1, 2, \dots)$ 。

由于 $||x-r_k| - |x_0-r_k|| \leq |(x-r_k) - (x_0-r_k)| = |x-x_0|$ ，故 $|v_k(x)| \leq \frac{1}{3^k} \quad (x \neq x_0)$ 。由此可知，级

数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1, x \neq x_0$ 上一致收敛。另外，

对于每个固定的 k ，由于 $x_0 \neq r_k$ ，故当 x 与 x_0 充分近时， $(x-r_k)$ 必与 (x_0-r_k) 同号，由此易知

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) = \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k) \quad (k=1, 2, \dots)。$$

从而, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 可逐项求极限, 再根据 (1) 式即得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由此可知, $f(x)$ 在点 x_0 可微且

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

现设 x_0 是 $[0, 1]$ 中一个有理点, 于是 $x_0 = r_m$, m 为某正整数. 这时, (1) 式为: 当 $x \neq x_0$ 时,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = v_m(x) + \sum_{k \neq m} v_k(x), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } v_n(x) &= \frac{|x - r_n| - |x_0 - r_n|}{3^n(x - x_0)} = \frac{|x - x_0|}{3^n(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{3^n} \operatorname{sgn}(x - x_0). \end{aligned}$$

仿前段之证, 可知: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 级数 $\sum_{k \neq m} v_k(x)$ 可逐项取极限, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k \neq m} v_k(x) &= \sum_{k \neq m} \lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) \\ &= \sum_{k \neq m} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k). \end{aligned}$$

由于显然 $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} v_m(x) = \frac{1}{3^m}$, $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} v_m(x) = -\frac{1}{3^m}$,

故极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} v_m(x)$ 不存在. 于是, 根据 (2) 式即知极

限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 不存在, 故 $f(x)$ 在点 x_0 不可微. 证毕.

2797. 证明: 黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在域 $x > 1$ 内是连续的并且在此域内有各阶的连续导函数.

证 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 当 $x > 1$ 时收敛. 各项求导数所

得级数为 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$. 下证它在 $1 < a \leq x < +\infty$ 上一致收敛 (a 为大于 $\frac{1}{2}$ 的任何数). 事实上, 当 $a \leq x < +\infty$ 时, 有

$$0 < \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛 (这是由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}} = 0,$$

而 $\frac{a+1}{2} > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ 收敛), 故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$

在 $a \leq x < +\infty$ 上一致收敛. 再注意到每项 $\frac{\ln n}{n^x}$ 都是 x 的连续函数, 即知: 在 $a \leq x < +\infty$ 上可逐项求导数, 得

$$\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad (1)$$

并且 $\zeta'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续. 再由 $a > 1$ 的任意性即知 (1) 式对一切 $1 < x < +\infty$ 成立, 并且 $\zeta'(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上连续. 当然 $\zeta(x)$ 更在 $1 < x < +\infty$ 上连续.

利用数学归纳法, 并注意到对任何正整数 k , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ ($a > 1$) 都收敛, 仿照上述, 可证: 对任何正整数 k , $\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上都存在且连续, 并且可由原级数逐项求导数 k 次而得:

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x} \quad (1 < x < +\infty).$$

2798. 证明: θ 函数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

当 $x > 0$ 时有定义并可微分无穷次.

证 首先, 我们证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义且可微.

在级数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)$ 中, $u_n(x) = e^{-\pi n^2 x}$. 显

然有 $u_{-n}(x) = u_n(x)$, 故只要考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} \quad (x > 0)$$

即可. 对于每一个 $x > 0$ 及充分大的 n , 有

$$0 < e^{-\pi n^2 x} < \frac{1}{n^2 x},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \varepsilon}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ 收敛. 对此级数逐项求导后, 得级数

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \pi n^2 e^{-\pi n^2 x},$$

它在 $[\varepsilon, +\infty)$ 内是一致收敛的 (ε 为任意正数). 事实上, 当 n 充分大时, 对一切 $\varepsilon \leq x < +\infty$, 均有

$$0 < \pi n^2 e^{-\pi n^2 x} \leq \pi n^2 e^{-\pi n^2 \varepsilon} < \frac{1}{n^2 \varepsilon}$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \varepsilon}$ 收敛, 故级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$$

在 $\varepsilon \leq x < +\infty$ 上一致收敛. 再注意到各项都是连续函数, 即知级数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

在 $[\varepsilon, +\infty)$ 内连续可微, 且可逐项求导数. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微且可逐项求导数.

其次, 仿照前段可证明 $\theta'(x)$ 的可微性.

再次, 利用数学归纳法, 并注意到当 n 充分大时, 对于一切 $x \in [\varepsilon, +\infty)$, 均有

$$0 < (\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 x} < \frac{1}{n^2 \varepsilon},$$

仿照前段可证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微分 k 次, 其中 k 为任意自然数, 从而 $\theta(x)$ 当 $x > 0$ 时可微分无穷次.

2799. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的可微分性, 设:

$$(a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; \quad (b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}.$$

解 (a) 易知当 $x \neq -k$ ($k=1, 2, \dots$) 时, 级数是莱布尼兹型, 因而收敛. 任取 $x = x_0$, $x_0 \neq -k$ ($k=1, 2, \dots$).

1° 当 $x_0 \geq 0$, 取 $\beta > x_0$, 则 $x_0 \in (-\frac{1}{2}, \beta)$. 在区间 $[-\frac{1}{2}, \beta)$ 上, 注意 $u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n+x}$, 有

$$u'_n(x) = -\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

且连续. $\frac{n}{(n+x)^2}$ 随 n 单调下降且一致趋于零, 事实上, 当 $x \in [-\frac{1}{2}, \beta)$, $n > 1$ 时, 有

$$\left| -\frac{n}{(n+x)^2} \right| \leq \frac{n}{(n-1)^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty);$$

显然 $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ 有界 (小于或等于 1). 因此, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, \beta]$ 上一致收敛. 从而

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $[0, \beta]$ 上可微, 当然它在 $x = x_0$ 点可微.

2° 当 $x_0 < 0$ 时, 必有 k_0 , 使

$$-(k_0+1) < x_0 < -k_0.$$

今选取 α, β , 使

$$-(k_0+1) < \alpha < x_0 < \beta < -k_0.$$

在区间 $[a, \beta]$ 上, $u'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$ 连续且随 n 单调下降, 并且一致趋于零 (考虑充分大的 n);

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{(n+x)^2} \right| &= \frac{n}{n^2 + 2nx + x^2} \leq \frac{n}{n^2 - 2n|x|} \\ &\leq \frac{n}{n^2 - 2n|a|} = \frac{1}{n - 2|a|} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

又显然知 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ 有界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[a, \beta]$ 上一致收敛. 因而

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 (a, β) 上可微, 当然它在 $x = x_0$ 点可微.

总之, 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $x \neq -k$ ($k=1, 2, \dots$) 上有定义且可微.

(6) 当 $x=0$ 时, 级数显然收敛.

当 $x \neq 0$ 时, 由于

$$\frac{\frac{|x|}{n^2 + x^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2 + x^2} |x| \rightarrow |x| \quad (n \rightarrow \infty),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$ 当 $x \neq 0$ 时也收敛. 从而可知 $f(x) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛. 令

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2},$$

显然它在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛, 故可记 $f(x) = |x| \cdot \varphi(x)$. 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 则有 $l > 0$ 使 $-l \leq x_0 \leq l$. 当 $x \in [-l, l]$ 时, 由于

$$\left| \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)' \right| = \left| \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{2l}{n^4} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n^4}$ 收敛. 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)'$ 在 $[-l, l]$ 上一致收敛. 从而知 $\varphi(x)$ 在 $[-l, l]$ 上可微, 当然它在 $x = x_0$ 点可微. 又因 $|x|$ 在 $x \neq 0$ 点可微, 而在 $x = 0$ 点不可微, 再注意到恒有 $\varphi(x) > 0$, 即知 $f(x) = |x| \varphi(x)$ 在 $x \neq 0$ 点可微, 而在 $x = 0$ 点不可微.

2800. 证明: 叙列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctg x^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1).$$

证 由于当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$|\arctg x^n| \leq \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

故有

$$|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

易见 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. 任给 $\varepsilon > 0$, 选取

$N = \left\lceil \frac{\pi}{2\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n \geq N$ 时, 对于一切的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2(N+1)} < \frac{\pi}{2 \cdot \frac{\pi}{2\varepsilon}} = \varepsilon.$$

于是, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零. 但

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

易见

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'_{x=1} = f'(x)|_{x=1} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

因此, 两个极限不相等. 值得注意的是, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零, 但 $f'_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内却不一致收敛于其极限函数:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \neq 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$$

2801. 证明: 叙列

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

证 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^2 = f(x)$. 由于当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{n},$$

故对任给 $\varepsilon > 0$, 只要取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛.

其次, 由于

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' = (x^2)' = 2x,$$

而 $f'_n(x) = 2x + \cos n(x + \frac{\pi}{2})$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时极限不存在, 当然有

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

2802. 当参数 α 取甚么值: (a) 叙列

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛; (b) 叙列 (1) 在 $[0, 1]$ 上一致收敛; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限?

解 (a) 当 $x=0$ 时, 对于任意 α , 均有 $f_n(x)=0$; 当 $x \neq 0$ 且 $x \in (0, 1]$, 对于任意 α , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0.$$

因此, 对于任意的 α , $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于函数 $f(x)=0$.

(b) 由于 $f'_n(x) = n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$, 故当 $x = \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) = 0$. 又由于当 $x < \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{n}$ 时, $f'_n(x) < 0$, 故 $x = \frac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值点. 因此,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1} e^{-1} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

当 $\alpha < 1$ 且 $n \rightarrow \infty$ 时, $n^{\alpha-1} e^{-1} \rightarrow 0$. 于是, 当 $\alpha < 1$ 时, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 N , 使当 $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in [0, 1]$, 均有

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon,$$

即当 $\alpha < 1$ 时, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零. 当

$a \geq 1$ 时, 由于 $f_n(\frac{1}{n}) \not\rightarrow 0$, 故 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致趋于零.

(B) 要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限, 即只要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx. \quad (2)$$

事实上,

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 x e^{-nx} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \left(-\frac{1}{n} e^{-n} - \frac{1}{n^2} e^{-n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-2} (1 - e^{-n} - ne^{-n}). \end{aligned}$$

要 (2) 式成立, 只要下式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0,$$

当 $a < 2$ 时成立. 于是, 当 $a < 2$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限.

2803. 证明: 叙列

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛, 但

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

证 当 $x = 0$ 时, 对于任意的 n , $f_n(x) = 0$; 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. 因此, 叙列 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零. 下证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx.$$

注意到

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n x e^{-n x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-n x^2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} \right) = \frac{1}{2} \neq 0, \end{aligned}$$

本题获证.

2804. 证明: 叙列

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx.$$

证 先证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛. 事实上, 当 $x=0$ 及 $x=1$ 时, 对任意的 n , 均有 $f_n(x)=0$; 而当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n = 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零.

下证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛. 为此, 取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2e}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x_n = \frac{1}{n+1}$,

就有

$$\begin{aligned} \left| f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) - 0 \right| &= n \cdot \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow e^{-1} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

那末取适当的 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 就有

$$|f_n(x_n)| > \frac{1}{2e} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

$$\text{最后证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

注意到

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n(1-y)y^n dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} y^{n+1} - \frac{n}{n+2} y^{n+2} \right) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0,$$

故得证.

2805. 于下式中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2 x^4} dx$$

在积分符号下取极限合理否?

解 由于

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2 x^4} \right] dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2 x^4} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} nx^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

故在积分号下取极限不合理.

一般说来, 若数列 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛,

则是保证在积分号下取极限为合理的一个充分条件，但当它不一致收敛时，则就不一定能保证可以在积分号下取极限了，本题就是其中一例。事实上，取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ ，不论 n 多么大，只要取 $x = \frac{1}{n}$ ，就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 0 \right| = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^4}} > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$ 在 $[0, 1]$ 上并不一致收敛。

求出：

2806. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}.$

解 由于 $x \rightarrow 1-0$ ，故可设 $0 \leq x \leq 1$ 。此时，由于 $\frac{x^n}{x^n+1}$ 小于 1，且当 n 增加时单调下降，而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛，故根据亚伯耳判别法知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \quad (1)$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛。又因 $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故当 $x \rightarrow 1-0$ 时，级数 (1) 可以逐项取极限，

其结果为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2^{*}) \end{aligned}$$

*) 利用2661题的结果.

2807. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$

解 由于 $x \rightarrow 1-0$, 故可设 $0 \leq x < 1$. 在此区间上, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x} = x$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1.$$

2808. $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$

解 由于 $\frac{1}{n^x}$ 在 $[0, l]$ ($l > 0$) 上单调下降且小于或等于 1, 而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 在 $[0, l]$ 上一致收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, l]$ 上一致收敛. 又因 $\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, l]$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n},$$

故当 $x \rightarrow +0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ 可以逐项取极限, 其

结果为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \end{aligned}$$

2809. 逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ 合理否?

解 由于当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\left(\arctg \frac{x}{n^2} \right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n^2} \right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^4 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故逐项微分后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{x}{n^2} \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 再由 $\left| \arctg \frac{x}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2}$

知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ 收敛; 因此, 原级数和的导数

用逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ 来计算是合理的.

2810. 在闭区间 $[0, 1]$ 上逐项积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2^{n+1}}} - x^{\frac{1}{2^n-1}} \right)$$

合理否?

解 令 $S_n(x) = \sum_{i=1}^n \left(x^{\frac{1}{2^{i+1}}} - x^{\frac{1}{2^i-1}} \right)$, 则当 $x=0$,

1 时, $S_n(x) = 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $S_n(x) = x^{\frac{1}{2^{n+1}}} - x$. 因此,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x=0, 1; \\ 1-x, & \text{当 } 0 < x < 1. \end{cases}$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取

$x_n = \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$, 就有

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此, $S_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

注意, 对于不一致收敛的级数而言, 一般地讲逐项积分级数不一定合理. 但对于本题来说, 由于

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2^{n+1}}} - x^{\frac{1}{2^n-1}} \right) \right] dx = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2^{n+1}}} - x^{\frac{1}{2^n-1}} \right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{2},$$

故本题所给出的级数在 $[0, 1]$ 上作逐项积分计算还是对的.

由此题说明, 级数在 $[a, b]$ 上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件, 并不是必要条件.

2811. 设 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是可微分任何次的函数, 且其导函数 $f^{(n)}(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 的叙列在每一个有穷区间 (a, b) 内一致收敛于函数 $\varphi(x)$. 证明 $\varphi(x) = Ce^x$, 其中 C 为常数.

证 由于 $f(x)$ 可微分任意次, 故 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内连续且可微 ($n=1, 2, \dots$). 又按题设 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $\varphi(x)$, 且其导函数叙列 $f^{(n+1)}(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在 (a, b) 内也一致收敛于 $\varphi(x)$, 故 $\varphi(x)$ 在 (a, b) 内可微, 并且

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) \right]' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f^{(n)}(x) \right]' \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x), \end{aligned}$$

积分之, 即得

$$\ln \varphi(x) = x + C_1,$$

也即

$$\varphi(x) = Ce^x,$$

其中 $C = e^{C_1}$ 为常数.

§5. 幂级数

1° 收敛区间 对于每一个幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

都存在有收敛区间， $|x-a| \leq R$ ，已知的级数在其内收敛，而在其外发散。收敛半径 R 可按哥西—哈达玛公式

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定。

收敛半径 R 也可按公式

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

来计算（若此极限存在）。

2° 亚伯耳定理 若幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < R$) 在收敛区间的端点 $x=R$ 处收敛，则

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

3° 台劳级数 在 a 点的解析函数可展为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

可以写成下形：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

(拉格朗日形式) 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta_1(x-a)]}{(n+1)!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \\ (0 \leq \theta_1 \leq 1)$$

(哥西形式)。

必须记住下列五个基本的展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\ (-\infty < x < +\infty),$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ (-\infty < x < +\infty),$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \\ (-1 < x < 1),$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

4° 幂级数的运算 在公共的收敛区间 $|x-a| < R$ 内

有:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n; \end{aligned}$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

式中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$;

$$(B) \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-a)^n;$$

$$(T) \quad \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

5° 在复数域内的幂级数 研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

式中 $c_n = a_n + i b_n$, $a = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$.

对于每一个如像这样的级数都有一收敛圆 $|z-a| \leq R$, 原来的级数在其内收敛 (并且是绝对地), 而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

在实数域内的收敛半径.

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质:

$$2812. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$$

解 记 $a_n = \frac{1}{n^p}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = -1$ 时, 若 $p > 1$, 则幂级数为绝对收敛; 若 $0 < p \leq 1$, 则为条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, 则为发散.

当 $x = 1$ 时, 若 $p > 1$, 则为绝对收敛; 若 $p \leq 1$ 则为发散.

$$2813. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$$

解 记 $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{3},$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$; 收敛区间为 $\left(-1 - \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{3}\right)$,

即 $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 幂级数为

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (-1)^n \frac{1}{3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}.
\end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n+1}}{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

故收敛. 因此, 当 $x = -\frac{4}{3}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot (x+1)^n$ 条件收敛.

当 $x = -\frac{2}{3}$ 时, 幂级数为

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}.
\end{aligned}$$

由于上式右端第一个级数发散, 第二个级数收敛, 故

原级数发散.

$$2814. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4,$$

故收敛半径 $R=4$; 收敛区间为 $(-4, 4)$.

当 $x=-4$ 时, 利用斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1+o(1))$$

得

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-4)^n \right| &= \frac{(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n})^2 + o(1)}{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n} + o(1)} \cdot 4^n \\ &= \sqrt{n\pi} (1+o(1)) \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

因此, 当 $x=-4$ 时级数发散.

当 $x=4$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2n+2} \right) = -\frac{1}{2} < 1,$$

故由拉阿伯判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

$$2815. \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n \quad (0 < \alpha < 1).$$

解 记 $a_n = \alpha^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha^{2n+1}} = +\infty,$$

故收敛半径 $R = +\infty$; 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

$$2816. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

解 记 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \right]^n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{e}$; 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

当 $|x| = \frac{1}{e}$ 时, 由于

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \cdot (\pm 1)^n \right| \rightarrow 1 \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故级数发散.

$$2817. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1).$$

解 记 $a_n = \frac{n!}{a^{n^2}}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

故收敛半径 $R = +\infty$; 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2818.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

解 记 $a_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p = 2,$$

故收敛半径 $R = 2$; 收敛区间为 $(-2+1, 2+1)$, 即 $(-1, 3)$.

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p,$$

由2689题的结果知: 若 $p > 2$, 为绝对收敛; 若 $0 < p \leq 2$, 为条件收敛; 若 $p \leq 0$, 为发散.

当 $x = 3$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$$

若 $p > 2$, 为绝对收敛; 若 $p \leq 2$, 为发散.

2819.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p x^n.$$

解 记 $\sigma_n = (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^2 = 2^2,$$

故收敛半径 $R = 2^2$, 收敛区间为 $(-2^2, 2^2)$.

当 $x = -2^2$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \left(\frac{2n+3}{2n+2} \right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{p}{2n+2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故由高斯判别法知: 当 $\frac{p}{2} > 1$ (即 $p > 2$) 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 (由于是正项级数, 故也是绝对收敛),

当 $\frac{p}{2} \leq 1$ (即 $p \leq 2$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当 $x = 2^2$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right]^p, \end{aligned} \quad (1)$$

由前段知, 当 $p > 2$ 时, 为绝对收敛; 当 $0 < p \leq 2$ 时, 由于

$$\begin{aligned} & \left| (-1)^n \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p \right| \\ & \sim \left[\frac{4^n \cdot 2n\pi \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n}}{\sqrt{(4n+2)\pi} \cdot (2n+1)^{2n+1} e^{-(2n+1)}} \right]^p \\ & = \left[\frac{4^n \cdot 2\pi e}{\sqrt{(4n+2)\pi} \cdot 2^{2n+1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n+1}} \right]^p \rightarrow 0 \\ & \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

且

$$\frac{\left[\frac{4^{n+1} [(n+1)!]^2}{(2n+3)!} \right]^p}{\left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+3} \right)^p < 1,$$

故级数 (1) 逐项下降, 根据莱布尼兹判别法知级数 (1) 收敛, 但由于由其绝对值组成的级数发散. 因此, 当 $0 < p \leq 2$ 时, 级数 (1) 条件收敛. 当 $p = 0$ 时, 通项为 $(-1)^n$, 故级数为发散; 当 $p < 0$ 时, 通项趋于无穷, 因而级数也发散.

2820. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n.$

解 记 $a_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R=1$ ；收敛区间为 $(-1, 1)$ 。

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n},$$

利用2700题的结果，即知：当 $m \geq 0$ 时，绝对收敛；当 $-1 < m < 0$ 时，条件收敛；当 $m \leq -1$ 时，发散。

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}, \end{aligned}$$

显见当 $m \geq 0$ 时为绝对收敛；当 $m < 0$ 时：若 m 为负整数，设为 $-k$ (k 为正整数)，则通项为

$$\begin{aligned} & \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

故级数发散；若 m 不为负整数，由于通项为正，并且

总可以大于 $\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$ ，其中 $-m > k$ ，故

级数也发散。因此，当 $m < 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}$ 发散。

2321. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n \quad (a > 0, b > 0).$

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为 $R_1 = \frac{1}{a}$ 及 $R_2 = \frac{1}{b}$,

故原级数的收敛半径 $R = \min(R_1, R_2) = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$; 收敛区间为 $(-R, R)$.

当 $x = -R$ 时, 若 $a < b$, 则级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{b} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

对于上式右端的第一个级数, 利用达朗伯判别法有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}} \right| = \frac{a}{b} < 1,$$

故知其为绝对收敛, 而第二个级数显然为绝对收敛.

因此, 当 $a < b$ 时, 级数 (1) 绝对收敛, 当 $a \geq b$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{a} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} \right)^n, \end{aligned} \quad (2)$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛 ($b < a$) 或条件收敛 ($b = a$)，故当 $a \geq b$ 时，级数 (2) 条件收敛。

当 $x = R$ 时，若 $a < b$ ，级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{b} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

由前段知其为绝对收敛；若 $a \geq b$ ，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{a} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{b}{a} \right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数。

2822. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0).$

解 记 $a_n = \frac{1}{a^n + b^n}$ ，由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max(a, b) \cdot \frac{1 + \theta^{n+1}}{1 + \theta^n} = \max(a, b), \end{aligned}$$

其中 $\theta = \frac{\min(a, b)}{\max(a, b)}$ ， $0 < \theta \leq 1$ ，故收敛半径 $R = \max(a, b)$ ，收敛区间为 $(-R, R)$ 。

当 $|x| = R$ 时，由于 $\frac{R^n}{a^n + b^n} \rightarrow 1 \neq 0$ ，故级数发

散。

$$2823. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 0).$$

解 记 $a_n = \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}.$$

由于

$$n \left(\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}} - 1 \right) = \frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

且上式右端第一个因式当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 $\ln a$, 故当 $a > 1$ 时, 上式趋于 $+\infty$, 因而级数收敛; 当 $a < 1$ 时, 上式趋于 $-\infty$, 因而级数发散; 而当 $a = 1$ 时, 由于通项为 1, 故级数也发散.

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}.$$

当 $a > 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $a \leq 1$ 时, 由于通项不趋于零, 故级数发散.

总之, 当 $|x| = 1$ 时, 若 $a > 1$, 则级数绝对收

敛；若 $a \leq 1$ ，则级数发散。

$$2824. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

解 记 $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$ ，由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = 1, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R=1$ ，收敛区间为 $(-1, 1)$ 。

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}. \quad (1)$$

由于

$$0 < \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛^{*)}，故级数 (1) 收敛。

当 $x=-1$ 时，级数绝对收敛。

总之，当 $|x|=1$ 时，级数绝对收敛。

*) 利用2823题的结果。

$$2825. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ ，由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$ ；收敛区间为 $(-1, 1)$ 。

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

由拉阿伯判别法易知它是发散级数。

当 $x=-1$ 时，由于 $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+3}{2n+2} > 1$ ，即

$|a_n| > |a_{n+1}|$ ，且有 $|a_n| \rightarrow 0$ ，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

收敛。但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 发散，故当 $x=-1$ 时，级数条件收敛。

2826. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$

解 记 $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ ，由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$ ；收敛区间为 $(-1, 1)$ 。

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (1)$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n &\sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi} e^{-n} n^n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n} > 0\end{aligned}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数 (1) 发散.

当 $x=1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (2)$$

由于

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n = 0$. 又由于

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故 $|a_n| > |a_{n+1}|$. 因此, 级数 (2) 收敛, 但由于级数 (1) 发散, 故级数 (2) 条件收敛.

2827. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n.$

解 记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R=1$ ；收敛区间为 $(-1, 1)$ 。

当 $|x|=1$ 时，由于 $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$)，故级数发散。

$$2828. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$ 。由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4,$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{4}$ ；收敛区间为 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 。

当 $x = \frac{1}{4}$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n \cdot 4^n}. \quad (1)$$

将它拆成两部分，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ ，一部分为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}.$$

前一级数显然发散，而对于后

一级数，利用哥西判别法或达朗伯耳判别法易知其为收敛。因此，级数 (1) 发散。

当 $x = -1$ ，同法可证，原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数，因此，它也是发散的。

$$2829. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{\left(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3,$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$; 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 对于 $n = 8k$, 由于

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + 2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k} \cdot \frac{1}{3^{8k}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8} \end{aligned}$$

及

$$\frac{1}{\ln k + \ln 8} > \frac{1}{k + \ln 8} > 0,$$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \ln 8}$ 发散, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$ 发散.

不难证明: 当 $n = 8k+1, 8k+2, \dots, 8k+7$ ($k = 1, 2, \dots$) 时, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n} \left(\pm \frac{1}{3}\right)^n \quad (1)$$

收敛. 事实上, $\frac{1}{\ln n}$ 单调趋于零, 且

$$\sum_{n=2}^m \left| \left(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n \right| \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \right)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \right)^n \\
&< \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{3}}{1 - \frac{1+\sqrt{2}}{3}} \\
&= \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} < 5,
\end{aligned}$$

根据迪里黑里判别法可知级数 (1) 收敛。

于是, 当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 原级数是由一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的, 因此, 它是发散的。

2830. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$

解 记 $a_n = \frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $|x|=1$ 时, 由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

收敛, 故原级数绝对收敛。

2831. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (普林斯格木级数).

解 记 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R=1$ ；收敛区间为 $(-1, 1)$ 。

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n]}}{n},$$

它是条件收敛的*).

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}] + n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

记 $A_l = \{n \mid [\sqrt{n}] = l\}$ ($l=1, 2, \dots$)。显然 A_l 内的元素可写成 $n=l^2+s$ ，而 $s=0, 1, 2, \dots, 2l$ 。考虑

$$\begin{aligned} u_l &= \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}] + n}}{n} = \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^{l^2+l+s}}{l^2+s} \\ &= \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^s}{l^2+s} \\ &= \frac{1}{l^2} - \left(\frac{1}{l^2+1} - \frac{1}{l^2+2} \right) - \dots \\ &\quad - \left(\frac{1}{l^2+2l-1} - \frac{1}{l^2+2l} \right) \\ &\leq \frac{1}{l^2} \quad (l=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

由于 $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ 收敛，故 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 收敛。注意 $A_l \cap A_r = \emptyset$

$(i \neq j)$ ，且 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ 就是全体自然数，易

证 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 同时收敛或同时发散。由此可见，

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，因而显然是条件收敛的。

*) 利用 2672 题的结果。

2832. 求超越几何级数

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n + \dots$$

的收敛域。

解 记 $a_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)}$ 。

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$ ；收敛区间为 $(-1, 1)$ 。

当 $x=1$ 时，级数为

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} + \dots$$

由于

$$\frac{J_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (|\theta_n| \leq L),$$

故当 $\gamma - \alpha - \beta + 1 > 1$ 即 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时, 级数收敛且也是绝对收敛的; 当 $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$ 时, 级数发散.

当 $x \neq -1$ 时, 由上可知,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

当 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时, 级数绝对收敛; 当 $\gamma - \alpha - \beta < -1$ 时, 从某项开始, 将有

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 1 \quad \text{即} \quad |a_n| < |a_{n+1}|,$$

a_n 不趋于零, 级数发散; 当 $-1 < \gamma - \alpha - \beta$ 时, 在弃去若干个开始项以后, 就变成每项的绝对值单调递减的交错级数了, 并在这里, 把求通项 (绝对值) 的极限化成下列无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$$

的值更为方便. 由于

$$\begin{aligned} & \sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta'_n}{n^2} \right) \\ &= -\infty \quad (|\theta'_n| \leq M), \end{aligned}$$

故上述无穷乘积的值为零, 即 $a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$. 因

此, 级数收敛. 当 $\gamma - \alpha - \beta = -1$ 时, 由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}} =$

$1 + \frac{\theta'_n}{n^2}$, 故无穷乘积的值异于零, 因而 $a_n \neq 0$, 级数发散.

综上所述, 现将超越几何级数的敛散情况列表如下:

$ x < 1$		绝对收敛
$ x > 1$		发 散
$x = 1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq 0$	发 散
$x = -1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$	条件收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq -1$	发 散

求下列广义的幂级数的收敛域:

$$2833. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

解 记 $c_n = \frac{1}{2n+1}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ (即 $x > 0$) 时, 级数绝对收敛;

当 $x < 0$ 时, 级数发散; 当 $x = 0$ 时, 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1},$$

显然发散。于是，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

的收敛域为 $(0, +\infty)$ 。

2834.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

解 记 $a_n = \sin \frac{\pi}{2^n}$ 。由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2, \end{aligned}$$

故当 $\left| \frac{1}{x} \right| < 2$ 即当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时，级数绝对收敛；当

$|x| < \frac{1}{2}$ 时，级数发散；当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时，由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} = \pi \neq 0,$$

故级数发散。于是，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

的收敛域为 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ ，即满足不等式 $|x| > \frac{1}{2}$ 的一切 x 值所成的集合。

$$2835. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{x^n}{2^{n^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \cdot \frac{1}{x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}. \end{aligned}$$

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$$

的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ *) . 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \cdot \frac{1}{x^n}.$$

的收敛域为 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$. 因此, 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} x^n$$

的收敛域为 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ ，即满足不等式 $0 < |x| < +\infty$ 的一切 x 值所成的集合。

*) 利用2815题的结果。

$$2836. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}.$$

解 记 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$, 则原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-x})^n$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1},$$

故当 $|e^{-x}| < \frac{1}{e^{-1}} = e$ 即当 $1 + x > 0$ 或 $x > -1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $x < -1$ 时, 级数发散; 当 $x = -1$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^n = 1 \neq 0,$$

故级数发散. 于是, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$$

的收敛域为 $(-1, +\infty)$.

2837. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3^n} (n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x.$

解 记 $a_n = \frac{3^{3^n} (n!)^3}{(3n)!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} = 1,$$

故当 $|\operatorname{tg} x| < 1$ 即当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 时,

级数绝对收敛, 当 $|x - k\pi| > \frac{\pi}{4}$ 时, 级数发散. 当

$|x - k\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} (\pm 1)^n.$$

由于

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2} < 1,$$

故 $|a_n| < |a_{n+1}|$, 从而 $a_n \neq 0$, 级数发散. 于是, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x$$

的收敛域为满足不等式 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (k 为整数) 的一切 x 值所成的集合.

2838. 把函数

$$f(x) = x^3$$

按二项式 $x+1$ 的正整数幂来展开.

解 方法一

$$\begin{aligned} f(x) &= [(x+1) - 1]^3 \\ &= (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1. \end{aligned}$$

方法二

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1, \quad f'(-1) = 3, \quad f''(-1) = -6, \\ f'''(-1) &= 6, \quad f^{(4)}(-1) = f^{(5)}(-1) = \dots = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$f(x) = -1 + 3(x+1) - \frac{6}{2!}(x+1)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6}{3!} (x+1)^3 \\
& = -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3.
\end{aligned}$$

2839. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{a+x} \quad (a \neq 0)$$

按以下方式展为幂级数：(a) 依 x 的乘幂展开，
(b) 依二项式 $x-b$ 的乘幂展开，此处 $b \neq a$ ；(B) 依 $\frac{1}{x}$ 的乘幂展开。求出对应的收敛域。

$$\begin{aligned}
\text{解 (a)} \quad f(x) &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}},
\end{aligned}$$

收敛域为 $|x| < |a|$ 。

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad f(x) &= \frac{1}{a-b-(x-b)} \\
&= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-b}{a-b}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}},
\end{aligned}$$

收敛域为 $|x-b| < |a-b|$ 。

$$\text{(B)} \quad f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{a}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{x}}$$

$$= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}},$$

收敛域为 $|x| > |a|$.

2840. 把函数 $f(x) = \ln x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂来展开, 并说明展开式的收敛区间. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和.

解 $f(x) = \ln[1 + (x-1)]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}. \quad (1)$$

收敛区间为

$$|x-1| < 1 \quad \text{或} \quad 0 < x < 2.$$

当 $x-1=1$ 即当 $x=2$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

显然收敛, 故当 $0 < x \leq 2$ 时, 级数 (1) 收敛.

由于 $\ln x$ 在 $x=2$ 连续, 故当 $x=2$ 时, (1) 式也成立, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

写出下列函数按变数 x 的正整数幂的展开式, 并求出对应的收敛区间:

2841. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

$$\text{解 } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

收敛区间为 $|x| < +\infty$ 或 $(-\infty, +\infty)$.

2842. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

解 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$

收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2843. $f(x) = \sin^2 x$.

解 $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},$$

收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2844. $f(x) = a^x (a > 0)$.

解 $f(x) = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\ln^n a}{n!} \right|} = |\ln a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2845. $f(x) = \sin(u \arcsin x)$.

解 $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \dots \right) dt$$

$$= x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \dots$$

$$(|x| \leq 1),$$

$$f(x) = u \arcsin x - \frac{u^3}{3!} (\arcsin x)^3$$

$$+ \frac{u^5}{5!} (\arcsin x)^5 - \dots$$

$$= ux + \frac{u(1^2 - u^2)}{3!} x^3$$

$$+ \frac{u(1^2 - u^2)(3^2 - u^2)}{5!} x^5 + \dots,$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

2846. $f(x) = \cos(u \arcsin x)$.

解 $f(x) = 1 - \frac{u^2}{2!} (\arcsin x)^2$

$$+ \frac{u^4}{4!} (\arcsin x)^4 - \dots$$

$$= 1 - \frac{u^2}{2!} x^2 - \frac{u^2(2^2 - u^2)}{4!} x^4 - \dots,$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

2847. 写出函数 $f(x) = x^x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂展开式的前三项.

解 $f(x) = x^x, f(1) = 1,$

$$f'(x) = x^x(1 + \ln x), \quad f'(1) = 1;$$

$$f''(x) = x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}, \quad f''(1) = 2;$$

$$f'''(x) = x^x(1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1} \\ + x^{x-1} \left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right),$$

$$f'''(1) = 3.$$

于是, 展式的前三项为

$$1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \dots,$$

收敛区间为 $|x-1| < 1$, 即 $0 < x < 2$.

2848. 写出函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$) 和 $f(0) = e$ 按变数 x 的正整数幂展开式的前三项.

解 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad f(0) = e;$

$$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} \right] \\ = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[-\frac{1}{x^2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right] \\ = (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right] \\ (x \neq 0).$$

由微分学中值定理知

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi),$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 从而

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi)$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = -\frac{e}{2};$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{x^3} \ln(1+x) - \frac{1}{x^2(1+x)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \right\} \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o_1(x) \right\} \\ &\quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

仿上可得

$$f''(0) = \frac{11}{12}e;$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^3 \right. \\ &\quad \left. + 3 \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right] \right. \\ &\quad \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o_1(x) \right] \\ &\quad \left. + \left[-\frac{6}{x^4} \ln(1+x) + \frac{2}{x^3(1+x)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{(1+x)^3} \right\}$$

($x \neq 0$) .

同理可得

$$f'''(0) = -\frac{21}{8}e.$$

于是, 展式的前三项为

$$e \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \dots \right),$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

2849. 把函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按变数 h 的正整数幂展开.

解 $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$

$$= \sin x \cdot \left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \dots \right)$$

$$+ \cos x \cdot \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \dots \right)$$

$$= \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \dots,$$

同法可求得

$$\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x$$

$$+ \frac{h^3}{3!} \sin x + \dots,$$

它们的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2850. 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$

的幂级数展开式的收敛区间: (a) 依 x 的乘幂展开;

(6) 依二项式 $x - 5$ 的乘幂展开.

解 (a) 由于

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{3}},\end{aligned}$$

及等式右端第一项的展开式的收敛区间为 $(-2, 2)$, 而第二项的展开式的收敛区间为 $(-3, 3)$, 故取其公共部分即得函数 $f(x)$ 展为关于 x 的乘幂的幂级数的收敛区间 $(-2, 2)$.

$$\begin{aligned}(6) \quad \frac{x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{3}{(x-5)+2} - \frac{2}{(x-5)+3} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{3}}.\end{aligned}$$

上式右端第一项的展开式的收敛区间为 $|x-5| < 2$, 而第二项展开式的收敛区间为 $|x-5| < 3$, 取其公共部分, 即得函数 $f(x)$ 展为关于 $x-5$ 乘幂的幂级数的收敛区间为 $|x-5| < 2$ 或 $(3, 7)$.

利用 I—V 基本展开式, 写出下列函数关于 x 的幂级数展开式:

2851. e^{-x^2} .

$$\begin{aligned}
 \text{解 } e^{-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (|x| < +\infty) .
 \end{aligned}$$

2852. $\cos^2 x$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \quad (|x| < +\infty) .
 \end{aligned}$$

2853. $\sin^3 x$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \\
 &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
 &\quad (|x| < +\infty) .
 \end{aligned}$$

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

$$\text{解 } \frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=10}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1) .$$

$$2855. \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{1}{(1-x)^2} &= (1-x)^{-2} \\ &= 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$2856. \frac{x}{\sqrt{1-2x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{x}{\sqrt{1-2x}} &= x(1-2x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= x \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) \right. \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2 \\ &\quad \left. + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3 + \dots \right] \\ &= x + x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2!}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!}x^4 + \dots \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1} \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 上式右端为一交错级数

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

利用2689题的结果, 即知它是收敛的.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 无定义, 故不必研究级数的敛散性. 从而

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}\right).$$

2857. $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

2858. $\frac{x}{1+x-2x^2}.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{x}{1+x-2x^2} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n \quad (|x| < \frac{1}{2}).$$

$$2859. \frac{12-5x}{6-5x-x^2}.$$

$$\text{解} \quad \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{6}{6+x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+\frac{x}{6}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n} \right] x^n \quad (|x| < 1).$$

$$2860. \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}.$$

$$\text{解} \quad \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad *)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{1+(-1)^n}{2} \right] x^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1-(-1)^n}{2} \right] x^n \quad (|x| < 1).$$

*) 利用2855题的结果.

$$2861. \frac{1}{1-x-x^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{2}{\sqrt{5}-1} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{5}+1} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^n \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1} \right] x^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} \right] x^n \\
&\quad \left(|x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).
\end{aligned}$$

$$2862. \quad \frac{1}{1+x+x^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \frac{1}{1+x+x^2} \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} x \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} x \right)^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} x^n \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} x^n \right] \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right] x^n.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right] \\
&= (-1)^n \left[\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right] \\
&= (-1)^n \left[\left(\cos \frac{n+1}{3} \pi + i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\cos \frac{n+1}{3} \pi - i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \right] \\
&= (-1)^n \cdot 2i \sin \frac{n+1}{3} \pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2i \cdot (-1)^n \sin \left[(n+1)\pi - \frac{2(n+1)}{3}\pi \right] \\
&= 2i \cdot (-1)^n \cdot \left[-\cos(n+1)\pi \sin \frac{2(n+1)}{3}\pi \right] \\
&= 2i \cdot (-1)^n \cdot (-1) \cdot (-1)^{n+1} \sin \frac{2(n+1)}{3}\pi \\
&= 2i \sin \frac{2(n+1)}{3}\pi,
\end{aligned}$$

故得

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

其中 $|x| < \min \left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|}, \frac{2}{|1-i\sqrt{3}|} \right) = 1$,

即 $|x| < 1$.

2863. $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$

解 $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$

$$\begin{aligned}
&= -1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{x - (\cos \alpha + i \sin \alpha)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{x - (\cos \alpha - i \sin \alpha)} \right] \\
&= -1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - x(\cos \alpha - i \sin \alpha)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1 - x(\cos \alpha + i \sin \alpha)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^n (\cos n\alpha - i \sin n\alpha + \cos n\alpha + i \sin n\alpha) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min \left(\frac{1}{|\cos \alpha + i \sin \alpha|}, \frac{1}{|\cos \alpha - i \sin \alpha|} \right) = 1$.

2864. $\frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} \quad ^*)$

解
$$\begin{aligned}
&\frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} \\
&= \frac{ix}{2} \left[\frac{1}{x - (\cos \alpha - i \sin \alpha)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{x - (\cos \alpha + i \sin \alpha)} \right] \\
&= \frac{ix}{2} \left[-\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{1 - x(\cos \alpha + i \sin \alpha)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{1 - x(\cos \alpha - i \sin \alpha)} \right] \\
&= \frac{ix}{2} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{n+1} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos \alpha - i \sin \alpha)^{n+1} \Big] \\
& = \frac{ix}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n [-\cos(n+1)\alpha - i \sin(n+1)\alpha \\
& \quad + \cos(n+1)\alpha - i \sin(n+1)\alpha] \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \sin(n+1)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < 1$.

*) 译本误为 $\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$.

$$2865. \quad \frac{x \operatorname{sh} \alpha}{1 - 2x \operatorname{ch} \alpha + x^2}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \frac{x \operatorname{sh} \alpha}{1 - 2x \operatorname{ch} \alpha + x^2} \\
& = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha}{x - (\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha)} - \frac{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha}{x - (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha)} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[\frac{e^\alpha}{x - e^\alpha} - \frac{e^{-\alpha}}{x - e^{-\alpha}} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1 - xe^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - xe^\alpha} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-n\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{n\alpha} \right] \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min(e^{-\alpha}, e^\alpha) = e^{-|\alpha|}$.

$$2866. \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!} (x^2)^n \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$2867. \ln(1+x+x^2+x^3).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \ln(1+x+x^2+x^3) \\ & = \ln[(1+x)(1+x^2)] = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) \end{aligned}$$

但

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

故当 $-1 < x \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \ln(1+x+x^2+x^3) \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} \\ & \quad + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1} (1+(-1)^m) \frac{x^m}{m} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} (1 + (-1)^n)}{n} x^n.$$

2868. $e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$.

解 首先注意到

$$e^{x \cos \alpha + ix \sin \alpha} = e^{x(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = e^{xe^{i\alpha}}$$

的实部就是 $e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$. 为此, 先求 $e^{xe^{i\alpha}}$,

$$\begin{aligned} e^{xe^{i\alpha}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (xe^{i\alpha})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{in\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (\cos n\alpha + i \sin n\alpha). \end{aligned}$$

比较上式两端的实部, 即得

$$\begin{aligned} e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} x^n \\ & \quad (|x| < +\infty). \end{aligned}$$

比较虚部, 还可得到

$$\begin{aligned} e^{x \cos \alpha} \sin(x \sin \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n!} x^n \\ & \quad (|x| < +\infty). \end{aligned}$$

首先展开导函数, 然后用逐项积分的方法以求下列函数的幂级数展开式.

2869. $f(x) = \arctg x$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

$$\text{解 } \arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

这里逐项积分的条件是满足的. 事实上, 当 $t \in [0, x]$ 且 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ 是一致收敛的, 并且各项均连续. 以下各题类似, 不再一一说明. 上述级数的收敛区间为 $|x| < 1$, 当 $|x| = 1$ 时, 为交错级数, 且满足莱布尼兹判别法的条件, 故在端点 $x = \pm 1$ 处, 级数均收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

令 $x = 1$, 即得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \\ &= \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2870. $f(x) = \arcsin x$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 利用 2604 题的结果, 由于 $\frac{p}{2} + q = \frac{1}{2} + 1 > 1$, 故级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

2871. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 级数为绝对收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

2872. $f(x) = \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2) &= \int_0^x \frac{2t - 2 \cos \alpha}{1 - 2t \cos \alpha + t^2} dt \\ &= -2 \int_0^x \frac{1}{t} \cdot \frac{t \cos \alpha - t^2}{1 - 2t \cos \alpha + t^2} dt \\ &= -2 \int_0^x \left(\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\alpha \right) dt^{**)} \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n. \end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 由2698题知, 对于 $0 < \alpha < \pi$, 级数收敛. 因此, 当 $0 < \alpha < \pi$ 时, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$. 但当 $\alpha = 0$ 且 $x = 1$ 时, 级数发散; 当 $\alpha = 0$ 且 $x = -1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha = \pi$ 且 $x = 1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha = \pi$ 且 $x = -1$ 时, 级数发散.

*) 利用2863题的结果.

2873. 利用各种方法, 求下列函数展为幂级数的展开式:

(a) $f(x) = (1+x)\ln(1+x);$

(б) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x;$

(в) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2-2x}{1+4x};$

(г) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{2-x^2};$

(д) $f(x) = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \ln \sqrt{1+x^2};$

(е) $f(x) = \operatorname{arc} \cos(1-2x^2);$

(ж) $f(x) = x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2};$

(з) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$

解 (a) $f(x) = (1+x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$
 $= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad (|x| < 1),$

当 $|x| = 1$ 时, 级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

(б) $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad *)$
 $+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad **)$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (|x| < 1).$

*) 利用2857题的结果.

**) 利用2869题的结果.

(B) 由于

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\arctan \frac{2-2x}{1+4x} \right)' \\ &= -\frac{2}{1+4x^2}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \arctan \frac{2-2x}{1+4x} &= -2 \int_0^x \frac{dt}{1+4t^2} + \arctan 2 \\ &= -2 \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (4t^2)^{n-1} \right] dt + \arctan 2 \\ &= \arctan 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \quad \left(|x| < \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时, 级数为交错级数, 且满足莱布尼兹判别法的条件, 故收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq \frac{1}{2}$.

(r) 由于

$$f'(x) = \left(\arctan \frac{2x}{2-x^2} \right)' = \frac{4+2x^2}{4+x^4},$$

故

$$\begin{aligned} \arctan \frac{2x}{2-x^2} &= \int_0^x \frac{4+2t^2}{4+t^4} dt \\ &= \int_0^x \left[\left(1 + \frac{t^2}{2} \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^4}{4} \right)^n \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{t^{2n}}{2^n} \right] dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)} \quad (|x| \leq \sqrt{2}) .
\end{aligned}$$

当 $|x| = \sqrt{2}$ 时, 级数为

$$\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{2n+1}$$

及 $-\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{2n+1},$

它们均由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+1} \quad \text{及} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+3}$$

逐项相加并分别乘以常数 $\sqrt{2}$ 及 $-\sqrt{2}$ 而得, 故它们收敛. 因此, 原级数的收敛域为 $|x| \leq \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
(1) \quad f(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad *) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n-1} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} \\
&\quad (|x| \leq 1) .
\end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$ 收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

*) 利用2869题的结果.

(e) 由于

$$f'(x) = [\arccos(1-2x^2)]' = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

及 $f(0)=0$, 故

$$\begin{aligned} \arccos(1-2x^2) &= 2 \operatorname{sgn} x \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= 2 \operatorname{sgn} x \cdot \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\ &= 2 \operatorname{sgn} x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \\ &= 2|x| \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] \\ &\quad (|x| \leq 1). \end{aligned} \quad (1)$$

当 $|x|=1$ 时, 级数为

$$2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \right].$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(-\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

即知它是收敛的。因此，级数 (1) 的收敛域为 $|x| \leq 1$ 。

$$\begin{aligned}
 (ж) \quad f(x) &= x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]^{*}) \\
 &\quad + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\
 &= 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \\
 &\quad (|x| \leq 1) ,
 \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时，对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 + 11n}{(2n+1)^2} = \frac{5}{2} > 1 ,$$

即知它是收敛的。因此，原级数的收敛域为 $|x| \leq 1$ 。

*) 利用2870题的结果。

$$\begin{aligned}
 (в) \quad f(x) &= x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]^{*}) = \left[1 + \frac{1}{2} x^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\
 &= -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}
 \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1).$$

*) 利用2371题的结果.

2874. 利用展开式

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

的唯一性, 求下列函数的 n 阶导函数:

$$(A) f(x) = e^{x^2}; \quad (B)^+ f(x) = e^{\frac{1}{x}};$$

$$(B)^+ f(x) = \arctg x.$$

解 (A) $f(x+h) - f(x) = e^{(x+h)^2} - e^{x^2}$
 $= e^{x^2}(e^{2xh+h^2} - 1)$
 $= e^{x^2} \left[(2xh+h^2) + \frac{1}{2!} (2xh+h^2)^2 + \dots \right.$
 $\left. + \frac{1}{n!} (2xh+h^2)^n + \dots \right],$

其中 h^n 的系数为

$$e^{x^2} \left[\frac{1}{n!} (2x)^n + \frac{1}{(n-1)!} C_{n-1}^1 (2x)^{n-2} \right.$$

 $\left. + \frac{1}{(n-2)!} C_{n-2}^2 (2x)^{n-4} + \dots \right]$
 $= \frac{e^{x^2}}{n!} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} \right.$
 $\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right].$

将 $f(x+h) - f(x)$ 的展开式中 h^n 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与

之比較，即得

$$(e^{x^2})^{(n)} = e^{x^2} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right].$$

$$\begin{aligned} (6) \quad f(x+h) - f(x) &= e^{\frac{a}{x+h}} - e^{\frac{a}{x}} \\ &= e^{\frac{a}{x}} \left(e^{-\frac{a}{x} \cdot \frac{h}{x+h}} - 1 \right) = e^{\frac{a}{x}} \left(e^{\frac{-a \frac{h}{x^2}}{1 + \frac{h}{x}}} - 1 \right) \\ &= e^{\frac{a}{x}} \left[e^{-\frac{ah}{x^2} + \frac{ah^2}{x^3} - \frac{ah^3}{x^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}} + \dots} \right. \\ &\quad \left. - 1 \right] \\ &= e^{\frac{a}{x}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{ah^{k+1}}{x^{k+2}} \right]^m \right\} \\ &= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \cdot \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1+1} \left(\frac{h}{x} \right)^{k_1+1} \\ &\quad \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_2+1} \left(\frac{h}{x} \right)^{k_2+1} \dots \\ &\quad \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_m+1} \left(\frac{h}{x} \right)^{k_m+1} \\ &= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \\ &\quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=s} (-1)^{k_1+\dots+k_m+m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1 + \dots + k_m + m} \\
& = e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \right. \\
& \quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_m = s} 1 \right) (-1)^s \left(\frac{h}{x}\right)^s \Big] \\
& = e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \right. \\
& \quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+m-1}^s (-1)^s \left(\frac{h}{x}\right)^s \Big]^{(*)} \\
& = e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s} a^m}{m! x^n} \left(\frac{h}{x}\right)^{m+s} C_{s+m-1}^s \\
& = e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{s+m=n \\ s \geq 0, m \geq 1}} \frac{(-1)^n a^n}{m! x^n} \left(\frac{h}{x}\right)^n C_{n-1}^s \\
& = e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \left(\frac{h}{x}\right)^n \sum_{\substack{s+m=n \\ s \geq 0, m \geq 1}} C_{n-1}^s x^{n-m} \frac{a^m}{m!} \\
& = e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} h^n \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s \frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!} \\
& = e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n h^n,
\end{aligned}$$

其中

$$A_n = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{s-n} x^s,$$

于是, 比较 h^n 的系数, 即得

$$\begin{aligned}
\left(e^{\frac{a}{x}}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s \\
&= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x \right. \\
&\quad + \frac{n(n-1) \cdot (n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2 \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{3!} a^{n-3} x^3 + \dots \right].
\end{aligned}$$

*) 其中 $\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} 1 = C_{s+m-1}^s$ 推导如下:

令 $|t| < 1$, 一方面由 $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ 得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-t}\right)^m &= \sum_{k_1=0}^{\infty} t^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_2} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} t^{k_m} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_m = s} t^{k_1 + k_2 + \dots + k_m} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_m = s} 1 \right) t^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} P_s t^s,
\end{aligned}$$

其中 $P_s = \sum_{k_1 + \dots + k_m = s} 1$. 另一方面, 又由

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m = (1-t)^{-m}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!} (-1)^s t^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{2s} \frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!} t^s \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} C_{m+s-1}^s t^s,
\end{aligned}$$

由幂级数展开的唯一性，即知 $P_s = C_{m+s-1}^s$ 。

(B) 根据

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy},$$

$$\text{令 } y = \frac{\frac{h}{1+x^2}}{1 + \frac{x}{1+x^2}h}, \text{ 就有 } \frac{x+y}{1-xy} = x+h. \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \\
&= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \\
&= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\frac{h}{1+x^2}}{1 + \frac{x}{1+x^2}h} \right).
\end{aligned}$$

由2869题的结果知，当 $|y| \leq 1$ 时，有

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{2m+1}.$$

而当 h 很小（且 $|x| \leq 1$ ）时，有

$$y = \frac{\frac{h}{1+x^2}}{1 + \frac{x}{1+x^2}h}$$

$$= \frac{h}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2} h \right)^k.$$

于是

$$\begin{aligned} & f(x+h) - f(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left[\frac{h}{1+x^2} \right. \\ & \quad \cdot \left. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2} h \right)^k \right]^m \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^m \\ & \quad \cdot \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m} \\ & \quad \cdot \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^m \\ & \quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \right) (-1)^s \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^s \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{m+s} x^s \\ & \quad \cdot (-1)^s C_{m+s-1}^s \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m+s=n \\ m \geq 1, s \geq 0}} (-1)^{m+s} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{m+s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{x^s}{2m+1} C_{n+s-1}^s \\
& = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^n A_n,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\substack{n+s=n \\ n \geq 1, s \geq 0}} \frac{x^s}{2m+1} C_{n-1}^s \\
&= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s \quad (n=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

因此, 比较 h^n 的系数, 即得

$$\begin{aligned}
(\arctg x)^{(n)} &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} A_n \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s \\
&= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \left[\frac{1}{3} x^{n-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{5} (n-1) x^{n-2} + \dots \right],
\end{aligned}$$

2875. 把函数

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$$

依二项式 $x+1$ 的正整数乘幂展开.

解 $f(x) = -\ln[1+(x+1)^2]$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x+1)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n},$$

收敛域为 $|x+1| \leq 1$ 或 $-2 \leq x \leq 0$.

2876. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

按变数 x 的负乘幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \quad (|x| > 1). \end{aligned}$$

2877. 把函数

$$f(x) = \ln x$$

按分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \ln \frac{1 + \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} \quad (*) \quad (x > 0). \end{aligned}$$

*) 利用2857题的结果.

2878. 把函数

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

按分式 $\frac{x}{1+x}$ 的正整数幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= \frac{x}{1+x} \sqrt{1+x} \\
 &= \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}} \\
 &= \frac{x}{1+x} \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{x}{1+x} \\
 &\quad \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(-\frac{x}{1+x}\right)^n\right] \\
 &= \frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1},
 \end{aligned}$$

当 $\left|\frac{x}{1+x}\right| < 1$ 即当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, 级数收敛. 当

$x = -\frac{1}{2}$ 时, 由 2689 题的结果知, 它条件收敛. 因

此, 级数的收敛域为 $x \geq -\frac{1}{2}$.

2879. 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

直接证明

$$f(x)f(y) = f(x+y).$$

$$\begin{aligned}
\text{证 } f(x)f(y) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{x^{n_1}}{(n_1)!} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{y^{n_2}}{(n_2)!} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1=0}^n C_n^{n_1} x^{n_1} y^{n-n_1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = f(x+y).
\end{aligned}$$

上述级数在 $|x| < +\infty$ 及 $|y| < +\infty$ 上绝对收敛，故重新组合是允许的。

事实上， $f(x) = e^x$ ，等式

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

即为指数函数的特征。

2880. 假如我们定义

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

及

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

证明: (a) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$;

$$(6) \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

证 由于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式在 $|x| < +\infty$ 内绝对收敛, 故级数相乘或相加、减均仍绝对收敛, 且可重新组合. 因此, 以下的级数运算都是合理的.

$$(a) \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} \frac{x^{2n_1+1}}{(2n_1+1)!} \\ &\quad \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{x^{2n_2}}{(2n_2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} (-1)^{n_1+n_2} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2n_1+2n_2+1}}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+1} \right. \\ &\quad \cdot \left. \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n x^{2n+1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\
&= \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2)=2n+1 \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1 \\ k_1-\text{奇数} \\ k_2-\text{偶数}}} \frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!} \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{k_1 \text{ 奇}, k_2 \text{ 偶}} + \sum_{k_1 \text{ 偶}, k_2 \text{ 奇}} \right) \\
&= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot 2^{2n+1}.
\end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned}
\sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{2} \sin 2x.
\end{aligned}$$

$$(6) \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \\
&\quad + \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2} \frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!(2k_2)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+2} \right. \\
&\quad \cdot \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \Big] \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^m x^{2m} \right. \\
&\quad \cdot \sum_{\substack{k_1+k_2=m \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \Big] \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} + \sum_{n=0}^{\infty} \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} A_n,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\substack{k_1+k_2=n+1 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \\
&\quad - \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \\
&\quad \cdot \left[\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2 \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \left[\frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{k'=0,2,\dots,2n+2} C_{2n+2}^{k'} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l'=1,3,\dots,2n+1} C_{2n+2}^{l'} \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{s=0,2,\dots,2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1,3,\dots,2n+1} (-1)^s C_{2n+2}^s \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{s=0}^{2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} [1 + (-1)]^{2n+2} \\
&= 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

因而得

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (|x| < +\infty).$$

2881. 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1} \right) \right]^{-1}$ 展为幂级数的展开式中之若干项.

$$\text{解 } f(x) = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right) \\
&\quad + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)^3 + \dots \\
&= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{24} - \dots \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

对于幂级数进行相应的运算以求下列函数展成幂级数的展开式:

2882. $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad f(x) &= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] x^n \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).
\end{aligned}$$

2883. $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}$.

解 当 $x \geq 0$ 时, $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] x^{\frac{n}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!};
\end{aligned}$$

当 $x \leq 0$ 时, 易知 $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \cos \sqrt{|x|}$,

从而

$$\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!},$$

故 $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \quad (|x| \leq +\infty).$

从而

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - 2x + x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{3}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2n-4)!} \right] x^n \quad (|x| \leq +\infty). \end{aligned}$$

2884. $f(x) = \ln^2(1-x),$

解
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3(n-2)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 1} \right] x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} \right) \frac{1}{n+1} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{n+1} \Big] x^{n+1} \\
& = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
& \quad (|x| < 1) .
\end{aligned}$$

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} .$$

由于

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} \\
& \geq \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{n+2} \\
& \quad (n = 2, 3, \cdots) ,
\end{aligned}$$

并且有

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1} \\
& = \frac{C + \ln n + e_n}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) ,
\end{aligned}$$

故它是收敛的.

当 $x = 1$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n+1}$ 发散且原级数为正项级

数, 故 $2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n+1}$ 也发散.

因此, 级数

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

的收敛域为 $-1 \leq x < 1$.

*) 利用146题的结果.

2885. $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= (1+x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad *) \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) x^{2n+1} \\ &= x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1} \quad (|x| \leq 1) . \end{aligned}$$

*) 利用2869题的结果.

2886. $f(x) = e^x \cos x$.

解 $e^x \cos x$ 为 $e^x(\cos x + i \sin x)$ 的实部. 由于

$$\begin{aligned} e^x(\cos x + i \sin x) &= e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(1+i)x]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (1+i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

比较上式两端的实部, 即得

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty) .$$

2887. $f(x) = e^x \sin x$.

解 利用2886题的等式, 并比较此等式两端的虚部, 即得

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).$$

2888. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} x^{n_1} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{x^{n_2+1}}{n_2+1} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{n+1} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{n_2+1} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n \right] \\ &\quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 通项的绝对值 ≥ 1 , 显然发散. 因此, 级数的收敛域为 $|x| < 1$.

2889. $f(x) = (\arctg x)^2$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \right)^2 * \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1) \cdot 1} + \frac{1}{(2n-3) \cdot 3} + \cdots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1 \cdot (2n-1)} \Big] x^{2n} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{2n} \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2n} + \dots \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{1}{2n} \right] x^{2n} \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) \frac{x^{2n}}{n} \\
& \quad (|x| \leq 1).
\end{aligned}$$

*) 利用2869题的结果.

2890. $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2.$

解 令 $\varphi(x) = (\arcsin x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-1 < x < 1),$
 则

$$\varphi'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

由于 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, 故 $a_0 = a_1 = 0$.

由 $\sqrt{1-x^2} \varphi'(x) = 2 \arcsin x$ 得

$$\sqrt{1-x^2} \varphi''(x) - \frac{x \varphi'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

即

$$(1-x^2)\varphi''(x)-x\varphi'(x)=2 \quad (-1<x<1) .$$

将 $\varphi(x)$ 的展开式代入, 并注意到 $a_0=a_1=0$, 可得

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n=2$$

$$\text{或} \quad \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nx^n=2 ,$$

也即

$$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n]x^n=2 \\ (-1<x<1) .$$

比较上式 x 的同次幂的系数, 得

$$a_2=1, \quad a_3=0 ,$$

$$a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \quad (n\geq 2) .$$

从而可得

$$a_{2k+1}=0 ,$$

$$a_{2k+2}=\frac{2[(2k)_1]^2}{(2k+2)_1}=\frac{2^{2k+1}(k_1)^2}{(2k+2)_1}$$

$$(k=0, 1, 2, \dots) .$$

于是,

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k_1)^2}{(2k+2)_1}x^{2k+2} \quad (-1<x<1) .$$

从而得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k_1)^2}{(2k+2)_1}x^{2k} \quad (-1<x<1) .$$

显然右端的幂级数当 $x=\pm 1$ 时均收敛, 而左端的函

数当 $x = \pm 1$ 时连续, 故由幂级数的亚伯耳定理知, 上述展式当 $x = 1$ 及 $x = -1$ 时也成立. 写出下列函数按变数 x 的正乘幂展开成幂级数的展开式 (异于零) 的前三项:

2891. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

解 方法一

直接应用台劳公式, 先求导数, 有

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \sec x, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = 2 \sec^2 x \operatorname{tg} x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = 2 \sec^4 x + 4 \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x, \quad f'''(0) = 2;$$

$$f^{(4)}(x) = 8 \sec^4 x \operatorname{tg} x + 8 \sec^2 x \operatorname{tg}^3 x \\ + 8 \sec^4 x \operatorname{tg} x,$$

$$f^{(4)}(0) = 0;$$

$$f^{(5)}(x) = 32 \sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 8 \sec^6 x \\ + 16 \sec^2 x \operatorname{tg}^4 x + 24 \sec^4 x \operatorname{tg}^2 x \\ + 32 \sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 8 \sec^6 x,$$

$$f^{(5)}(0) = 16,$$

.....

于是,

$$f(x) = x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{16}{5!} x^5 + \dots$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \dots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right).$$

方法二

当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 记 $\xi = 1 - \cos x$, 则 $|\xi| < 1$, 有

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{1 - \xi} \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \\
 &\quad \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right]^n \\
 &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \\
 &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} (-1)^{k_1+\cdots+k_m+m} \\
 &\quad \cdot \frac{x^{2(k_1+\cdots+k_m)}}{(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \\
 &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{s+l+m-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{x^{2l+2s-1}}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_n)!} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
& \quad + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2s-1} \\
& \quad \cdot \sum_{\substack{l+s=m \\ l \geq 1}} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_n \geq 1}} \\
& \quad (-1)^m \frac{1}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{2s-1},
\end{aligned}$$

其中 $A_1 = 1$ ，而当 $n \geq 2$ 时，有

$$\begin{aligned}
A_n = & (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1)!} \right. \\
& + \sum_{\substack{l+s=m \\ l \geq 1}} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_n \geq 1}} \\
& \left. \frac{(-1)^m}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_n)!} \right].
\end{aligned}$$

例如，当 $n=2$ ($l=1, s=1, m=1, k_1=1$) 时，

得 $A_2 = \frac{1}{3}$ ；当 $n=3$ ($l=2, s=1, m=1, k_1=1$ ；

$l=1, s=2, m=1, k_1=2$ ； $l=1, s=2, m=2$ ，

$k_1=1, k_2=1$) 时，得 $A_3 = \frac{1}{5!} + (-1) \frac{1}{3!2!}$

$+(-1) \frac{1}{4!} + \frac{1}{2!2!} = \frac{2}{15}$, 等等. 于是有

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right).$$

2892. $f(x) = \operatorname{th} x$.

解 运用幂级数展开式的唯一性定理, 为求展开式可以考虑在 $x=0$ 点附近作幂级数展开. 注意当 $|x|$ 很小, 且幂级数中常数项为零时, 其收敛的和是很小的. 于是, 以下的写法是可以的, 取其前三项, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)} \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \\ &\quad \cdot \left[1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^2 - \dots \right] \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{24} + \dots \right) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

如果详细一些, 可进一步叙述如下:

首先, 可有一特殊的幂级数

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots,$$

如若 $|x| \leq \rho$ 且 $\frac{\frac{\rho}{2}}{1 - \frac{\rho}{3}} = 1$, 例如取 $\rho = \frac{6}{5} = 1.2$ 时,

有 $\frac{\rho}{2!} + \frac{\rho^2}{3!} + \dots \leq 1$, 此时得

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots$$

($|x| \leq 1.2$).

易见 $A_3 = 0$, $A_5 = 0$, $A_7 = 0$, \dots . 于是, 上式可改写为

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \cdot \frac{x^2}{2!} - B_2 \cdot \frac{x^4}{4!} \\ + B_3 \cdot \frac{x^6}{6!} - \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 B_1, B_2, B_3, \dots 为伯努里 (Bernoulli) 常数*), 有

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42},$$

$$B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad \dots,$$

由

$$x \coth \frac{x}{2} = x \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2x}{e^x - 1} + x$$

及 (1) 式, 即得

$$\frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} = 1 + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + B_3 \frac{x^6}{6!} - \dots$$

于是

$$\begin{aligned} x \operatorname{cth} x &= 1 + B_1 \frac{2^2 x^2}{2!} - B_2 \frac{2^4 x^4}{4!} \\ &\quad + B_3 \frac{2^6 x^6}{6!} - \dots \end{aligned}$$

若 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{cth} x &= \frac{1}{x} + B_1 \frac{2^2 x}{2!} - B_2 \frac{2^4 x^3}{4!} \\ &\quad + B_3 \frac{2^6 x^5}{6!} - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

注意到

$$\operatorname{th} x = 2 \operatorname{cth} 2x - \operatorname{cth} x$$

及当 $x=0$ 时, $\operatorname{th} x=0$, 由 (2) 式即有

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{B_1}{2!} (2^4 - 2^2) x - \frac{B_2}{4!} (2^8 - 2^4) x^3 \\ &\quad + \frac{B_3}{6!} (2^{12} - 2^6) x^5 - \dots \\ &= x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

还可指出的是, 它的系数与 $\operatorname{tg} x$ 展开式相应项的系数的绝对值是相同的, 两者相应各系数只是符号上有交错变异而已 (可参看本题解末加注的 Bromwich 所

著一书的相应章节)，而 $\operatorname{tg} x$ 的幂级数展开式当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时收敛，故上述的级数 (3) 当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时收敛。

*) 参看 Bromwich 著 *An introduction to the theory of infinite series* 一书第十一章100款。

$$2893. f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}.$$

解 与2892题的想法一样，可以考虑 $x \neq 0$ 且 $|x|$ 很小的情形。于是有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \right. \\ &\quad \cdot \left[1 + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots \right)^2 + \dots \right] - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \right. \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{31}{15120}x^6 + \dots \right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \dots \right)$$

$$= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots$$

故 $f(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{45}x^2 - \frac{2}{945}x^4 - \dots$ ($0 < |x| < \pi$) .

一般说来, 为求通项可作如下进一步的讨论:

考虑当 $x \neq 0$ 时, $g(x) = x f(x) = x \operatorname{ctg} x - 1$,
而当 $|x| < \pi$ 时, 有

$$g(x) = x \operatorname{ctg} x - 1 = \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} - 1 = \frac{\cos x}{1 - \xi} - 1,$$

其中

$$\xi = 1 - \frac{\sin x}{x},$$

注意到 $|\sin x| < |x|$, 故 $|\xi| < 1$. 因而

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n - 1 \\ &= \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \right] \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m \right) - 1 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \xi^m. \end{aligned}$$

由于

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!},$$

故有

$$\begin{aligned}\xi^m &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m+m} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2(k_1+k_2+\cdots+k_m)}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!\cdots(2k_m+1)!} \\ &= \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^{s+m} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \xi^m &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^{s+m} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s A_s x^{2s},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}A_s &= \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{(-1)^m}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!} \\ &\quad (s=1, 2, \dots).\end{aligned}$$

又有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \xi^m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^{s+m+l} \\
&\quad \cdot \frac{x^{2s+2l}}{(2l)!(2k_1+1)!\dots(2k_m+1)!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n B_n x^{2n},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
B_n = & \sum_{\substack{s+l=n \\ s \geq 1, l \geq 1}} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \\
& \frac{(-1)^m}{(2l)!(2k_1+1)!\dots(2k_m+1)!} \quad (n=2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s A_s x^{2s} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n B_n x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{2n},
\end{aligned}$$

其中

$$P_1 = -\left(A_1 + \frac{1}{2}\right),$$

$$P_n = (-1)^n \left[A_n + \frac{1}{(2n)!} + B_n \right] \quad (n=2, 3, \dots).$$

因此, 最后得知: 当 $0 < |x| < \pi$ 时, 有

$$f(x) = \frac{1}{x} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{2n-1}.$$

经计算可得前几项如下:

$$A_1 = -\frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{7}{360}, \quad A_3 = -\frac{31}{15120};$$

$$B_2 = -\frac{1}{12}, \quad B_3 = \frac{1}{360}.$$

从而得

$$P_1 = -\frac{1}{3}, \quad P_2 = -\frac{1}{45}, \quad P_3 = -\frac{2}{945}.$$

因此有

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 \\ &\quad - \frac{2}{945}x^5 - \dots \end{aligned}$$

2894. 设 $\sec x$ 的展开式写成下形:

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

求出关于系数 E_n (尤拉数) 的递推公式.

解 在等式

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$$

的两端同乘 $\cos x$, 并注意 $\cos x$ 的展开式, 就有

$$1 = \cos x \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s+k=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \right] x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s+k=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \right] x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}.
\end{aligned}$$

根据幂级数展开式的唯一性，就有 $A_0 = E_0 = 1$ ，而 $A_n = 0$ ($n=1, 2, \dots$)，其中

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k+s=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},
\end{aligned}$$

故得递推关系

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

例如已知 E_0 ，由上式令 $n=1$ ，即得 $E_1 - E_0 = 0$ ，从而 $E_1 = E_0 = 1$ 。由 E_0, E_1 ，令 $n=2$ ，又可推出 E_2, \dots ，等等。一般说来，由 $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ ，从上式可推出 E_n 。

2895. 将函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2ix+x^2}} \quad (|x| < 1)$$

展开成幂级数。

解 只要 $x^2 + 2|tx| \leq 1$, 函数 $f(x)$ 就有展开的可能性. 记 x^n 的系数为 $P_n(t)$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} = 1 + P_1(t)x + P_2(t)x^2 + \cdots + P_n(t)x^n + \cdots \quad (1)$$

下面我们只要确定 $P_n(t)$ 即可. 为此, 对 (1) 式两端同时对 x 求导数, 得

$$\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1(t) + 2P_2(t)x + \cdots + nP_n(t)x^{n-1} + \cdots$$

把上式与 (1) 式比较, 易得

$$(1-2tx+x^2)(P_1+2P_2x+\cdots+nP_nx^{n-1}) = (t-x)(1+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n).$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$P_1(t) = t,$$

$$2P_2(t) - 2tP_1(t) = tP_1(t) - 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n+1)P_{n+1}(t) - 2ntP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t) = tP_n(t) - P_{n-1}(t).$$

由此得

$$P_1(t) = t,$$

$$P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1}tP_n(t) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \quad (2)$$

例如, 取 $n=2$, 则由 $P_1(t)$ 及 $P_2(t)$ 可推得

$$\begin{aligned} P_3(t) &= \frac{5}{3}t \cdot \frac{3t^2-1}{2} - \frac{2}{3}t \\ &= -\frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2}t^3 - \frac{3}{2}t \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \left[t^3 - \frac{3 \cdot 2}{2(2 \cdot 3 - 1)}t \right]. \end{aligned}$$

一般说来, 由 (2) 式用数学归纳法可递推得

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{(2n-1)!!}{n!} \left[t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)}t^{n-4} - \dots \right] \\ &\quad (n \geq 1, \text{ 勒襄德多项式}). \end{aligned}$$

2896. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 写出函数 $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

$$\begin{aligned} \text{解 } F(x) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1} x^{n_1} \sum_{n_2=0}^{\infty} x^{n_2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} a_{n_1} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) x^n \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

2897. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有收敛半径 R_1 , 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有收

收敛半径 R_2 , 则级数

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$$

的收敛半径 R 是怎样的?

解 (a) 记 $A_n = a_n + b_n$, 则有

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|A_n|} &= \sqrt[n]{|a_n + b_n|} \leq \sqrt[n]{|a_n| + |b_n|} \\ &\leq \sqrt[n]{2 \max(|a_n|, |b_n|)} \\ &= \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{\max(|a_n|, |b_n|)} \\ &= \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}). \end{aligned}$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, 故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \} \\ &= \max \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \} \\ &= \max \left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right), \end{aligned}$$

从而得

$$R \geq \frac{1}{\max \left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right)} = \min(R_1, R_2).$$

(b) 记 $B_n = a_n b_n$, 则有

$$\sqrt[n]{|B_n|} = \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|B_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \} \\
&\leq \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \} \cdot \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \} \\
&= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 R_2},
\end{aligned}$$

故得

$$R \geq R_1 R_2.$$

2898. 设

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{和} \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

证明幂级数的收敛半径 R 满足下述不等式

$$l \leq R \leq L.$$

证 记 $l_1 = \frac{1}{l}$, $L_1 = \frac{1}{L}$. 注意 $l \geq 0$, $L \geq 0$. 若

$l = 0$, 则记 $l_1 = +\infty$; 若 $l = +\infty$, 则记 $l_1 = 0$.

对 L 与 L_1 也作同样规定. 易见 $L_1 \leq l_1$. 任给 $\varepsilon > 0$,

总可选 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, 使

$$\frac{1}{1+\delta_1} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{1}{1-\delta_2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意对 δ_1, δ_2 而言, 存在自然数 m , 使当 $n > m$ 时,

有

$$l \cdot (1 - \delta_2) < \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < L \cdot (1 + \delta_1)$$

或

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{1+\delta_1} < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n > m$ 时, 有

$$L_1 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < l_1 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

易见当 $n > m$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_m|} &= \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} \\ &< \left[l_1 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]^{n-m} \end{aligned}$$

或

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1} < \left(\frac{|a_m|}{l_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (1)$$

同理可得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1} > \left(\frac{|a_m|}{L_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (2)$$

注意到若 $A > 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1$, 故存在充分大的 $n_0 (> m)$, 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(\frac{|a_m|}{l_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}}$$

及

$$\left(\frac{|a_m|}{L_1^m} \right)^{\frac{1}{n}} > 1 - \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (3)$$

将 (3) 式代入 (1) 式及 (2) 式, 即得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1} < 1 + \varepsilon \quad \text{及} \quad \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1} > 1 - \varepsilon.$$

于是有

$$L_1 \cdot (1 - \varepsilon) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq l_1 \cdot (1 + \varepsilon).$$

从而得

$$\frac{1}{l_1(1 + \varepsilon)} \leq R \leq \frac{1}{L_1(1 - \varepsilon)} \quad *),$$

即

$$\frac{l}{1 + \varepsilon} \leq R \leq \frac{L}{1 - \varepsilon}.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即知

$$l \leq R \leq L.$$

*) 若 $L_1 = +\infty$, 即 $L = 0$, 此时显然有 $R = 0$ (级数除 $x_0 = 0$ 点收敛以外, 对任一点 $x \neq x_0$ 均发散), 故可设 $L_1 < +\infty$.

2899. 证明: 若函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 且

$$|n! a_n| < M \quad (n=1, 2, \dots),$$

其中 M 是常数, 则: 1) $f(x)$ 在任一点 a 可微分无限多次; 2) 下述展开式成立

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

证 1) 由于 $|n! a_n| < M$, 故有

$$|a_n| < \frac{M}{n!} \quad (n=1, 2, \dots).$$

设 $(-N, N)$ 是包含 x_0 的任一有限区间. 由于

$$|a_n(x-x_0)^n| \leq \frac{M}{n!} (2N)^n$$

及级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} (2N)^n$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛, 即其收敛半径 $R = +\infty$. 于是, 此级数在任一点 $a \in (-\infty, +\infty)$ 可逐项微分任意多次.

2) 由1) 段已证可知级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在任何点可逐项微分任意多次, 故

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n(x-x_0)^{n-m} \\ &\quad (m=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

今设 $|x-a| < R$ (R 为任意固定的正数), 于是 $|x-x_0| \leq |x-a| + |a-x_0| < R + |a-x_0| = L$,

故由假定知

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} |a_n| \cdot L^{n-m} \\ &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{M}{n!} L^{n-m} \end{aligned}$$

$$= M \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} = MP \quad (m=1, 2, \dots),$$

$$\text{其中 } P = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} < +\infty.$$

考虑余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

的拉格朗日形式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

于是, 当 $|x-a| \leq R$ 时, 有

$$|R_n(x)| \leq \frac{MP}{(n+1)!} R^{n+1} \quad (n=1, 2, \dots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

由此可知, 当 $|x-a| \leq R$ 时, 展式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

成立. 再由 $R > 0$ 的任意性即知, 此展式对一切 x ($|x| < +\infty$) 皆成立. 证毕.

2900. 证明: 若 1) $a_n \geq 0$ 及 2) 存在有

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S,$$

则
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

证 首先, 如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

收敛, 则根据亚伯耳定理可知, 函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在点 $x=R$ 处左连续. 因此,

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

其次, 我们证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

发散是不可能的. 采用反证法, 引出矛盾. 事实上,

根据 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = +\infty$ 知, 对于任取的正整数 $A > S$,

总存在正整数 N , 使有

$$\sum_{n=0}^N a_n R^n > A > S.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n R^n > A > S,$$

故对任意的 $\varepsilon > 0$, 例如取 $\varepsilon = \frac{A-S}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x \in (R-\delta, R)$ 时, 就有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n x^n &> A - \varepsilon \\ &= A - \frac{A-S}{2} = \frac{1}{2}(A+S) > A > S. \end{aligned}$$

注意到 $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq \sum_{n=0}^N a_n x^n$ ($x \geq 0$), 即得

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq A > S,$$

此与假设 $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$ 相矛盾, 因此, 级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 一定收敛. 从而命题获证.

将下列函数展成幂级数:

2901. $\int_0^x e^{-t^2} dt.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \right] dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \end{aligned}$$

$$(|x| < +\infty).$$

$$2902. \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \\ &= \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{4n} \right] dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (|x| \leq 1). \end{aligned}$$

$$2903. \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \quad (|x| < +\infty). \end{aligned}$$

$$2904. \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (|x| \leq 1). \end{aligned}$$

$$2905. \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} \quad (\text{写出四项}).$$

解 令 $0 < |t| < 1$, 注意

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \ln(1+t) &= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} \\
&= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1} \\
&= 1 - \xi,
\end{aligned}$$

其中 $\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$ ，容易判断交错级数

$$\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$$

当 $|t| < 1$ 时是收敛的，且其和有性质 $|\xi| < 1$ 。
于是有

$$\frac{1}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n.$$

因而当 $|x| < 1$ 时，得

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} &= \int_0^x \frac{dt}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} \\
&= \int_0^x \frac{dt}{1-\xi} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \right) dt.
\end{aligned}$$

为求四项近似，取到 t^3 为止足够，有

$$\xi^0 = 1,$$

$$\xi^1 = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} - \dots,$$

$$\xi^2 = \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{3} + \dots,$$

$$\xi^3 = \frac{t^3}{8} - \dots,$$

.....

于是,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} - \dots.$$

从而当 $|x| < 1$ 时, 得原积分的前四项为

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} \\ &= \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} \right) dt + O(x^5), \\ &= x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + O(x^5). \end{aligned}$$

运用逐项微分法计算下列级数的和:

2906. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

解 设 $F(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$. 在收敛域 $|x| < 1$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

注意 $F(0) = 0$, 即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$.

解 设 $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$, 在收敛域 $|x| \leq 1$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

注意 $F(0) = 0$, 即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x.$$

于是, 当 $|x| \leq 1$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x.$$

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

解 设 $F(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$, 在收敛域 $|x| < +\infty$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

于是有

$$F(x) - F'(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = e^{-x}, \quad (1)$$

$$F(x) + F'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x, \quad (2)$$

将 (1) 式和 (2) 式相加, 最后得

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$(|x| < +\infty).$$

2909. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$

解 设 $F(x) = \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$. 在收敛域 $|x| \leq 1$ 内逐项微分, 得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \dots \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} [-\ln(1-x)] \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

注意 $F(0) = 0$, 即得

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x F'(t) dt \\ &= 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时, 级数收敛于零. 当 $x=1$ 时, 级数收敛于 1. 当 $x=-1$ 时, 级数收敛于 $1 - 2 \ln 2$. 事实上,

$$-\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$= 2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots\right) + 1 = 1 - 2 \ln 2.$$

于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), & \text{当 } 0 < |x| < 1; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ 1 - 2 \ln 2, & \text{当 } x = -1; \\ 1, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$$

$$2970. \quad 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

解 设 $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

在收敛域内逐项微分, 得

$$F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}2x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}3x^2 + \dots$$

以 $1-x$ 乘上式两端, 得

$$\begin{aligned} (1-x)F'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2}F(x), \end{aligned}$$

即

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{2(1-x)}.$$

积分得

$$\ln F(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

或

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $x=1$ 时, 应用拉阿伯判别法:

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1,$$

因此, 级数是发散的.

当 $x=-1$ 时, 利用2689题的结果知, 级数条件收敛. 于是,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x < 1).$$

运用逐项积分法计算下列级数的和:

2911. $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$.

解 设 $F(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\int_0^x F(t) dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^4 + \cdots \\
&= (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right) \\
&= x(1 + x + x^2 + \cdots) - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right) \\
&= \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \quad (|x| < 1) .
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \left[\frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \right]' \\
&= \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1) .
\end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 由于级数的通项不趋于零, 故它是发散的.

2912. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$.

解 设 $F(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^x F(t) dt &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{16}{5}x^5 + \cdots \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(2 + \frac{1}{4}\right)x^4 \\
&\quad - \left(3 + \frac{1}{5}\right)x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x + \left(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots \right) \\
&\quad - x^3(1 - 2x + 3x^2 - \dots) \\
&= x - \ln(1+x) - x^3(x - x^2 + x^3 - \dots)' \\
&= x - \ln(1+x) - x^3 \cdot \left(\frac{x}{1+x} \right)' \\
&= x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n \\
&= \left[x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \right]' \\
&= \frac{x(1-x)}{(1+x)^3} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数显然发散.

2913. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$.

解 设 $F(x) = 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$, 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^x F(t) dt &= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots \\
&= x(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots) \\
&= x \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \quad (*) = \frac{x^2}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \left[\frac{x^2}{(1-x)^2} \right]' \\
 &= \frac{2x}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数显然发散.

*) 利用 2911 题的结果.

2914. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

满足方程

$$y^{(4)} = y.$$

证 所给级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 在收敛域内逐项微分之, 得

$$\begin{aligned}
 y' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, & y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}, \\
 y''' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}, & y^{(4)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$y^{(4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = y.$$

2915. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

满足方程

$$xy'' + y' - y = 0.$$

证 所给级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ ，在收敛域内逐项微分之，得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)!}$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}.$$

于是，

$$\begin{aligned} & xy'' + y' \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{1}{n!(n+1)!} \right] x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y, \end{aligned}$$

从而得

$$xy'' + y' - y = 0.$$

求在复数域内 ($z = x + iy$) 下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

2916. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}.$

解 记 $c_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$ ，由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 2,$$

故收敛半径 $R = 2$ ；收敛圆为

$$|z-1-i| < 2 \text{ 即 } (x-1)^2 + (y-1)^2 < 2^2.$$

$$2917. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{n(n+1)}.$$

解 记 $c_n = \frac{(1+i)^n}{n(n+1)}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 收敛圆为

$$|z| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{即} \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{2}.$$

$$2918. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}.$$

解 记 $c_n = \frac{n!}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(n+1)i}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{n+1} = 1, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R = 1$, 收敛圆为

$$|z| < 1 \quad \text{即} \quad x^2 + y^2 < 1.$$

$$2919. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}.$$

解 记 $c_n = \frac{1}{n^{\alpha+i\beta}}$. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2+ib} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = 1,\end{aligned}$$

故收敛半径 $R=1$ ；收敛圆为

$$|z| < 1 \quad \text{即} \quad x^2 + y^2 < 1.$$

2920. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - e^{i\alpha})^n}{n(1 - e^{i\alpha})^n}.$

解 记 $c_n = \frac{1}{n(1 - e^{i\alpha})^n}$. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} (1 - e^{i\alpha}) \right| \\ &= |1 - (\cos \alpha + i \sin \alpha)| = \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} \\ &= \left| 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right|,\end{aligned}$$

故收敛半径 $R = \left| 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right|$ ；收敛圆为

$$|z - e^{i\alpha}| < \left| 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right|,$$

即

$$(x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 < 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

2921. 利用牛顿的二项公式，近似地计算 $\sqrt[3]{9}$ ，并且估计当只取展开式的头三项时的误差。

解 $\sqrt[3]{9} = 2 \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8^3} - \dots \right).$$

当只取展开式的头三项时，误差

$$|R_3| \leq 2 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3^3} \cdot \frac{1}{8^3} = \frac{10}{3^4 \cdot 8^3} < 0.001.$$

计算头三项，每一项取到小数点后四位，即得

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9} &= 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{3^2} \cdot \frac{1}{8^2} \right) \\ &\doteq 2.080 \end{aligned}$$

2922. 近似地计算：(a) $\arctg 1.2$ ；(b) $\sqrt[10]{1000}$ ；

(c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ；(d) $\ln 1.25$ ，并估计对应的误差。

解 (a) 利用

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy},$$

并设 $x=1$ ， $\frac{x+y}{1-xy}=1.2$ ，即得 $y=-\frac{1}{11}$ 。于是，

$$\begin{aligned} \arctg 1.2 &= \arctg 1 + \arctg \frac{1}{11} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{11} \right)^5 - \dots \end{aligned}$$

若取头三项^{*)}，则其误差

$$|R_3| < \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^5 < 10^{-6}.$$

计算头三项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1.2 \doteq 0.87606.$$

$$(6) \sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{1024 - 24} = 2(1 - 0.024)^{\frac{1}{10}}$$

$$= 2 \left[1 - \frac{0.024}{10} + \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right)}{2!} (0.024)^2 - \dots \right].$$

若取头三项，注意到上述级数的各项递减，故其误差

$$\begin{aligned} |R_3| &< 2 \cdot \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right) \left(\frac{1}{10} - 2 \right)}{3!} \\ &\quad \cdot (0.024)^3 [1 + 0.024 + (0.024)^2 + \dots] \\ &< 10^{-6}. \end{aligned}$$

计算头三项，每一项取到小数点后七位，即得

$$\sqrt[10]{1000} \doteq 1.995263.$$

$$(B) \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \\ &\quad - \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{2^6} - \dots. \end{aligned}$$

若取头七项，则其误差

$$|R_7| < \frac{1}{7! \cdot 2^7} < 10^{-5}.$$

计算头七项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0.60653.$$

$$(r) \ln 1.25 = \ln \left(1 + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4 \cdot 4^4} \\ + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \frac{1}{6 \cdot 4^6} + \cdots.$$

若取头六项，则其误差

$$|R_6| < \frac{1}{7 \cdot 4^7} < 10^{-6}.$$

计算头六项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\ln 1.25 \doteq 0.22314.$$

*) 本题并未注明取多少项以估计误差，因此，我们可任意选取，各小题均类似处理。

利用适当的展开式，计算下列函数准确到所指出的程度的值。

2923. $\sin 18^\circ$ ，准确到 10^{-6} 。

$$\text{解} \quad \sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10}$$

$$= \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \cdots.$$

上述级数为交错级数，若取头 n 项，则其误差

$$\Delta < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^{2n+1}.$$

欲使 $\Delta < 10^{-5}$, 只要

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^{2n+1} < 10^{-5},$$

以 $n = 3$ 代入上式即满足 ($n = 2$ 达不到要求的准确程度), 计算头三项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\sin 18^\circ \doteq 0.30902.$$

2924. $\cos 1^\circ$, 准确到 10^{-6} .

$$\text{解 } \cos 1^\circ = \cos \frac{\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^4$$

$$- \dots. \text{ 取 } n = 2, \text{ 即可保证 } \Delta < \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^4 < 10^{-6}.$$

计算得

$$\cos 1^\circ \doteq 0.999849.$$

2925. $\operatorname{tg} 9^\circ$, 准确到 10^{-3} .

$$\text{解 } \operatorname{tg} 9^\circ = \operatorname{tg} \frac{\pi}{20}$$

$$= \frac{\pi}{20} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{20} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 + \dots^{*)}$$

若取头二项, 考虑到上述级数的各项递减, 则其误差

$$\Delta < \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 \left[1 + \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 + \dots \right] \\ < 10^{-3}.$$

取两项计算, 每一项取到小数点后四位, 计算得

$$\operatorname{tg} 9^\circ \doteq 0.158.$$

*) 利用2891题的结果.

2926. e , 准确到 10^{-6} .

解
$$e = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}.$$

若取 $1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值, 则其误差

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots m} \\ &< \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

欲 $\Delta < 10^{-6}$, 只要 $\frac{1}{n!n} < 10^{-6}$, 也即只要

$$n!n > 10^6.$$

取 $n = 9$ 即可. 于是, 当每项取到小数点后七位, 即得

$$e \doteq 1 + \sum_{m=1}^9 \frac{1}{m!} \doteq 2.718282.$$

2927. $\ln 1.2$, 准确到 10^{-4} .

解 $\ln 1.2 = \ln(1+0.2)$

$$= 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 + \cdots.$$

若取头 n 项, 则其误差

$$\Delta < \frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}.$$

欲 $\Delta < 10^{-4}$, 只要 $\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1} < 10^{-4}$. 取 $n = 4$ 即可保证

$$\Delta < \frac{1}{5}(0.2)^5 < 10^{-4}.$$

于是, 当每项取到小数点后五位, 即得

$$\begin{aligned} \ln 1.2 &= 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 \\ &= 0.1823. \end{aligned}$$

2928. 由等式

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$$

求数 π , 准确到 10^{-4} .

解 $\pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &= 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right. \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} \right)^9 \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2} \right)^{11} + \dots \right]. \end{aligned}$$

若取头六项, 考虑到上述级数的各项递减, 则其误差

$$\begin{aligned} \Delta &< 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \\ &\quad \cdot \frac{1}{13} \left(\frac{1}{2} \right)^{13} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 - \dots \right] \\ &< 10^{-4}. \end{aligned}$$

取头六项计算，每一项取到小数点后五位，即得

$$\pi \doteq 3.1416.$$

2929. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$$

计算数 π ，准确到0.001.

解 按题设，有

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} \right. \\ & \left. + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \cdots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} \right. \\ & \left. + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \cdots \right). \end{aligned}$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼兹型的，所以在被加数与加数中，弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0 < \Delta_1 < \frac{4}{11 \cdot 2^{11}} < 0.0002,$$

$$0 < \Delta_2 < \frac{4}{9 \cdot 3^9} < 0.00002,$$

于是，总误差 $\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 < 0.001$ ，计算保留下来的项近似到小数点后四位（末位由四舍五入而得），即可保证达到所需误差。列成下表（括号中的正、负号指示校正数的符号）：

正 项

负 项

$$\frac{4}{2} = 2.0000$$

$$\frac{4}{3 \cdot 2^3} = 0.1667 \text{ (—)}$$

$$\frac{4}{5 \cdot 2^5} = 0.0250$$

$$\frac{4}{7 \cdot 2^7} = 0.0045 \text{ (—)}$$

$$\frac{4}{9 \cdot 2^9} = 0.0009 \text{ (—)}$$

$$\frac{4}{3 \cdot 3^3} = 0.0494 \text{ (—)}$$

$$\frac{4}{3} = 1.3333 \text{ (+)}$$

$$+ \frac{4}{7 \cdot 3^7} = 0.0003 \text{ (—)}$$

$$+ \frac{4}{5 \cdot 3^5} = 0.0033 \text{ (—)}$$

$$0.2209$$

$$3.3625$$

$$0.2209$$

$$3.1416$$

于是,

$$3.1415 < \pi < 3.1420.$$

因此, 取 $\pi = 3.142$ 即可准确到 0.001.

2930: 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

求数 π , 准确到 10^{-9} .

解 在此, 我们证明一下 2929 题及本题中的恒等式. 如果, 注意到反正切函数的加法公式

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} \quad \left(|x+y| < \frac{\pi}{2} \right),$$

并选取任何两个满足关系式

$$\frac{x+y}{1+xy} = 1 \quad \text{或} \quad (1+x)(1+y) = 2$$

的真分数作为 x, y , 就有

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y.$$

例如, 令 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$, 即得

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}.$$

这就是2929题中所出现的恒等式.

如果令 $x = \frac{1}{5}, \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} = \alpha$, 则 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} \doteq 1.$$

可见, $4\alpha \doteq \frac{\pi}{4}$.

$$\text{令 } \beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

于是,

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}.$$

由此，得

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

$$\text{或 } \pi = 16 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

$$\begin{aligned} &= 16 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{5^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{5^{13}} - \dots \right\} \\ &\quad - 4 \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

这就是本题中所出现的恒等式，它就是著名的马信 (J. Machin) 公式。

我们要依靠此式计算 π ，准确到 10^{-9} ，只要上面已写出的那些项就够了。事实上，这两个级数都是莱布尼兹型的，所以在被减数与减数中，弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{15 \cdot 15^{15}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9}$$

$$\text{与 } 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9}.$$

于是，总误差

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 < \frac{1}{10^9}.$$

计算保留下来的项近似到小数点后十位，列成下表

(括号中的±号指示校正数的符号)：

$$\frac{16}{5} = 3.2000000000$$

$$\frac{16}{5 \cdot 5^5} = 0.0010240000$$

$$\frac{16}{9 \cdot 5^9} = 0.0000009102 (+)$$

$$\begin{array}{r}
 +) \frac{16}{13 \cdot 5^{13}} = 0.0000000010 (+) \\
 \hline
 3.2010249112 \\
 -) 0.0426959536 \\
 \hline
 3.1583289576
 \end{array}$$

$$\frac{16}{3 \cdot 5^3} = 0.0426666667 (-)$$

$$\frac{16}{7 \cdot 5^7} = 0.0000292571 (+)$$

$$\begin{array}{r}
 +) \frac{16}{11 \cdot 5^{11}} = 0.0000000298 (-) \\
 \hline
 0.0426959536
 \end{array}$$

$$\frac{4}{239} = 0.0167364017 (-)$$

$$\begin{array}{r}
 -) \frac{4}{3 \cdot 239^3} = 0.0000000977 (-) \\
 \hline
 0.0167363040
 \end{array}$$

于是,

$$3.1583289576 < 16\alpha < 3.1583289577,$$

$$-0.0167363040 = -4\beta = -0.0167363040;$$

$$\pi = 16\alpha - 4\beta,$$

$$3.1415926536 < \pi < 3.1415926537.$$

因此, 取 $\pi \doteq 3.141592654$ 可准确到 10^{-9} , 并且可知: 如取 $\pi \doteq 3.141592653\dots$ 所有写出的数字都是真确的.

2931. 利用公式

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots \right]$$

求 $\ln 2$ 和 $\ln 3$, 准确到 10^{-5} .

解 当 $n = 1$ 时,

$$\begin{aligned} \ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} \right. \\ \left. + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \dots \right). \end{aligned}$$

如取已写出的那些项计算 $\ln 2$, 即知

$$\begin{aligned} 0 < \Delta < 2 \left(\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} + \dots \right) \\ < \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} < \frac{2}{10^6}. \end{aligned}$$

计算到小数点后六位, 并作出下表:

$$\frac{2}{3} = 0.666667 (-)$$

$$\frac{2}{3 \cdot 3^3} = 0.024691 (+)$$

$$\frac{2}{5 \cdot 3^5} = 0.001646 (+)$$

$$\frac{2}{7 \cdot 3^7} = 0.000131 (+)$$

$$+) \frac{2}{9 \cdot 3^9} = 0.000011 (+)$$

$$0.693146$$

$$\therefore 0.693146 \leq \ln 2 \leq 0.693148,$$

于是, $\ln 2 = 0.69314\dots$, 并且所有写出来的五位数字都是真确的. 如果, 将第六位四舍五入, 即得 $\ln 2 \doteq 0.69315$, 准确到 10^{-5} .

令 $n = 2$, 即得

$$\begin{aligned} \ln 3 = \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} \right. \\ \left. + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1)$$

与 $\ln 2$ 一样, 取写出的诸项, 计算到小数点后六位, 并作出下表:

$$\frac{2}{5} = 0.400000$$

$$\frac{2}{3 \cdot 5^3} = 0.005333(+)$$

$$\frac{2}{5 \cdot 5^5} = 0.000128$$

$$\frac{2}{7 \cdot 5^7} = 0.000004(-)$$

$$\begin{array}{r} +) \frac{2}{9 \cdot 5^9} = 0.000000 (+) \\ \hline 0.405465 \end{array}$$

于是, (1) 式右端的级数的和为 $0.40546\dots$, 并且写出来的五位数字都是真确的, 如将第六位四舍五入, 也得 0.40547 .

最后, 由 (1) 式得

$$\ln 3 = 0.693146\dots + 0.405465\dots = 1.09861\dots,$$

并且所有写出来的数字都是真确的.

如果将第六位四舍五入, 即得

$$\ln 3 \approx 0.69315 + 0.40546 = 1.09861,$$

它准确到 10^{-6} .

2932. 利用被积函数展成级数的展开式以计算下列积分之值, 并准确到 0.001 :

$$(A) \int_0^1 e^{-x^2} dx; \quad (C) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx;$$

$$(B) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx; \quad (E) \int_0^1 \cos x^2 dx;$$

$$(L) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx; \quad (O) \int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

$$(P) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}; \quad (Q) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

$$(R) \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$$

$$(S) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx; \quad (T) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx;$$

$$(U) \int_0^1 x^x dx.$$

解 (a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$$= \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \dots,$$

如取写出来的诸项，计算到小数点后四位，并作出下表：

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1.0000 \\ \frac{1}{5 \cdot 2!} & = & 0.1000 \\ +) \frac{1}{9 \cdot 4!} & = & 0.0046 (+) \\ \hline & & 1.1046 \\ -) & & 0.3571 \\ \hline & & 0.7475 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{3} = 0.3333 (+) \\
 +) \quad \frac{1}{7 \cdot 34} = 0.0238 (+) \\
 \hline
 0.3571
 \end{array}$$

于是,

$$0.7473 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 0.7476,$$

即有 $\int_0^1 e^{-x^2} dx \doteq 0.747$, 准确到 0.001, 并且所有写出来的数字都是真确的.

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx \\
 &= \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} + \frac{1}{3!x^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4!x^4} + \dots \right) dx \\
 &= 2 + \ln 2 + \frac{1}{2! \cdot 4} + \frac{3}{3! \cdot 32} + \frac{7}{4! \cdot 192} + \dots \\
 &= 2 + 0.6931^{(+)} + 0.1250^{(+)} + 0.0156^{(+)} + 0.0015^{(+)} + \dots \\
 &\doteq 2.8352 \quad (0 < \Delta < 0.001).
 \end{aligned}$$

于是,

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx \doteq 2.835,$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned}
 (B) \quad & \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \\
 &= \int_0^2 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right) dx \\
 &= 2 - \frac{2^3}{3 \cdot 3!} + \frac{2^5}{5 \cdot 5!} - \frac{2^7}{7 \cdot 7!} + \cdots,
 \end{aligned}$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差 $0 < \Delta < \frac{2^9}{9 \cdot 9!}$

$< \frac{1}{10^3}$ 。列下表：

$$\begin{array}{r}
 2 = 2.0000 \\
 +) \quad \frac{2^5}{5 \cdot 5!} = 0.0533 (+) \\
 \hline
 2.0533 \\
 -) 0.4480 \\
 \hline
 1.6053 \\
 \\
 \frac{2^3}{3 \cdot 3!} = 0.4444 (+) \\
 +) \quad \frac{2^7}{7 \cdot 7!} = 0.0036 (+) \\
 \hline
 0.4480
 \end{array}$$

于是，

$$1.6051 < \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx < 1.6054,$$

即

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \doteq 1.605,$$

并且所有写出的数字都是真确的。

$$\begin{aligned}
 (T) \quad & \int_0^1 \cos x^2 dx \\
 &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots\right) dx \\
 &= 1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \cdots
 \end{aligned}$$

如取写出的诸项 计算 积分 值，则其误差 $0 < \Delta <$

$\frac{1}{13 \cdot 6!} < \frac{1}{10^3}$ 。列下表：

$$\begin{array}{r}
 1 = 1.0000 \\
 +) \quad \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0.0045 (+) \\
 \hline
 \quad \quad 1.0045 \\
 \quad -) 0.1000 \\
 \hline
 \quad \quad 0.9045
 \end{array}$$

$$\frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000$$

所以

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.9045.$$

于是，

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.905,$$

准确到 0.001。

$$(A) \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right) dx$$

$$= 1 + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} + \cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差

$$0 < \Delta < \frac{1}{7 \cdot 7!} \left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{7 \cdot 7!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^2}} < 10^{-8},$$

列下表：

$$\begin{array}{r} 1 = 1.0000 \\ \frac{1}{3 \cdot 3!} = 0.0556 \quad (-) \\ +) \quad \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0.0017 \quad (+) \\ \hline 1.0573 \end{array}$$

于是，

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx \doteq 1.057,$$

准确到0.001.

(e) 当 $x \geqslant 2$ 时，

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^3}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3},$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \dots \end{aligned}$$

取前两项的近似值就有

$$I = 0.119 + \theta \quad (0 < \theta < 0.001).$$

或者用直接积分法:

$$\begin{aligned} &\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \\ &= \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_2^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} \ln 3 \\ &\doteq 0.119, \end{aligned}$$

准确到0.001.

$$(\kappa) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{4x^4}{3^2 \cdot 2!} + \dots,$$

故得

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^5} + \dots \approx 0.337,$$

准确到0.001.

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_0^1 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^8 + \dots \right) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{9 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \dots$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdots 45}{93 \cdot 2^{23} \cdot 23!} + \dots$$

$$= (1.0000 + 0.0417 + 0.0160 + 0.0090$$

$$+ 0.0060 + 0.0043 + 0.0033 + 0.0026$$

$$+ 0.0022 + 0.0018 + 0.0014 + 0.0012)$$

$$- (0.1000 + 0.0240 + 0.0117 + 0.0072$$

$$+ 0.0050 + 0.0037 + 0.0029 + 0.0024$$

$$+ 0.0020 + 0.0016 + 0.0013 + 0.0010) + \dots$$

$$\approx 0.927,$$

$$0 < \Delta < \frac{1 \cdot 3 \cdots 47}{97 \cdot 2^{24} \cdot 24!} < 10^{-8}.$$

(II) 注意, 当 $10 \leq x \leq 100$ 时, 有

$$\ln(1+x) = \ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$= \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

于是, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \\ &= \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x} dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{10}^{100} x^{-n-1} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot \frac{1}{10^n} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \\ &= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{4 \cdot 10^2} \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{9 \cdot 10^3} \left(1 - \frac{1}{10^3}\right) + \dots \\ &\approx 8.040, \end{aligned}$$

准确到0.001,

$$\begin{aligned} (\text{K}) \quad &\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 \cdot 2^3} + \frac{1}{5^2 \cdot 2^5} - \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} + \dots, \end{aligned}$$

如取前三项计算积分值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} < \frac{1}{10^3}.$$

于是,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx \doteq 0.487 \text{ (准确到 } 0.001 \text{)}.$$

$$(II) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5^2 \cdot 2^5} + \dots,$$

如取前三项计算积分值, 则其误差

$$\begin{aligned} 0 < \Delta &< \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7^2} \cdot \frac{1}{2^7} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} < \frac{1}{10^3}. \end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx \doteq 0.507 \text{ (准确到 } 0.001 \text{)}.$$

(M) 注意到

$$x^x = e^{x \ln x}$$

$$= 1 + x \ln x + \frac{(x \ln x)^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{(x \ln x)^n}{n!} + \dots,$$

并有 $\int_0^1 x^n \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ *

于是,

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \dots,$$

如取前四项计算积分值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{4!}{4! \cdot (4+1)^{4+1}} = \frac{1}{5^5} < \frac{1}{10^3},$$

故 $\int_0^1 x^x dx \approx 0.783$ (准确到 0.001).

*) 参看 2286 题, $m=n$.

2933. 求正弦曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)

$$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

波之弧长, 并准确到 0.01.

解 弧长 s 为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\pi \sqrt{1+y'^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cos^4 x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \cos^6 x - \dots \right) dx. \end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi (2n)!}{2^{2n+1} \cdot n! \cdot n!} *$$

即有

$$\begin{aligned}
s &= 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \cdot 2!}{2^4} - \frac{1}{2! 2^2} \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2! 2!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{3! 2^3} \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3! 3!} - \dots \right) \\
&= \pi \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{64} + \frac{5}{256} - \dots \right),
\end{aligned}$$

如取写出的诸项计算 s 值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{3 \cdot 5 \cdot 2\pi}{4! 2^4} \cdot \frac{8!}{2^9 \cdot 4! 4!} < \frac{1}{10^2}.$$

于是,

$$s \doteq 3.14(1 + 0.25 - 0.05 + 0.02) \doteq 3.83.$$

*) 利用2290题的结果, $m = 0$.

2934. 椭圆之半轴为 $a = 1$ 及 $b = \frac{1}{2}$, 求椭圆的弧长, 并准确到0.01.

解 椭圆的参数方程为 $x = a \sin t$, $y = b \cos t$.

于是,

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\
&= a \cdot \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt,
\end{aligned}$$

其中 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率. 从而得

$$\begin{aligned}
s &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt \\
&= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 t - \frac{1}{2! 2^2} e^4 \sin^4 t \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} e^6 \sin^6 t - \dots) dt \\
& = 4a \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} e^2 \cdot \frac{\pi \cdot 2!}{2^3} - \frac{1}{2! \cdot 2^2} e^4 \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2! \cdot 2!} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} e^6 \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3! \cdot 3!} - \dots \right),
\end{aligned}$$

如取写出的前五项计算 s 值, 则其误差 $0 < \Delta < 10^{-2}$.
再以 a, b 值代入, 即得

$$\begin{aligned}
s &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{64} + \frac{9}{16} - \frac{5}{256} + \frac{27}{64} \right. \\
&\quad \left. - \frac{5 \cdot 27 \cdot 3}{256 \cdot 64 \cdot 4} - \dots \right) \\
&\approx 2\pi (1 - 0.188 - 0.026 + 0.008 - 0.003 - \dots) \\
&\approx 4.84.
\end{aligned}$$

2935. 电线是扯在两根木桩上, 两桩的距离为 $2l = 20$ 米, 电线成抛物线的形状. 设凹处的矢 $h = 40$ 厘米, 计算电线的长度, 并准确到 1 厘米.

解 先建立抛物线 AOB 的方程.

取坐标系如图 5.2 所示, 则方程的标准形式为

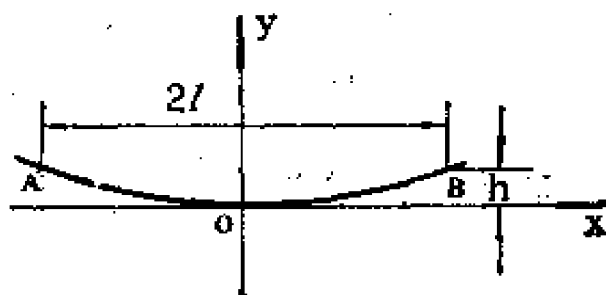


图 5.2

$$x^2 = 2py.$$

由于此抛物线过点 $B(10, 0.4)$, 所以

$$10^2 = 2p(0.4), \quad p = 125,$$

即

$$y = \frac{1}{250}x^2,$$

于是, 所求的电线长为

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{10} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{125}x\right)^2} dx \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \left(1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2!2^2}t^4 + \frac{1 \cdot 3}{3!2^3}t^6 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!2^4}t^8 + \dots\right) dt \\ &= 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5 \cdot 2!2^2} \cdot \frac{2^5}{25^5} + \dots \right), \end{aligned}$$

如取前两项计算积分值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{250}{5 \cdot 2! \cdot 2^2} \cdot \frac{2^5}{25^5} < 10^{-2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} s &\approx 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} \right) \\ &\approx 20 + 0.02 = 20.02 \text{ (米)}, \end{aligned}$$

即所求的电线长为20.02米, 准确到0.01米.

§6. 福里叶级数

1° 展开定理 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 内逐段连续并有逐段连续的导函数 $f'(x)$, 并且一切不连续点 ξ 是正则的 [即 $f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi-0) + f(\xi+0)]$], 则函数 $f(x)$ 在此区间上可用福里叶级数表出

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

式中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

及

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2')$$

特别是:

(a) 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则有:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3)$$

式中 $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots);$

(b) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则得:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

式中 $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots).$

一个在区间 $(0, l)$ 中有定义的并具有上面所提到的连续条件的函数 $f(x)$, 可在该区间内用公式 (3) 及公式 (4) 表示.

2° 完全性条件 对于任一在区间 $(-l, l)$ 上可积的且其平方也是可积的函数 $f(x)$, 作具有系数 (2), (2') 的级数 (1), 则李雅甫诺夫等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

3° 福里叶级数的积分法 在区间 $(-l, l)$ 内按黎曼意义可积分的函数 $f(x)$ 之福里叶级数 (1) (即使是发散的), 可以在 $(-l, l)$ 内逐项积分.

2936. 将函数

$$f(x) = \sin^4 x$$

展开成福里叶级数.

解 在 $(-\pi, \pi)$ 上, 函数 $f(x) = \sin^4 x$ 展开成福里叶级数有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

由于

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \frac{1 + \cos 4x}{2} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^4 x \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{3}{8} \cos nx - \frac{1}{2} \cos 2x \cos nx \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8} \cos 4x \cos nx \right) dx$$

$$= 0, \quad n \neq 2, n \neq 4,$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=2, \\ \frac{1}{8}, & n=4; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \sin^4 x \sin nx dx = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

又函数 $f(x)$ 处处连续, 故其福里叶级数收敛于函数本身, 即

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x.$$

注 由此题可以看出, 周期为 2π 的三角多项式的福里叶级数就是它本身, 下面一题将给出一般的证明.

2937. 三角多项式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$$

的福里叶级数是怎样的?

解 $p_n(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 不妨在 $(-\pi, \pi)$ 上展开成福里叶级数, 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi p_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) dx$$

$$= 2\alpha_0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \cos nx dx$$

$$= \alpha_n;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \sin nx dx$$

$$= \beta_n.$$

于是, 在 $(-\pi, \pi)$ 上, 有

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix), \end{aligned}$$

即 $p_n(x)$ 的福里叶级数就是它本身.

2938. 将函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$$

展开为福里叶级数.

绘出函数的图形及此函数之福里叶级数之若干部分和的图形.

利用展开式, 求莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

的和.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \cos nx dx = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

又函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上只有一个第一类间断点, 故其福里叶级数收敛, 且有

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$f(x)$ 及其福里叶级数之若干部分和的图形如图 5.3 所示, 其中画的是一项 S_1 、两项之和 S_2 及 $f(x)$ 的图形.

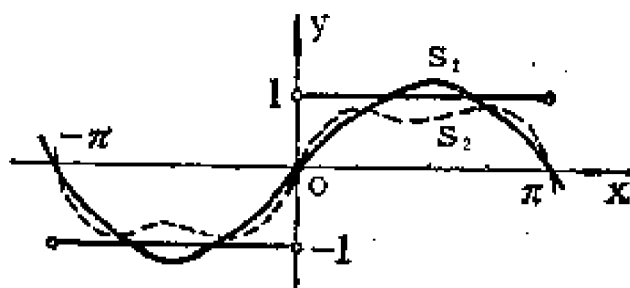


图 5.3

若令 $x = \frac{\pi}{2}$, 则得

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1,$$

即莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

在所指定的区间内把下列函数展开为福里叶级数:

2939. 在区间 $(0, 2l)$ 内展开

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{若 } 0 < x < l, \\ 0, & \text{若 } l < x < 2l, \end{cases}$$

其中 A 为常数.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l A dx = A,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l A \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l A \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n],$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l} = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ \frac{A}{2}, & x = l, \\ 0, & l < x < 2l. \end{cases}$$

2940. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = x$.

解 因为 $f(x) = x$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$,

且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = x \quad (-\pi < x < \pi).$$

2941. 在区间 $(0, 2\pi)$ 中展开 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx \, dx = \frac{\pi - x}{2n\pi} \sin nx \Big|_0^{2\pi}$$

$$+ \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx = -\frac{\pi - x}{2n\pi} \cos nx \Big|_0^{2\pi}$$

$$-\frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi).$$

2942. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = |x|$.

解 因为 $f(x) = |x|$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} x \sin nx \Big|_0^{\pi}$$

$$- \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1],$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = |x| \quad (-\pi < x < \pi).$$

2943. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{若 } -\pi < x < 0, \\ bx, & \text{若 } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

其中 a 及 b 为常数.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx dx = \frac{b-a}{2} \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \cos nx dx \\ &= \frac{a-b}{n^2\pi} [1 - (-1)^n]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \sin nx dx \\ &= \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned} &\frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \\ &\quad + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \\ &= \begin{cases} ax, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ bx, & 0 \leq x < \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

2944. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \pi^2 - x^2$.

解 因为 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi} x \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi \cos nx dx$$

$$= \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx = \pi^2 - x^2 \quad (-\pi < x < \pi).$$

2945. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \cos ax$.

解 因为 $f(x) = \cos ax$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos ax dx = \frac{2}{a\pi} \sin a\pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(n+a)x$$

$$+ \cos(n-a)x] dx = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} a}{n^2 - a^2},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos nx}{n^2 - a^2} \right]$$

$$= \cos ax \quad (-\pi < x < \pi).$$

2946. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \sin ax$.

解 因为 $f(x) = \sin ax$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$,
且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin ax \sin nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(n-a)x - \cos(n+a)x) dx \\
&= \frac{2 \sin a \pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - a^2},
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2 \sin a \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - a^2} = \sin ax \quad (-\pi < x < \pi).$$

2947. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \operatorname{sh} ax$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \operatorname{sh} ax \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \operatorname{ch} ax dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sh} a\pi + \frac{a}{n^2} \operatorname{ch} ax \sin nx \Big|_0^{\pi} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sh} a\pi - \frac{a^2}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \right] \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sh} a\pi - \frac{a^2}{n^2} b_n,
\end{aligned}$$

即

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n}{(n^2 + a^2)\pi} \operatorname{sh} a\pi,$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2 \operatorname{sh} a \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin n x}{n^2 + a^2} = \operatorname{sh} a x \quad (-\pi < x < \pi).$$

2948† 在区间 $(-h, h)$ 中展开 $f(x) = e^{ax}$.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} dx = \frac{1}{ah} (e^{ah} - e^{-ah}) = \frac{2}{ah} \operatorname{sh} ah,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \cos \frac{n\pi x}{h} dx \\ &= \frac{1}{h} \frac{a \cos \frac{n\pi x}{h} + \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n 2ah}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \sin \frac{n\pi x}{h} dx \\ &= \frac{1}{h} \frac{a \sin \frac{n\pi x}{h} - \frac{n\pi}{h} \cos \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 2n\pi}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$2 \operatorname{sh} ah \left[\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{n\pi x}{h} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \right]$$

$$= e^{ax} \quad (-h < x < h).$$

2949. 在区间 $(a, a+2l)$ 中展开 $f(x) = x$.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x dx = 2(a+l),$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} - \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{l}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} + \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= -\frac{2l}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{l}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $(a, a+2l)$ 中可展开为

$$\begin{aligned} a+l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \right. \\ \left. - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = x \quad (a < x < a+2l). \end{aligned}$$

2950. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = x \sin x$.

解 因为 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx = \frac{2}{\pi} \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right)$$

$$= 2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} \right. \\ \left. + \frac{x \cos(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2} \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1} \quad (n=2, 3, \dots),$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right] \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \cos nx = x \sin x \\ (-\pi < x < \pi).$$

2951. 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 中展开 $f(x) = x \cos x$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin 2nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x \cos(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 16}{\pi} \cdot \frac{n}{(4n^2-1)^2}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2-1)^2} \sin 2nx = x \cos x$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right).$$

将下列周期函数展开成福里叶级数:

2952. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

解 由于

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \operatorname{sgn}[\cos(x+2\pi)] = \operatorname{sgn}(\cos x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1) dx \right) = 0, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^k \frac{4}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1 \\ & (k=0, 1, 2, \dots), \end{cases}
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上可展开为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \right] = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

注意, 此式在 $f(x)$ 的不连续点 $x = -\frac{\pi}{2}$ 和 $x =$

$\frac{\pi}{2}$ 也成立, 这是因为在这些点满足 $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, 于是, 上述展式对一切 $-\infty < x < +\infty$ 皆成立.

2353. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内为一奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x) \sin nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{n} \cos nx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{x}{n} \cos nx - \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] \\
&= \frac{4}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n = 2k+1 \end{cases} \\
&\quad (k=0, 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x = \arcsin(\sin x) \\
&\quad (-\infty < x < +\infty).
\end{aligned}$$

2954. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) \cos nx \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2n} \sin nx - \frac{x}{n} \sin nx - \frac{1}{n^2} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n] \\
&= \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ \frac{4}{(2k+1)^2 \pi}, & n=2k+1 \quad (k=0, 1, 2, \dots), \end{cases}
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} &= \arcsin(\cos x) \\
& \quad (-\infty < x < +\infty).
\end{aligned}$$

2955. $f(x) = x - [x]$,

解 因为

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 \\
&= x - [x] = f(x),
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数, 而且, 除 $x=k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 诸点外, $f(x)$ 都连续. 由于

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} \, dx = 2 \int_0^1 x \, dx = 1,$$

$$c_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} \cos 2n\pi x \, dx$$

$$= 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x dx$$

$$= 2 \left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_0^1 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - (x)\} \sin 2n\pi x dx$$

$$= 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x dx$$

$$= 2 \left[-\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{n\pi},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$x - (x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

$$(x \neq k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

2956. $f(x) = (x)$, 其中 (x) 是它到与它最近的整数的距离,

解 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续周期函数, 由于

$$a_0 = 2 \int_0^1 (x) dx = 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) dx \right] = \frac{1}{2},$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (x) \cos 2n\pi x dx$$

$$= 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x \cos 2n\pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \cos 2n\pi x dx \right]$$

$$= 2 \left\{ \left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \right|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left[\frac{1}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x$$

$$- \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \Big\}$$

$$= -\frac{1}{(n\pi)^2} \left[(-1)^n - 1 \right]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2}, & n=2k+1 \quad (k=0, 1, 2, \dots), \end{cases}$$

$$b_n = 2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x \sin 2n\pi x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \sin 2n\pi x dx \right]$$

$$= 2 \left\{ \left[-\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \right|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left[-\frac{1}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x$$

$$- \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \Big\} = 0,$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2} = (x) \\ (-\infty < x < +\infty).$$

2957. $f(x) = |\sin x|$.

解 $f(x)$ 是以 π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi}, \\ a_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos 2nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2-1}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = |\sin x| \\ (-\infty < x < +\infty).$$

2958. $f(x) = |\cos x|$.

解 由于

$$f(x) = |\cos x| = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right|,$$

故有

$$\begin{aligned}
 |\cos x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{*})}{4n^2 - 1} \\
 &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2 - 1} \\
 &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \\
 &\quad (-\infty < x < +\infty).
 \end{aligned}$$

*) 利用2957题的结果.

$$2959. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|\alpha| < 1).$$

解 显然 $p_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 注意, 当 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 函数值理解为其极限值

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{n \cos nx}{\cos x} = n(-1)^{(n-1)k},$$

并且 $p_n(x)$ 是一个周期为 2π 的周期函数且为偶函数. 此外,

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= \frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n-1)x \cos x + \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} \\
 &= p_{n-1}(x) \cos x + \cos(n-1)x,
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 |p_n(x)| &\leq |p_{n-1}(x)| + 1 \quad (-\infty < x < +\infty) \\
 &\quad (n = 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

注意到 $p_1(x) \equiv 1$ ，由上式，利用归纳法即知

$$|p_n(x)| \leq n \quad (-\infty < x < +\infty, n=1, 2, \dots).$$

于是，

$$\left| \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \right| \leq n |\alpha|^n \quad (-\infty < x < +\infty,$$

$$n=1, 2, \dots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha|^n$ 收敛（因为 $|\alpha| < 1$ ），故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \text{ 在 } -\infty < x < +\infty \text{ 上一致收敛. 由此可}$$

知， $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续

函数，且在任何有限区间上均可逐项积分。

注意到 $f(x)$ 为以 2π 为周期的周期函数，并且是偶函数，故 $b_n = 0$ ，且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sum_{n=2, 4, \dots} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1, 3, \dots} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \right] \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k+1} \overset{*}{=} \frac{2\alpha}{1-\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a^m \int_0^{\pi} \frac{\sin mx \cos nx}{\sin x} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

其中

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{m \leq n} a^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{m > n} a^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx.$$

当 $m \leq n$ 时, 不论 $m+n$ 及 $m-n$ 是偶数, 还是 $m+n$ 及 $m-n$ 是奇数, I_1 中诸积分都为零, 故有 $I_1=0$. 当 $m > n$ 时, 若 $m+n$ 及 $m-n$ 为偶数, 则 I_2 中对应的积分等于零; 若 $m+n$ 及 $m-n$ 为奇数, 则 I_2 中对应的积分等于 2π . 于是,

$$I_2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{(2k+1)+n} = 2 \cdot \frac{a^{n+1}}{1-a^2}.$$

由于 $a_n = I_2$, 故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$f(x) = \frac{a}{1-a^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx \right) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

*) 利用 2291 题的结果

2960⁺ 把函数

$$f(x) = \sec x \quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right)$$

展开为福里叶级数.

解 显然 $f(x) = \sec x$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ 内连续, 而且是偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$a_0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{1 - \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}),$$

$$a_n = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

由于

$$\begin{aligned} \cos 4nx - \cos(4nx - 4x) &= -2\sin(4nx - 2x)\sin 2x \\ &= -4\sin(4nx - 2x)\sin x \cos x \\ &= 2[\cos(4nx - x) - \cos(4nx - 3x)]\cos x, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx \\ &= \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(4n-1)x - \cos(4n-3)x] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x} dx \\
& = \frac{16}{\pi} \left[\frac{1}{4n-1} \sin \left(n\pi - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{4n-3} \sin \left(n\pi - \frac{3}{4}\pi \right) \right] + a_{n-1} \\
& = \frac{16}{\pi} \left[-\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3} \sin \frac{3\pi}{4} \right] + a_{n-1} \\
& = \frac{16}{\pi} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} \right) + a_{n-1} \\
& = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)} + a_{n-1} \quad (n=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

由此递推公式，得

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} + a_0 \\
&= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} \\
&\quad + \frac{8}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) \quad (n=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

于是，下面的展式成立：

$$\begin{aligned}
\sec x &= \frac{4}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi} \ln(1+\sqrt{2}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)} \right] \cos 4nx
\end{aligned}$$

$$\left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

2961. 将函数 $f(x) = x^2$ 展开成福里叶级数: (a) 按余弦展开; (b) 按正弦展开; (B) 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开.

绘出函数的图形及情形 (a), (b) 与 (B) 的福里叶级数之和的图形.

利用这些展开式, 求级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

解 (a) 由于 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= (-1)^n \frac{4}{n^2},$$

故 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上按余弦展开为

$$\frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

(b) 由于 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2}{n^2} x \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3 \pi} \left[(-1)^n - 1 \right],
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上按正弦展开为

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} \\
= x^2 \quad (0 \leq x < \pi).
\end{aligned}$$

(B) 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{n^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{-4\pi}{n},
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上可展开为

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \\ = x^2 \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

函数的图形, (a)、(b) 及 (B) 的福里叶级数之和的图形, 如图 5.4、图 5.5、图 5.6 及图 5.7 所示.

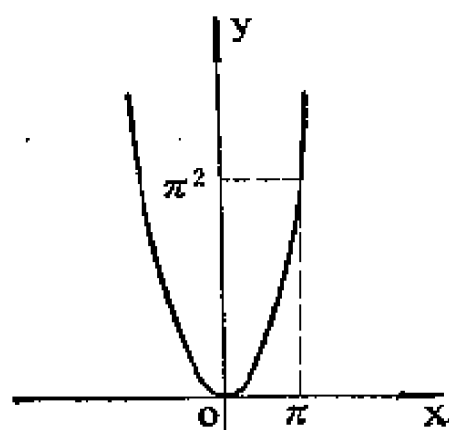


图5.4

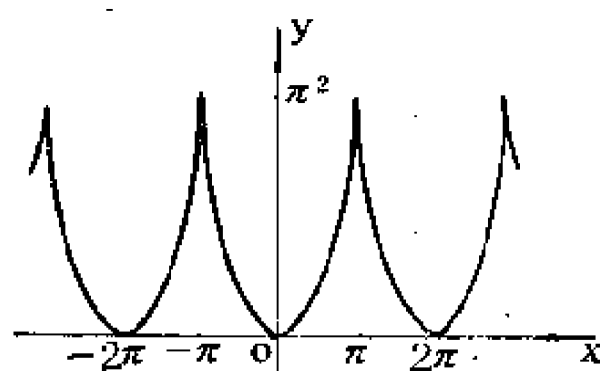


图5.5

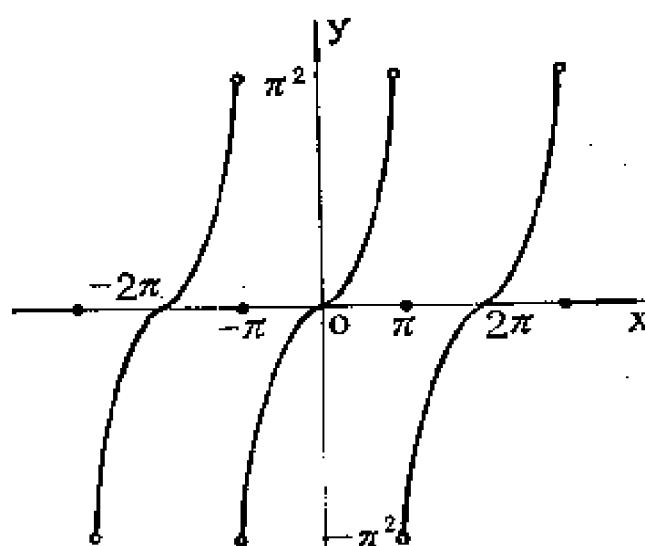


图5.6

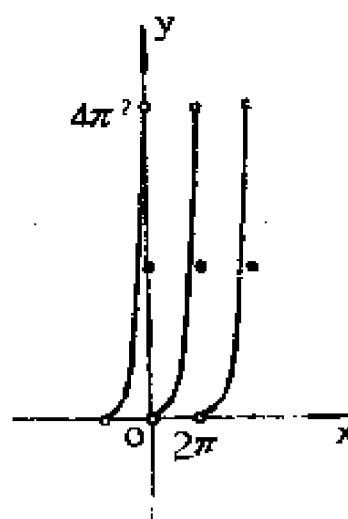


图5.7

若在展开式 (a) 中令 $x = \pi$, 则得

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot (-1)^n = \pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1)$$

若在展开式 (B) 中令 $x = \pi$, 则得

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (2)$$

将级数 (1) 和 (2) 相加, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right] = \frac{\pi^2}{4},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (3)$$

2962. 由展开式

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

用逐项积分的方法, 求函数 x^2 , x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数.

解 将原式在 $[0, x]$ 上逐项积分, 得

$$\frac{x^2}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^2}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

代入上式, 即得

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad (-\pi < x < \pi), (1)$$

将 (1) 式在 $[0, x]$ 上逐项积分, 并将

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

的结果代入, 即得

$$x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} \\ (-\pi < x < \pi), (2)$$

将上式从 $-\pi$ 到 x 积分, 并以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}^{*)}$$

代入, 得

$$\frac{x^4}{4} - \frac{\pi^4}{4} = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} - 2\pi^2 \cdot \frac{\pi^2}{6} \\ + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4} + 12 \cdot \frac{\pi^4}{90},$$

即

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4} \\ (-\pi \leq x \leq \pi), \quad (3)$$

* 由

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

及

$$x^3 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} \\ = \pi^2 x + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

将上式从 0 到 x 积分, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^4} = \frac{2\pi^2 x^2 - x^4}{48}$$

$$(-\pi \leq x \leq \pi).$$

以 $x = \pi$ 代入, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} = \frac{\pi^4}{48},$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (1)$$

由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (2)$$

收敛，故可设其和为 S 。于是，由 (2) - (1) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

即

$$\frac{S}{16} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

从而

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

同时，还可求出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 90}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} \\ &= \pi^4 \left(\frac{1}{96} - \frac{1}{2^4 \cdot 90} \right) = \frac{7}{720} \pi^4. \end{aligned}$$

也可利用此结果求得 x^4 的展开式，事实上，将 x^3 的展开式从 0 到 x 积分，再以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

代入即得.

2963. 写出函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| < \alpha, \\ 0, & \text{当 } \alpha < |x| < \pi \end{cases}$$

的李雅甫诺夫等式.

由李雅甫诺夫等式, 求下列级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

解 由于 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos nx \, dx = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi},$$

又

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} dx = \frac{2\alpha}{\pi},$$

故对应于 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上展开的李雅甫诺夫等式为

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx = \frac{2\alpha}{\pi}. \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2},$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}. \end{aligned}$$

*) 利用2961题的结果.

2964. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{若 } 1 < x < 2, \\ 3-x, & \text{若 } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

展成福里叶级数.

解 将 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上按周期为 3 作福里叶展开, 注意其图象, 易见 $f(x)$ 的延拓(周期为 3)是偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{1}{\frac{3}{2}} \int_0^3 f(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x dx + \frac{2}{3} \int_1^2 dx$$

$$+ \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) dx = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{3} \int_0^1 x \cos \frac{2n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_1^2 \cos \frac{2n\pi x}{3} dx$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) \cos \frac{2n\pi x}{3} dx \\
& = \frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \right] \right|_0^1 \\
& \quad + \frac{3}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} \Big|_1^2 \\
& \quad + \left[\frac{9}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} - \frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} \right. \\
& \quad \left. - \frac{9}{4n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \right] \Big|_2^3 \Big\} \\
& = \frac{2}{3} \left[-\frac{9}{2(n\pi)^2} + \frac{9}{4(n\pi)^2} \left(\cos \frac{2n\pi}{3} + \cos \frac{4n\pi}{3} \right) \right] \\
& = -\frac{3}{(n\pi)^2} + \frac{3}{(n\pi)^2} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3},
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 可按余弦展开为

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n \cos \frac{n\pi}{3}}{n^2} \right] \cos \frac{2n\pi x}{3} \\
& = f(x),
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n \cos \frac{n\pi}{3}}{n^2} \right] \cos \frac{2n\pi x}{3} \\
& = \left(-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{2\pi x}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{4\pi x}{3} \\
& + \left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) \cos 2\pi x + \left(-\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{8\pi x}{3} \\
& + \left(-\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{10\pi x}{3} + \left(-\frac{1}{6^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{6^2} \right) \cos 4\pi x + \dots \\
& = -\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x,
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的余弦展开式可写为

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x \\
& = f(x) \quad (0 \leq x \leq 3).
\end{aligned}$$

利用公式

$$\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$$

式中 $t = e^{ix}$ 及 $\bar{t} = e^{-ix}$, 将下列函数展开成福里叶级数:

2965⁺ $\cos^{2m} x$ (m 为正整数) .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \cos^{2m} x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2m} \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{l=0}^{2m} C_{2m}^l e^{(2m-l)ix} e^{-lix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{1}{2^{2n}} \left(\sum_{l=n}^{n-1} + \sum_{l=n+1}^{2n} \right) C_{2n}^l e^{2(n-l)ix} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{1}{2^{2n}} \left[\sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^l e^{2(n-l)ix} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l'=0}^{n-1} C_{2n}^{2n-l'} e^{-2(n-l')ix} \right] \\
&= \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{1}{2^{2n}} \sum_{s=0}^{n-1} C_{2n}^s \left[e^{2(n-s)ix} + e^{-2(n-s)ix} \right] \\
&= \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{s=0}^{n-1} C_{2n}^s \cos 2(n-s)x \\
&= \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=1}^n C_{2n}^{n-k} \cos 2kx.
\end{aligned}$$

由于上述表达式为一三角多项式, 故在 $(-\infty, +\infty)$ 中的福里叶展开式即为它本身.

2966. $\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad (|q| < 1).$

解 由于

$$\begin{aligned}
\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} &= \frac{\frac{q}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} \\
&= \frac{1}{2i} \frac{q(e^{ix} - e^{-ix})}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - qe^{ix}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1 - qe^{-ix}} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2i} [(1 + qe^{ix} + q^2e^{2ix} + \dots) - (1 + qe^{-ix} + q^2e^{-2ix} + \dots)] = q\sin x + q^2\sin 2x + \dots,$$

及级数

$$q\sin x + q^2\sin 2x + \dots + q^n\sin nx + \dots$$

满足 $|q^n\sin nx| \leq q^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ($|q| < 1$) 收敛, 故级数

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 因此, 级数

$$q\sin x + q^2\sin 2x + \dots + q^n\sin nx + \dots$$

即为其和 $\frac{q\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2}$ (它是周期为 2π 的奇函数)

的福里叶级数, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = \frac{q\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

2967. $\frac{1 - q^2}{1 - 2q\cos x + q^2} \quad (|q| < 1).$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{1 - q^2}{1 - 2q\cos x + q^2} &= \frac{1 - q^2}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} \\ &= (1 - q^2) \frac{1}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} \\ &= -1 + \frac{1}{1 - qe^{ix}} + \frac{1}{1 - qe^{-ix}} \end{aligned}$$

$$= -1 + (1 + qe^{ix} + q^2e^{2ix} + \dots) + (1 + qe^{-ix} + q^2e^{-2ix} + \dots)$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx,$$

又上式右端的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而它就是函数 $\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ 的福里叶级数 (在 $-\infty < x < +\infty$ 上) .

$$2968. \quad \frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} \quad (|q| < 1).$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} &= \frac{1-\frac{q}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2-qe^{ix}-qe^{-ix}}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-qe^{ix}} + \frac{1}{1-qe^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\dots) + (1+qe^{-ix} \\ &\quad + q^2e^{-2ix}+\dots)] \\ &= 1 + q\cos x + q^2\cos 2x + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx, \end{aligned}$$

又上式右端的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因

而它就是函数 $\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ 的福里叶级数 (在 $-\infty < x < +\infty$ 上) .

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ ($|q| < 1$) .

解 由于 $1-2q\cos x+q^2 \geq 1-2q+q^2 = (1-q)^2 > 0$, 故 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 而且是周期为 2π 的偶函数, 将函数对 x 求导数, 得

$$\begin{aligned} [\ln(1-2q\cos x+q^2)]' &= \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx^{*}) \quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

对上式从 0 到 x 积分 (由于上式中级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 故可在有限区间上逐项积分), 则有

$$\begin{aligned} \ln(1-2q\cos x+q^2) &= \int_0^x \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} dx \\ &\quad + 2\ln(1-q) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x q^n \sin nx dx + 2\ln(1-q) \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + 2\ln(1-q). \end{aligned}$$

而

$$\ln(1-q) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n},$$

于是

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx$$

$$(-\infty< x<+\infty).$$

由于右端级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 故它就是左端函数的福里叶级数.

*) 利用2966题的结果.

将下列无界周期函数展开成福里叶级数:

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|.$

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 当 $x=2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时函数有无穷不连续点. 由于 $f(x)$ 是偶函数, 从而 $b_n=0$, 且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{*})=-2\ln 2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin nx\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$$

$$-\frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} dt.$$

由于

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \pi^{**}) \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

故

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \\ &= \pi. \end{aligned}$$

在上式左端第二个积分中令 $\pi - x = u$, 即得与第一个积分相同的积分, 从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

利用这一结果, 易得

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad (n=1, 2, \dots).$$

由于 $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上绝对可积 (参看上面 a_0 计算):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx &= 2 \int_0^{\pi} \left| \ln \sin \frac{x}{2} \right| dx \\ &= -2 \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = 2\pi \ln 2 < +\infty, \end{aligned}$$

且除 $x = 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 诸点外, 在其他

的点 $f(x)$ 均可微,故根据福里叶级数收敛的*Lipschitz*判别法(参看I.M.菲赫金哥尔茨著,微积分学教程,第三卷第三分册658目)知,除上述诸点外, $f(x)$ 的福里叶级数收敛于 $f(x)$ 本身,即

$$\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \\ (x \neq 2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

*) 利用2353题的结果.

**) 利用2291题的结果.

$$2971. f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$$

解 利用2970题的结果,即得

$$\begin{aligned} \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| &= \ln \left| \sin \frac{\pi - x}{2} \right| \\ &= -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\pi - x)}{n} \\ &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n} \\ &\quad (x \neq (2m+1)\pi, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$2972. f(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

解 利用2970题及2971题的结果,即得

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \right] - \left[-\ln 2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n} \right] \\
&= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \\
&\quad (x \neq k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

2973. 将函数

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

展开成福里叶级数.

解 将函数对 x 求导数, 则得

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}^*.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{由于 } f'(x) = -\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \\
&\quad - \frac{1}{2} \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| \text{ 在 } (-\pi, \pi) \text{ 内绝对可积, 故得}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} \\
&\quad (-\pi \leq x \leq \pi).
\end{aligned}$$

*) 利用2972题的结果.

2974. 函数

$$x=x(s), \quad y=y(s) \quad (0 \leq s \leq 4a)$$

是正方形: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ 的围线的参数方程式,
其中 s 为依逆时针方向从点 $O(0, 0)$ 起计算的弧长.
试将这函数展开成福里叶级数.

解 根据定义, $x(s)$ 的表达式可写为

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq a, \\ a, & a \leq s \leq 2a, \\ 3a - s, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 0, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

于是, $x(s)$ 在 $[0, 4a]$ 上的福里叶级数展开为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + b_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) ds = \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s ds + \int_a^{2a} a ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{2a}^{3a} (3a - s) ds \right] = a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{2a}^{3a} (3a - s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \right] \right. \\
&\quad + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] + \left[\left(\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} - \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{3n\pi}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos n\pi \right) \right] \left. \right\} \\
&= \frac{2a}{(n\pi)^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 - \cos \frac{3n\pi}{2} + \cos n\pi \right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, \\ -\frac{4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \\
&= \frac{1}{2a} \left[\int_0^a s \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{2a}^{3a} (3a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\
&= \frac{1}{2a} \left\{ \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\left(-\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} + \frac{6a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) \right. \\
& + \left(\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) \\
& \left. + \left(-\frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \Bigg\} \\
& = \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \\
& = \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{4a(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, k=0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

因此，按展开定理，注意到 $x(0)=x(4a)$ ， $x(s)$ 的福里叶展开式为

$$\begin{aligned}
x(s) &= \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&+ \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&\quad (0 \leq s \leq 4a).
\end{aligned}$$

同样，根据定义， $y(s)$ 的表达式为

$$y(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq a, \\ s-a, & a \leq s \leq 2a, \\ a, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 4a-s, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

于是， $y(s)$ 在 $[0, 4a]$ 上的福里叶级数展开为

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + B_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) ds = \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) ds + \int_{2a}^{3a} a ds \right. \\ \left. + \int_{3a}^{4a} (4a-s) ds \right] = a,$$

$$A_n = \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\ = \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\ \left. + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\ = \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} (\cos n\pi \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right] - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right] \right. \\ \left. + \left[\left(-\frac{3a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) - \left(-\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \right\} \\ = \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} - 1 + \cos \frac{3n\pi}{2} \right)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, \quad k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{-4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int_a^{2a} (s-a) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi \right] + \left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi} + \frac{8a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{8a^2}{n\pi} - \frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{3n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, \quad k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{4a(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots. \end{cases} \end{aligned}$$

因此, 按展开定理, 注意到 $y(0) = y(4a)$, 得 $y(s)$ 的福里叶级数展开为

$$y(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\ + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\ (0 \leq s \leq 4a).$$

2975. 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延展到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 而使得它展开成福里叶级数的形状如下:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

解 由于展开式中无正弦项, 故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x) = f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 的部分记以 $g(x)$, 则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nx dx = 0 \\ (n=0, 1, 2, \dots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi - x = y$, 即得

$$- \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - y) \cos 2ny dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nx dx = 0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f(\pi - x) + g(x)] \cos 2nx dx = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

为要上式成立, 显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内任一 x 值,

恒有

$$f(\pi-x)+g(x)=0,$$

即

$$g(x)=-f(\pi-x).$$

总之, 首先要在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数, 使它等于 $-f(\pi-x)$; 然后, 再按偶函数延拓到 $(-\pi, 0)$. 不妨将延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上的函数仍记为 $f(x)$, 则由上述讨论知, 必有

$$f(-x)=f(x), \quad f(\pi-x)=-f(x) \quad (-\pi < x < \pi).$$

2976. 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延展到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 而使得它展开成傅里叶级数的形状如下:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)?$$

解 由于展开式中无余弦项, 故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x)=-f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 的部分记以 $g(x)$, 则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \sin 2nx \, dx = 0 \\ (n=1, 2, \dots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$, 即得

$$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-y) \sin 2ny \, dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \sin 2nx \, dx = 0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi-x) + g(x)] \sin 2nx \, dx = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

为要上式成立，显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内任一 x 值，恒有

$$-f(\pi - x) + g(x) = 0,$$

即

$$g(x) = f(\pi - x).$$

总之，首先要在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数，使它等于 $f(\pi - x)$ ；然后，再按奇函数延拓到 $(-\pi, \pi)$ ，不妨将延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上的函数仍记为 $f(x)$ ，则由上述讨论知，必有

$$f(-x) = -f(x), \quad f(\pi - x) = f(x).$$

2977. 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内把函数

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

展开：(a) 依角的奇倍数的余弦展开；(b) 依角的奇倍数的正弦展开。

绘出情形(a)与(b)的福里叶级数之和的图形。

解 (a) 利用2975题的结果，延拓函数，使有

$$f(-x) = f(x), \quad f(\pi - x) = -f(x),$$

于是，有

$$\begin{aligned} a_{2k+1} = & \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx \right. \\ & \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi - x)] \cos(2k+1)x dx \right\}. \end{aligned}$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi - x = y$ ，则得到与第一个积分同样的结果，即

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos(2k+1)x dx \\
&= \frac{4}{(2k+1)\pi} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad - \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \sin(2k+1)x dx \\
&= \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \left[\frac{\pi}{2} \cos(2k+1)x \right. \\
&\quad \left. - 2x \cos(2k+1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad + \frac{8}{(2k+1)^2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k+1)x dx \\
&= -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3\pi} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \\
&= -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8 \cdot (-1)^k}{(2k+1)^3\pi} \quad (k=0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的展开式为

$$\begin{aligned}
&-2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[-\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \right] \right. \\
&\quad \left. \cdot \cos(2k+1)x \right\} = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right),
\end{aligned}$$

其和的图形如图5.8所示.

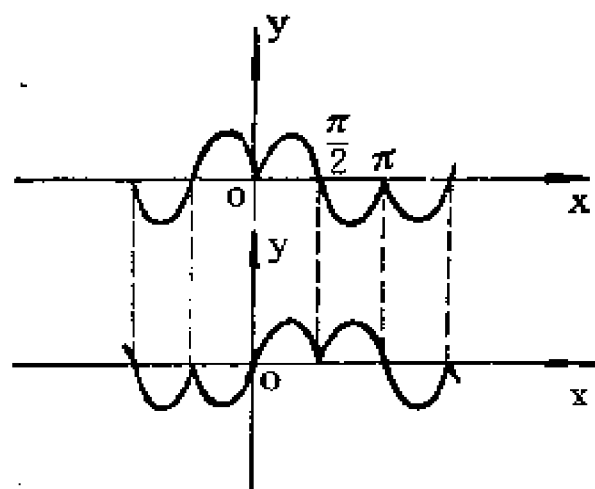


图 5.8

(6) 利用2976题的结果, 延拓函数, 使有

$$f(-x) = -f(x), \quad f(\pi - x) = f(x).$$

于是, 有

$$b_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\pi - x) \sin(2k+1)x dx \right].$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi - x = y$, 则得到与第一个积分同样的结果, 即

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(2k+1)x dx \\ &= -\frac{4}{(2k+1)\pi} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \cos(2k+1)x dx \\
& = \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \sin(2k+1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
& \quad + \frac{8}{(2k+1)^2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x dx \\
& = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3\pi} \quad (k=0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的展开式为

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{4}{(2k+1)^3\pi} \right] \sin(2k+1)x \right\} \\
& = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right),
\end{aligned}$$

其和的图形如图 5.8 所示.

2978. 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数, 即

$$f(x+\pi) = -f(x).$$

问此函数在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数具有怎样的特性?

解 由于

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 f(\pi+x) \cos nx dx \right.
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^\pi f(x) \cos nx dx \Big] \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

故在上式右端第一个积分中令 $x+\pi=y$, 则得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(-1)^{n+1} + 1] f(x) \cos nx dx.$$

于是, 得 $a_{2n}=0$ ($n=0, 1, 2, \dots$). 同理, 可得 $b_{2n}=0$ ($n=1, 2, \dots$). 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n}=0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_{2n}=0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

2979. 设 $f(x+\pi)=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数具有怎样的特性?

解 与 2978 题类似, 我们可求得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(-1)^n + 1] f(x) \cos nx dx \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

因此, 有

$$a_{2n-1}=0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

同理, 可求得

$$b_{2n-1}=0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

即函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

2980. 一个具周期为 2π 的函数 $y=f(x)$, 如果函数的图形: (a) 以点 $(0, 0)$, $(\pm \frac{\pi}{2}, 0)$ 为对称中心; (b) 以坐标原点为对称中心及 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 为对称轴; 问其福里

叶系数 $a_n, b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 具有怎样的特性?

解 (a) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = -f(x), \quad f(\pi - x) = -f(x).$$

因此, $a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi - x)] \sin nx \, dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y) \sin ny \, dy \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^n] f(x) \sin nx \, dx, \end{aligned}$$

从而 $b_{2n-1} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$, 即 $f(x)$ 的福里叶级数的特性为

$$a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_{2n-1} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

(b) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = f(x), \quad f(\pi - x) = f(x).$$

同 (a) 一样, $a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$, 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^{n+1}] f(x) \sin nx \, dx,$$

故 $b_{2n} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$. 因此, $f(x)$ 的福里叶系数的特性为

$$a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_{2n} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

2981. 如果函数

$$\varphi(-x) = \psi(x),$$

问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n ($n=0, 1, 2, \cdots$) 之间有何关系?

解 函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 的傅里叶系数分别为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx.$$

由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$, 并将 $\varphi(-x) = \psi(x)$ 代入, 即得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \psi(x) \cos nx dx + \int_{-\pi}^0 \psi(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx = \alpha_n. \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \sin nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} \psi(x) \sin nx dx - \int_{-\pi}^0 \psi(x) \sin nx dx \right] \\
&= - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx = -\beta_n.
\end{aligned}$$

因此, $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n 、 b_n 与 α_n 、 β_n 的关系为

$$\begin{aligned}
a_n &= \alpha_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\
b_n &= -\beta_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

2982. 如果函数

$$\varphi(-x) = -\psi(x),$$

问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n 、 b_n 与 α_n 、 β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 之间有何关系?

解 函数 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的福里叶系数分别为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx;$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx.$$

由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$, 并将 $\varphi(-x)=-\psi(x)$ 代入, 即得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\int_0^x \psi(x) \cos nx dx - \int_{-\pi}^0 \psi(x) \cos nx dx \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^x \psi(x) \cos nx dx = -a_n. \end{aligned}$$

同理, 有

$$b_n = \beta_n.$$

因此, $\varphi(x), \psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n 的关系为

$$a_n = -\alpha_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \beta_n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

2983. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n, b_n ($n=0, 1, 2, \dots$), 试计算“平移”了的函数 $f(x+h)$ ($h=\text{常数}$) 的傅里叶系数 $\overline{a_n}, \overline{b_n}$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

解 在傅里叶系数 $\overline{a_n}$ 的表达式中作代换 $x+h=y$, 并注意到 $f(x)$ 的周期性, 即有

$$\begin{aligned} \overline{a_n} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{x+h} f(y) [\cos nh \cos ny + \sin nh \sin ny] dy \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \cos nh dx \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \int_{-x}^x f(x) \sin nx \sin nh dx \right\} \\ = a_n \cos nh + b_n \sin nh.$$

同理, 可求得

$$\overline{b_n} = b_n \cos nh - a_n \sin nh.$$

2984. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$, 试计算斯且克洛夫函数

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$$

的福里叶系数 $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots)$.

解 由于

$$\begin{aligned} f_h(x+2\pi) &= \frac{1}{2h} \int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi = f_h(x), \end{aligned}$$

故 $f_h(x)$ 仍为以 2π 为周期的周期函数.

于是, 有 (作代换 $\xi = x + y$)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_h(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{-h}^h f(x+y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi h} \int_{-h}^h dy \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cos nx dx. \end{aligned}$$

根据2983题的结果可知

$$\frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f(x+y) \cos nx dx = a_n \cos ny + b_n \sin ny,$$

故

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (a_n \cos ny + b_n \sin ny) dy \\ &= \frac{a_n}{h} \int_0^h \cos ny dy = \begin{cases} a_n, & \text{当 } n=0 \text{ 时;} \\ \frac{a_n \sin nh}{nh}, & \text{当 } n=1, 2, \dots \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

即

$$A_0 = a_0,$$

$$A_n = \frac{a_n \sin nh}{nh} \quad (n=1, 2, \dots).$$

同理可得

$$B_n = \frac{b_n \sin nh}{nh} \quad (n=1, 2, \dots).$$

2985. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数并且 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 为其福里叶系数. 求 卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f(t) f(x+t) dt$$

的福里叶系数 $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots)$.

利用所得的结果, 推出李雅甫诺夫等式.

解 由于

$$F(x+2\pi) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f(t) f(x+2\pi+t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^x f(t) f(x+t) dt = F(x),$$

故 $F(x)$ 仍是以 2π 为周期的函数. 于是, 有

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^x F(x) dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^x dx \int_{-\pi}^x f(t) f(x+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^x f(t) dt \int_{-\pi+t}^{x+t} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\pi}^x f(t) dt \right]^2 = a_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^x F(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^x \cos nx dx \int_{-\pi}^x f(t) f(x+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^x f(t) dt \int_{-\pi}^x f(x+t) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^x f(t) dt \int_{-\pi+t}^{x+t} f(\xi) (\cos n\xi \cos nt \\ &\quad + \sin n\xi \sin nt) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^x [a_n f(t) \cos nt + b_n f(t) \sin nt] dt \\ &= a_n^2 + b_n^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^x F(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^x \sin nx dx \int_{-\pi}^x f(t) f(x+t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) (\sin n\xi \cos nt \\
&\quad - \cos n\xi \sin nt) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{b_n f(t) \cos nt - a_n f(t) \sin nt\} dt \\
&= b_n a_n - a_n b_n = 0.
\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 的连续性知, $F(x)$ 不仅以 2π 为周期而且是连续函数, 故按展开定理, 注意到 $B_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 即得

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx.$$

因此, 特别地, 有

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

但已知

$$A_0 = a_0^2, \quad A_n = a_n^2 + b_n^2,$$

且

$$F(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(0+t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt,$$

故得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

这就是李雅甫诺夫等式。

§7. 级数求和法

1° 直接求和法 若

$$u_n = v_{n+1} - v_n \quad (n=1, 2, \dots) \text{ 及 } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_\infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

特别是, 若

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}},$$

其中数 a_i ($i=1, 2, \dots$) 形成以 d 为公差的等差级数, 则

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形未知级数能表为下列已知级数的线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ 等等.}$$

2° 亚伯耳方法 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

在最简单的例子中，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和借助于逐项

微分法或积分法来求。

3° 三角级数求和法 为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \text{ 及 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$$

的和，常把它们视为复数域内幂级数： $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (其中 $z = e^{ix}$)

的实的实数部分及对应的虚数部分的系数。

在许多情形下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$$

是有用的。

求下列级数的和：

$$2986. \quad \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

解 由 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ ，得

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$2987. \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots.$$

解 由 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$, 并注意 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1^{*)}$,

即得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

*) 利用2549题的结果。

$$2988. \quad \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots.$$

解 $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right] \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} - 1 \right\} = 2 \ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

2989. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$

解 由于

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} = \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

故

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right) \\
&\quad - \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)^* = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

*) 利用2987题的结果.

2990. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} \quad (m \text{ 为自然数}).$

解 由 $\frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right)$, 考虑适当的正

整数 N , 并令 $N \rightarrow \infty$, 即得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+m)} \\ &= \frac{1}{m} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right) \\ &= \frac{1}{m} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right. \\ &\quad \left. - \cdots - \frac{1}{N+m} \right) = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

2991. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$.

解 由 $\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right]$, 得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1)^*) = \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*) 注意原级数的绝对收敛性, 并利用2988题的结果.

$$2992. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$2993. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

$$\text{解} \quad \text{由} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)^{*} = 1. \end{aligned}$$

*) 所写级数均为绝对收敛级数, 并利用2961题的结果(或本节前言)。

$$2994. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

$$\text{解} \quad \text{由} \frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \left(\sum_{n_1=1}^{2N+1} \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} \sum_{n_2=1}^N \frac{1}{n_2} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (C + \ln N + \varepsilon_1) - 2 \left[(C + \ln(2N+1) + \varepsilon_2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (C + \ln N + \varepsilon_3) - 1 \right]^{*}) \\
&= 2 \ln \frac{N}{2N+1} + \alpha + 2,
\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, $\varepsilon_3 \rightarrow 0$, $\alpha = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rightarrow 0$
(当 $N \rightarrow \infty$).

于是

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n+1)} = 2 \ln \frac{1}{2} + 2 = 2(1 - \ln 2),$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2(1 - \ln 2).$$

*) 利用146题的结果.

2995. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{n!} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 2 + \sum_{n=3}^N \frac{n^2}{n!} \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{n=3}^N \left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \right] \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{N-2} \frac{1}{l!} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left(1 + \sum_{s=1}^N \frac{1}{s!} \right) + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\} \\
&= 2e.
\end{aligned}$$

2996. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.
\end{aligned}$$

利用级数运算的性质可知, 对于绝对收敛的级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, 有下述等式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n,$$

$$\text{其中 } d_n = \sum_{l+l=n} \frac{1}{k!l!} = \frac{1}{n!} \sum_{l+l=n} \frac{n!}{k!l!} = \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^n C_n^l = \frac{2^n}{n!},$$

故得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)^2 = e^2.$$

因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2.$$

2997. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$

解 由 $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)}$, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) - 2^{*}) \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 3.\end{aligned}$$

*) 利用2549题及2961题的结果.

2998. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$

解 首先, 注意到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \\ &= -\frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2} - \frac{12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2 \left[\frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+2)^2} - \frac{2}{(n+1)^2(n+2)^2} \right] \\ &= \frac{12n+10}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \quad (2)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n(n+2)} = \frac{4}{n^2(n+2)^2}. \quad (3)$$

将(1)、(2)、(3)三式相加, 合并整理可得

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+2)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} \\
& + \frac{2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.
\end{aligned}$$

其次, 先后利用2961题、2990题、2987题和2997题的结果, 即得

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right. \\
& + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \\
& + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} \\
& \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \right\} \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \right. \\
& \quad - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + 6 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 - \frac{1}{4} \right) \\
& \quad \left. + 2 \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 \right) \right\} \\
& = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}.
\end{aligned}$$

$$2999. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$$

解 注意到

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right),$$

$$\frac{2}{5!} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right),$$

.....

$$\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right],$$

.....

相加即得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right]^{*}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1). \end{aligned}$$

*) 由于级数绝对收敛, 从而其和与项相加的顺序无关.

3000† $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}.$

解 考虑部分和

$$S_N = \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2} = \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{3} \sum_{l=4}^{N+2} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \\
&= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right),
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} \\
&= \frac{1}{18} (12 \ln 2 - 5).
\end{aligned}$$

3001. 设 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$$

的和.

解 令 $P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m$

$$\equiv a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n(n-1)\cdots(n-m+1),$$

其中 a_i ($i=0, 1, \cdots, m$) 可由上述恒等式求出, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!} x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + a_1 x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \\
&\quad + a_m x^m \cdot \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= a_0 e^x + a_1 x e^x + \cdots + a_m x^m e^x \\
&= e^x (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m).
\end{aligned}$$

求下列级数的和:

3002. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$

解 对于任意 x , 考虑部分和

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2+1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = 1 + 2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\
&\quad + \sum_{n=3}^N \left[\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&= \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \right] + \left[\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{l=2}^N \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l \right] + \left[1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right] + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k \\
&\quad + \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{l=0}^N \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \\
&= \left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right] \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + O\left(\frac{1}{N^2}\right),
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \\ &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) e^{\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

3003. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n.$

解 由 $\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} (-x)^n \\ &= \frac{1}{2} (-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)!} = -\frac{x}{2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= -\frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} = -\frac{x}{2} + x^2 e^{-x} + (e^{-x} - 1 + x) \\ &+ \frac{1}{x} \left(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} \right) = e^{-x} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

3004. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}.$

解 由 $\frac{2n^2+1}{(2n)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-1)!}$

$+\frac{1}{(2n)!}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n} &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-2)!} x^{2n} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} x^{2n-2} - \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1 = 1 - \frac{x^2}{2} \cos x - \frac{x}{2} \sin x + \cos x - 1 \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x. \end{aligned}$$

3005. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$.

解 1) 若 $x=0$, 则级数的和显然为零.

2) 若 $x>0$, 记 $t=\sqrt{x}$. 考虑部分和, 并注意: 当任意固定 x 时, 某些常见幂级数的收敛性, 下述记号 $o(1)$ 是指当 $N \rightarrow \infty$ 时的无穷小. 于是有

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 t^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{(2n)^2 - 1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\ &\quad + \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} t^{2n+1} + \frac{1}{4t} \sinh t + o(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4t} \left[t^2 \sum_{n=1}^N \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} - t \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right] + \frac{1}{4t} \operatorname{sh} t + o(1) \\
&= \frac{1}{4t} (t^2 \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t + o(1)) + \frac{1}{4t} \operatorname{sh} t + o(1) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2 + 1}{t} \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \right) + o(1) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right) + o(1).
\end{aligned}$$

因此, 当 $x \geq 0$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right).$$

3) 若 $x < 0$, 记 $y = \sqrt{|x|}$, 则 $x = -y^2$. 与上述讨论类似, 有

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 (-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n [(2n)^2 - 1]}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\
&\quad + \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\
&\quad + \frac{1}{4y} \sin y + o(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4y} \left[y^2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n y^{2n-1}}{(2n-1)!} - y \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\
&= \frac{1}{4y} \left[-y^2 \sin y - y \cos y + o(1) \right] + \frac{1}{4y} \sin y + o(1) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{-y^2+1}{y} \sin y - \cos y \right) + o(1) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right) + o(1).
\end{aligned}$$

因此, 当 $x \leq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right).
\end{aligned}$$

利用逐项微分法求级数的和:

3006. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $x = 1$ 时, 级数发散; 当 $x = -1$ 时, 级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

当 $|x| < 1$ 时, 逐项微分之, 得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

由于 $f(0)=0$ ，故得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1). \quad (1)$$

由上述幂级数在 $x=-1$ 的收敛性，且其和为 $-\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$ ，利用亚伯耳定理知，上述结果(1)当 $-1 \leq x < 1$ 时成立。

3007.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)} = 1$ ，故收

敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时，级数绝对收敛. 因此，级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

当 $x \in (-1, 1]$ 时，令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

当 $|x| < 1$ 时，逐项微分之，得

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = 2 \operatorname{arctg} x^{(*)}.$$

由于 $f(0)=0$ ，故得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = 2 \int_0^x \operatorname{arctg} t dt$$

$$\begin{aligned}
&= 2x \operatorname{arctg} x - 2 \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \\
&= 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2). \quad (1)
\end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 级数为

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{4}^{**}) - \ln 2 = \frac{\pi}{2} - \ln 2,
\end{aligned}$$

利用亚伯耳定理知, 上述结果(1)包括端点在内也成立, 即当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, (1) 式成立.

*) 利用2907题的结果.

**) 利用2938题的结果.

3008. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{4n+1} = 1$, 故收敛半径为1. 当 $|x|=1$ 时, 级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

逐项微分之, 得

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}.$$

由于 $f(0)=0$, 故得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \quad (|x| < 1).$$

3009. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n \quad (d > 0).$

解 首先, 应设

$$a \neq -md \quad (m=0, 1, 2, \dots),$$

因为否则, 若 $a = -md$ (m ——某正整数或零), 则原级数从 $m+1$ 项开始恒为零, 此时原级数为—多项式

$$\sum_{n=1}^m \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n,$$

它对任何 x 均收敛.

令

$$a_n = \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots).$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)d}{a+nd} = 1,$$

故收敛半径为 1. 以下先设 $|x| < 1$ 求原级数的和, 最后再考虑端点 $x = \pm 1$ 时的情形.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n.$$

逐项微分之，得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot d \cdot 2d \cdots (n-1)d} x^{n-1}.$$

以 $(1-x)$ 乘上式两端，得 $(1-x)f'(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{d} + \frac{a}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n \\ &= \frac{a}{d} + \frac{a}{d} f(x). \end{aligned}$$

上述方程系一阶线性方程：

$$f'(x) - \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x} f(x) = \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

解之，得

$$f(x) = C(1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1 \quad (-1 < x < 1),$$

其中 C 为常数。由于 $f(0) = 0$ ，故得 $0 = C - 1$ ，即 $C = 1$ 。于是，当 $|x| < 1$ 时，

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1. \quad (1)$$

最后，考虑端点 $x = \pm 1$ 的情形，先考虑 $x = 1$ 。

此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ，由于当 n 充分大时， $a + nd > 0$ ，故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_{n+1}}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d-a)n}{a+nd} = \frac{d-a}{d}.$$

于是, 根据拉阿伯判别法可知, 当 $a < 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 当 $a > 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 但当 $a > 0$ 时, $a_n > 0$. 由此可知: 当 $a < 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当 $a > 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

再考虑 $x = -1$. 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, 当 $a < 0$ 时, 前面已证 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

下设 $a > 0$. 若 $a \geq d$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} \leq 1,$$

故

$$a_{n+1} \geq a_n > 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 的通项不趋于零, 因此它发散. 下设 $0 < a < d$. 于是有

$$\ln a_n = \sum_{k=1}^n \ln \left[\frac{a+(k-1)d}{kd} \right] = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right). \quad (2)$$

由于 $0 < a < d$, 故 $\ln(1 - \frac{d-a}{kd}) < 0$ ($k=1, 2, 3, \dots$).

注意到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right) / \left(-\frac{d-a}{kd} \right) = 1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散，即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{d-a}{kd}\right)$ 发散，从

而（它的每一项都是负的）

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{d-a}{kd}\right) = -\infty.$$

于是，根据 (2) 式即知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (3)$$

另外，因 $0 < a < d$ ，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} > 1,$$

故

$$a_n > a_{n+1} > 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

于是，由 (3) 式及 (4) 式，根据莱布尼兹判别法知，级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛。

综上所述，并根据幂级数的亚伯耳定理，即知：
当 $a < 0$ 时，原幂级数的收敛域为 $-1 \leq x \leq 1$ ，且在其上，公式 (1) 成立；当 $0 < a < d$ 时，原幂级数的收敛域为 $-1 \leq x < 1$ ，且在其上，公式 (1) 成立；当 $a \geq d$ 时，原幂级数的收敛域为 $-1 < x < 1$ ，且在其上，公式 (1) 成立。

$$3010. \quad \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots$$

解 记 $a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \cdot \frac{1}{2^n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(3n+3)}{3n+1} = 2,$$

故收敛半径为 2. 先对 $|x| < 2$ 求级数的和, 然后再考虑端点 $x = \pm 2$ 的情况.

当 $x \in (-2, 2)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

逐项微分之, 得

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdots (3n-3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}.$$

以 $\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ 乘上式两端, 得

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) f'(x) = \frac{1}{6} f(x) + \frac{1}{6}.$$

上述方程系一阶线性方程:

$$f'(x) - \frac{1}{6\left(1 - \frac{x}{2}\right)} f(x) = \frac{1}{6\left(1 - \frac{x}{2}\right)}.$$

解之, 得

$$f(x) = C\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1 \quad (-2 \leq x \leq 2).$$

由于 $f(0) = 0$, 故得 $0 = C - 1$, 即 $C = 1$. 于是, 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, 有

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1. \quad (1)$$

最后考虑端点 $x = \pm 2$ 的情况, 先考虑 $x = 2$, 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 其中

$$b_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

故由拉阿伯判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

再考虑 $x = -2$, 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

由于 $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{3n+3}{3n+1} > 1$,

故

$$b_n > b_{n+1} > 0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots). \quad (2)$$

另外,

$$\ln b_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{3k-2}{3k} = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{2}{3k}\right).$$

由于 $\ln\left(1 - \frac{2}{3k}\right) < 0$ ($k=1, 2, 3, \dots$), 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{3k}\right)}{-\frac{2}{3k}} = 1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{3k}\right)$ 发散, 并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{3k}\right) = -\infty.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (3)$$

由 (2) 式及 (3) 式, 根据莱布尼兹判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \text{ 收敛.}$$

综上所述, 并利用幂级数的亚伯耳定理, 即知: 原幂级数的收敛域为 $-2 \leq x < 2$, 且在其上, 公式 (1) 成立.

利用逐项积分法求级数的和:

$$3011. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, 故收敛半

径为 1. 当 $|x|=1$ 时, 由于 $n^2 \rightarrow +\infty$, 故级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

逐项积分之, 得

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

*) 利用 2911 题的结果.

3012. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1$, 故收

敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时, 由于 $n(n+2) \rightarrow \infty$, 故级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1} \\ &= xg(x), \end{aligned}$$

其中 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}$. 由于

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \int_0^x t^{n-1} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= \frac{x}{(1-x)^2} \overset{*}{+} \frac{2x}{1-x} = \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2},
\end{aligned}$$

故 $g(x) = [G(x)]' = \left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{3-x}{(1-x)^3}$. 因此, 当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = xg(x) = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}.$$

*) 利用2911题的结果.

3013. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} = +\infty$,

故级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

逐项积分之, 得

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n+1)t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = x e^{x^2}.$$

于是, 当 $|x| < +\infty$ 时,

$$f(x) = (x e^{x^2})' = e^{x^2} (1 + 2x^2).$$

注 本题也可直接求级数的和. 事实上,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(n-1)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n!} \right] x^{2n} = 1 + 2x^2 e^{x^2} + (e^{x^2} - 1) \\ &= e^{x^2} (1 + 2x^2). \end{aligned}$$

对于本题, 还可用逐项微分法求级数的和. 事实上,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{(n-1)!} x^{2n-1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2(n-1)+1] + 2}{(n-1)!} x^{2(n-1)+1} \\ &= 2x \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{m!} x^{2m} + 4x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} \\ &= 2xf(x) + 4xe^{x^2}, \end{aligned}$$

解一阶线性微分方程

$$f'(x) - 2xf(x) = 4xe^{x^2},$$

得

$$f(x) = e^{x^2} (2x^2 + C).$$

由于 $f(0) = 1$, 故得 $1 = 1(2 \cdot 0 + C)$, 即 $C = 1$, 于

是, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$f(x) = e^{x^2} (2x^2 + 1).$$

利用亚伯耳方法, 求下列级数的和:

3014. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$.

解 级数

$$x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$$

的收敛域为 $(-1, 1]$. 当 $|x| < 1$ 时, 令

$$f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$$

逐项微分之, 得

$$f'(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots = \frac{1}{1+x^3}.$$

由于 $f(0) = 0$, 故有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \\ &\quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

由亚伯耳定理, 即得

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$$

$$= f(1) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用1881题的结果.

$$3015. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

解 级数

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

的收敛域为 $[-1, 1]$, 利用 2907 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

由亚伯耳定理, 即得

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} x \\ &= \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$3016. \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$$

解 级数

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots$$

的收敛域为 $(-1, 1]$. 利用 2910 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

由亚伯耳定理, 即得

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3017. $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots$

解 级数

$$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$$

的收敛域为 $[-1, 1]$, 利用2870题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$$

由亚伯耳定理, 即得

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

求下列三角级数的和:

3018. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$

解 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z},$$

其中 $z = e^{ix}$, 以及

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{1-z} &= -\ln(1 - \cos x - i \sin x) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos x) + i \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad *) \\ &= -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| + i \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{1 - \cos x} \end{aligned} \quad (1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad (2)$$

比较 (1), (2) 两式实数部分及虚数部分, 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \quad (0 < x < 2\pi) \quad (3)$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} &= \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) \\ &= \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi - x}{2} \right) = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi). \end{aligned}$$

*) 其中用到 $\ln z = \ln(|z| e^{i \arg z}) = \ln |z| + i \arg z$.

若 $z = x + iy$, 则 $\ln |z| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, 而 $\arg z =$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$3019. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

解 参看3018题中的结果(3).

$$3020. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}.$$

解 利用积化和差公式及3019题的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-\alpha)}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x+\alpha)}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x+\alpha}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} \right|, \end{aligned}$$

上式的存在域为 $0 < x - \alpha < 2\pi$ 及 $0 < x + \alpha < 2\pi$ 的公共部分, 可视 α 之正负号而定: 当 $\alpha > 0$ 时为 $\alpha < x < 2\pi - \alpha$; 当 $\alpha < 0$ 时为 $-\alpha < x < 2\pi + \alpha$.

$$3021. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

解 利用半角公式、积化和差公式以及3018题的结

果, 即得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha \sin nx}{n} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+2\alpha)}{n} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-2\alpha)}{n}.
 \end{aligned}$$

下面分三种情况求此级数的和 S :

(1) 取 $0 < x < 2\pi$, $0 < x-2\alpha < 2\pi$ 与 $0 < x+2\alpha < 2\pi$ 的公共部分, 即 $2\alpha < x < 2\pi-2\alpha$. 此时, 级数的和为

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha)}{8} - \frac{\pi-(x-2\alpha)}{8} = 0.$$

(2) 当 $0 < x < 2\alpha$ 时,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha)}{8} + \frac{\pi-(2\alpha-x)}{8} \\
 &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

(3) 当 $2\pi-2\alpha < x < 2\pi$ 时,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha-2\pi)^{*})}{8} - \frac{\pi-(x-2\alpha)}{8} \\
 &= -\frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

*) 由于 $2\pi \leq x+2\alpha \leq 3\pi$, 故可令

$$x+2\alpha = 2\pi + \theta \quad (0 \leq \theta < \pi),$$

则有

$$\sin n(x+2\alpha) = \sin n(2\pi + \theta) = \sin n\theta,$$

从而以 $\theta = x+2\alpha - 2\pi$ 代替 3018 题的结果中的 x 即可.

$$3022. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

解 记

$$I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

利用 3018 题的结果, 有

$$I(x) = (\operatorname{sgn} x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n|x|}{n} = (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2} \quad (|x| < 2\pi).$$

又记

$$I_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad I_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k},$$

则有

$$\begin{aligned} I_2(x) &= (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(2|x|)}{k} \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - 2|x|}{2} \quad (|x| < \pi). \end{aligned}$$

由 $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$, 当 $|x| < \pi$ 时, 有

$$(\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - |x|}{2} = I_1(x) + (\operatorname{sgn} x) \cdot \frac{\pi - 2|x|}{4}.$$

于是,最后得

$$\begin{aligned} I_1(x) &= (\operatorname{sgn} x) \cdot \left(\frac{\pi - |x|}{2} - \frac{\pi - 2|x|}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x \quad (|x| < \pi). \end{aligned}$$

3023. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$

解 首先仿照3018题的解法,只要在公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}$$

中令 $z = -e^{ix}$, 并注意幅角主值的取法, 就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2} \quad (|x| < \pi) \quad (1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right). \quad (2)$$

由于

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right),$$

故有

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n+1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos (n+1)x}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(m-1)x}{m} \\
& = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{m} [\cos(m-1)x - \cos(m+1)x] \\
& \quad - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos x \right) \\
& = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{m} \sin mx \sin x \\
& = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right) - \frac{x}{2} \sin x \quad (|x| < \pi).
\end{aligned}$$

3024. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

解 记

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致收

敛, 故 $F(x)$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 而且是以 2π 为周期的周期函数. 因此, 只要求 $F(x)$ 在 $|x| \leq \pi$ 上的值, 易知

$$2 \sin x \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x = 1 - \cos 2nx,$$

故当 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ ($0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ 是任意的) 时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x \right| \leq \frac{1}{\sin \tau}.$$

于是, 根据迪里黑里判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ 上一致收敛. 从而, 由逐项求导数法则知: 当 $\tau \leq x < \pi - \tau$ 时, 有

$$F'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}^{*}) \quad (1)$$

由 τ 的任意性知(1)式当 $0 < x < \pi$ 时成立. 于是,

$$F(x) = -\frac{\pi}{4}x + C \quad (0 < x < \pi), \quad (2)$$

其中 C 是某常数. 由 $F(x)$ 在 $x=0$ 的连续性以及

$$F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}^{**}),$$

在(2)式中令 $x \rightarrow +0$ 取极限, 即得 $C = \frac{\pi^2}{8}$, 于是

$$F(x) = -\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2}{8} \quad (0 \leq x < \pi).$$

由此, 再注意到 $F(x)$ 是偶函数及连续函数, 得

$$F(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}|x| \quad (|x| \leq \pi).$$

*) 利用3022题的结果.

**) 利用2961题的结果.

$$3025. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

解 由于

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

故得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)} &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n+1} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin(m-1)x}{m} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin mx}{m} \cos x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos mx}{m} \sin x \\ &= -(1 + \cos x) \left(-\frac{x}{2} \right) - \sin x \cdot \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{*}) \\ &= \frac{x}{2} (1 + \cos x) - \sin x \cdot \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \\ &(|x| < \pi). \end{aligned}$$

*) 利用解3023题时的(1)、(2)两式.

$$3026. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

解 令 $z = e^{ix}$, 考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!},$$

$$e^z = e^{\cos x + i \sin x}$$

$$= e^{\cos x} [\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)],$$

故按实部和虚部分别各自相等的关系, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} \cos(\sin x) \quad (|x| < +\infty).$$

3027. 作曲线

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0$$

的图形.

解 记

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2},$$

注意到 $f(x, y)$ 对 x, y 分别均为以 2π 为周期的周期函数, 故可考虑下列定义域:

$$R = \{0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi\}.$$

为研究 $f(x, y) = 0$ 的图形, 要用到下列函数:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} \quad (|t| < +\infty).$$

为求 $g(t)$, 考虑 $g'(t)$, 仿 3024 题的办法可知可逐项

求导数, 再注意到 3022 题求解过程中的关系, 有

$$\begin{aligned} g'(t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} \\ &= -(\operatorname{sgn} t) \frac{\pi - |t|}{2} \quad (0 < |t| < 2\pi). \end{aligned}$$

注意常数 $g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 于是得

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(t) dt = g(0) - \frac{\pi}{2}|t| + \frac{1}{4}t^2.$$

由于

$$\sin nx \cdot \sin ny = \frac{1}{2} [\cos n(x-y) - \cos n(x+y)],$$

故得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-y) - \cos n(x+y)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} [g(x-y) - g(x+y)] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[g(0) - \frac{\pi}{2}|x-y| + \frac{1}{4}(x-y)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[g(0) - \frac{\pi}{2}|x+y| + \frac{1}{4}(x+y)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} (|x+y| - |x-y|) + \frac{1}{8} [(x-y)^2 - (x+y)^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 2\min\{x, y\} + \frac{1}{8} (-4xy) \\ &= \frac{1}{2} [\pi - \max\{x, y\}] \cdot \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

若 $x \leq y$, 则令 $f(x, y) = 0$, $(x, y) \in R$, 有

$$x(\pi - y) = 0,$$

得 $x = 0$ 或 $y = \pi$. 若 $x \geq y$, 则令 $f(x, y) = 0$, $(x, y) \in R$, 有

$$y(\pi - x) = 0,$$

得 $y = 0$ 或 $x = \pi$. 因此, 在 R 内, $x = 0$, $x = \pi$; $y = 0$, $y = \pi$ 诸直线是满足 $f(x, y) = 0$ 的图形.

又根据 $f(x, y)$ 的表达式知, 图形必然是按 x 及按 y 以 2π 为周期的周期曲线, 故得

$$x = l\pi, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$y = m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

诸直线均为 $f(x, y) = 0$ 的图形, 且除此而外, 均有 $f(x, y) \neq 0$, 即不是 $f(x, y) = 0$ 的图象. 因此, $f(x, y) = 0$ 的图形即为上述所指的两族直线组. 由于这是两族分别与坐标轴平行且相距为 π 的直线族, 它们的图形已为大家所熟知, 故省略.

求下列级数的和:

$$3028. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} (2x)^{2n+2} \bigg/ \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 x^2}{(2n+2)(2n+1)} = x^2, \end{aligned}$$

故原幂级数当 $|x| < 1$ 时收敛, 当 $|x| \geq 1$ 时发散, 即

其收敛区间为 $(-1, 1)$ ，当 $|x| = 1$ 时，原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

由于

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{3n+1}{2n} \rightarrow \frac{3}{2} > 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故由拉阿伯判别法知，当 $|x| = 1$ 时原幂级数也收敛。因此，原幂级数当 $-1 \leq x \leq 1$ 时一致收敛。从而其和函数 $f(x)$ 是 $-1 \leq x \leq 1$ 上的连续函数，且在 $-1 < x < 1$ 上可逐项微分，得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 4n(2x)^{2n-1} \quad (-1 < x < 1),$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \quad (-1 < x < 1).$$

于是

$$\begin{aligned} & -xf'(x) + (1-x^2)f''(x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 2n(2x)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \\ & \quad \cdot 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 2n(2n-1)(2x)^{2n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 4n^2(2x)^{2n} + 4 \\ & \quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n^2 (2x)^{2n} + 4 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n} \\
&= 4 \qquad \qquad \qquad (-1 < x < 1).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f'(x) + \sqrt{1-x^2} f''(x) \\
&= \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \qquad \qquad (-1 < x < 1),
\end{aligned}$$

两端积分，得

$$\sqrt{1-x^2} f'(x) = 4 \arcsin x + C \quad (-1 < x < 1).$$

由 $f'(0) = 0$ ，得 $C = 0$ ，从而

$$f'(x) = \frac{4 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

两端再积分，得

$$f(x) = 2 (\arcsin x)^2 + C_1 \quad (-1 < x < 1).$$

再由 $f(0) = 0$ ，得 $C_1 = 0$ 。于是，有

$$f(x) = 2 (\arcsin x)^2 \quad (-1 < x < 1).$$

再注意到上式两端都是 $-1 \leq x \leq 1$ 上的连续函数，通过取极限，即知上式当 $x = 1$ 和 $x = -1$ 时也成立，故最后得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} &= 2 (\arcsin x)^2 \\
&\qquad \qquad \qquad (-1 \leq x \leq 1).
\end{aligned}$$

$$3029. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \bigg/ \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

故原幂级数的收敛半径等于4, 即它当 $|x| < 4$ 时收敛, 当 $|x| > 4$ 时发散. 当 $x = \pm 4$ 时, 原幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (\pm 4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

由于

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$$

故 $|a_{n+1}| > |a_n|$ ($n=0, 1, \dots$), 因此 a_n 不趋于零, 从而级数 (1) 发散. 于是, 原幂级数仅当 $|x| < 4$ 时收敛, 下面分两种情形讨论:

当 $0 \leq x < 4$ 时, 令 $x = (2t)^2$, $0 \leq t < 1$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (2t)^{2n} \\ &= F(t) \quad (0 \leq t < 1). \end{aligned}$$

由直接计算, 易知

$$(1-t^2)F(t) - 1 = \frac{t}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n(2t)^{2n-1}$$

$$(0 \leq t < 1).$$

利用3028题的结果, 得

$$\begin{aligned} (1-t^2)F(t) - 1 &= \frac{t}{4} [2(\arcsin t)^2]' \\ &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \quad (0 \leq t < 1), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{1-t^2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \right) \\ &\quad (0 \leq t < 1). \end{aligned}$$

将 $t = \frac{\sqrt{x}}{2}$ 代入, 即得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n &= \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} \\ &\quad (0 \leq x < 4). \end{aligned}$$

现设 $-4 < x < 0$. 令 $x = -(2t)^2$, $0 < t < 1$.
于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-1)^n (2t)^{2n} = G(t) \\ &\quad (0 < t < 1). \end{aligned}$$

由直接计算可知

$$\begin{aligned} 1 - (1+t^2)G(t) &= t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n (2t)^{2n-1} \\ &= t \cdot g(t) \quad (0 < t < 1), \end{aligned}$$

其中

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n(2t)^{2n-1}, \quad (2)$$

易知 (2) 式右端幂级数的收敛半径等于 1. 于是, 当 $|t| < 1$ 时可逐项微分, 得

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2t)^{2n-2}.$$

由直接计算, 知

$$\begin{aligned} (1+t^2)g'(t) + t \cdot g(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \\ &\quad \cdot 2n(2n-1)(2t)^{2n-2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \frac{1}{2} n(2n-1)(2t)^{2n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \frac{n}{2} (2t)^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \cdot 2n(2n-1)(2t)^{2n-2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 2(n+1)(2n+1)(2t)^{2n} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} \\ = 1 \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

即

$$\sqrt{1+t^2} g'(t) + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ (-1 \leq t \leq 1).$$

两端积分, 得

$$\sqrt{1+t^2} g(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

由 $g(0)=0$, 知 $C=0$, 故

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

于是, 根据关系式

$$G(t) = \frac{1}{1+t^2} [1 - t \cdot g(t)] \quad (0 \leq t \leq 1),$$

再将 $t = \frac{\sqrt{-x}}{2} = \frac{\sqrt{|x|}}{2}$ 代入, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \\ \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{4-x}}{2}\right) \quad (-4 \leq x \leq 0).$$

$$3030. \quad \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$$

解 显然, 要使本题有意义, 首先要假定 x 不是负整数. 记

$$s_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ 的收敛性及其和, 注意当 $x \neq 1$ 时,

有关系式

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x-1} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \left(\frac{x+2}{x-1} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \cdot \frac{3}{x-1} \\ &= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &\quad + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \cdot \frac{4}{x-1} \\ &= \cdots \\ &= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \\ &\quad \cdot \frac{n+1}{x-1} = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} R_n &= s_n \cdot \frac{n+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{x+k} \\ &= \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n (1+\alpha_k), \end{aligned}$$

这里 (当 k 充分大时)

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} - 1 \\ &= -\frac{1-x}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

由 (1) 式知, 为研究 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, 就是要研究 R_n 有无极限.

若 R_n 有极限为 τ , 则由 (1) 得

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} - R_n \right) = \frac{1}{x-1} - \tau.$$

令 $u_n = \prod_{k=1}^n (1+\alpha_k)$. 分两种情形讨论:

若 $x > 1$, 这时

$$0 < 1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 1 \quad (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + \alpha_k), \quad \ln(1 + \alpha_k) < 0,$$

$$\alpha_k < 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad \alpha_k \rightarrow 0, \quad (3)$$

由(2)式与(3)式并注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收敛, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发

散知: $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = -\infty$. 于是, 根据

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \alpha_k)}{\alpha_k} = 1$$

即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k)$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k) = -\infty$.

由此知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \frac{1}{x-1}.$$

若 $x < 1$. 注意, 已设 x 不是负整数. 另外, 当

$x = 0$ 时原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} 1$, 显然发散, 故可设

$-m \leq x \leq -m+1$, 其中 m 是某非负整数. 于是

$$1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 0 \quad (k=1, 2, \dots, m-1),$$

$$1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} > 0 \quad (k=m, m+1, \dots).$$

令 $v_n = \prod_{k=m}^n (1 + \alpha_k)$ ($n=m, m+1, \dots$), 则

$$\ln v_n = \sum_{k=m}^n \ln(1 + \alpha_k) \quad (n=m, m+1, \dots).$$

根据 (2) 式知, 当 k 充分大时 $\alpha_k > 0$ 并且级数 $\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$ 发散. 仿照前面的论述可知级数 $\sum_{k=m}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k)$ 发散, 且

$$\sum_{k=m}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k) = +\infty. \text{ 从而当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \ln v_n \rightarrow +\infty,$$

$v_n \rightarrow +\infty$, 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \pm \infty,$$

其中的正、负号随 m 是 $2, 4, 6, \dots$ 之一或 $0, 1, 3, 5,$

\dots 之一而定. 由此可知, 此时 $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ 发散.

另外, 若 $x=1$, 原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$, 显然发散.

综上所述, 可知原级数仅当 $x > 1$ 时收敛, 且此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x-1}.$$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots$ 在 $x > 0, a_n > 0 (n =$

$1, 2, \dots)$ 同级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散的条件下.

解 记

$$s_n = \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

注意条件 $x > 0, a_n > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{x} &= \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2+x}{x} = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{x} \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \frac{a_3}{x} \\ &= \dots \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \dots \\ &\quad \dots \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \\ &\quad \cdot \dots \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \cdot \frac{a_{n+1}}{x} = s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n, \quad (1) \end{aligned}$$

其中

$$R_n = \frac{a_{n+1}}{x} s_n = \frac{a_1}{x} \cdot \frac{a_2}{a_2+x} \cdot \frac{a_3}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_n+x}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+x} &= \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{a_k+x} = \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{x}{a_k+x}\right) \\ &= \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} (1 + \alpha_k), \end{aligned} \quad (2)$$

这里

$$\alpha_k = -\frac{x}{a_k+x} \quad (k=2, 3, \dots, n+1). \quad (3)$$

由(1)知, 为研究原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, 就是要研究 R_n 有无极限. 若 R_n 有极限 τ , 则由(1)得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} s_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{x} - R_n \right) \\ &= \frac{a_1}{x} - \tau. \end{aligned} \quad (4)$$

下面我们证明 R_n 有极限 $\tau=0$. 显然

$$-1 < \alpha_k < 0, \quad 0 < 1 + \alpha_k < 1 \quad (k=2, 3, \dots).$$

令 $u_n = \prod_{k=2}^{n+1} (1 + \alpha_k)$, 则

$$\ln u_n = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(1 + \alpha_k).$$

易知正项级数

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k+x}$$

是发散的. 事实上, 由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 的发散性, 可将 a_k 分为

以下情况来讨论：1) 若 $a_k \geq x$ ($k=2, 3, \dots$)，则

$$a_k + x \leq 2a_k \text{ 即 } \frac{1}{a_k + x} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_k}.$$

由 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 发散 (无界) 便知 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散. 2) 若除

有限个 a_k 之外均有 $a_k \geq x$ (k 取除了某些有限个正整数以外的所有自然数)，则仍有上述结论. 3) 若存在一个数列 a_{k_i} 使得 $a_{k_i} < x$ ($i=1, 2, 3, \dots$)，则我们有

$$a_{k_i} + x < 2x \text{ 即 } \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{1}{2x} \quad (i=1, 2, \dots).$$

显然，有

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{N}{2x} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } N \rightarrow \infty),$$

于是，级数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散.

从而

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x} = +\infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty} a_k = -\infty.$$

注意到 $-1 < a_k < 0$,

$$\ln(1 + a_k) < a_k < 0 \quad (k=2, 3, \dots),$$

可知

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 + a_k) = -\infty.$$

由此可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\ln u_n \rightarrow -\infty, \quad u_n \rightarrow 0, \quad R_n \rightarrow 0.$$

于是原级数收敛, 且

$$\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots = \frac{a_1}{x}.$$

3032. ^{*}) $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots$, 若 (a) $|x| < 1$; (6)

$$|x| > 1.$$

解 记

$$s_n = \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad (n=0, 1, 2, \dots; |x| \neq 1).$$

注意, 当 $|x| \neq 1$ 时, 有公式

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \frac{x}{1-x^2} (1+x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} (1+x^2) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} \\ &\quad + \frac{x^4}{1-x^4} = \dots \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \dots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} + \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}} \\ &= s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n, \end{aligned}$$

其中

$$R_n = \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

上述恒等式对任何 n 均成立. 为求 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, 我们分两

种情况予以处理:

(a) 当 $|x| < 1$ 时, 显然

$$R_n = \frac{|x|^{2^{n+1}}}{1 - |x|^{2^{n+1}}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

于是得

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right) = \frac{x}{1-x}.$$

(b) 当 $|x| > 1$ 时, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} = 0$$

得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1 - |x|^{2^{n+1}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{\left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} - 1} \right\} \\ &= -1. \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right) \\ &= \frac{x}{1-x} + 1 = -\frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

*) 本题第三项前原题为减号, 应为加号.

5033. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, 若 (a) $|x| < 1$, (b) $|x| > 1$.

解 记

$$s_n = \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \quad (n=1, 2, \dots; |x| \neq 1).$$

考虑

$$\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}} = \frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1-x}{x} s_n \quad (n=1, 2, \dots).$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1-x}{x} s_k &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{N+1}}, \end{aligned}$$

或有

$$\sum_{k=1}^N s_k = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^{N+1}}.$$

于是, 得

(a) 当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^{N+1}} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

(b) 当 $|x| \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{N+1}-1} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

§8. 利用级数求定积分之值

利用被积函数展开成级数的展开式来计算下列积分:

$$3034. \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx &= -\int_0^1 \ln(1-x) dx \\ &= -\int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \right) dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx + \cdots (*) \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1. (**) \end{aligned}$$

*) 由于幂级数 (收敛半径为 1)

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

当 $x=1$ 时发散, 故在 $0 \leq x \leq 1$ 上逐项积分的合理性要单独证明, 今证如下:

对任何 $0 < r < 1$, 有

$$\begin{aligned} &\int_0^r \ln(1-x) dx \\ &= \int_0^r \left(-x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} \right) dx + R_n, \quad (1) \end{aligned}$$

其中

$$R_n = \int_0^r \left(-\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - \cdots \right) dx.$$

由于 $0 < r < 1$, 故可在 $0 \leq x \leq r$ 上逐项积分, 得

$$\begin{aligned}
0 > R_n &= - \left[\frac{\tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{\tau^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] \\
&> - \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] \\
&= - \left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \dots \right] \\
&= - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

于是，由 (1) 式知

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\tau} \ln(1-x) dx - \left(-\frac{\tau^2}{1 \cdot 2} - \frac{\tau^3}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{\tau^{n+1}}{n(n+1)} \right) \right| \\
\leq \frac{1}{n+1}. \quad (2)
\end{aligned}$$

在 (2) 式中让 n 固定而令 $\tau \rightarrow 1 - 0$ 取极限 (注意，瑕积分 $\int_0^1 \ln(1-x) dx$ 显然收敛)，得

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \ln(1-x) dx - \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} \right) \right| \\
\leq \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

由此式即知

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \ln(1-x) dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} \right) \\
&= -\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots,
\end{aligned}$$

也即

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \right) dx \\ &= \int_0^1 (-x) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{3} \right) dx \\ & \quad + \cdots, \end{aligned}$$

换句话说，逐项积分公式成立。

本节以下诸题中，凡有在端点发散的级数的逐项积分合理性问题，都可仿照上面类似地去证明，不再一一写出。

**) 利用2549题的结果。

$$3035. \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\}^{**})}{x} dx \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

*) 利用2871题的结果。

$$3036. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots}{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots \right) dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \\ - \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad *).$$

*) 利用 2961 题的结果.

3037. $\int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx \quad (p > 0, q > 0).$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx &= \int_0^1 x^{p-1} \left(-x^q - \frac{x^{2q}}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^{3q}}{3} - \dots \right) dx \\ &= - \int_0^1 \left(x^{p-1+q} + \frac{1}{2} x^{p+2q-1} + \frac{1}{3} x^{p+3q-1} + \dots \right) dx \\ &= - \left(\frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{p+3q} \cdot \frac{1}{3} + \dots \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(p+nq)}. \end{aligned}$$

3038. $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx &= - \int_0^1 \left(\ln x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) dx \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \ln x \Big|_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)^2} \Big|_0^1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

$$= 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)^{*)} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

*) 利用 2549 题及 2961 题的结果.

$$3039. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1} &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x e^{-2\pi x} (1 + e^{-2\pi x} + e^{-4\pi x} + \dots) dx \\ &= \left[-\frac{x}{2\pi} e^{-2\pi x} - \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-2\pi x} \right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{x}{4\pi} e^{-4\pi x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(4\pi)^2} e^{-4\pi x} \right]_0^{+\infty} \\ &\quad + \left[-\frac{x}{6\pi} e^{-6\pi x} - \frac{1}{(6\pi)^2} e^{-6\pi x} \right]_0^{+\infty} + \dots \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}^{*)} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

*) 利用 2961 题的结果.

$$3040. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} \\ &= \int_0^{+\infty} x e^{-x} (1 - e^{-x} + e^{-2x} - \dots) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-xe^{-x} - e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{2^2}e^{-2x} \right]_0^{+\infty} \\
&+ \left[-\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{3^2}e^{-3x} \right]_0^{+\infty} - \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}^{*})
\end{aligned}$$

*) 利用2961题的结果,

3041. 按模 k ($0 \leq k < 1$) 的正整数幂展开第一型完全椭圆积分

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } F(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{5}{16} k^6 \sin^6 \varphi \right. \\
&\quad \left. + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi + \dots \right) d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\}^{*}).
\end{aligned}$$

*) 利用2281题的结果,

3042. 按模 k ($0 \leq k < 1$) 的正整数幂展开第二型完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi \right\} d\varphi \\
 &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}^* .
 \end{aligned}$$

*) 利用2281题的结果.

3043. 利用按椭圆离心率的正整数幂展开的级数以表椭圆

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的弧长.

解 设 $a > b$, 则 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - e^2$. 弧长为

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt \\
 &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} \, dt \\
 &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} e^{2n} \cos^{2n} t \right\} dt \\
 &= 4a \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{e^{2n}}{2n-1} \right\} \\
 &= 2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{e^4}{3} - \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

证明下列等式:

$$3044. \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int_0^1 \frac{dx}{x^x} &= \int_0^1 e^{-x \ln x} dx \\
&= \int_0^1 (1 - x \ln x + \frac{1}{2!} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{3!} x^3 \ln^3 x + \cdots) dx \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2! \cdot 3} \ln^2 x - \frac{x^3}{3^2} \ln x + \frac{x^3}{3^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{x^4}{3! \cdot 4} \ln^3 x + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2} \ln^2 x - \frac{x^4}{4^3} \ln x + \frac{x^4}{4^4} \right. \\
&\quad \left. + \cdots \right]_0^1 \\
&= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n},
\end{aligned}$$

本题得证.

$$3045. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t} (t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} \\
&\quad + \cdots + n!t + n!) \Big|_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

本题得证.

$$3046: \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx = \frac{\pi}{n!} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

解 若复数 $w = u + iv$, 记 $R\{w\} = u$ 为实部, 则有

$$R\{e^{e^{ix}}\} = e^{\cos x} \cos(\sin x).$$

因此, 原定积分为

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx \\ &= R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} \cos nx dx \right\} \\ &= R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{e^{ix}} \cdot \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} R \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^m}{m!} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{m_1!} R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_1+n)x} dx \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{m_2!} R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_2-n)x} dx \right\} \right] \end{aligned}$$

注意, 对任意整数 k , 有积分关系:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } k=0; \\ 0, & \text{当 } k \neq 0. \end{cases}$$

从而, 当 $n \geq 0$, $m \geq 0$ 时, 有:

i) 当 $n=0$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } m=0, \\ 0, & \text{当 } m \neq 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } m=0, \\ 0, & \text{当 } m \neq 0. \end{cases}$$

此时相应地得

$$I_0 = \frac{1}{2} (2\pi + 2\pi) = 2\pi.$$

ii) 当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } m=n, \\ 0, & \text{当 } m \neq n. \end{cases}$$

此时相应地得

$$I_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n!} 2\pi \right) = \frac{\pi}{n!}.$$

求:

3047. $\int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(ax \sin x - nx) dx$ (n 是自然数).

解 被积函数正是 $e^{ae^{ix} - inx}$ 的实部, 故积分为

$$I = \int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(ax \sin x - nx) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} R \left\{ e^{ae^{ix} - inx} \right\} dx$$

$$= R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ae^{ix}} e^{-inx} dx \right\}$$

$$= R \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ae^{ix})^m}{m!} e^{-inx} dx \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= R \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)x} dx \right\} \\
&= R \left\{ \frac{a^n}{n!} \cdot 2\pi + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n}}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \int_0^{2\pi} e^{i(n-n)x} dx \right\} \\
&= \frac{2\pi a^n}{n!}.
\end{aligned}$$

3048: $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx.$

解 利用2864题的结果, 即得

$$\frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} x \sin nx \quad (|\alpha| < 1).$$

由于 $\int_0^\pi x \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{n}$, 所以, 当 $|\alpha| < 1$ 时, 就有

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} \frac{\pi}{n} \\
&= \frac{\pi}{\alpha} \ln(1 + \alpha).
\end{aligned}$$

当 $|\alpha| > 1$ 时, $\left| \frac{1}{\alpha} \right| < 1$,

$$\frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{x \sin x}{1 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cos x + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}.$$

利用以上结果, 即得: 当 $|\alpha| > 1$ 时,

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx = \frac{\pi}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

$$3049. \int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx.$$

解 利用2872题的结果, 即得: 当 $|\alpha| \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx \\ = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\alpha^n \cos nx}{n} dx = 0. \end{aligned}$$

当 $|\alpha| > 1$, 即当 $\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2) &= \ln\left[\alpha^2\left(1-2\frac{1}{\alpha}\cos x+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right] \\ &= \ln\alpha^2 + \ln\left(1-\frac{2}{\alpha}\cos x+\frac{1}{\alpha^2}\right). \end{aligned}$$

利用以上结果, 即得当 $|\alpha| > 1$ 时

$$\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx = \pi \ln\alpha^2 = 2\pi \ln|\alpha|.$$

3050. 证明公式:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $a > 0$ 且 $0 < \theta_n < 1$.

若于公式(1)中取两项来表示积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx,$$

其精确程度如何?

解 当 $x \geq 0$ 时, 考虑函数 $f(x) = \frac{1}{x+a}$ 在 $x=0$ 点

的 n 阶泰勒展式, 有

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{x+a} \\
 &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\
 &\quad + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^n(\theta x)}{n!}x^n \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\
 &\quad + (-1)^n \frac{1}{(a+\theta x)^{n+1}} x^n \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\
 &\quad + (-1)^n \frac{x^n}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\theta \cdot \frac{x}{a}\right)^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\
 &\quad + (-1)^n \bar{\theta}_n(x) \frac{x^n}{a^{n+1}},
 \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, 而对于函数

$$\bar{\theta}_n(x) = \frac{1}{\left(1+\theta \cdot \frac{x}{a}\right)^{n+1}},$$

也有 $0 < \bar{\theta}_n(x) < 1$ ($0 < x < +\infty$).

由 $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$ ($n=0, 1, 2, \cdots$) 以及

$$0 < \int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx < \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!,$$

即知

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx = \theta_n n!,$$

其中 $0 < \theta_n < 1$ 。于是,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{a^k} \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx \\ &\quad + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^{+\infty} \theta_n(x) x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} \\ &\quad + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \theta_n. \end{aligned}$$

公式证毕。

在上述公式中, 令 $a=100=10^2$, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx &= 10^{-2} - 1! 10^{-4} + 2! 10^{-6} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} (n-1)! 10^{-2n} + (-1)^n \theta_n n! 10^{-2n-2} \\ &\quad (0 < \theta_n < 1). \end{aligned}$$

如果取前两项来表示积分, 即在上式中取 $n=2$, 则误差为 $(-1)^2 \theta_2 2! 10^{-6}$, 其绝对值小于 $2 \cdot 10^{-6}$, 于是,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx - 0.01 + 0.0001 \right| &\leq 0.000002 \\ &= 2 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

§9. 无穷乘积

1° 无穷乘积的收敛性 如果存在有穷而且异于零的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P,$$

则称无穷乘积

$$p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (1)$$

是收敛的.

若 $P=0$ 而乘数 p_n 中无一个等于零, 则称乘积(1) 发散于零; 在相反的情形下, 则称无穷乘积 收敛于零.

乘积(1)的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_n \quad (2)$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1.$$

若 $p_n = 1 + a_n$ ($n=1, 2, \cdots$) 及 a_n 不变号, 则乘积(1)收敛的必要而且充分的条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \quad (3)$$

收敛.

在一般的情形下, 当 a_n 不保持固定的符号而级数(3)收敛, 则乘积(1)将与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2$$

同时收敛或同时发散，在发散的情形下，乘积发散于零。

2° 绝对收敛性 乘积 (1) 称为绝对或条件 (非绝对) 收敛是随级数 (2) 为绝对或条件收敛而定，级数 (3) 绝对收敛就是乘积 (1) 绝对收敛的充分而且必要的条件。

3° 函数的成无穷乘积展开 当 $-\infty < x < +\infty$ 时有展开式

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right].$$

特别是，由第一式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时得瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

证明下列等式：

3051. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$

证 记 $p_i = 1 - \frac{1}{n^2}$ ，由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

3052. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$

证 记 $p_n = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$, 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} \longrightarrow \frac{2}{3} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

3053. $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}.$

证 记 $p_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)}$, 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3}.$$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right] = 2.$

证 由于部分乘积满足下述等式,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} \right) P_n &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \cdots \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

从而

$$P_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \right] = 2.$$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \\ &\quad \cdots \left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) = \cdots \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{2}{\pi} \rightarrow \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

3056. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$

证 当 $x \neq 0$ 时, 由于部分乘积

$$P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$$

$$= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{\sin x}{x}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

3057. $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$

证 由于部分乘积

$$P_n = \operatorname{ch} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2^2} \cdots \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2^n}} \quad (x \neq 0)$$

及

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{sh} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ch} y} = 1,$$

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

3058. $\prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$

证 由于

$$(1-x)P_n = (1-x)(1+x) \cdots (1+x^{2^n}) = 1-x^{2^{n+1}},$$

从而 (注意 $|x| < 1$)

$$P_n = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \longrightarrow \frac{1}{1-x} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}.$$

利用此题的结果, 易得

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

此即 3054 题的结果.

$$3059. \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

证 在 3056 题中, 令 $x = \frac{\pi}{2}$, 利用半角公式, 有

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$$

.....

则得

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots,$$

也即

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

$$3060. \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

证 利用函数 $\sin x$ 的无穷乘积展开

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right),$$

令 $x = \frac{\pi}{3}$, 有

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(3n)^2}\right) = \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2}.$$

于是得

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值,

$$3061. \prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}.$$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} \cdots \frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)} \cdot \frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n} \\ &\quad \cdot \frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)} \\ &= \frac{n+2}{4(n-1)} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故无穷乘积 $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$ 收敛, 且其值为 $\frac{1}{4}$.

$$3062. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right].$$

证 $1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. 由于部分乘积

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(n-1)^2}{(n-2)n} \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \\
 &\quad \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\
 &= \frac{2(n+1)}{n+2} \longrightarrow 2 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),
 \end{aligned}$$

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]$ 收敛, 且其值为 2.

3063. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 9} \cdot \frac{7 \cdot 13}{9 \cdot 11} \cdots \frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} \\
 &\quad \cdot \frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} \\
 &= \frac{3}{7} \cdot \frac{2n+7}{2n+3} \longrightarrow \frac{3}{7} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),
 \end{aligned}$$

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$ 收敛, 且其值为 $\frac{3}{7}$.

3064. $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}} \quad (a > 0).$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned}
 P_n &= a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdots a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{-\left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}\right)} \\
 &\longrightarrow a^{-\ln 2} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),
 \end{aligned}$$

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ 收敛, 且其值为 $a^{-\ln 2}$.

3065. 可否由乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 的收敛性得出乘积:

$$(a) \prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n);$$

$$(b) \prod_{n=1}^{\infty} p_n^2;$$

$$(c) \prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n;$$

$$(d) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$$

的收敛性?

解 (a) 不可以. 例如, 乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ 及 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 均收敛, 但乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right] = \prod_{n=1}^{\infty} (2 \cdot n^0)$$

却发散.

(b) 可以. 事实上, 部分乘积

$$Q_n = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2 = (p_1 p_2 \cdots p_n)^2$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 P^2 , 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$ 收敛, 且其值为 P^2 , 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$.

(c) 可以. 事实上, 部分乘积

$$Q_n = (p_1 p_2 \cdots p_n)(q_1 q_2 \cdots q_n)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 PQ , 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ 收敛, 且其

值为 PQ , 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

(d) 可以. 事实上, 部分乘积

$$Q_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n} \quad (q_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 $\frac{P}{Q}$, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ 收敛, 且

其值为 $\frac{P}{Q}$, 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

研究下列无穷乘积的收敛性:

$$3066. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

解 由于通项 $p_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 不满足收敛的必要条件 ($p_n \rightarrow 1$); 或者说: 由于部分乘积

$$P_n = \frac{1}{n!} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

且每项不为零, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散于零.

$$3067. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

解 通项 $p_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$, 而

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 收敛, 且 $\frac{1}{n(n+2)}$ 不变号, 故无穷乘积

$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ 收敛. 事实上, 已由3062题知, 该无穷乘积是收敛的, 且其值为2.

$$3068. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right).$$

解 $p_n = 1 + \frac{1}{n^p}$, 其中 $\frac{1}{n^p}$ 不变号. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p >$

1 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ 当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散.

3069. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$

解 由于 $p_n - 1 = -\frac{1}{n}$ 不变号, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ 发散, 故原乘积发散. 或由于部分乘积

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零, 且乘积中无一项为零, 故原乘积发散于零.

3070*) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p.$

解 通项 $p_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^p$. 由于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^p = p \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)$$

对任何 p 均收敛 (因为级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$ 收敛), 故原无穷乘积对任何 p 均收敛.

*) 原题误为 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$, 这时, 若 $p \geq 0$, 第一个因子为零, 按定义无穷乘积收敛于零; 若 $p < 0$, 第一个因子无意义, 因此整个无穷乘积无意义.

3071. $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$, 其中当 $n \geq n_0$ 时 $n^2+an+b > 0$.

解 通项 $p_n = \frac{n^2 + a_1 n + b_1}{n^2 + an + b}$

令 $\alpha_n = \frac{(a_1 - a)n + (b_1 - b)}{n^2 + an + b}$

$$\alpha_n = \frac{(a_1 - a)n + (b_1 - b)}{n^2 + an + b}$$

当 $a_1 = a$ 时, $\alpha_n \sim \frac{1}{n^2}$. 由于 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原乘积收敛.

当 $a_1 \neq a$ 时, 由于 $n^2 + an + b > 0$, 且 $\alpha_n \sim \frac{a_1 - a}{n}$, 故

$\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n$ 发散, 从而原乘积也发散.

3072. $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}$, 其中 $n_0 > b_i (i=1, 2, \dots, p)$.

解 $p_n = \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}$

$$= 1 + \frac{\left(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i\right)n^{p-1} + \cdots + (-1)^p \left(\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i\right)}{\prod_{i=1}^p (n-b_i)}$$

令

$$\alpha_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i\right)n^{p-1} + \cdots + (-1)^p \left(\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i\right)}{\prod_{i=1}^p (n-b_i)},$$

当 $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^p b_i$ 时, $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 故 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n$ 收敛, 从

而原乘积收敛. 当 $\sum_{i=1}^p a_i \neq \sum_{i=1}^p b_i$ 时, 由于当 $n > n_0$ 时,

$\prod_{i=1}^p (n - b_i) > 0$, 且 $\alpha_n \sim \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i \right)$, 故级数

$\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n$ 发散, 从而原乘积也发散。

3073. $\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

解 $p_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$, $\ln p_n = \frac{1}{2} \ln \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)$.

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)$ 发散 (于 $-\infty$), 故原乘积也发散 (于零)。

3074. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 $p_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$,

$$\ln p_n = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$ 收敛, 从而

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 因此, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 收敛.

$$3075. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

解 $p_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$, $\ln p_n = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而原乘积也收敛.

$$3076. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}.$$

解 $p_n = \sqrt[n^2]{n}$, $\ln p_n = \frac{1}{n^2} \ln n$. 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln n.$$

由于 $\frac{1}{n^2} \ln n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, 此处 ε 为满足 $0 < \varepsilon < 1$ 的任

一常数, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ 收敛, 故原乘积收敛.

$$3077. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

解 通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故若记

$$p_n = 1 + a_n,$$

则当 n 充分大时, 有

$$a_n = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) < 0,$$

保持不变号. 注意到对任何 x , 级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left[-\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$

收敛, 这里 n_0 为适当的某一正整数. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收

敛. 因此, 原无穷乘积收敛.

3078. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}}$, 其中 $c > 0$.

解 对任意 x , 考虑通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}} = \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) \left[1 + \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{x}{c+n} + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{x^2 - cx}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 故原无穷乘积收敛.

3079. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)$.

解 当 $|x| \geq 1$ 时, 由于通项 $p_n = 1 - x^n \neq 1$, 即不

满足收敛的必要条件, 故原无穷乘积发散. 当 $|x| < 1$ 时, 若 $x = 0$ 显然收敛; 若 $x \neq 0$, 则有

$$\ln p_n = \ln(1 - x^n) = -x^n \ln \left[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}} \right].$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}} \right] = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right] = 1,$$

从而

$$\ln p_n = O(|x|^n).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛, 故此时原无穷乘积收敛.

3080. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n} \right).$

解 当 $|x| \geq 2$ 时, 通项 $p_n = 1 + \left(\frac{x}{2} \right)^n \neq 1$, 故原无穷乘积发散. 当 $|x| < 2$ 时, 若 $x = 0$ 显然收敛; 若 $x \neq 0$, 利用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n} \right)^{\frac{2^n}{x^n}} = \lim_{y_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n} \right)^{y_n} = e,$$

就有

$$\begin{aligned} \ln p_n &= \ln \left(1 + \frac{x^n}{2^n} \right) \\ &= \frac{x^n}{2^n} \ln \left(1 + \frac{x^n}{2^n} \right)^{\frac{2^n}{x^n}} = O \left(\left| \frac{x}{2} \right|^n \right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{2} \right|^n$ 当 $|x| < 2$ 时收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收

敛. 因此, 原无穷乘积收敛.

$$3081. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right].$$

解 1) 当 $|x| < e$ 时, 利用

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e + o(1) \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

存在适当大的整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > |x|,$$

于是相应地, 得

$$\left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{|x|} \right]^n > 1.$$

这表明, 此时

$$p_n = 1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \not\rightarrow 1 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

即不满足无穷乘积收敛的必要条件, 故原无穷乘积发散.

2) 当 $|x| = e$ 时, 利用 70 题的结果, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e - \frac{3}{n}.$$

此时, 得

$$\begin{aligned} p_n &= 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} \\ &= 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n \end{aligned}$$

$$= 1 + \alpha_n.$$

但

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &= \left| (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^x \right| \\ &= \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^x = \left(\frac{e - \frac{3}{n}}{e} \right)^x \\ &= \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n} \right)^x, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n} \right)^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{ne} \right)^{\frac{nx}{3}} \right]^{\frac{3}{x}} \\ &= e^{-\frac{3}{x}} > 0, \end{aligned}$$

故此时有 $\alpha_n \rightarrow 0$, 也即 $p_n \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而原无穷乘积发散.

3) 当 $|x| \geq e$ 时, 记 $p_n = 1 + \alpha_n$, 为考察 α_n 的变化, 仍利用

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e + o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

存在适当大正整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{1}{2}(e + |x|).$$

记

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x| + e}{|x|},$$

则 $0 < q < 1$, 有

$$|\alpha_n| = \left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{|x|} \right]^n \\
= \left[\frac{\frac{1}{2}(e + |x|)}{|x|} \right]^n = q^n.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛. 由

$$\ln p_n = \ln(1 + \alpha_n),$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 绝对收敛. 因此, 原无穷乘积收敛.

3082. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}}.$

解 对于任意 x , 考虑通项

$$p_n = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}} \\
= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \left[1 + \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] \\
= \left[1 + \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right] \\
+ \left[-\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right]$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

因此, 若记 $p_n = 1 + \alpha_n$, 则有 $\alpha_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$. 于是, 由级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 的绝对收敛, 可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$$

绝对收敛, 从而知原无穷乘积收敛.

3083[†] $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q},$

解 1) 当 $|x| < 1$ 时, 通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q} = \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \left[1 + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{x^n}{n^p} + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{x^n}{n^p}\right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right). \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 不论 p, q 为何值, 均有

$$\frac{x^n}{n^p} = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right), \quad \frac{x^{3n}}{n^{p+2q}} = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right).$$

于是可写

$$p_n = 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right).$$

因此有

$$|\ln p_n| = |\ln(1 + \alpha_n)| = O(|\alpha_n|) = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right),$$

由于当 $|x| < 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{|x|})^n < +\infty,$$

从而 $\sum \ln p_n$ 绝对收敛, 故原乘积 $\prod p_n$ 收敛.

2) 当 $x = 1$ 时, 在 $p > 1$, $q > \frac{1}{2}$ 的情况下, 由于通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \cos \frac{1}{n^q} = \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \left[1 - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right), \end{aligned}$$

若记

$$p_n = 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n = \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

则 $\sum \alpha_n$ 绝对收敛, 且由

$$\begin{aligned} \alpha_n^2 &= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right) \\ &= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right), \end{aligned}$$

易知 $\sum \alpha_n^2$ 也收敛, 故此时乘积 $\prod p_n$ 收敛.

3) 当 $x = -1$ 时, 在 $p > \frac{1}{2}$, $q > \frac{1}{2}$ 的情况下, 由于通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \cos \frac{(-1)^n}{n^q} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \\ &\quad \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2q}}\right) \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\
&= 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),
\end{aligned}$$

可记

$$p_n = 1 + \beta_n, \quad \beta_n = \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

则有

$$\ln p_n = \ln(1 + \beta_n) = \beta_n + O(\beta_n^2),$$

易见 $\sum \beta_n$ 收敛, 而

$$\begin{aligned}
\beta_n^2 &= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right) \\
&= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),
\end{aligned}$$

故 $\sum \beta_n^2$ 绝对收敛, 从而知 $\sum \ln p_n$ 收敛, 于是, 此时乘积 $\prod p_n$ 收敛.

3084. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^p.$

解 显然应当要求 $x \neq 0$. 记通项为 $p_n = (1 + a_n)^p$, 其中

$$a_n = \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - 1 = \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1$$

$$= -\frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

而

$$\ln p_n = p \ln(1 + \alpha_n) = p \ln \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ 收敛^{*)}, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而原无穷乘积收敛.

*) 参看 2677 题的结果.

3085. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}.$

解 记

$$p_n = \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n},$$

由要求 $\ln(n+x) - \ln n \geq 0$ 知 $x \geq 0$. 1) 当 $x = 0$ 时, 显然各项均为零, 无穷乘积收敛于零. 2) 当 $x > 0$ 时, 由

$$\ln p_n = \frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

可知, 当 $n \geq \frac{x}{e-1}$ 时, 有 $\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq 1$, 故此时

$$\ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq 0. \text{ 再由}$$

$$\frac{-\frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \ln \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)} \rightarrow +\infty$$

及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$ 发散, 从而得知级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散.

3086. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

证 当 $x \rightarrow 0$ 时, $p_n = \cos x_n = 1 + a_n$, 其中 $a_n = -\frac{1}{2}x_n^2$

$+o(x_n^2)$, $a_n \leq 0$, 且由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2) \right]$$

收敛, 故乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

3087. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \lg\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right)$

$(|a_n| < \frac{\pi}{4})$ 收敛.

证 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 此时有

$$\begin{aligned} \lg\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right) &= \frac{1 + \lg a_n}{1 - \lg a_n} \\ &= (1 + \lg a_n)(1 + \lg a_n + \lg^2 a_n + \cdots) \\ &= 1 + 2\lg a_n + 2\lg^2 a_n + \cdots \\ &= 1 + 2a_n + o(a_n). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [2a_n + o(a_n)]$ 收敛, 而且级数

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [2a_n + o(a_n)]^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot o(a_n) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} o^2(a_n). \end{aligned}$$

也收敛^{*)}，故无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n\right) \quad (|\alpha_n| < \frac{\pi}{4})$$

收敛.

*) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{i_1}| \cdot |\alpha_{i_2}|,$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 也收敛. 又当 n 充分大时，有

$$|\alpha_n \cdot o(\alpha_n)| \leq |\alpha_n|, \quad |o^2(\alpha_n)| \leq |\alpha_n|,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot o(\alpha_n)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} o^2(\alpha_n)$ 均收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性:

3088. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right].$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 条件收敛，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right]^2 \text{ 收敛，故原无穷乘积条件收敛.}$$

3089. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right].$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 条件收敛，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散，故原无穷乘积发散.}$$

$$3090. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right].$$

解 当 $p > 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 绝对收敛, 故原无穷乘积绝对收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 条件收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 收敛, 故原无穷乘积条件收敛.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 发散, 故原无穷乘积发散.

当 $p \leq 0$ 时, 由于 $\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 不趋于零, 故原无穷乘积也发散.

$$3091. \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n} \right].$$

解 由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 条件收敛及 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散^{*)}, 故原无穷乘积发散.

*) 当 n 充分大时, 显然有 $n > \ln^2 n$, 故 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$. 由

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散即知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散.

$$3092. \prod_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{n} + (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

解 记

$$p_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n},$$

则有

$$\ln p_n = \ln \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right].$$

令

$$u_k = \ln p_{2k} + \ln p_{2k+1} \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

即得

$$\begin{aligned} u_k &= \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1} \right) \\ &= \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] > 0. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] &= \frac{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} u_k &= - \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \\ &\quad \cdot \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] = \frac{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}} \\ &\sim - \left[\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] \sim \frac{1}{2k} \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由此可知 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散, 从而 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln p_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散.

$$3093. \prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}.$$

解 记 $p_n = n^{(-1)^n}$, 则有子序列

$$p_{2k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

于是 $p_n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$. 从而原无穷乘积发散.

$$3094. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}.$$

解 记 $p_n = \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$, 则有

$$\ln p_n = \frac{1}{n} \ln n^{(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \ln n.$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 是莱布尼兹型级数, 它条件收敛, 因而原无穷乘积条件收敛.

$$3095. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right].$$

解 记

$$p_n = 1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n},$$

则有

$$|\ln p_n| = \frac{1}{n} \left| \ln \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right] \right|$$

$$\sim \frac{1}{n} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty),$$

因此, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln p_n|$ 发散. 若令 $u_n = \ln p_n$, 则有

$$u_{2k-1} = \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right],$$

$$u_{2k} = \ln \left[1 + \frac{(-1)^k}{2k} \right] \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

记 $\alpha_k = u_{2k-1} + u_{2k}$, 可得

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)} \right] \\ &= \ln \left[1 + \frac{(-1)^{k-1}-1}{2k(2k-1)} \right] \quad (k=1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

故

$$\alpha_{2m-1} = 0,$$

$$\alpha_{2m} = \ln \left[1 - \frac{2}{4m(4m-1)} \right] \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

于是, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛. 注意到 $u_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), 可得

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛. 因此, 原无穷乘积条件收敛.

$$\begin{aligned} 3096. \quad & \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \\ & \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdots \end{aligned}$$

解 研究无穷级数

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ & + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \\ & + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots \end{aligned}$$

的收敛性问题. 今将级数(1)每三项依次加括号, 考虑如此形成的新级数:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right) \right. \\ & \quad \left. + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

以下将指出(2)发散, 从而(1)也发散, 因此原无穷乘积发散. 现将(2)的通项记成

$$\begin{aligned} u_n = & \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right) \\ & + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

则有

$$\begin{aligned} u_n = & \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right)\right] \\ = & \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left[1 - \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{4n+1}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right] \\ = & \ln\left\{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{16n^2-1}} \Big) \Big\} \\
= & \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
& \quad - \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{16n^2-1}} \\
& \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}} \right] \\
= & \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1) \left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}} + \sqrt{1+\frac{1}{4n}} \right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}} \right] \\
= & \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{2(\sqrt{n}+1) \left[1 - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 + \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
& \quad \left. + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
= & \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1) \left(2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
& \quad \left. + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
= & \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{16n^2-1}} - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left[1 - \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2 - 1} (\sqrt{16n^2 - 1} + 4n)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{\sqrt{16n^2 - 1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln \left[1 - \frac{3}{\sqrt{16n^2 - 1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln(1 + \alpha_n),
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_n = -\frac{3}{\sqrt{16n^2 - 1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, 故 $\alpha_n \rightarrow 0$, 且当 n 充分大时 $\alpha_n < 0$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{16n^2 - 1}}$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散; 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ 发散. 于是, 原无穷乘积发散.

3097. $\left(1 + \frac{1}{1^a}\right) \left(1 + \frac{1}{2^a}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^a}\right) \left(1 + \frac{1}{4^a}\right) \left(1 - \frac{1}{5^a}\right)^2$
 $\cdot \left(1 + \frac{1}{6^a}\right) \cdots$

解 记

$$q_1 = 1 + \frac{1}{1^a}, \quad q_2 = \left(1 - \frac{1}{2^a}\right)^2, \quad q_3 = 1 + \frac{1}{3^a},$$

$$q_4 = 1 + \frac{1}{4^a}, \quad q_5 = \left(1 - \frac{1}{5^a}\right)^2, \quad q_6 = 1 + \frac{1}{6^a}, \quad \dots$$

若记 $q_n = 1 + \alpha_n$, 则

$$\alpha_1 = \frac{1}{1^a}, \quad \alpha_2 = -\frac{2}{2^a} + \frac{1}{2^{2a}}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{3^a}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{4^a},$$

$$a_5 = -\frac{2}{5^a} + \frac{1}{5^{2a}}, \quad a_6 = \frac{1}{6^a}, \quad \dots$$

1) 当 $a > 1$ 时, 显然

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \frac{1}{1^a} + \left(\frac{2}{2^a} - \frac{1}{2^{2a}} \right) + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{4^a} + \left(\frac{2}{5^a} - \frac{1}{5^{2a}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{6^a} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

是收敛的, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 绝对收敛.

2) 注意当 $a \leq 0$ 时, 不可能有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 发散.

3) 今讨论 $0 < a \leq 1$ 时的情形.

将原无穷乘积写为

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{1^a}\right) \left(1 - \frac{1}{2^a}\right) \left(1 - \frac{1}{2^a}\right) \left(1 + \frac{1}{3^a}\right) \left(1 + \frac{1}{4^a}\right) \left(1 - \frac{1}{5^a}\right) \\ &\cdot \left(1 - \frac{1}{5^a}\right) \left(1 + \frac{1}{6^a}\right) \left(1 + \frac{1}{7^a}\right) \left(1 - \frac{1}{8^a}\right) \left(1 - \frac{1}{8^a}\right) \\ &\cdot \left(1 + \frac{1}{9^a}\right) \dots, \end{aligned}$$

记

$$p_1 = 1 + \frac{1}{1^a}, \quad p_2 = 1 - \frac{1}{2^a}, \quad p_3 = 1 - \frac{1}{2^a},$$

$$p_4 = 1 + \frac{1}{3^a}, \quad p_5 = 1 + \frac{1}{4^a}, \quad p_6 = 1 - \frac{1}{5^a}, \quad p_7 = 1 - \frac{1}{5^a},$$

$$p_2 = 1 + \frac{1}{6^\alpha}, \quad p_3 = 1 + \frac{1}{7^\alpha}, \quad \dots,$$

又记

$$p_n = 1 + \alpha_n^* \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

为研究乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的收敛性, 考虑通项的表达式, 有

$$\alpha_n^* = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^\alpha}, & \text{当 } n=4k+1, \\ -\frac{1}{(2+3k)^\alpha}, & \text{当 } n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^\alpha}, & \text{当 } n=4k+4 \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

为考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^*$ 的收敛性, 可看级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha} - 2 \cdot \frac{1}{(2+3k)^\alpha} + \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

的收敛性, 为此, 估算通项 a_k , 有

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{(1+3k)^\alpha} - \frac{2}{(2+3k)^\alpha} + \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \\ &= \left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha} - \frac{1}{(2+3k)^\alpha} \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{(2+3k)^\alpha} - \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha}{(3k+1+\theta_1)^{\alpha+1}} - \frac{\alpha}{(3k+2+\theta_2)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{[3k+1+\theta(1+\theta_2-\theta_1)]^{\alpha+2}} \cdot (1+\theta_2-\theta_1),$$

其中 $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, $0 < \theta < 1$. 显然, 令 $\delta = 1 + \theta_2 - \theta_1$, 则有 $0 < \delta < 2$, 且 $\theta(1 + \theta_2 - \theta_1) = \theta\delta \in (0, 2)$. 因而

$$0 < a_k = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(3k+1+\theta\delta)^{\alpha+2}} \cdot \delta \leq \frac{2\alpha(\alpha+1)}{(3k+1)^{\alpha+2}}.$$

由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^{\alpha+2}}$ 的收敛性知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^*$

收敛. 但 α_n^* 变号, 还需看级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*2}$. 易见

$$\alpha_n^{*2} = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^{2\alpha}}, & \text{当 } n=4k+1, \\ \frac{1}{(2+3k)^{2\alpha}}, & \text{当 } n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^{2\alpha}}, & \text{当 } n=4k+4 \quad (k=0,1,2,\dots). \end{cases}$$

无论哪种情形, 均有

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2\alpha}} < \alpha_n^{*2} < \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2\alpha}} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

因而当 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时, 由上述左侧不等式, 从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2\alpha}}$$

的发散性, 便知 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*2}$ 发散, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 此时发散.

因此 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 也发散. 当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时, 由上述不等式右侧部分, 从

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2\alpha}} < +\infty$$

便知 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*2}$ 此时收敛, 从而相应地 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 也收敛. 因

此, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 也收敛. 但由 (1) 式知 (当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时)

$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 发散, 故当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 条件收敛.

3098. 证明: 纵使级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots \quad (1)$$

发散, 而乘积

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots \quad (2)$$

收敛.

证 设原级数 (1) 的通项为 u_n , 则

$$u_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1},$$

$$u_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

令

$$a_k = u_{2k-1} + u_{2k} = \frac{1}{k+1}.$$

显然, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散, 故原级数 (1) 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必然发散.

考虑原无穷乘积 (2) 所对应的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n),$$

则其通项 $v_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 且

$$v_{2k-1} = \ln(1+u_{2k-1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right),$$

$$v_{2k} = \ln(1+u_{2k}) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \quad (k=1, 2, \dots),$$

从而

$$\begin{aligned} b_k &= v_{2k-1} + v_{2k} = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right) \\ &\quad + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\right). \end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛, 从而可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 故原无穷乘积 (2) 必收敛.

3099. 证明: 纵使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 二者发散, 而乘积

$\prod_{n=1}^{\infty} (1+\alpha_n)$ 收敛, 其中

$$\alpha_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{若 } n=2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{若 } n=2k. \end{cases}$$

证 考虑 $a_k = a_{2k-1} + a_{2k}$, 则有

$$a_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ 收敛, 而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 便知正项级数

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

再记 $b_k = a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2$, 则有

$$\begin{aligned} b_k &= \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3}\right)^2 \\ &= \frac{2}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3} \\ &= \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right). \end{aligned}$$

由级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ 收敛, 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$ 发散, 便知正项

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 发散, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散.

再考虑原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 所对应的级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 其中通项

$$v_n = \ln(1 + a_n) \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

考虑

$$\begin{aligned} c_k &= v_{2k-1} + v_{2k} = \ln(1 + a_{2k-1}) + \ln(1 + a_{2k}) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left[1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right] \\
&= \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right).
\end{aligned}$$

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 注意到 $v_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 从而

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 因此, 原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 收敛.

3100. 设

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(黎曼 ζ 函数) 而 p_n ($n=1, 2, \dots$) 是素数的叙列.

证明
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x} \right)^{-1} = \zeta(x).$$

证 设 $x > 1$. 首先, 有

$$\left(1 - \frac{1}{p_n^x} \right)^{-1} = \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{(p_n^2)^x} + \dots + \frac{1}{(p_n^m)^x} + \dots,$$

如果把对应于不超过自然数 N 的所有素数的有限个这种级数相乘起来, 则部分乘积就等于

$$\prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x} \right)^{-1} = 1 + \frac{1}{n_1^x} + \frac{1}{n_2^x} + \dots,$$

其中 n_1, n_2, \dots 是整数, 它不包含超过 N 的素因子, 显然 $1, 2, \dots, N$ 这种整数全被包含在 n_1, n_2, \dots 之中. 因此

$$\left| \zeta(x) - \prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x} \right)^{-1} \right|$$

$$= \left| \zeta(x) - 1 - \frac{1}{n_1^x} - \frac{1}{n_2^x} - \cdots \right|$$

$$\leq \frac{1}{(N+1)^x} + \frac{1}{(N+2)^x} + \cdots \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

取极限即得

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x) \quad (x > 1).$$

3101. 证明: 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

[其中 $p_n (n=1, 2, \dots)$ 是素数的叙列] 发散 (尤拉).

证 与 3100 题的处理方法类似, 考虑部分乘积, 易见也有

$$\prod_{p_n \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

由于当 $N \rightarrow +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ 发散, 且具有值 $+\infty$.

由上述可知, $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ 发散于零. 又由于 $\frac{1}{p_n} > 0$, 它始终不变号, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

发散.

3102. 设 $a_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0),$$

证明: $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

证 考虑无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, 其中

$$p_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p.$$

首先可证 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 是收敛的. 事实上, 考察其对应级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$, 通项为

$$\begin{aligned} \ln p_n &= \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} + p \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} + p \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= -\ln(1 + \Delta_n) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\Delta_n + O(\Delta_n^2) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

这里

$$\Delta_n = \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0),$$

故有

$$\ln p_n = -\frac{p}{n} + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而原乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛. 记其值为

$$k_0 = \prod_{n=1}^{\infty} p_n,$$

则 $k_0 \neq 0$, 且 k_0 为一有限正数. 再研究部分乘积

$$P_N = a_1 \prod_{n=1}^N p_n.$$

一方面, $P_N \rightarrow a_1 k_0 > 0$ (当 $N \rightarrow \infty$ 时); 另一方面, 由于

$$\begin{aligned} P_N &= a_1 \prod_{n=1}^N \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \\ &= a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p, \end{aligned}$$

注意 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \beta_n$, 其中 $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故当 N 充分大时, 有

$$\begin{aligned} \ln \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p &= p \sum_{n \leq N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= p \sum_{n \leq N} \left(\frac{1}{n} + \beta_n\right) \\ &= p \left[\ln N + C + O\left(\frac{1}{N}\right) + \sum_{n=1}^N \beta_n \right] \\ &= p \left[\ln N + C + B + O\left(\frac{1}{N}\right) \right] \\ &= p \left[\ln N + C_0 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right], \end{aligned}$$

其中 C 为 Euler 常数, $C > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B$ 是一常数, 而

$$\sum_{n=1}^N \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n + O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = B + O\left(\frac{1}{N}\right), C_0 = C +$$

B 是一常数. 于是

$$\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = e^{p\left[\ln N + C_0 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right]} \\ = N^p \cdot G_N,$$

其中

$$G_N = e^{C_0 p + O\left(\frac{1}{N}\right)} \longrightarrow e^{C_0 p} > 0 \quad (N \rightarrow +\infty).$$

这样一来, 就有

$$\begin{aligned} 0 < a_1 k_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p G_N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} G_N \\ &= e^{C_0 p} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p). \end{aligned}$$

上述式子中的各个极限运算是允许的, 因为 P_N 及 G_N 的极限存在, 且 G_N 的极限不为零, 故 $a_{N+1} N^p = \frac{P_N}{G_N}$ 的极限存在. 因此, 就有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) = \frac{a_1 k_0}{e^{C_0 p}} \quad (\text{非零常数}).$$

这表明 a_{N+1} 与 $\frac{1}{N^p}$ 为同级无穷小量, 或者说, a_N 与

$\frac{1}{(N-1)^f}$ 为同级无穷小量, 但 $\frac{1}{(N-1)^f}$ 与 $\frac{1}{N^f}$ 同级, 故最后得: a_N 与 $\frac{1}{N^f}$ 是同级无穷小量, 也即当 N 充分大时, 有

$$a_N = O^*\left(\frac{1}{N^f}\right).$$

3103. 利用瓦里斯公式证明

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

证 瓦里斯公式为

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

或
$$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \sim \frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

上式两端开方, 即得

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. 证明: 表示式

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时有异于零的极限 A .

由此推出斯特林格公式

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + e_n),$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ 和 $A = \sqrt{2\pi}$.

证 按题设我们可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}.$$

下证不等式:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}, \quad (1)$$

证明了这一点, 即可知 $a_{n+1} < a_n$, 从而 $\{a_n\}$ 为递减数列. 事实上, 在等式

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots\right)$$

中令 $x = \frac{1}{2n+1}$, 即得

$$\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots\right],$$

也即

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots.$$

上式右端显然大于1, 但小于

$$1 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots \right] = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

因此, 我们有

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

由此, 取指数 (底为 e), 即得(1)式:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}$$

由上述不等式，即可推知：

$$0 < a_{n+1} < a_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\text{及 } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}$$

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 为单调递减且有下界的数列，因

此它有有限极限 A ；而数列 $\left\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\right\}$ 单调递增且有

上界： $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}} < a_1$ ，故也有极限。由于 $e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$)，故这两个数列有同一极限 A 。由于对任何的 n ，不等式

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < A < a_0$$

成立；故在 0 与 1 之间存在这样的 θ ，使得

$$A = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}} \text{ 或 } a_n = A e^{\frac{\theta}{12n}}$$

因此，

$$\frac{n! e^{\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = A e^{\frac{\theta}{12n}},$$

$$\text{即 } n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\theta}{12}} \quad (\theta = \theta(n), 0 < \theta < 1), \text{ 或}$$

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2}} (1 + \varepsilon_n),$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ 。

现在我们来确定常数 A ，将瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2$$

稍加变形, 并将 $n!$ 的表达式代入, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} A^2 n^{2n+1} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{6n}}}{A \cdot 2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{24n}}} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} A^2 \cdot \frac{n}{2} e^{-\frac{\theta}{4n}} = \frac{A^2}{4}. \end{aligned}$$

由此得 $A^2 = 2\pi$ 或 $A = \sqrt{2\pi}$ ($A > 0$).

于是, 最后证得斯特林格公式为

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1).$$

用上式可估计很大的 n 时阶乘 $n!$ 的值.

3105. 根据尤拉的定义 戛玛函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由这个公式出发: (a) 表函数 $\Gamma(x)$ 为无穷乘积的形状; (b) 证明 $\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义; (c) 推出下面这个性质

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

(d) 对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

解 (a) 由于

$$\begin{aligned}
\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} &= \frac{n^x}{x} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x \left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x},
\end{aligned}$$

故得

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(6) 由上面 $\Gamma(x)$ 写成无穷乘积的过程, 得知 $x \neq -n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), 即当 x 为非负整数时 $\Gamma(x)$ 才允许写成上述形式. 另一方面, 由于

$$p_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1 + a_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

而 $a_n = \frac{x(x-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,

从而无穷乘积

$$\frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

绝对收敛, 也即 $\Gamma(x)$ 对于 $x \neq -n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 的一切实数 x 皆有意义.

(B) 由于

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1) \cdots (x+n+1)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n! n^{x+1}}{(x+1) \cdots (x+n+1)}}{\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+n+1} = x,\end{aligned}$$

故 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(C) 令 $x=n-1$, 即得

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= \cdots = (n-1)!.\end{aligned}$$

3106. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可以积分及

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{in} = f(a + i\delta_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}$.

证 令 $y_n = \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in})$, 则

$$\ln y_n = \sum_{i=1}^n \ln(1 + \delta_n f_{in})$$

$$= \sum_{i=1}^n [f_{i\alpha} \delta_n + O(\delta_n^2)] = \sum_{i=1}^n f_{i\alpha} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n f_{i\alpha} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \int_a^b f(x) dx, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{i\alpha}) = e^{\int_a^b f(x) dx}.$$

证毕.

3107* 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a+ib)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)} = \frac{2}{e},$$

其中 $a > 0$ 和 $b > 0$.

证 记 $t = \frac{b}{a}$, 则 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a+ib)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)} = \frac{\sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)}}{\frac{a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1+it)} \\ &= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1+it)}. \end{aligned}$$

注意, 当 n 充分大时, 可算得

$$\sum_{i=0}^{n-1} (1+it) = n + t \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= n + \frac{t}{2}(n-1)n = \frac{t}{2}n^2 + O(n).$$

记 $Q_n = \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)}$, 考虑

$$\ln Q_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+it)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left[\frac{1+it}{1+nt} (1+nt) \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{1+it}{1+nt}$$

$$= \ln(1+nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1-\Delta_i),$$

其中

$$\Delta_i = 1 - \frac{1+it}{1+nt} = \frac{(n-i)t}{1+nt} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1),$$

故得

$$\ln Q_n = \ln(nt) + \ln\left(1 + \frac{1}{nt}\right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln\left(1 - \frac{t}{1+nt} j\right)$$

$$= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{tj}{1+nt}\right)^k$$

$$= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1+nt}\right)^k \sum_{j=1}^n j^k$$

$$= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1+nt}\right)^k$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\frac{1}{k+1} n^{k+1} + O(n^k) \right] \\
&= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k\right) \\
&= \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) + \ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right) + \left(\frac{1+nt}{nt}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^{k+1} + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) + \ln \frac{1}{1+nt} + \frac{1+nt}{nt} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^s \right. \\
&\quad \left. - \frac{nt}{1+nt} \right\} + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right) \\
&= \ln(nt) - \ln(1+nt) - \frac{1+nt}{nt} \ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right) \\
&\quad - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right)
\end{aligned}$$

$$= \ln(nt) - \ln(1+nt) - \ln \frac{1}{1+nt} - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right)$$

$$= \ln(nt) - 1 + O\left(\frac{1}{n} \ln n\right).$$

于是

$$Q_n = \frac{nt}{e} \cdot e^{O\left(\frac{1}{n} \ln n\right)},$$

因而有

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{Q_n}{\frac{t}{2}n + O(1)} = \frac{\frac{nt}{e} \cdot e^{O\left(\frac{1}{n} \ln n\right)}}{\frac{t}{2}n + O(1)} \\ &= \frac{2}{e} \cdot \frac{e^{O\left(\frac{1}{n} \ln n\right)}}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}, \end{aligned}$$

最后得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{e} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{O\left(\frac{1}{n} \ln n\right)}}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{e}.$$

证毕.

*) 原题有误. 应改为由数列 $\{a+ib\}$ 的几何平均与算术平均之比的极限, 分母应为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a+ib),$$

而不是 $\sum_{i=0}^{n-1} (a+ib)$.

3108. 设 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在区间 (a, b) 内为连续函数且

$|f_n(x)| \leq c_n$ ($n=1, 2, \dots$), 其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

证明：函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

在区间 (a, b) 上是连续的。

证 1) 首先证明上述乘积对任何 $x \in (a, b)$ 是收敛的。

注意级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，故 $c_n \rightarrow 0$ （当 $n \rightarrow \infty$ 时），因而

$f_n(x) \rightarrow 0$ （当 $n \rightarrow \infty$ 时），故存在正整数 N_0 ，当 $n \geq N_0$ 时，有 $|f_n(x)| < \delta$ ，此处 δ 可事先取 $(0, 1)$ 内的任

一实数。现在只要研究乘积 $\prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 的收

敛性即可，或改写

$$\prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1 + f_n(x)] = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + g_k(x)], \quad (1)$$

其中

$$g_k(x) = f_{N_0+k}(x) \quad (k=1, 2, \dots).$$

如能证明

$$G(x) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + g_k(x)] \quad (2)$$

是收敛的，以及下面再证 $G(x)$ 是连续的，那么

$$F(x) = G(x) \prod_{n=1}^{N_0} [1 + f_n(x)] \quad (3)$$

当然是收敛的而且是连续的。今研究 (2) 式，其中 $|g_n(x)| < \delta$ ，因而 $1 + g_n(x) > 0$ ($n=1, 2, \dots$)。现在考

察乘积对应的另一级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ ：显然，由 $|g_n(x)| \leq$

C_{N_0+n} , 而 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{N_0+n}$ 收敛, 便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 绝对收敛.

因而原乘积 (2) 绝对收敛.

(2) 再证 $G(x)$ 的连续性. 注意当 $x \in (a, b)$ 时 $G(x) > 0$, 故可考虑它的对数函数 $L(x) = \ln G(x)$. 若能证得 $L(x)$ 为 (a, b) 上的连续函数, 则就可得知 $G(x)$ 也在 (a, b) 上连续. 由于

$$\begin{aligned} L(x) &= \ln G(x) = \ln \prod_{n=1}^{\infty} [1 + g_n(x)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln [1 + g_n(x)] \end{aligned}$$

以及 $|g_n(x)| \leq C_{N_0+n}$, $C_{N_0+n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 再注意到 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, 即知: 当 n 充分大时 ($n > N^*$), 对一切 $x \in (a, b)$ 皆有

$$|\ln[1 + g_n(x)]| \leq 2 |g_n(x)| \leq 2 C_{n+N_0}.$$

根据 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{n+N_0}$ 的收敛性知, $L(x)$ 为一在区间 (a, b) 上一致收敛的连续函数项级数之和. 因而 $L(x)$ 在 (a, b) 上为一连续函数. 从而 $G(x)$ 在 (a, b) 上连续. 因此, 最后得知 $F(x)$ 在 (a, b) 内是一连续函数. 证毕.

3109. 求函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

的导函数之表达式. $F'(x)$ 存在的充分条件为何?

解 首先假定 $1 + f_n(x) \neq 0 \quad (a < x < b, n = 1, 2, \dots)$.

如果在区间 (a, b) 内的任意一点 x 上, 均有 $\{f_n(x)\}$ 的级数绝对收敛; 也即

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty \quad (x \in (a, b)), \quad (1)$$

那么, 显然无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 在 (a, b) 内(绝对)

收敛且 $F(x) \neq 0$. 考虑函数

$$G(x) = \ln |F(x)|, \quad (2)$$

为研究取 $F(x)$ 的导函数的计算式, 先对(2)作形式求导, 有

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} \text{ 或 } F'(x) = F(x)G'(x). \quad (3)$$

今再研究 $G'(x)$, 即研究形式导数

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\ln \left| \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)] \right| \right)' \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln |1 + f_n(x)| \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\ln |1 + f_n(x)|)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}. \end{aligned} \quad (4)$$

为使(4)式的一切运算有意义, 我们可给出如下充分条件: $f_n(x)$ 可导, 且

$$|f_n'(x)| \leq c_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty \quad (x \in (a, b)). \quad (5)$$

下面我们证明: 在条件(1)、(5)之下, $F(x)$ 在

(a, b) 内可导, 且

$$F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}. \quad (6)$$

只要证明 (6) 式对 (a, b) 中任一点 x_0 成立. 设 $x_0 \in (a, b)$ 已取定. 取 a_1, b_1 使 $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$. 首先证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad (7)$$

在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ 的收敛性, 为此又只要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(x_0)| \quad (8)$$

在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 但根据 (5) 式, 有: 当 $x \in (a_1, b_1)$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &= |f_n'(\xi_n)(x - x_0)| \\ &\leq (b_1 - a_1)c_n \quad (n=1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $x_0 \leq \xi_n \leq x$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性, 根据外氏判别法

知级数 (8), 从而级数 (7), 在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 于是, 必有正整数 N 存在, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a_1, b_1)$, 恒同时满足下面两个不等式:

$$|f_n(x)| < \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$|\ln[1 + f_n(x)]| \leq 2 |f_n(x)|, \quad (11)$$

由 (10) 式与 (5) 式又知: 当 $n > N$ 时, 对一切

$x \in (a_1, b_1)$, 有

$$\left| \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)} \right| \leq 2c_n. \quad (12)$$

根据(11)式与(12)式, 注意到级数(7)在 (a_1, b_1) 的一致收敛性知, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln|1+f_n(x)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$ 都在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 从而知(4)式中的逐项求导数是允许的, 即 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导, 且(4)式成立. 由(2)式知

$$|F(x)| = e^{G(x)}. \quad (13)$$

由(9)式得: 当 $a_1 < x < b_1$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq (b_1 - a_1)c_n + |f_n(x_0)| \\ &= d_n \quad (n=1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛, 故根据3108题的结果知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1)

上连续. 但前面已述 $F(x) \neq 0$, 故在 (a_1, b_1) 上或是 $F(x)$ 恒大于零, 这时(13)式为

$$F(x) = e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1); \quad (14)$$

或是 $F(x)$ 恒小于零, 这时(13)式为

$$F(x) = -e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1). \quad (15)$$

在(14)式成立的情形, 由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导可知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导, 且〔注意到(4)式〕

$$F'(x) = e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)};$$

在(15)式成立的情形下, 由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导可

知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导, 且〔注意到 (4) 式〕

$$F'(x) = -e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}.$$

总之, 在 (a_1, b_1) 上 (6) 式必成立. 特别在点 x_0 成立.

总之, 在条件 (1) 和条件 (5) 之下, 再假定 $1+f_n(x) \neq 0$ ($a \leq x \leq b$, $n=1, 2, 3, \dots$) 即可推出在 (a, b) 上 $F'(x)$ 存在且公式 (6) 成立.

3110. 证明: 若 $0 \leq x \leq y$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{y(y+1) \cdots (y+n)} = 0.$$

证 记

$$p_n = \frac{x+n}{y+n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

显然, $0 \leq p_n \leq 1$. 由题意, 现在要证无穷乘积

$$\frac{x}{y} \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

发散到零. 因为部分乘积 $\prod_{k=1}^n p_k$ 是正的递减的, 故只要证明它是发散的就行了. 为此先估计一下 $p_n = 1 +$

a_n , 则有

$$a_n = p_n - 1 = \frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{y}{n}} - 1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-1} - 1$$

$$= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1$$

$$= \left[1 - \frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1$$

$$= -\frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故当 n 适当大时, α_n 保持定号. 但由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 而

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y-x}{n}$ 发散, 便知 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散, 即它发散到零. 于是, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{y(y+1) \cdots (y+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{y} \prod_{k=1}^n \frac{x+k}{y+k}$$

$$= \frac{x}{y} \prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0.$$

证毕.

§10. 斯特林格公式

斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

可用来计算当值 n 甚大时的 $n!$.

利用斯特林格公式, 近似地计算:

3111. $\lg 100!$.

$$\text{解} \quad \lg 100! = \lg \left\{ \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta}{12 \cdot 100}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (\lg 2 + \lg \pi + \lg 100) + 100 \lg 100 - 100 \lg e + \frac{\theta}{1200} \lg e$$

$$= \frac{1}{2}(0.3010 + 0.4971 + 2) + 200 - 100 \cdot 0.4343$$

$$+ 0.0004\theta$$

$$= 157.9691 + 0.0004\theta,$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$.

3112. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999$.

$$\text{解 } 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999 = \frac{2000!}{2^{1000} \cdot 1000!}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2000} \cdot 2000^{2000} \cdot e^{-2000} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24000}}}{2^{1000} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 1000} \cdot 1000^{1000} \cdot e^{-1000} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12000}}}$$

$$= 7.09 \cdot 10^{2866} \cdot e^{\frac{\theta}{12000}}$$

$$\doteq 7.09 \cdot 10^{2866} \cdot \left(1 + \frac{\theta}{12000}\right),$$

其中 $|\theta| \leq 1$ ($0 \leq \theta_1 \leq 1$, $0 \leq \theta_2 \leq 1$).

3113. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100}$.

$$\text{解 } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} = \frac{100!}{2^{100} (50!)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{300}}}$$

$$= 0.0798 e^{\frac{\theta}{300}} \doteq 0.0798 \left(1 + \frac{\theta}{300}\right),$$

其中 $|\theta| \leq 1$ ($0 \leq \theta_1 \leq 1$, $0 \leq \theta_2 \leq 1$).

3114. C_{100}^{40} .

$$\begin{aligned} \text{解 } C_{100}^{40} &= \frac{100!}{40! \cdot 60!} \\ &= \frac{\sqrt{200\pi} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2\pi \cdot 40} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 60} \cdot 60^{60} \cdot 40^{40} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{480} + \frac{\theta_3}{720}}} \\ &= 10^{28} \cdot 1.378 e^{\frac{\theta}{288}} \\ &= 10^{28} \cdot 1.378 \left(1 + \frac{\theta}{288}\right), \end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, $0 < \theta_3 < 1$).

3115. $\frac{100!}{20! \cdot 30! \cdot 50!}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{100!}{20! \cdot 30! \cdot 50!} &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2^3 \pi^3 20 \cdot 30 \cdot 50} \cdot 20^{20} \cdot 30^{30} \cdot 50^{50} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{240} + \frac{\theta_3}{360} + \frac{\theta_4}{600}}} \\ &= 10^{42} \cdot 4.792 e^{\frac{\theta}{120}} \\ &= 10^{42} \cdot 4.792 \left(1 + \frac{\theta}{120}\right), \end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, $0 < \theta_3 < 1$, $0 < \theta_4 < 1$).

3116. $\int_0^1 (1-x^2)^{50} dx$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int_0^1 (1-x^2)^{50} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{101} t dt \\
&= \frac{(100)!!}{(101)!!} = \frac{2^{100} \cdot (50!)^2}{101!} \\
&= \frac{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{300}}}{101 \cdot \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{1200}}} \\
&= \frac{10\sqrt{\pi}}{101\sqrt{2}} e^{\frac{\theta}{300}} = 0.1241 e^{\frac{\theta}{300}} = 0.1241 \left(1 + \frac{\theta}{300}\right),
\end{aligned}$$

其中 $|\theta| \leq 1$ ($0 \leq \theta_1 \leq 1$, $0 \leq \theta_2 \leq 1$).

3117. $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx.$

解 先将 $\int_0^{2\pi}$ 分成 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$, $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$ 及 $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$ 四部分, 然后

分别作代换 $x=t$, $x=t+\frac{\pi}{2}$, $x=t+\pi$, 及 $x=t+\frac{3\pi}{2}$,

再利用结果

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt,$$

易得

$$\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{200} x dx.$$

利用2281题的结果及斯特林格公式, 最后得

$$\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx = 4 \frac{(199)!!}{(200)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{200!}{2^{200}(100!)^2} \cdot 2\pi \\
&= \frac{2\pi \sqrt{2\pi \cdot 200} \cdot 200^{200} \cdot e^{-200} \cdot e^{\frac{\theta_1}{2400}}}{2^{200} \cdot 200\pi \cdot 100^{200} \cdot e^{-200} \cdot e^{\frac{\theta_2}{600}}} \\
&= 0.355 \cdot e^{\frac{\theta}{600}} = 0.355 \left(1 + \frac{\theta}{600}\right),
\end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$).

3118. 对于乘积

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

推出渐近公式.

$$\begin{aligned}
\text{解 } (2n-1)!! &= \frac{2n!}{2^n n!} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12n}}} \\
&= \sqrt{2} (2n)^n e^{-n + \frac{\theta}{12n}},
\end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$).

3119. 若 n 甚大, 近似地计算 C_{2n}^n .

$$\begin{aligned}
\text{解 } C_{2n}^n &= \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2\pi n \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_2}{6n}}} \\
&= \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} = e^{-\frac{\theta}{8n}},
\end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$).

3120. 利用斯特林格公式求下列极限:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!},$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}},$$

$$(r) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}.$$

解 (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt[n]{2\pi n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^3}}]$
 $= 1.$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{2\pi n} \cdot n \cdot e^{-1} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[n]{2\pi n} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}} = e.$$

(B) 利用3118题的结果即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[2n]{2} \cdot 2n \cdot e^{-1} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}$$

$$= \frac{e}{2}.$$

$$(r) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln \pi + \ln n) + n \ln n - n + \frac{\theta}{12n}}{n \ln n}$$

$$= 1.$$

§11. 用多项式逼近连续函数

1° 拉格朗日插入公式 拉格朗日多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} y_i$$

具有性质 $P_n(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, \dots, n$)。

2° 白恩什坦多项式 若 $f(x)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则 白恩什坦多项式

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时在闭区间 $[0, 1]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$ 。

3121. 作出经过下列数组

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

的最低的 n 阶多项式 $P_n(x)$ 。

$$P_n(-1), P_n(1), P_n(6)$$

近似地等于什么?

解 $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 5;$
 $y_0 = 5, y_1 = 1, y_2 = -3, y_3 = 1.$

$$\begin{aligned} P_3(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3. \end{aligned}$$

以 (x_i, y_i) ($i=0, 1, 2, 3$) 代入上式, 化简即得

$$P_3(x) = 1 - \frac{55}{21}x - \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3.$$

$$P_3(-1) = 1 + \frac{55}{21} - \frac{1}{14} - \frac{5}{42} \doteq 3.43,$$

$$P_3(1) = 1 - \frac{55}{21} - \frac{1}{14} + \frac{5}{42} \doteq -1.57,$$

$$P_3(6) = 1 - \frac{110}{7} - \frac{18}{7} + \frac{180}{7} \doteq 8.43.$$

3122. 写出经过三点: $A(x_0-h, y_{-1})$, $B(x_0, y_0)$, $C(x_0+h, y_1)$ 的抛物线方程

$$y = ax^2 + bx + c.$$

解 将三点的坐标代入拉格朗日插入公式, 即得

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]} y_{-1} \\ &+ \frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]} y_0 \\ &+ \frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]} y_1 \\ &= y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} (x-x_0) + \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2h^2} \\ &\quad \cdot (x-x_0)^2. \end{aligned}$$

3123. 利用数值 $x_0=1$, $y_0=1$; $x_1=25$, $y_1=5$; $x_2=100$, $y_2=10$, 推出开平方根: $y=\sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 100$) 的近似公式.

解 $y=\sqrt{x}$ 的近似公式可由拉格朗日插入公式求出:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{(x-25)(x-100)}{(-24) \cdot (-99)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-100)}{24 \cdot (-75)} \cdot 5 \\
 &\quad + \frac{(x-1)(x-25)}{99 \cdot 75} \cdot 10 \\
 &= 0.808 + 0.193x - 0.00101x^2.
 \end{aligned}$$

例如,

$$x=4, y \approx 1.584 \text{ (应为 } 2 \text{)};$$

$$x=9, y \approx 2.463 \text{ (应为 } 3 \text{)};$$

$$x=16, y \approx 3.637 \text{ (应为 } 4 \text{)};$$

$$x=36, y \approx 6.447 \text{ (应为 } 6 \text{)}.$$

由此看来, 误差还较大.

3124. 利用数值

$$\sin 0^\circ = 0, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 90^\circ = 1,$$

推出如下的近似公式

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \leq x \leq 90).$$

利用这个公式, 近似地求:

$$\sin 20^\circ, \sin 40^\circ, \sin 80^\circ.$$

解 将 $x=30, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; x=90, \sin 90^\circ = 1$ 代入

近似公式

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3,$$

即得联立方程组

$$\begin{cases} 30a + 27000b = \frac{1}{2}, \\ 90a + 729000b = 1. \end{cases}$$

解之, 得

$$a = \frac{5}{288}, \quad b = -\frac{5}{288} \left(\frac{1}{150} \right)^2.$$

因此,

$$\sin x^\circ \approx \frac{5x}{288} \left[1 - \left(\frac{x}{150} \right)^2 \right].$$

由此近似公式, 可得

$$\sin 20^\circ \approx 0.341, \quad \sin 40^\circ \approx 0.645, \quad \sin 80^\circ \approx 0.994,$$

这与查表所得的

$$\sin 20^\circ = 0.3420, \quad \sin 40^\circ = 0.6428, \quad \sin 80^\circ = 0.9848$$

近似.

3125. 取数值 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ 作拉格朗日多项式的插值点, 对函数 $f(x) = |x|$ 作出在闭区间 $[-1, 1]$ 上的拉格朗日插入多项式.

解 以 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, y_i = 0, \frac{1}{2}, 1$ 代入拉格朗日插入式, 即得

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x^2 - 1)}{\left(-\frac{1}{2} \right) (-1) \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \\ & + \frac{x \left(x + \frac{1}{2} \right) (x^2 - 1)}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \\ & + \frac{x(x-1) \left(x^2 - \frac{1}{4} \right)}{(-1) \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) (-2)} \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x(x+1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}{1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2} \cdot 1 \\
& = \frac{x^2}{3} (7 - 4x^2) \quad (|x| \leq 1),
\end{aligned}$$

此即所求的多项式。

3126. 以拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$, 近似地计算

$$\int_0^2 y(x) dx,$$

其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

$$\begin{aligned}
\text{解 } y(x) &= \frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(-0.5)(-1)(-1.5)(-2)} \cdot 5 \\
&+ \frac{x(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1) \cdot (-1.5)} \cdot 4.5 \\
&+ \frac{x(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{1 \cdot 0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1)} \cdot 3 \\
&+ \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-2)}{1.5 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot (-0.5)} \cdot 2.5 \\
&+ \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{2 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 0.5} \cdot 5 \\
&= \left(\frac{10}{3}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + \frac{87.5}{3}x^2 - \frac{62.5}{3}x + 5 \right) + (-12x^4 \\
&\quad + 54x^3 - 78x^2 + 36x) + (12x^4 - 48x^3 + 57x^2 - 18x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{20}{3}x^4 + \frac{70}{3}x^3 - \frac{70}{3}x^2 + \frac{20}{3}x \right) \\
& + \left(\frac{10}{3}x^4 - 10x^3 + \frac{27.5}{3}x^2 - 2.5x \right) \\
& = \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 y(x) dx &= \int_0^2 \left(\frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5 \right) dx \\
&= \left(\frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 5x \right) \Big|_0^2 = \frac{22}{3} = 7 \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3127. 对于函数 x , x^2 , x^3 , 试在闭区间 $[0, 1]$ 上作出白恩什坦多项式 $B_n(x)$.

解 对于函数 $f(x) = x$, 其白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 为

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= x [x + (1-x)]^{n-1} = x,
\end{aligned}$$

对于函数 $f(x) = x^2$, 其白恩什坦多项式为

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1^2}{n^2} C_n^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} \\
&\quad + \frac{3^2}{n^2} C_n^3 x^3 (1-x)^{n-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} (1-x) + \frac{n^2}{n^2} C_n^n x^n \\
& = \frac{1}{n} x (1-x)^{n-1} + \frac{2(n-1)}{n} x^2 (1-x)^{n-2} \\
& \quad + \frac{3}{n} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2!} x^3 (1-x)^{n-3} \\
& \quad + \cdots + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} x^{n-1} (1-x) + x^n \\
& = \frac{1}{n} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x (1-x)^{n-1} + \frac{2}{n} (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) x^2 \\
& \quad \cdot (1-x)^{n-2} + \frac{3}{n} (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) x^3 (1-x)^{n-3} \\
& \quad + \cdots + \frac{n-1}{n} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) x^{n-1} (1-x) \\
& \quad + x^n = \left[\frac{1}{n} C_{n-1}^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2}{n} C_{n-1}^2 x^2 (1-x)^{n-2} \right. \\
& \quad \left. + \cdots + \frac{n-1}{n} C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} (1-x) \right] \\
& = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \cdot x^k (1-x)^{n-k} - \frac{n-1}{n} x (1-x) \\
& \quad \cdot \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-k-2} \\
& = x - \frac{n-1}{n} x (1-x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

对于函数 $f(x) = x^3$, 其白恩什坦多项式为

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k^3}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1^2}{n^2} C_{n-1}^0 x(1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_{n-1}^1 x^2(1-x)^{n-2} + \dots \\
&+ \frac{(n-1)^2}{n^2} C_{n-1}^{n-2} x^{n-1}(1-x) + x^n \\
&= \frac{1^2}{n^2} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x(1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) x^2 \\
&\cdot (1-x)^{n-2} + \dots \\
&+ \frac{(n-1)^2}{n^2} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) x^{n-1}(1-x) + x^n \\
&= \left[\frac{1^2}{n^2} C_{n-1}^1 x(1-x)^{n-1} \right. \\
&+ \frac{2^2}{n^2} C_{n-1}^2 x^2(1-x)^{n-2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} \\
&\cdot (1-x) \left. \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \\
&\cdot \left[\frac{1}{n-2} C_{n-2}^0 (1-x)^{n-2} + \frac{2}{n-2} C_{n-2}^1 x(1-x)^{n-3} \right. \\
&+ \dots + \frac{n-1}{n-2} C_{n-2}^{n-2} x^{n-2} \left. \right] \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \\
&\cdot \left[\frac{1}{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k}{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-k-2} \right. \\
&+ \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \\
&\quad \cdot \left[\frac{x}{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} C_{n-3}^k (x^{k+1} - x)^{n-3-k} + 1 \right] \\
&= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \\
&\quad \cdot \left(\frac{x}{n-2} + 1 \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) x^3 + \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n^2} x.
\end{aligned}$$

3128. 对于在闭区间 $[a, b]$ 上的已知函数 $f(x)$, 写出白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 的公式.

解 令 $a + (b-a)y = x$, 则当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $a \leq x \leq b$, 此时

$$y = \frac{x-a}{b-a}, \quad 1-y = \frac{b-x}{b-a},$$

$$f(x) = f(a + (b-a)y),$$

故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的白恩什坦多项式为

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

3129. 在闭区间 $[-1, 1]$ 上用白恩什坦多项式 $B_4(x)$ 逼近函数

$$f(x) = \frac{|x| + x}{2}.$$

作出函数 $y = \frac{|x| + x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图形.

解 利用3128题的结果, 易得

$$\begin{aligned}
 B_4(x) &= \sum_{k=0}^4 f\left(-1 + \frac{k}{2}\right) C_4^k \cdot \frac{(x+1)^k (1-x)^{4-k}}{2^4} \\
 &= \frac{1}{2} C_4^3 \cdot \frac{(x+1)^3 (1-x)}{2^4} + 1 \cdot C_4^4 \cdot \frac{(x+1)^4}{2^4} \\
 &= \frac{1}{8} (1-x) (1+x)^3 + \frac{1}{16} (1+x)^4.
 \end{aligned}$$

函数 $y = \frac{|x|+x}{2}$ 和 $y = B_4(x)$ 的图形如图 5.9 所示.

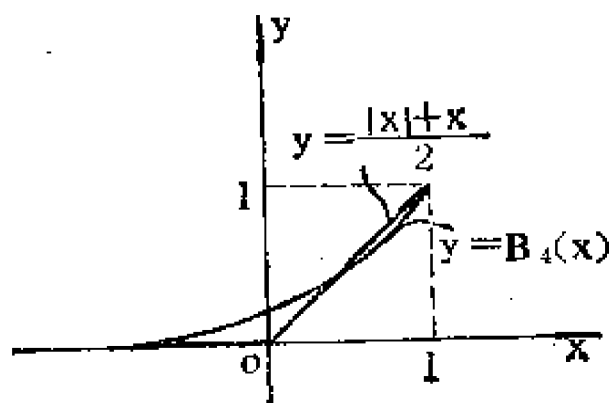


图 5.9

注: $y = B_4(x) = \frac{1}{8} (1-x) (1+x)^3 + \frac{1}{16} (1+x)^4$

当 $x = -1$ 时为 0; 当 $x = 1$ 时为 1; 当 $x = 0$ 时为 $\frac{3}{16}$.

又 $y' = \frac{(1+x)^2}{4} (2-x)$, 当 $x = -1$ 时, $y' =$

0; 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $y' > 0$, 故图形上升.

$y'' = \frac{3}{4} (1-x^2) \geq 0$, 故图形向上凹.

3130† 在 $-1 \leq x \leq 1$ 内用偶次的白恩什坦多项式逼近函数

$$f(x) = |x|.$$

解 利用3128题的结果, 即得

$$\begin{aligned} B_{2^n}(x) &= \sum_{k=0}^{2^n} \left| -1 + \frac{k}{n} \right| C_{2^n}^k \frac{(x+1)^k (1-x)^{2^n-k}}{2^{2^n}} \\ &= \frac{1}{2^{2^n}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2^n}^k (x+1)^k (1-x)^{2^n-k} + \sum_{k=n+1}^{2^n} \frac{k-n}{n} C_{2^n}^k \right. \\ &\quad \cdot (x+1)^k (1-x)^{2^n-k} \Big\} \\ &= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2^n}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{2^n} \frac{k-n}{n} C_{2^n}^k \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-k} \Big\} \\ &= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_{2^n}^{n-k} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2^n}^{n+k} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-k} \right\} \\ &= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2^n}^{n-k} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2^n}^{n+k} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^k \right\}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} C_{2^n}^{n-k} + C_{2^n}^{n+k} &= C_{2^n}^{n-k} \left[1 + \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+k)} \right] \\ &= 2C_{2^n}^{n-k}, \end{aligned}$$

故 $C_{2^n}^{n-k} = C_{2^n}^{n+k}$. 因此, 可得

$$B_{2^n}(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \sum_{k=1}^n \left\{ k C_{2^n}^{n-k} \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^k \right. \right.$$

$$+\left(-\frac{1-x}{1+x}\right)^k\Bigg\}.$$

3131. 对于函数

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leq x \leq b)$$

写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } B_n(x) &= \sum_{j=0}^n e^{k(a + (b-a)\frac{j}{n})} C_n^j \frac{(x-a)^j (b-x)^{n-j}}{(b-a)^n} \\ &= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} \sum_{j=0}^n e^{\frac{k(b-a)}{n}j} C_n^j (x-a)^j (b-x)^{n-j} \\ &= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} \left[e^{\frac{b-a}{n}k} (x-a) + (b-x) \right]^n \\ &= e^{ka} \left[e^{\frac{b-a}{n}k} \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} \right]^n \\ &= e^{ka} \left[(e^{\frac{b-a}{n}k} - 1) \frac{x-a}{b-a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b-x+x-a}{b-a} \right]^n \\ &= e^{ka} \left[1 + (e^{\frac{b-a}{n}k} - 1) \frac{x-a}{b-a} \right]^n. \end{aligned}$$

3132. 在闭区间 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 上, 对于函数 $f(x) = \cos x$ 计算多项式 $B_n(x)$.

解 我们有

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}). \quad (1)$$

利用3131题的结果（在其中令 $a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}$ 并分别令 $k=i$ 和 $k=-i$ ），得 e^{ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(1)}(x)$ 与 e^{-ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(2)}(x)$ 分别为：

$$B_n^{(1)}(x) = e^{-\frac{\pi}{2}i} \left[1 + \left(e^{\frac{i\pi}{n}} - 1 \right) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n,$$

$$B_n^{(2)}(x) = e^{\frac{\pi}{2}i} \left[1 + \left(e^{-\frac{i\pi}{n}} - 1 \right) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n.$$

于是，

$$\begin{aligned} B_n^{(1)}(x) &= e^{-\frac{\pi}{2}i} \left\{ e^{\frac{\pi i}{2n}} \left[e^{-\frac{\pi i}{2n}} + \left(e^{\frac{\pi i}{2n}} - e^{-\frac{\pi i}{2n}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}^n \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{\frac{\pi}{2}i} \left[\cos \frac{\pi}{2n} - i \sin \frac{\pi}{2n} \right. \\ &\quad \left. + 2i \sin \frac{\pi}{2n} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right]^n \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n. \end{aligned}$$

同理可得

$$B_n^{(2)}(x) = \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n.$$

于是, 根据(1)式, 即知 $\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 为:

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \frac{1}{2} \{ B_n^{(1)}(x) + B_n^{(2)}(x) \} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

应当指出, 我们也可不利用(1)式以及3131题的结果, 而利用3128题的结果直接写出 $\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$:

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) C_n^k \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^k \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{n-k}}{\pi^n} \\ &= \sum_{k=0}^n \sin \frac{k\pi}{n} C_n^k \frac{(\pi + 2x)^k (\pi - 2x)^{n-k}}{(2\pi)^n}, \end{aligned}$$

这是 $B_n(x)$ 的另一表示式.

3133. 证明: 在闭区间 $[-1, 1]$ 上, $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, 其中

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2i)} (1-x^2)^i,$$

证 $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1-t}$, 其中 $t = 1-x^2$.

我们知道, 函数 $\sqrt{1-t}$ 按幂级数展开有

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-t} &= 1 + \frac{1}{2}(-t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \cdot (-t)^n \\
&= 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n!2^n} (-1)^n t^n \\
&= 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} (-1)^{2n-1} t^n \\
&= 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n \quad (-1 < t < 1). \quad (1)
\end{aligned}$$

当 $t = \pm 1$ 时, 上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (\pm 1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n-1} - 1 \right) = \frac{3}{2} > 1,
\end{aligned}$$

故由拉阿伯判别法可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 从而级数

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛. 因此, 由幂级数的亚伯耳定理知, (1)

式当 $t = \pm 1$ 时也成立, 即有

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-t} &= 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n \\
&\quad (-1 \leq t \leq 1). \quad (2)
\end{aligned}$$

于是, 将 $t=1-x^2$ 代入, 即得

$$\begin{aligned} |x| &= 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (1-x^2)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \quad (-1 \leq x \leq 1). \end{aligned} \quad (3)$$

证毕.

注 由幂级数的性质知(2)式右端的级数在 $0 \leq t \leq 1$ 上一致收敛(实际在 $-1 \leq t \leq 1$ 上也一致收敛), 故(3)式中的级数在 $-1 \leq x \leq 1$ 上一致收敛. 因此, 我们实际证明了更强的结论: 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $P_n(x)$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 上一致趋于 $|x|$.

3134. 设 $f(x)$ 是对于 $-\pi \leq x \leq \pi$ 的连续函数而 a_n, b_n ($n=0, 1, 2, \dots$) 是它的傅里叶系数, 证明菲叶耳三角多项式

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

在区间 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

证 首先指出, 本题结论有误, 在所设条件下, 只能断定: 对任何 $\eta > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi + \eta, \pi - \eta]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 而一般推不出 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 但若再假定 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则能推出 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

今证于下. 首先, 以 $f(x)$ 在 $-\pi \leq x < \pi$ 上的函数值为基础按 2π 为周期将函数 $f(x)$ 延拓到整个 $(-\infty, +\infty)$ 上, 延拓后的函数仍记为 $f(x)$ (注意, 若原来 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 则延拓后的函数在 $x=\pi$ 的函数值不等于原来的函数值 $f(\pi)$, 但一个点的函数值对于下

面各积分之值毫无影响)。用 $S_n(x)$ 表 $f(x)$ 的福里叶级数的部分和, 则

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u-x) \right] du, \end{aligned}$$

将 n 个等式

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{v}{2} \cos mv &= \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) v - \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) v \\ (m &= 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

相加得

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mv = \frac{\sin(2n+1) \frac{v}{2}}{2 \sin \frac{v}{2}},$$

从而 (作代换 $u-x=t$)

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(2n+1) \frac{u-x}{2}}{2 \sin \frac{u-x}{2}} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

由于周期为 2π 的函数 $F(u)$ 在长为 2π 的闭区间 $[\lambda, \lambda+2\pi]$ 上的积分 $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} F(u) du$ 与 λ 无关, 故上式右端的

积分 $\int_{-\pi-x}^{\pi-x}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$. 由此, 再将 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 表为 $\int_{-\pi}^0 +$

\int_0^π , 并在 $\int_{-\pi}^0$ 中作代换 $t = -s$, 即得表达式

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

显然 $\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$, 故

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \\ &\quad \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &2 \sin \frac{t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [\cos kt - \cos(k+1)t] \\ &= 1 - \cos nt = 2 \sin^2 \frac{nt}{2}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \\ &\quad \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt. \end{aligned} \quad (1)$$

特别在(1)式中, 令 $f(x) \equiv 1$, 则显然这时 $S_n(x) \equiv 1$, 从而 $\sigma_n(x) \equiv 1$, 因此得下面的等式:

$$1 = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt, \quad (2)$$

(1)式减去(2)式乘 $f(x)$, 得

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x) \\ &\quad + f(x-t) - f(x)] \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt, \end{aligned} \quad (3)$$

由(3)式证明下述两结论:

i) 对任何 $\eta > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

ii) 若更设 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

先证 i). 设已给 $\eta > 0$. 显然, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 故存在常数 $M > 0$, 使

$$|f(x)| \leq M \quad (-\infty < x < +\infty).$$

注意, 延拓后的函数在点 $x = \pi$, $x = -\pi$ 可能不连续,

(可能有第一类间断点), 但在 $-\pi < x < \pi$ 上肯定是连续的, 因此, 在 $\left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right]$ 上必一致连续. 于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$ 存在, 使对于闭区间 $\left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right]$ 上任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| \leq \delta$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$\tau = \min \left\{ \delta, \frac{\eta}{2} \right\}.$$

根据(3)式, 有

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\tau [f(x+t) - f(x) + f(x-t) \\ &\quad - f(x)] \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2n\pi} \int_\tau^\pi [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \\ &\quad \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (4)$$

显然, 当 $0 \leq t \leq \tau$, $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 时, 有 $x+t \in \left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2} \right]$, $x-t \in \left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2} \right]$,

从而

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此〔再注意到(2)式〕, 当 $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 时, 有

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2n\pi} \int_0^\tau [|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) \\ &\quad - f(x)|] \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{n\pi} \int_0^{\tau} \left[\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (5)$$

另一方面, 当 $\tau \leq t \leq \pi$ 时, 有

$$\left[\frac{\sin \frac{n}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}}.$$

于是, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}} \int_{\tau}^{\pi} 4M dt \\ &< \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\tau}{2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

由(4)、(5)、(6)诸式可知: 当 $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 时, 有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n \sin^2 \frac{\tau}{2}} \quad (n=1, 2, \dots).$$

令 $N = \left\lceil \frac{4M}{\varepsilon \sin^2 \frac{\tau}{2}} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (-\pi +$

$\eta, \pi - \eta)$, 恒有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由此可知, $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi + \eta, \pi - \eta)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

再证 ii). 若原来给定的 $(-\pi, \pi)$ 上的连续函数

$f(x)$ 满足 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则前述延拓出去后的函数 $f(x)$ 是整个 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 因此, 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上必一致连续. 于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 必有 $\tau > 0$ 存在, (可取 $\tau < \pi$), 使对于 $[-2\pi, 2\pi]$ 中任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| \leq \tau$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

以下的证明和 i) 对应部分类似. 首先, 对刚才确定的 τ , 写出 (4) 式. 显然, 当 $0 \leq t \leq \tau$, $-\pi \leq x \leq \pi$ 时, 有 $x+t \in [-2\pi, 2\pi]$, $x-t \in [-2\pi, 2\pi]$, 故

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而, 当 $-\pi \leq x \leq \pi$ 时 (5) 式成立, 同样 (6) 式成立.

于是, 当 $n > N = \left\lceil \frac{4M}{\varepsilon \sin^2 \frac{\tau}{2}} \right\rceil$ 时, 对一切 $x \in [-\pi, \pi]$,

恒有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

故 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

最后, 我们举例说明, 若 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 则一般不能断定 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

例如, 设

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

我们证明这时的 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上不一致收敛于 $f(x)$. 用反证法. 假定 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上一致收敛于 $f(x) = x$. 由傅里叶级数的收敛性定理 (即迪里黑里定理) 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi), \quad (7)$$

这里
$$S(x) = \begin{cases} f(x) = x, & \text{当 } -\pi < x < \pi \text{ 时,} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0, & \text{当 } x = \pm \pi \text{ 时.} \end{cases}$$

由此可知, $S(x)$ 在点 $x = \pi$ 和 $x = -\pi$ 不连续. 但另一方面, 根据(7)式, 利用138题的结果知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = S(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (8)$$

由反证法的假定, $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上一致收敛于 $S(x)$ (在 $-\pi < x < \pi$ 上, $f(x) = x = S(x)$). 而由(8)式, 当 $x = \pi$ 和 $x = -\pi$ 时, $\sigma_n(x)$ 也收敛于 $S(x)$, 故知 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $S(x)$. 显然, $\sigma_n(x)$ 都是 x 的连续函数 ($-\pi \leq x \leq \pi$), 由此可知, 极限函数 $S(x)$ 也必在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上连续; 此与 $S(x)$ 在 $x = \pi$ 和 $x = -\pi$ 不连续的事实矛盾. 此矛盾证明了 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上收敛于 $f(x) = x$ 不是一致的.

本题全部证毕.

3135. 对于函数

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

作出菲叶耳多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

解 由于 $f(x)$ 是偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi} \quad (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

D·H·夏采多维奇

数学分析习题集题解

夏采多维奇 著
李天杨 译

山东科学技术出版社

В.П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(五)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

一九八一年·济南

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解
(五)

费定晖 周学孟 编演
郭大钧 邵品琮 主审

※

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东人民印刷厂印刷

※

787×1092毫米32开本 24.375印张 620千字
1980年7月第1版 1981年11月第2次印刷
印数: 82,001—110,000

书号 13195·21 定价 2.60元

出版说明

吉米多维奇(Б.П.ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自五十年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易

查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目 录

第六章 多变量函数的微分法	1
§1. 多变量函数的极限, 连续性	1
§2. 偏导函数, 多变量函数的微分	39
§3. 隐函数的微分法	152
§4. 变量代换	230
§5. 几何上的应用	337
§6. 台劳公式	387
§7. 多变量函数的极值	415
第七章 带参数的积分	525
§1. 带参数的常义积分	525
§2. 带参数的广义积分, 积分的一致收敛性	567
§3. 广义积分中的变量代换, 广义积分号下 微分法及积分法	618
§4. 尤拉积分	709
§5. 福里叶积分公式	752

第六章 多变量函数的微分法

§1. 多变量函数的极限. 连续性

1° 多变量函数的极限 设函数 $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义. 若对于任何的 $\varepsilon > 0$ 存在有 $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$, 使得只要 $P \in E$ 及 $0 < \rho(P, P_0) < \delta$ (其中 $\rho(P, P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离), 则

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

2° 连续性 若

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 于 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 于已知域内的每一点连续, 则称函数 $f(P)$ 于此域内是连续的.

3° 一致连续性 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在有仅与 ε 有关的 $\delta > 0$, 使得对于域 G 中的任何点 P', P'' , 只要是

$$\rho(P', P'') < \delta,$$

便有不等式

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon$$

成立, 则称函数 $f(P)$ 于域 G 内是一致连续的.

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的。

确定并绘出下列函数存在的域：

3136. $u = x + \sqrt{y}$.

解 存在域为半平面，

$$y \geq 0,$$

如图 6.1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内。

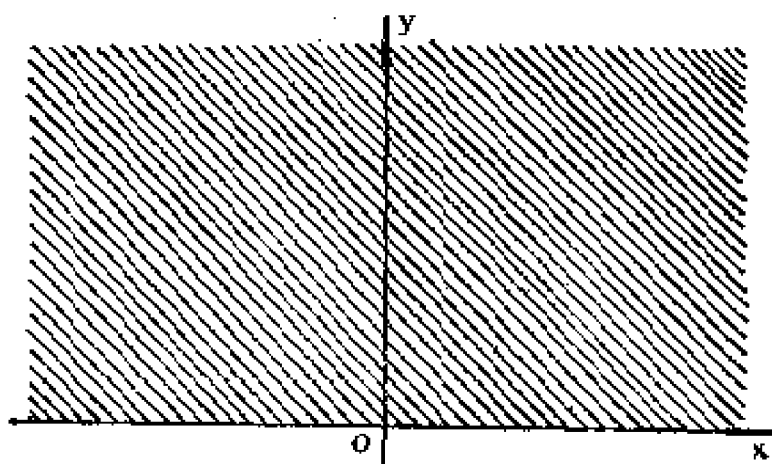


图 6.1

3137. $u = \sqrt{1-x^2}$
 $+ \sqrt{y^2-1}.$

解 存在域为满足不等式

$$|x| \leq 1, |y| \geq 1$$

的点集，如图 6.2 阴影部分所示，包括边界（粗实线）在内。

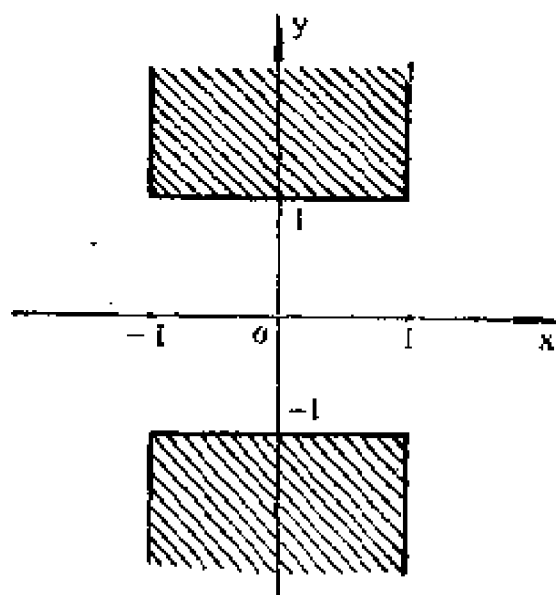


图 6.2

3138. $u = \sqrt{1-x^2-y^2}.$

解 存在域为圆

$$x^2 + y^2 \leq 1,$$

如图 6.3 阴影部分所示, 包括圆周在内.

$$3139. \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$$

解 存在域为满足不等式

$$x^2 + y^2 > 1$$

的点集, 即圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的外面, 如图 6.4 所示, 不包括圆周 (虚线) 在内.

$$3140. \quad u = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}}.$$

解 存在域为满足不等式

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

的点集, 如图 6.5 所示的环, 包括边界在内.

$$3141. \quad u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

解 存在域为满足不等式

$$x \leq x^2 + y^2 \leq 2x$$

的点集. 由 $x^2 + y^2$

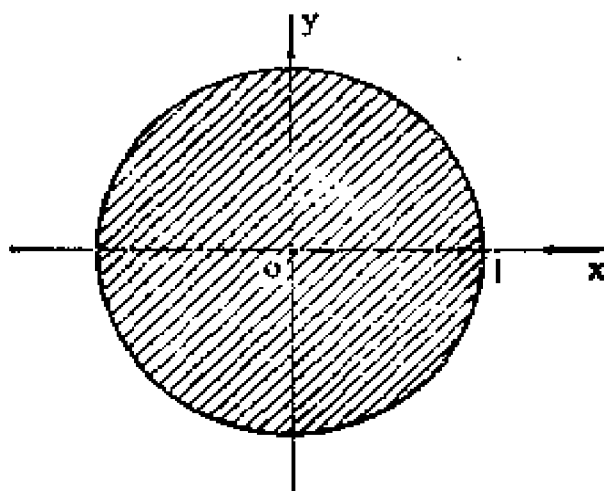


图 6.3

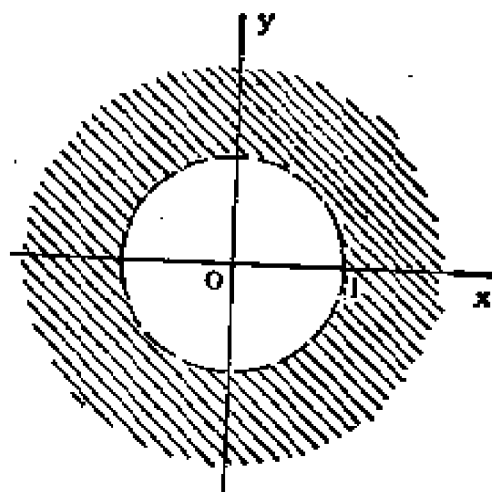


图 6.4

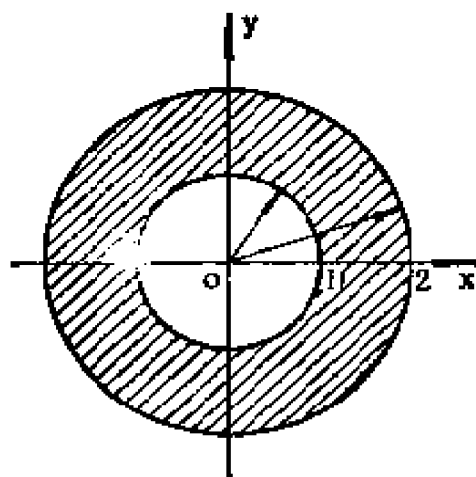


图 6.5

$\geq x$ 得出

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2 + y^2 < 2x$ 得出

$$(x-1)^2 + y^2 < 1,$$

两者组成一月形, 如图 6.6 阴影部分所示.

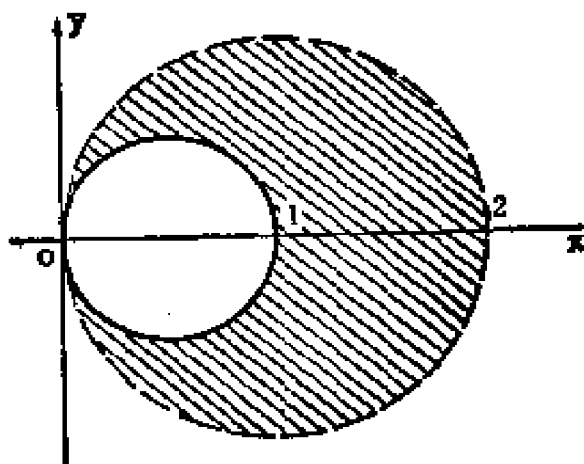


图 6.6

3142. $u = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$.

解 存在域为满足不等式

$$-1 \leq x^2 + y \leq 1$$

的点集, 如图 6.7 阴影部分所示, 包括边界在内.

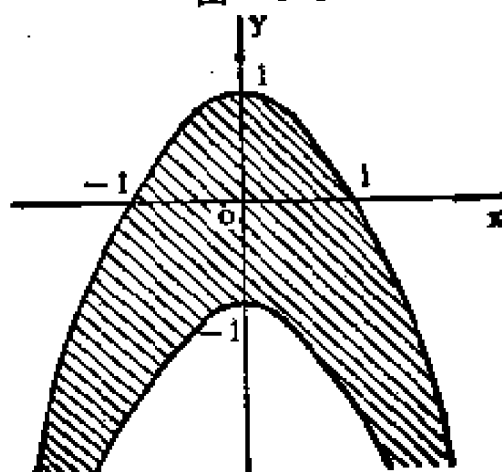


图 6.7

3143. $u = \ln(-x - y)$.

解 存在域为半平面

$$x + y < 0,$$

如图 6.8 阴影部分所示, 不包括直线 $x + y = 0$ 在内.

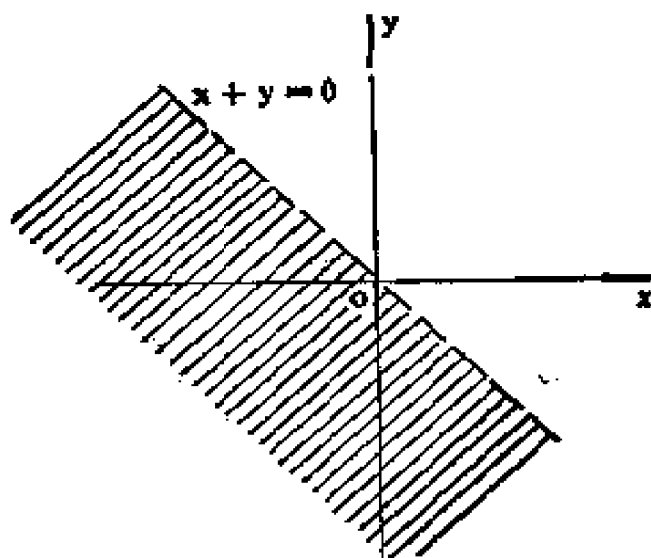


图 6.8

3144. $u = \arcsin \frac{y}{x}$.

解 存在域为满足

不等式

$$\left| \frac{y}{x} \right| \leq 1$$

或 $|y| \leq |x|$ ($x \neq 0$)

的点集，这是一对对顶的直角，如图 6·9 阴影部分所示，不包括原点在內。

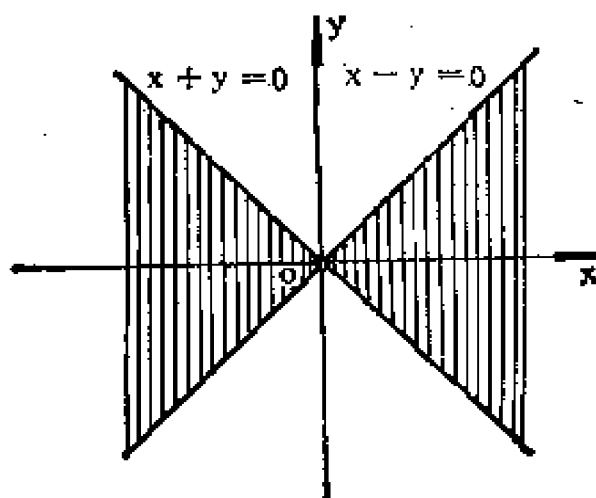


图 6·9

3145. $u = \arccos \frac{x}{x+y}$

解 存在域为满足不等式

$$\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1$$

的点集。由 $\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1$ 得 $|x| \leq |x+y|$ ($x \neq -y$),

即 $x^2 \leq x^2 + 2xy + y^2$ 或 $y(y+2x) \geq 0$ ，也即

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ y \geq -2x, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y \leq 0, \\ y \leq -2x. \end{cases}$$

但 x, y 不能同时为零。这是由直线： $y = 0$ 和 $y = -2x$ 所围成的一对对顶的角，如图 6·10 阴影部分所示，包括边界在內，但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在內。

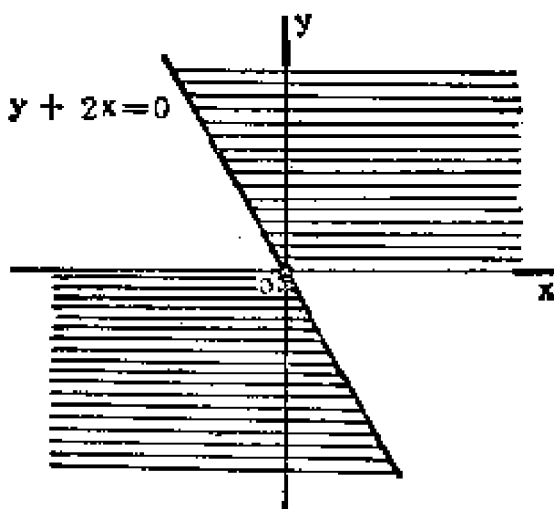


图 6·10

3146. $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y).$

解 存在域为满足不等式

$$\left| \frac{x}{y^2} \right| \leq 1 \text{ 及 } |1 - y| \leq 1 \quad (y \neq 0)$$

的点集, 即

$$\begin{cases} y^2 \geq x, \\ 0 < y \leq 2 \end{cases} \text{ 和}$$

$$\begin{cases} y^2 \geq -x, \\ 0 < y \leq 2. \end{cases}$$

这是由抛物线:

$$y^2 = x, \quad y^2 = -x$$

和直线 $y = 2$ 所围成的曲边三角形, 如图6·11阴影部分所示, 不包括原点在内.

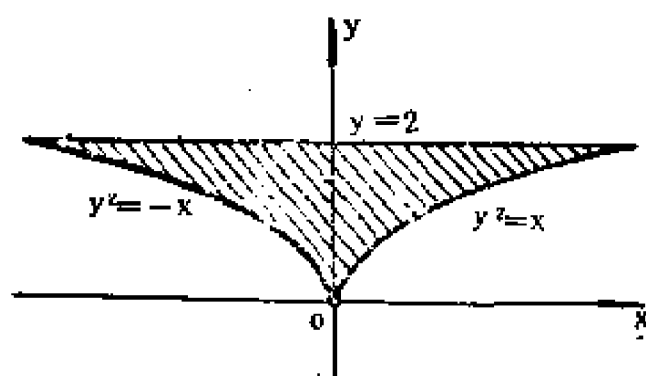


图 6·11

3147. $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$

解 存在域为满足不等式

$$\sin(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$\text{或 } 2k\pi \leq x^2 + y^2$$

$$\leq (2k+1)\pi \quad (k$$

$= 0, 1, 2, \dots)$ 的点集, 如图6·12所示的同心环族.

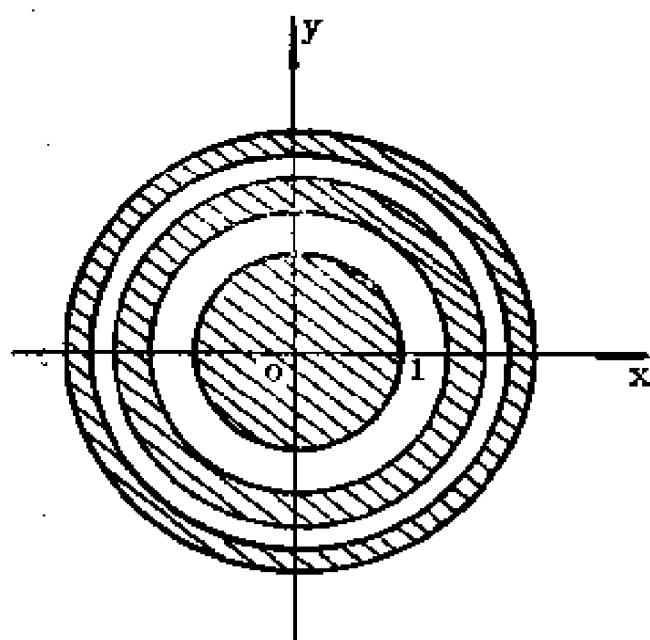


图 6·12

3148. $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1$$

(x, y 不同时为零)

或

$$x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$$

(x, y 不同时为零)

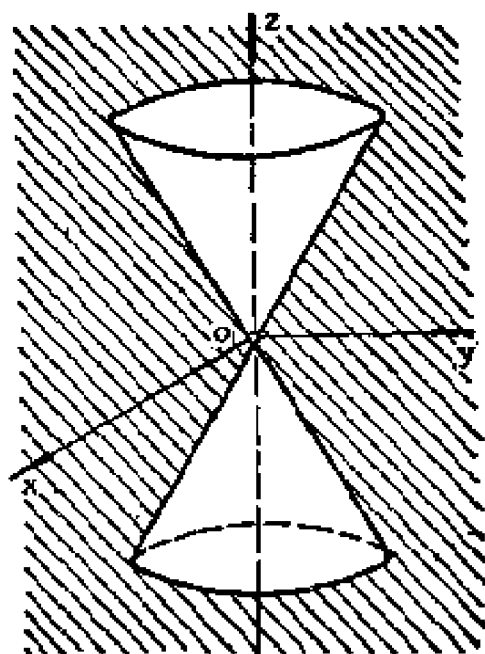


图 6.13

的点集，这是圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的外面，如图 6.13 阴影部分所示，包括边界在内，但要除去圆锥的顶点。

3149. $u = \ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式

$$xyz > 0$$

的点集，即

$$x > 0, y > 0, z > 0; \text{ 或 } x > 0, y < 0, z < 0;$$

$$x < 0, y < 0, z > 0; \text{ 或 } x < 0, y > 0, z < 0.$$

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面。由于图形为读者所熟知，故省略。以下有类似情况，不再说明。

3150. $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

解 存在域为满足不等式

$$-x^2 - y^2 + z^2 > 1$$

的点集。这是双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的内部，如图6·14阴影部分所示，不包括界面在内。

作出下列函数的等位线：

3151. $z = x + y$.

解 等位线为平行直线族

$$x + y = k,$$

其中 k 为一切实数，如图6·15所示。

3152. $z = x^2 + y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$(a \geq 0).$$

当 $a=0$ 时为原点；当 $a>0$ 时，等位线为以原点为圆心的同心圆族。

3153. $z = x^2 - y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2 - y^2 = k.$$

当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线： $y=x, y=-x$ 。

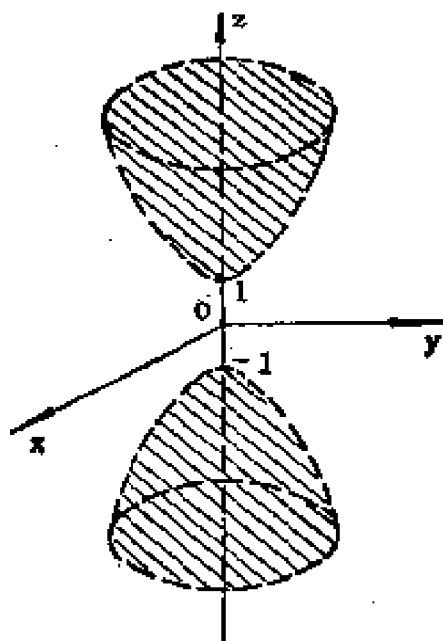


图 6·14

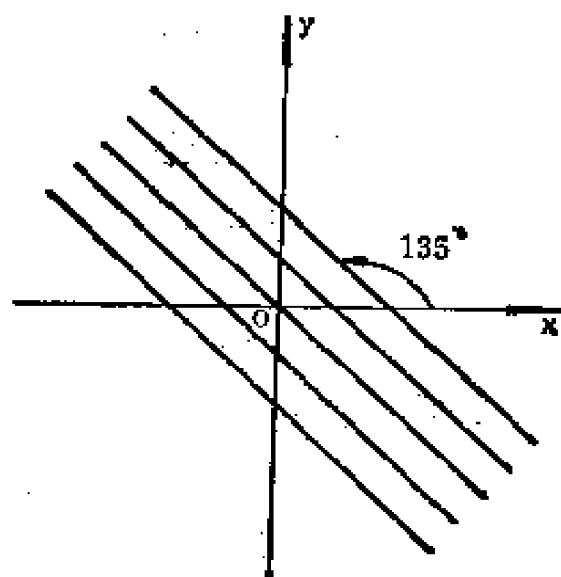


图 6·15

当 $k \neq 0$ 时为以 $y = \pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族, 其中当 $k > 0$ 时顶点为 $(-\sqrt{k}, 0), (\sqrt{k}, 0)$, 当 $k < 0$ 时顶点为 $(0, -\sqrt{-k}), (0, \sqrt{-k})$.

3154. $z = (x + y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x + y)^2 = a^2 \quad (a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 为直线 $x + y = 0$. 当 $a \neq 0$ 时为与直线 $x + y = 0$ 平行的且等距的直线 $x + y = \pm a$.

3155. $z = \frac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y = kx \quad (x \neq 0),$$

不包括 Oy 轴在内.

3156. $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2 + 2y^2 = a^2 \quad (a > 0).$$

长半轴为 a , 短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$, 焦点为 $(-a\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ 及 $(a\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$.

3157. $z = \sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy = a^2 \quad (a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 时为坐标轴 $x = 0$ 及 $y = 0$. 当 $a > 0$ 时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等

边双曲线族，顶点为
 $(-a, -a)$ 及 (a, a) 。

3158. $z = |x| + y$.

解 等位线为曲线族

$$|x| + y = k,$$

其中 k 为一切实数. 当

$x \geq 0$ 时为 $x + y = k$;

当 $x < 0$ 时为 $-x + y$

$= k$. 这是顶点在 Oy

轴上两支互相垂直的

射线所构成的折线

族, 如图 6.16 所示.

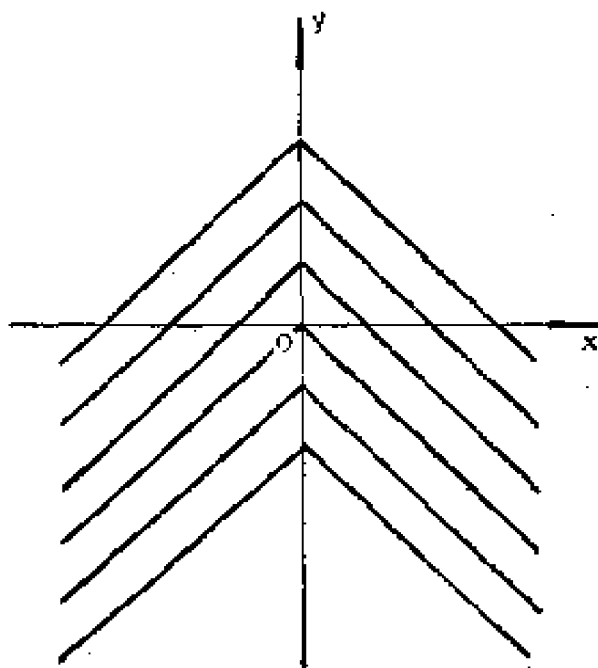


图 6.16

3159. $z = |x| + |y| - |x + y|$.

解 等位线为曲线族

$$|x| + |y| - |x + y| = a.$$

因为恒有 $|x| + |y| \geq |x + y|$, 所以 $a \geq 0$.

当 $a = 0$ 时, 由 $|x| + |y| = |x + y|$ 两边平方即得

$$xy \geq 0,$$

即为整个第一、第三象限, 包括两坐标轴在内.

当 $a > 0$ 时, $xy < 0$, 分下面四组求解:

(1) $x > 0, y < 0, x + y \geq 0, |x| + |y| - |x + y|$

$= a$, 解之得 $y = -\frac{a}{2}$;

(2) $x > 0, y < 0, x + y \leq 0, |x| + |y| - |x + y|$

$= a$, 解之得 $x = \frac{a}{2}$;

$$(3) \ x < 0, \ y > 0, \ x + y \geq 0, \ |x| + |y| - |x + y| = a, \text{解之得 } x = -\frac{a}{2};$$

$$(4) \ x < 0, \\ y > 0, \ x + y \leq 0, \\ |x| + |y| - |x + y| = a, \text{解之} \\ \text{得 } y = \frac{a}{2}.$$

这是顶点位于直线 $x + y = 0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6.17 所示。

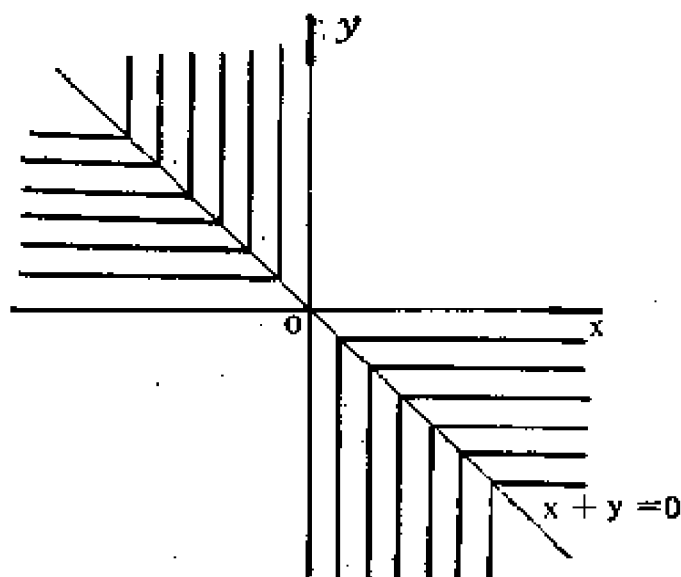


图 6.17

3160. $z = e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}}.$

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} = k \quad (x, y \text{ 不同时为零}),$$

其中 k 为异于零的一切实数。上式可变形为

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \quad (k \neq 0).$$

当 $k = 0$ 时，即得 $e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}} = 1$ ，从而等位线为 $x = 0$ 即 Oy 轴，但不包括原点。

当 $k \neq 0$ 时为 中心在 Ox 轴上且 经过坐标原点 (但不包括原点在 内) 的圆束, 圆心在 $(\frac{1}{k}, 0)$, 半径为 $|\frac{1}{k}|$,

如图 6.18 所示.

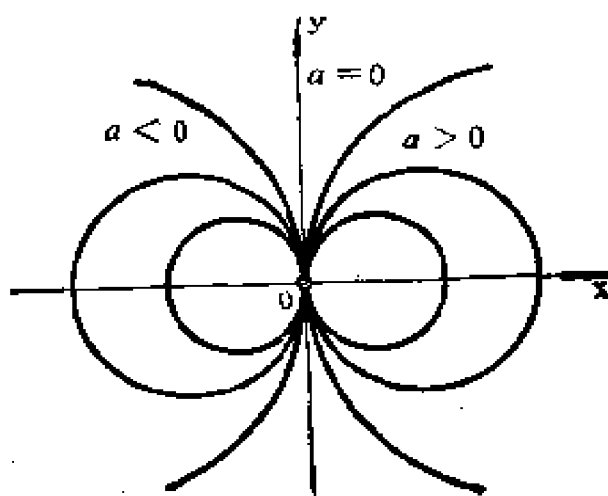


图 6.18

3161. $z = x^a \ (x > 0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^a = a \ (a > 0).$$

当 $a=1$ 时为直线 $x=1$ 及 Ox 轴的正向半射线, 但不包括原点在 内.

当 $0 < a < 1$ 与 $a > 1$ 时的图象如图 6.19 所示.

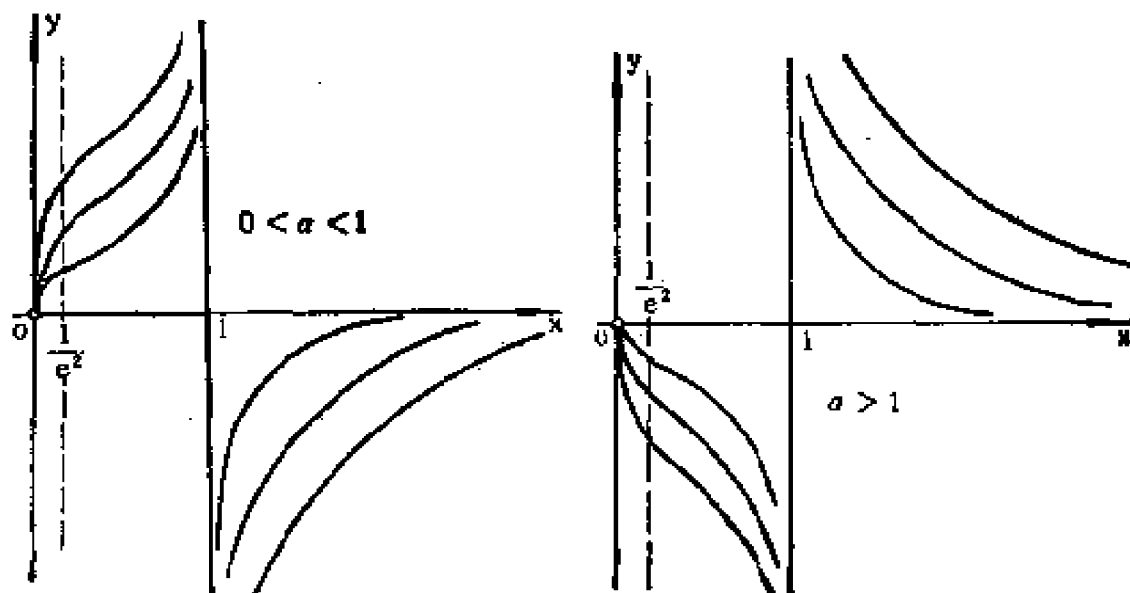


图 6.19

3162. $z = x^a e^{-x} \ (x > 0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^y e^{-x} = a \quad (a > 0),$$

即

$$y \ln x - x = \ln a.$$

当 $a = e^{-1}$ 时为直线 $x = 1$

和曲线 $y = \frac{x-1}{\ln x}$; 当 $0 < a$

$< \frac{1}{e}$, $\frac{1}{e} < a < 1$ 或 $a \geq 1$ 时

图象布满整个右半平面,
如图 6.20 所示, 不包括
 Oy 轴.

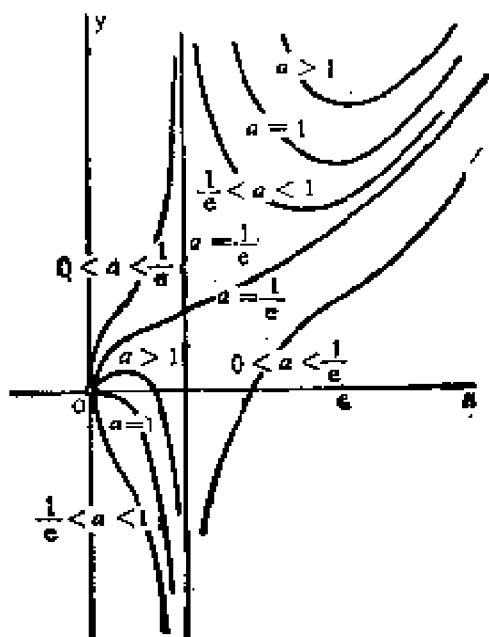


图 6.20

3163. $z = \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} \quad (a > 0).$

解 等位线为曲线族

$$\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = k^2 \quad (k > 0).$$

整理得

$$(1-k^2)x^2 - 2a(1+k^2)x + (1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2 = 0.$$

当 $k = 1$ 时得 $x = 0$, 即 Oy 轴. 当 $k \neq 1$ 时, 上述方程可变形为

$$\left[x - \frac{a(1+k^2)}{1-k^2} \right]^2 + y^2 = \left(\frac{2ak}{1-k^2} \right)^2,$$

这是以点 $\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}, 0 \right)$ 为圆心, 半径为 $\left| \frac{2ak}{1-k^2} \right|$

的圆族. 当 $0 < k < 1$ 时, 圆分布在右半平面; 当 $k > 1$ 时, 圆分布在左半平面.

如果注意到圆心与原点距离的平方为

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2} \right]^2 = \frac{a^2[(1-k^2)^2 + 4k^2]}{(1-k^2)^2}$$

$$= a^2 + \left(\frac{2ak}{1-k^2} \right)^2,$$

即等位线圆族与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 在交点处的半径互相垂直 (或圆心距与两圆的半径构成直角三角形), 便知等位线圆族与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 成正交. 如图 6.21 所示.

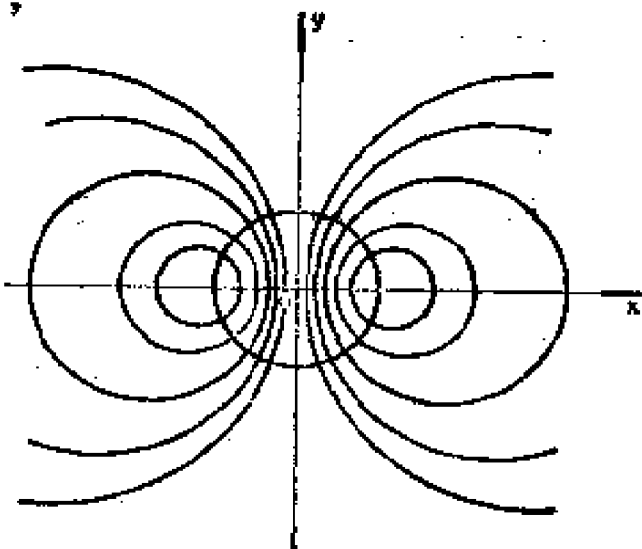


图 6.21

3164. $z = \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (a > 0).$

解 等位线为曲线族

$$\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = k,$$

其中 k 为一切实数, 但要除去点 $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$.
当 $k=0$ 时, $y=0$, 即为 Ox 轴, 但不包含上述两点;
当 $k \neq 0$ 时, 方程可变形为

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{k}\right)^2$$

$$= a^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right),$$

这是圆心在 Oy 轴上且经过点 $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 但不包括这两点在内的圆族, 如图 6.22 所示.

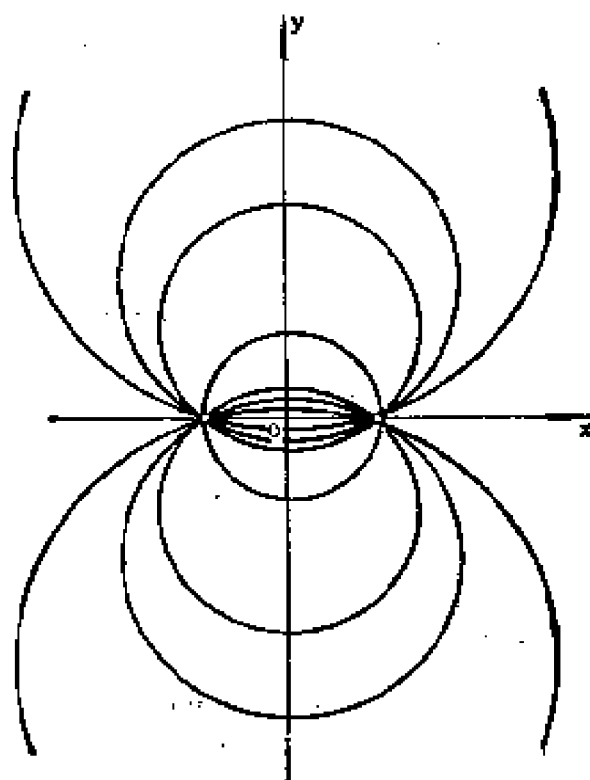


图 6.22

3165. $z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$.

解 若 $z = 0$, 则 $\sin x \cdot \sin y = 0$, 此即直线族

$$x = m\pi \text{ 和 } y = n\pi \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

若 $z = -1$ 或 $z = 1$, 则 $\sin x \sin y < 0$ 或 $\sin x \sin y > 0$, 此即正方形系

$$m\pi < x < (m+1)\pi, \quad n\pi < y < (n+1)\pi,$$

其中 $z = (-1)^{m+n}$.

如图 6.23 所示, $z = 0$ 时为图中网格直线; $z = 1$ 为图中带斜线的正方形; $z = -1$ 为图中空白正方形, 但后两者都不包括边界.

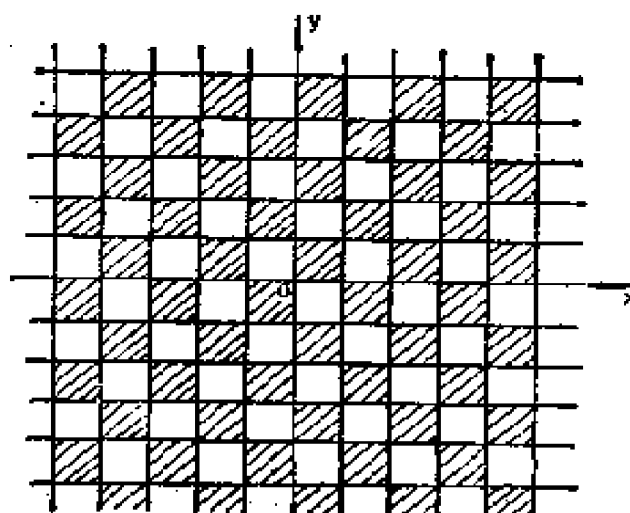


图 6.23

求下列函数的等位

面,

3166. $u = x + y + z.$

解 等位面为平行平面族

$$x + y + z = k,$$

其中 k 为一切实数.

3167. $u = x^2 + y^2 + z^2.$

解 等位面为中心在原点的同心球族

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (a \geqslant 0),$$

其中当 $a = 0$ 时即为原点.

3168. $u = x^2 + y^2 - z^2.$

解 当 $u = 0$ 时等位面为圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; 当 $u > 0$ 时等位面为单叶双曲面族 $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ ($a > 0$); 当 $u < 0$ 时等位面为双叶双曲面族 $-x^2 - y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$).

3169. $u = (x + y)^2 + z^2.$

解 等位面为曲面族

$$(x + y)^2 + z^2 = a^2 \quad (a \geqslant 0).$$

当 $a = 0$ 时为 $x + y = 0$ 和 $z = 0$. 当 $a > 0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x' = x \cos \frac{\pi}{4} + y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \\ y' = -x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y), \\ z' = z, \end{cases}$$

这是旋转变换. 在新坐标系中原等位面方程转化为

$$2x'^2 + z'^2 = a^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{z'^2}{a^2} = 1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面, 母线的方向平行于 y' 轴, 准线为 $y' = 0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{z'^2}{a^2} = 1,$$

长半轴为 a (z' 轴方向), 短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (x' 轴方向)。

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为

$$\begin{cases} x' = 0, \\ z' = 0, \end{cases}$$

而在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴。

3170. $u = \operatorname{sgn} \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

解 当 $u = 0$ 时等位面为球心在原点的同心球族

$$x^2 + y^2 + z^2 = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

当 $u = -1$ 或 $u = 1$ 时等位面为球层族

$$n\pi < x^2 + y^2 + z^2 < (n+1)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

其中 $u = (-1)^r$.

根据曲面的已知方程研究其性质:

3171. $z = f(y - ax)$.

解 引入参数 t, s , 将曲面方程 $z = f(y - ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x = t, \\ y = at + s, \\ z = f(s). \end{cases}$$

今固定 s , 得到以 t 为参数的直线方程, 其方向数为 $1, a, 0$. 因此, 曲面为以 $1, a, 0$ 为母线方向的一个柱面. 令 $t = 0$, 可得

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = s, \\ z = f(s), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = f(y), \end{cases}$$

这是 $x = 0$ 平面上的一条曲线, 也是柱面

$$z = f(y - ax)$$

的一条准线.

3172. $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

解 这是绕 Oz 轴旋转的旋转曲面的标准形式. 令 $y = 0$, 得曲线

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = f(x) \quad (x \geq 0), \end{cases}$$

它是旋转曲面的一条母线.

3173. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s , 将曲面方程 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=st (t \neq 0), \\ z=tf(s). \end{cases}$$

今固定 s , 这是以 t 为参数的一条过原点的直线. 因此, 所给曲面为顶点在原点的一锥面, 但不包括原点在内. 令 $t=1$, 得曲线

$$\begin{cases} x=1, \\ y=s, \\ z=f(s), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=1, \\ z=f(y), \end{cases}$$

这是 $x=1$ 平面上的一条曲线, 也是锥面 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一条准线.

3174⁺. $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s , 将曲面方程 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=st, \\ z=f(s). \end{cases}$$

* 题号右上角“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

今固定 s ，这是一条过点 $(0, 0, f(s))$ 的直线，方向数为 $1, s, 0$ 。因此，它与 Oz 轴垂直，与 Oxy 平面平行，且其方向与 s 有关。从而得知，曲面 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面。一般说来，它既不是柱面，又不是锥面。令 $t = 1$ ，得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x = 1, \\ z = f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz 轴垂直且相交的直线。这样的直线的全体，便构成由 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 所表示的直纹面。

3175. 作出函数

$$F(t) = f(\cos t, \sin t)$$

的图形，式中

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } y \geq x, \\ 0, & \text{若 } y < x. \end{cases}$$

解 按题设，当 $\sin t \geq \cos t$ ，即 $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq t \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时， $F(t) = 1$ ；而当

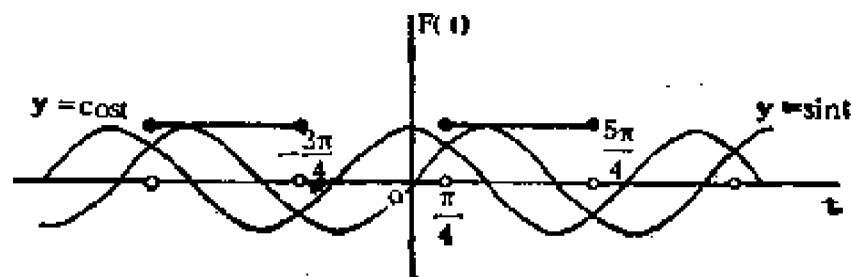


图 6.24

$\sin t < \cos t$, 即 $-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < t < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时, $F(t)$
 $= 0$, 如图 6.24 所示.

3176. 若

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

求 $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

解
$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

3177. 若

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0),$$

求 $f(x)$.

解 由 $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ 知 $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

3178. 设

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1).$$

若当 $y=1$ 时 $z=x$, 求函数 f 和 z .

解 因为当 $y=1$ 时 $z=x$, 所以

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x} - 1) &= x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} - 1)[(\sqrt{x} - 1) + 2], \end{aligned}$$

从而得

$$f(t) = t(t+2) = t^2 + 2t,$$

且

$$z = \sqrt{y} + x - 1 \quad (x > 0),$$

3179. 设

$$z = x + y + f(x - y),$$

若当 $y = 0$ 时, $z = x^2$, 求函数 f 及 z .

解 因为当 $y = 0$ 时 $z = x^2$, 所以

$$x^2 = x + f(x),$$

即

$$f(x) = x^2 - x,$$

且

$$z = x + y + (x - y)^2 - (x - y) = 2y + (x - y)^2.$$

3180. 若 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

解 因为

$$f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$= (x + y)^2 \frac{x - y}{x + y} = (x + y)^2 \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}},$$

所以

$$f(x, y) = x^2 \frac{1 - y}{1 + y}.$$

3181. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 1; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = -1,$$

从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

$$\text{证} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

由于两个单极限都存在，而累次极限不等，故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

3182. 证明：对于函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 0,$$

然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.\end{aligned}$$

如果按 $y = kx \rightarrow 0$ 的方向取极限, 则有

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 k^2}{x^4 k^2 + x^2 (1 - k)^2}.$$

特别地, 分别取 $k = 0$ 及 $k = 1$, 便得到不同的极限 0 及 1. 因此, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

3183. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 不存在, 然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

证 由不等式

$$0 \leq |(x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

但当 $x \neq \frac{1}{k\pi}$, $y \rightarrow 0$ 时, $(x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ 的极限不存在, 因此累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 不存在. 同法可证累次极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 也不存在.

3184. 求 $\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\}$ 及 $\lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\}$, 设:

$$(a) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$$

$$(b) f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, \quad a = +\infty, \quad b = +0;$$

$$(B) f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$$

$$(r) f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, \quad a = 0, \quad b = \infty;$$

$$(A) f(x, y) = \log_x(x + y), \quad a = 1, \quad b = 0.$$

$$\text{解 } (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right\} \\ = \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1;$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow +0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow +0} \frac{x^y}{1 + x^y} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow +0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{1 + x^y} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +0} 1 = 1;$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Gamma) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 0 \cdot \operatorname{tg} 1 \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}}{\frac{xy}{1 + xy}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + xy} \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \log_x (x + y) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x} = 1, \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} \right\} = \infty.$$

求下列极限:

$$3185. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解 由不等式 $x^2+y^2 \geq 2|xy|$ 得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \right| \leq \frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|} \leq \frac{|x+y|}{|xy|} \\ &\leq \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}, \end{aligned}$$

而 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) = 0$, 故有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

$$3186. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}.$$

解 由不等式

$$0 \leq \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leq \frac{x^2+y^2}{2x^2y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$$

及 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = 0$, 即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0.$$

$$3187. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}.$$

解 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \left(\frac{\sin xy}{xy} \cdot y \right) = a.$

$$3188. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left[\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} - 2 \cdot \frac{x}{e^x} \cdot \frac{y}{e^y} \right] = 0^* \end{aligned}$$

*) 利用 564 题的结果.

$$3189. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}.$$

解 由不等式

$$0 \leq \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}$$

及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} = 0$, 即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0.$$

$$3190. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

解 由不等式

$$|x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} |\ln(x^2 + y^2)|$$

及 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \ln(x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4} t^2 \ln t = 0$, 即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)} = e^0 = 1.$$

$$3191. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot \frac{x}{x+y}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} e^{[x \ln(1 + \frac{1}{x})] \cdot \frac{x}{x+y}} \\ &= e^{[\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})] \cdot [\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{x}{x+y}]} = e^{1 \cdot 1} = e. \end{aligned}$$

$$3192. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\ln(1 + e^0)}{1} = \ln 2.$$

3193⁺. 若 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, 问下列极限沿怎样的方向 φ 有确定的极限值存在:

$$(a) \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}}; \quad (b) \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \cdot \sin 2xy.$$

$$\text{解} \quad (a) \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{\cos \varphi}{\rho}}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } \cos \varphi < 0; \\ 1, & \text{当 } \cos \varphi = 0; \\ +\infty, & \text{当 } \cos \varphi > 0. \end{cases}$$

于是, 仅当 $\cos \varphi \leq 0$ 即 $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, 所给的极限

才有确定的值.

$$(6) e^{x^2-y^2} \sin 2xy = e^{\rho^2 \cos 2\varphi} \sin(\rho^2 \sin 2\varphi).$$

当 $\rho \rightarrow +\infty$ 时, $\sin(\rho^2 \sin 2\varphi)$ 有界, 除 $\varphi = \frac{k\pi}{2}$

($k=0, 1, 2, 3$) 外无极限, 且

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{\rho^2 \cos 2\varphi} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \cos 2\varphi < 0; \\ 1, & \text{当 } \cos 2\varphi = 0; \\ +\infty, & \text{当 } \cos 2\varphi > 0. \end{cases}$$

于是, 仅当 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$ 以及 $\varphi=0, \varphi$

$=\pi$ 时才有确定的极限.

求下列函数的不连续点:

$$3194. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

解 函数 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在点 $(0, 0)$ 无定义, 故原点

$(0, 0)$ 为此函数的不连续点. 以下各题类似情况, 不再说明.

$$3195. u = \frac{xy}{x+y}.$$

解 直线 $x+y=0$ 上的一切点均为 $u = \frac{xy}{x+y}$ 的不连续点.

$$3196. u = \frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

解 对于任意不等于零的实数 a , 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow -a}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow -a}} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \frac{1}{3a^2}.$$

于是, 对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O 外的一切点均为可移去的不连续点. 而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点.

$$3197. \quad u = \sin \frac{1}{xy}.$$

解 $xy=0$ 上的一切点即两坐标轴上的诸点均为 $u = \sin \frac{1}{xy}$ 的不连续点.

$$3198. \quad u = \frac{1}{\sin x \sin y}.$$

解 直线 $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$ ($m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 上的各点均为 $u = \frac{1}{\sin x \sin y}$ 的不连续点.

$$3199. \quad u = \ln(1-x^2-y^2).$$

解 圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点是 $u = \ln(1-x^2-y^2)$ 的不连续点.

$$3200. \quad u = \frac{1}{xyz}.$$

解 坐标面: $x=0$, $y=0$, $z=0$ 上各点均为 $u = \frac{1}{xyz}$ 的不连续点.

$$3201. \quad u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

解 点 (a, b, c) 为 $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ 的不连续点.

3202. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

分别对于每一个变数 x 或 y (当另一变数的值固定时) 是连续的, 但并非对这些变数的总体是连续的.

证 先固定 $y = a \neq 0$, 则得 x 的函数

$$g(x) = f(x, a) = \begin{cases} \frac{2ax}{x^2 + a^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

即 $g(x) = \frac{2ax}{x^2 + a^2}$ ($-\infty < x < +\infty$), 它是处处有定义的有理函数. 又当 $y = 0$ 时, $f(x, 0) \equiv 0$, 它显然是连续的. 于是, 当变数 y 固定时, 函数 $f(x, y)$ 对于变数 x 是连续的. 同理可证, 当变数 x 固定时, 函数 $f(x, y)$ 对于变数 y 是连续的.

作为二元函数, $f(x, y)$ 虽在除点 $(0, 0)$ 外的各点均连续, 但在点 $(0, 0)$ 不连续. 事实上, 当动点 $P(x, y)$ 沿射线 $y = kx$ 趋于原点时, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y=kx)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的 k 可得不同的极限值, 从而知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在. 因此, 函数 $f(x, y)$ 在原点不是二元连续

的.

3203. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

在点 $O(0, 0)$ 沿着过此点的每一射线

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty)$$

连续, 即

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0);$$

但此函数在点 $(0, 0)$ 并非连续的.

证 当 $\sin \alpha = 0$ 时, $\cos \alpha = 1$ 或 -1 . 于是, 当 $t \neq 0$

$$\text{时, } f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{t^2 \cdot 0}{t^4 + 0} = 0, \text{ 而 } f(0, 0) = 0,$$

$$\text{故有 } \lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0).$$

当 $\sin \alpha \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{0}{0 + \sin^2 \alpha} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0).$$

其次, 设动点 $P(x, y)$ 沿抛物线 $y = x^2$ 趋于原点, 得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y=x^2)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

因此, 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续.

3204. 证明: 函数

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}, \text{ 若 } y \neq 0 \text{ 及 } f(x, 0) = 0$$

的不连续点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0 \neq 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 显见是连续的, 即 $f(x, y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| \leq |x|$, 故知 $f(x, y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0 \neq 0$ 时, 对于点 $(x_0, 0)$, 由于极限

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} x_0 \sin \frac{1}{y}$$

不存在, 故知 $f(x, y)$ 在点 $(x_0, 0)$ 不连续.

这样, 我们证明了, 函数 $f(x, y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点. 显然, 原点是不连续点集合的一个聚点, 但它本身却不是 $f(x, y)$ 的不连续点. 因此, $f(x, y)$ 的不连续点的集合不是封闭的.

3205. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 在某域 G 内对变数 x 是连续的, 而关于 x 对变数 y 是一致连续的, 则此函数在所考虑的域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0, y_0) \in G$.

由于 $f(x, y)$ 关于 x 对变数 y 一致连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, 使当 $(x, y') \in G$, $(x, y'') \in G$ 且 $|y' - y''| < \delta_1$ 时, 就有

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于变数 x 是连续的, 故对上述的 ε , 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 就有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并使点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域全部包含在区域 G 内, 则当点 $P(x, y)$ 属于点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域, 即 $|PP_0| < \delta$ 时,

$$|x - x_0| < \delta \leq \delta_2, \quad |y - y_0| < \delta \leq \delta_1.$$

从而有

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| \\ &\quad + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此, $f(x, y)$ 在点 P_0 连续. 由 P_0 的任意性知, 函数 $f(x, y)$ 在 G 内是连续的.

3206. 证明: 若在某域 G 内函数 $f(x, y)$ 对变数 x 是连续的, 并满足对变数 y 的里普什兹条件, 即

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L|y' - y''|,$$

式中 $(x, y') \in G, (x, y'') \in G$ 而 L 为常数, 则此函数在已知域内是连续的.

证 由于 $f(x, y)$ 在 G 内满足对 y 的里普什兹条件, 故知 $f(x, y)$ 在 G 内关于 x 对变数 y 是一致连续的. 因此, 由 3205 题的结果, 即知 $f(x, y)$ 在 G 内是连续的.

3207. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 分别地对每一个变数 x 和 y 是

连续的并对于其中的一个是单调的, 则此函数对两个变数的总体是连续的 (尤格定理) .

证 不妨设 $f(x, y)$ 关于 x 是单调的.

设 (x_0, y_0) 为函数 $f(x, y)$ 的定义域 G 内的任一点. 由于 $f(x, y)$ 关于 x 连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ (假定 δ_1 足够小, 使我们所考虑的点都落在 G 内), 使当 $|x - x_0| \leq \delta_1$ 时, 就有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0 - \delta_1, y_0)$ 及 $(x_0 + \delta_1, y_0)$, 由于 $f(x, y)$ 关于 y 连续, 故对上述的 ε , 存在 $\delta_2 > 0$ (也要求 δ_2 足够小, 使所考虑的点落在 G 内), 使当 $|y - y_0| \leq \delta_2$ 时, 就有

$$|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$|f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|\Delta x| \leq \delta, |\Delta y| \leq \delta$ 时, 由于 $f(x, y)$ 关于 x 单调, 故有

$$\begin{aligned} & |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq \max\{|f(x_0 + \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)|, \\ & |f(x_0 - \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)|\}. \end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned} & |f(x_0 \pm \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq |f(x_0 \pm \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0 \pm \delta_1, y_0)| \\ & \quad + |f(x_0 \pm \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)|. \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故当 $|\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

即 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是连续的. 由点 (x_0, y_0) 的任意性知, $f(x, y)$ 是 G 内的二元连续函数.

3208. 设函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 上是连续的, 而函数叙列 $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $[a, A]$ 上一致收敛并满足条件 $b \leq \varphi_n(x) \leq B$. 证明: 函数叙列

$$F_n(x) = f[x, \varphi_n(x)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

也在 $[a, A]$ 上一致收敛.

证 由于 $b \leq \varphi_n(x) \leq B$, 故 $F_n(x) = f[x, \varphi_n(x)]$ 有意义.

由题设 $f(x, y)$ 在域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 上连续, 故在此域上一致连续, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使对于此域中的任意两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

特别地, 当 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时, 对于一切的 $x \in [a, A]$, 均有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

对于上述的 $\delta > 0$, 因为 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 故存在自然数 N , 使当 $m > N, n > N$ 时, 对于一切的 $x \in [a, A]$, 均有

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \delta.$$

于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使当 $m >$

N , $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in (a, A)$, 均有

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F_m(x)| &= \\ &= |f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi_m(x))| < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此, $F_n(x)$ 在 (a, A) 上一致收敛.

3209. 设: 1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $R(a < x < A; b < y < B)$ 内是连续的; 2) 函数 $\varphi(x)$ 于区间 (a, A) 内连续并有属于区间 (b, B) 内的值. 证明: 函数

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

于区间 (a, A) 内是连续的.

证 设点 (x_0, y_0) 为域 R 中的任一点. 由题设知函数 $f(x, y)$ 于域 R 中连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ ($(x, y) \in R$) 时, 就有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

再由 $\varphi(x)$ 在 (a, A) 中的连续性可知, 对上述的 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$ (可取 $\eta < \delta$), 使当 $|x - x_0| < \eta$ ($x \in (a, A)$) 时, 恒有

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |y - y_0| < \delta.$$

于是,

$$|f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0))| < \varepsilon,$$

即

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

因此, $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知函数 $F(x)$ 在 (a, A) 内是连续的.

3210. 设: 1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $R(a < x < A; b < y < B)$ 内是连续的; 2) 函数 $x = \varphi(u, v)$ 及 $y = \psi(u, v)$ 于域 R'

$(a' \leq u \leq A'; b' \leq v \leq B')$ 内是连续的并有分别属于区间 (a, A) 和 (b, B) 的值. 证明: 函数

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

于域 R' 内连续.

证 以下假定所取的 δ 或 η 足够小, 使点的 δ 或 η 邻域都在所给的域内.

设点 (x_0, y_0) 为域 R 中的任一点. 由于 $f(x, y)$ 在 R 内连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

再由 φ 及 ψ 的连续性知, 对于上述的 δ , 存在 $\eta > 0$, 使当 $|u - u_0| < \eta, |v - v_0| < \eta$ 时, 就有

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta,$$

其中 $x_0 = \varphi(u_0, v_0), y_0 = \psi(u_0, v_0)$.

于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使当 $|u - u_0| < \eta, |v - v_0| < \eta$ 时, 就有

$$|f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) - f(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))| < \varepsilon,$$

即

$$|F(u, v) - F(u_0, v_0)| < \varepsilon.$$

因此, $F(u, v)$ 在点 (u_0, v_0) 连续, 由 (u_0, v_0) 的任意性知, 函数 $F(u, v)$ 于域 R' 内连续.

§2. 偏导函数. 多变量函数的微分

1° 偏导函数 若所论及的多变数的函数的一切偏导函

数是连续的, 则微分的结果与微分的次序无关.

2° 多变量函数的微分 若自变数 x, y, z 的函数 $f(x, y, z)$ 的全增量可写为下形

$$\Delta f(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

式中 A, B, C 与 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 无关而 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, 则称函数 $f(x, y, z)$ 可微分, 而增量的线性主部 $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ 等于

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz, \quad (1)$$

(其中 $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$) 称为此函数的微分.

当变数 x, y, z 为其他自变数的可微分的函数时, 公式(1)仍有其意义.

若 x, y, z 为自变数, 则对于高阶的微分, 有符号公式

$$d^2 f(x, y, z) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(x, y, z).$$

3° 复合函数的导函数 若 $w = f(x, y, z)$, 其中 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$ 且函数 φ, ψ, χ 可微分, 则

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导函数时最好用下列符号公式:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial Q_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{及 } \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) w + \frac{\partial P_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\text{其中 } P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, R_1 = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\text{及 } R_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° 在已知方向上的导函数 若用方向余弦 $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 表 $Oxyz$ 空间内的方向 l , 且函数 $u = f(x, y, z)$ 可微分, 则沿方向 l 的导函数按下式来计算

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

在已知点函数增加最迅速的速度之大小与方向用向量——函数的梯度

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

来表示, 它的大小等于

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. 证明:

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)].$$

证 令 $\varphi(x) = f(x, b)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x, b)] &= \varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, b) - f(x, b)}{\Delta x} = f'_x(x, b). \end{aligned}$$

注 在求某一固定点的导数及微分时, 用本题的结果常可减少运算量. 在本节中, 我们就多次利用本题的结果来简化运算.

3212. 设:

$$f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x, 1)$.

解 由于 $f(x, 1) = x$, 故 $f'_x(x, 1) = 1$.

求下列函数的一阶和二阶偏导函数:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -16xy^{*}).$$

*) 以下各题不再写 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, 而仅写 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$,

因为当它们连续时是相等的, 并且在今后各题中均把

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 理解为 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}.$

3215. $u = \frac{x}{y^2}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3}.$

3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{2x \cdot x}{2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3}{2} y^2 \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}},$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} xy \cdot \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$

$$= \frac{x(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3217. $u = x \sin(x + y).$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x + y) + x \cos(x + y),$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(x + y),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos(x + y) + \cos(x + y) - x \sin(x + y) \\ &= 2\cos(x + y) - x \sin(x + y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x \sin(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(x + y) - x \sin(x + y).$$

3218. $u = \frac{\cos x^2}{y}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x \sin x^2}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2x \sin x^2}{y^2}.$$

3219. $u = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{2x}{y} \cdot 2 \sec^2 \frac{x^2}{y} \cdot \operatorname{tg} \frac{x^2}{y} \cdot \frac{2x}{y}$$

$$= \frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y} \sin \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4} \sec^2 \frac{x^2}{y} \sin \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y} \sin \frac{x^2}{y}$$

3220. $u = x^y.$

解 由 $u = x^y = e^{y \ln x}$ 即得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y x^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{y \ln x} \cdot \ln x = x^y \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x$$

$$= x^{y-1}(1+y \ln x) \quad (x > 0).$$

3221. $u = \ln(x + y^2).$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{x + y^2} - \frac{2y \cdot 2y}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}.$$

3222. $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3223. $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + y}{1 - xy}.$

解 由776题知

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y - \varepsilon \pi,$$

其中 $\varepsilon = 0, 1$ 或 -1 . 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

本题如不用776题的结果, 直接求导数也可获解. 例如,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)^2} \cdot \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$3224. \quad u = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)'_x \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|} \cdot \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad *) \end{aligned}$$

$$= \frac{|y|}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)',$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|y|} \left[- \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^{*})$$

$$= - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{|y|} = - \frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[- \frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)} \right]$$

$$= - \frac{x|y|(x^2 + y^2) - xy \left[\frac{|y|}{y}(x^2 + y^2) + 2y|y| \right]}{y^2(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{|y|}{y}(x^2 + y^2) - 2y|y|}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{sgn} y - y|y|}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^2 - y^2) \operatorname{sgn} y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (y \neq 0).$$

*) 利用3216题的结果.

$$3225. \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} \\ &= \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

利用对称性, 即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3226. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^x.$

解 $u = x^x y^{-x}.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z x^{z-1} y^{-z} = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y} \right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -z x^z y^{-z-1} = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y} \right)^z \ln \frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z(z-1) x^{z-2} y^{-z} = \frac{z(z-1)}{x^2} \left(\frac{x}{y} \right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-z)(-z-1) x^z y^{-z-2} = \frac{z(z+1)}{y^2} \left(\frac{x}{y} \right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y} \right)^z \ln^2 \frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{z}{x} u \right)'_y = \frac{z}{x} \left[-\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^z \right]$$

$$= -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{x}{y} \right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \left(-\frac{z}{y} u \right)'_x = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^z \ln \frac{x}{y} - \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^z$$

$$= -\frac{1+z \ln \frac{x}{y}}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \left(u \ln \frac{x}{y} \right)'_x = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y} \right)^z \ln \frac{x}{y} + \frac{1}{x} \left(\frac{x}{y} \right)^z$$

$$= \frac{1+z \ln \frac{x}{y}}{x} \left(\frac{x}{y} \right)^z \quad \left(\frac{x}{y} > 0 \right).$$

3227. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1} = \frac{yu}{xz},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x = \frac{u \ln x}{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x = -\frac{yu \ln x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{xyz \frac{\partial u}{\partial x} - yzu}{x^2 z^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2 z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\ln x}{z} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u \ln^2 x}{z^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -y \ln x \cdot \left[\frac{z^2 \frac{\partial u}{\partial z} - 2uz}{z^4} \right] \\ &= \frac{yu \ln x \cdot (2z + y \ln x)}{z^4}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{xz} \left(u + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{u(z + y \ln x)}{xz^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \ln x \cdot \left(\frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{z^2} \right)$$

$$= -\frac{u \ln x \cdot (z + y \ln x)}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = -\frac{y}{z^2} \left(\ln x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{x} \right) = -\frac{yu(z + y \ln x)}{xy^3}.$$

$$3228. \quad u = x^{y^z}.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1} = \frac{u y^z}{x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z y^{z-1} x^{y^z} \ln x = z u y^{z-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} y^z \ln x \cdot \ln y = u y^z \ln x \cdot \ln y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^z \left(-\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{u y^z (y^z - 1)}{x^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= z \ln x \cdot \left[y^{z-1} \frac{\partial u}{\partial y} + (z-1) y^{z-2} u \right] \\ &= u z y^{z-2} \ln x \cdot (z y^z \ln x + z - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \left(y^z \frac{\partial u}{\partial z} + u y^z \ln y \right) \ln x \cdot \ln y \\ &= u y^z \ln x \cdot \ln^2 y \cdot (1 + y^z \ln x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{x} \left(y^z \frac{\partial u}{\partial y} + u z y^{z-1} \right) \\ &= \frac{u z y^{z-1} (y^z \ln x + 1)}{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \left(y^{z-1} u + u z y^{z-1} \ln y + z y^{z-1} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \ln x \\ &= u y^{z-1} \ln x \cdot (1 + z \ln y \cdot (1 + y^z \ln x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= y^x \ln y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \ln x + \frac{u}{x} \right) \\ &= \frac{u y^x \ln y \cdot (y^x \ln x + 1)}{x} \quad (x > 0, y > 0).\end{aligned}$$

3229. 设 (a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; (b) $u = x^{y^2}$; (B) $u =$

$\arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$, 验证等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

证 (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2x - 6y,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2,$$

于是, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2} \ln x \quad (x > 0),$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1} + 2y^3 x^{y^2-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y^3 x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2-1},$$

于是, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$

(B) 当 $0 < x \leq y$ 时, 我们有

$$u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}} = \arccos \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}} + \frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是, 当 $0 < x \leq y$ 时, 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

$$\text{当 } y \leq x < 0 \text{ 时, } u = \arccos \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right] = -\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}} + \frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}(x+y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是, 当 $y \leq x < 0$ 时, 也有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

仔细观察可以看到, 在不同的区域上, 一阶偏导数相差一个符号, 但二阶混合偏导数却是相等的.

3230. 设 $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, 若 $x^2 + y^2 \neq 0$ 及 $f(0, 0) = 0$. 证明

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0}{x} = -y,$$

故 $f'_x(0, y) = -y$, 从而

$$f''_{yx}(0, 0) = \frac{d}{dy} \left[f'_x(0, y) \right] \Big|_{y=0} = -1$$

同法可求得 $f'_y(x, 0) = x$, 从而

$$f''_{yx}(0, 0) = \frac{d}{dx} \left[f'_y(x, 0) \right] \Big|_{x=0} = 1.$$

于是, $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

3231. 设 $u = f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数, 就下列各题验证关于齐次函数的尤拉定理:

(a) $u = (x - 2y + 3z)^2$; (b) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

(B) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$.

证 关于 n 次齐次函数的尤拉定理如下:

设 n 次齐次函数 $f(x, y, z)$ * 在域 A 中关于所有变量均有连续偏导函数, 则下述等式成立

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = nf(x, y, z).$$

(a) 由于 $(tx - 2ty + 3tz)^2 = t^2u$, 故 u 为二次齐次函数. 又因

* 为了书写的简便, 在这里我们仅限于讨论三个变量的情形.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - 2y + 3z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4(x - 2y + 3z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 6(x - 2y + 3z),$$

故得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = (x - 2y + 3z)(2x - 4y + 6z) = 2u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(6) 由于对任何的 $t > 0$,

$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2 + (tz)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = t^0 \cdot u,$$

故 u 为零次齐次函数. 又因

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (xy^2 + xz^2 - xy^2 - xz^2) = 0 \cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(B) 由于

$$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{n}{t}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{t}} = t^0 \cdot u \quad (t > 0),$$

故函数 u 为零次齐次函数. 又因

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{z} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{t}-1} = \frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{\frac{n}{t} \ln \frac{x}{y}}\right)' \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{t}} \cdot \left[\frac{1}{z} \ln \frac{x}{y} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y}\right]$$

$$= \frac{u}{z} \left(\ln \frac{x}{y} - 1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{t}} \ln \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{yu}{z^2} \ln \frac{x}{y},$$

故得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x \cdot \frac{yu}{xz} + y \cdot \frac{u}{z} \left(\ln \frac{x}{y} - 1\right)$$

$$- z \cdot \frac{yu}{z^2} \ln \frac{x}{y} = 0 \cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

3232. 证明: 若可微函数 $u = f(x, y, z)$ 满足方程式

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

证 任意固定域中一点 (x_0, y_0, z_0) , 考察下面的 t 的函数 ($t > 0$):

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^n},$$

它当 $t > 0$ 时有定义且是可微的. 应用复合函数的求导法则, 对 t 求导数即得

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{t^n} \left\{ x_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + y_0 f'_y(tx_0, \right. \\ &\quad \left. ty_0, tz_0) + z_0 f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \right\} \\ &\quad - \frac{n}{t^{n+1}} f(tx_0, ty_0, tz_0) \\ &= \frac{1}{t^{n+1}} \left\{ tx_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + ty_0 \right. \\ &\quad \cdot f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) + tz_0 f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \\ &\quad \left. - nf(tx_0, ty_0, tz_0) \right\}, \end{aligned}$$

由于 $tx_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + ty_0 f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) + tz_0$

$$\cdot f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) = nf(tx_0, ty_0, tz_0),$$

故

$$F'(t) = 0.$$

从而当 $t > 0$ 时, $F(t) = c$, 其中 c 为常数. 现在确定 c . 为此, 在定义 $F(t)$ 的等式中令 $t = 1$, 则得

$$c = f(x_0, y_0, z_0).$$

于是,

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^n} = f(x_0, y_0, z_0),$$

即

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^n f(x_0, y_0, z_0).$$

上式说明函数 $f(x, y, z)$ 为一个 n 次的齐次函数，这就是所要证明的。

3233. 证明：若 $f(x, y, z)$ 是可微分的 n 次齐次函数，则其偏导函数 $f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)$ 是 $(n-1)$ 次的齐次函数。

证 由等式

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

两端分别对 x, y, z 求偏导函数，则得

$$t f'_1(tx, ty, tz) = t^n f'_1(x, y, z),$$

$$t f'_2(tx, ty, tz) = t^n f'_2(x, y, z),$$

$$t f'_3(tx, ty, tz) = t^n f'_3(x, y, z),$$

其中 $f'_1(\cdot, \cdot, \cdot), f'_2(\cdot, \cdot, \cdot), f'_3(\cdot, \cdot, \cdot)$ 分别代表

$f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 对第一个，第二个，第三个变量的偏导数。

于是，

$$f'_1(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_1(x, y, z),$$

$$f'_2(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_2(x, y, z),$$

$$f_1'(tx, ty, tz) = t^{n-1} f_1'(x, y, z),$$

即偏导函数 $f_2'(x, y, z)$, $f_3'(x, y, z)$ 及 $f_1'(x, y, z)$

均为 $(n-1)$ 次的齐次函数,

3234. 设 $u = f(x, y, z)$ 是可微分两次的 n 次齐次函数. 证明

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

证 由3233题知: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 均为 $(n-1)$ 次齐次函数. 应用尤拉定理, 即得

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial x} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial y} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial z} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3)$$

将(1)式两端乘以 x , (2)式两端乘以 y , (3)式两端乘以 z , 然后相加, 即得

$$\begin{aligned} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u &= (n-1) \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + z \frac{\partial u}{\partial z}\right) = n(n-1)u, \end{aligned}$$

这就是所要证明的等式.

求下列函数的一阶和二阶微分(x, y, z 为自变数):

3235. $u = x^m y^n$.

解 $du = x^{m-1} y^{n-1} (m y dx + n x dy),$

$$\begin{aligned} d^2 u &= m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2 + 2mnx^{m-1}y^{n-1} dx dy \\ &\quad + n(n-1)x^m y^{n-2} dy^2 \\ &= x^{m-2}y^{n-2} [m(m-1)y^2 dx^2 + 2mnxy dx dy \\ &\quad + n(n-1)x^2 dy^2]. \end{aligned}$$

3236. $u = \frac{x}{y}$.

解 $du = \frac{y dx - x dy}{y^2},$

$$\begin{aligned} d^2 u &= \frac{y^2(dx dy - dy dx) - 2y dy(y dx - x dy)}{y^4} \\ &= -\frac{2}{y^3}(y dx - x dy) dy. \end{aligned}$$

3237. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

解 $du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

$$d^2 u = \frac{d(x dx + y dy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x dx + y dy)$$

$$\begin{aligned} &\cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{dx^2 + dy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{(x dx + y dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

$$3238. u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{解 } du = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2},$$

$$\begin{aligned} d^2 u &= \frac{d(x dx + y dy)}{x^2 + y^2} - \frac{2(x dx + y dy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{dx^2 + dy^2}{x^2 + y^2} - \frac{2(x dx + y dy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(y^2 - x^2)(dx^2 - dy^2) - 4xy dx dy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

$$3239. u = e^{xy}.$$

$$\text{解 } du = e^{xy}(y dx + x dy),$$

$$\begin{aligned} d^2 u &= e^{xy}[(y dx + x dy)^2 + 2 dx dy] \\ &= e^{xy}[y^2 dx^2 + 2(1 + xy) dx dy + x^2 dy^2]. \end{aligned}$$

$$3240. u = xy + yz + zx.$$

$$\text{解 } du = (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz,$$

$$d^2 u = 2(dx dy + dy dz + dz dx).$$

$$3241. u = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } du &= -\frac{2z}{(x^2 + y^2)^2}(x dx + y dy) + \frac{dz}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2) dz - 2z(x dx + y dy)}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 u &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} \left\{ (x^2 + y^2)^2 [2(x dx + y dy) dz \right. \\ &\quad \left. - 2(x dx + y dy) dz - 2z(dx^2 + dy^2)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4(x^2+y^2)(xdx+ydy)\{(x^2+y^2)dz \\
& -2z(xdx+ydy)\}\} \\
& = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \left\{ 2z[(3x^2-y^2)dx^2 + 8xydxdy \right. \\
& \left. + (3y^2-x^2)dy^2] - 4(x^2+y^2)(xdx+ydy)dz \right\}.
\end{aligned}$$

3242. 设 $f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, 求 $df(1, 1, 1)$ 及 $d^2f(1, 1, 1)$.

解 本题将采用分别先求一阶及二阶偏导函数, 然后再合成以求一阶及二阶微分的方法. 由于

$$f'_x(x, 1, 1) = 1, \quad f'_x(1, 1, 1) = 1,$$

$$f'_y(1, y, 1) = -\frac{1}{y^2}, \quad f'_y(1, 1, 1) = -1,$$

$$f'_z(1, 1, z) = 0, \quad f'_z(1, 1, 1) = 0,$$

故得

$$\begin{aligned}
df(1, 1, 1) &= f'_x(1, 1, 1)dx + f'_y(1, 1, 1)dy \\
&+ f'_z(1, 1, 1)dz = dx - dy.
\end{aligned}$$

又因

$$f''_x(x, 1, 1) = 1, \quad f''_{xx}(x, 1, 1) = 0, \quad f''_{xx}(1, 1, 1) = 0,$$

$$f'_x(1, y, 1) = \frac{1}{y}, \quad f''_{xy}(1, y, 1) = -\frac{1}{y^2},$$

$$f''_{xx}(1, 1, 1) = -1,$$

$$f'_x(1, 1, z) = \frac{1}{z}, \quad f'_{xz}(1, 1, z) = -\frac{1}{z^2},$$

$$f''_{xz}(1, 1, 1) = -1,$$

$$f'_y(1, y, 1) = -\frac{1}{y^2}, \quad f''_{yy}(1, y, 1) = \frac{2}{y^3},$$

$$f''_{yy}(1, 1, 1) = 2,$$

$$f'_y(1, 1, z) = -\frac{1}{z}, \quad f''_{yz}(1, 1, z) = \frac{1}{z^2},$$

$$f''_{yz}(1, 1, 1) = 1,$$

$$f'_z(1, 1, z) = 0, \quad f''_{xz}(1, 1, z) = 0, \quad f''_{xz}(1, 1, 1) = 0,$$

故得

$$\begin{aligned} d^2 f(1, 1, 1) &= f''_{xx}(1, 1, 1)dx^2 + f''_{yy}(1, 1, 1)dy^2 \\ &\quad + f''_{zz}(1, 1, 1)dz^2 + 2f''_{xy}(1, 1, 1)dx dy \\ &\quad + 2f''_{yz}(1, 1, 1)dy dz + 2f''_{xz}(1, 1, 1)dx dz \\ &= 2dy^2 - 2dx dy + 2dy dz - 2dx dz \\ &= 2(dy - dx)(dy + dz). \end{aligned}$$

3243. 证明: 若

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

则

$$d^2u \geq 0.$$

证 $du = \frac{xdx + ydy + zdz}{u},$

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{1}{u^2} [u(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (xdx \\ &+ ydy + zdz)du] \\ &= \frac{1}{u^3} [(xdy - ydx)^2 + (ydz - zd y)^2 \\ &+ (zdx - xdz)^2]. \end{aligned}$$

由于 $u > 0$ (在原点处 du 不存在), 故 $du \geq 0$.

3244. 假定 x, y 的绝对值甚小, 对下列各式推出近似公式:

(a) $(1+x)^m(1+y)^n$; (b) $\ln(1+x) \cdot \ln(1+y)$;

(c) $\arctg \frac{x+y}{1+xy}$.

解 (a) 设 $f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n$, 则

$$f'_x(x, 0) = m(1+x)^{m-1}, f'_x(0, 0) = m,$$

$$f'_y(0, y) = n(1+y)^{n-1}, f'_y(0, 0) = n.$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y \\ &= 1 + mx + ny, \end{aligned}$$

即有近似公式

$$(1+x)^m(1+y)^n \approx 1+mx+ny.$$

(6) 设 $f(x, y) = \ln(1+x) \cdot \ln(1+y)$, 则

$$f'_x(x, 0) = 0, f'_x(0, 0) = 0,$$

$$f'_y(0, y) = 0, f'_y(0, 0) = 0,$$

$$f''_{xx}(x, 0) = 0, f''_{xx}(0, 0) = 0,$$

$$f''_{yy}(0, y) = 0, f''_{yy}(0, 0) = 0,$$

$$f'_x(0, y) = \ln(1+y), f''_{xy}(0, y)$$

$$= \frac{1}{1+y}, f''_{xy}(0, 0) = 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y \\ &+ \frac{1}{2!} \left[f''_{xx}(0, 0)x^2 + 2f''_{xy}(0, 0)xy + f''_{yy}(0, 0)y^2 \right] \\ &= xy, \end{aligned}$$

即有近似公式

$$\ln(1+x) \cdot \ln(1+y) \approx xy.$$

本题如不用求偏导函数的方法, 也可直接获解:

$$\ln(1+x) \cdot \ln(1+y) = [x + o(x)] \cdot [y + o(y)]$$

$$\approx xy.$$

(B) 设 $f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1+xy}$, 则

$$f'_x(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'_x(0, 0) = 1,$$

$$f'_y(0, y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad f'_y(0, 0) = 1.$$

于是,

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y = x + y,$$

即有近似公式

$$\arctg \frac{x+y}{1+xy} \approx x+y.$$

3245. 用微分来代替函数的增量, 近似地计算:

(a) $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$; (b) $\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98} \sqrt[4]{1.05^3}}$;

(B) $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$; (r) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$;

(A) $0.97^{1.05}$.

解 (a) 设 $f(x, y, z) = (1+x)^m(1+y)^n(1+z)^l$, 则当 $|x|, |y|, |z|$ 甚小时, 有近似公式(参阅 3244(a))

$$f(x, y, z) \approx 1 + mx + ny + lz.$$

利用上式即得

$$1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3 = (1+0.002)$$

$$\cdot 2^2 \left(1 + \frac{0.003}{2}\right)^2 \cdot 3^3 \left(1 + \frac{0.004}{3}\right)^3$$

$$\approx 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \left(1 + 0.002 + 2 \cdot \frac{0.003}{2} + 3 \cdot \frac{0.004}{3} \right) \\ = 108.972;$$

$$(6) \frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98} \cdot \sqrt[4]{1.05^3}} = (1 + 0.03)^2 \\ \cdot (1 - 0.02)^{-\frac{1}{3}} (1 + 0.05)^{-\frac{1}{4}} \\ \approx 1 + 2 \cdot 0.03 + \left(-\frac{1}{3} \right) (-0.02) + \left(-\frac{1}{4} \right) \cdot 0.05 \\ \approx 1.054;$$

$$(B) \sqrt{1.02^3 + 1.97^3} = (1.97)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \left(\frac{1.02}{1.97} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}} \\ = 2^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{0.03}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \left(\frac{1.02}{1.97} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \approx 2^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{3}{2} \left(-\frac{0.03}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1.02}{1.97} \right)^3 \right] \\ \approx 2.95;$$

(r) 设 $f(x, y) = \sin x \operatorname{tg} y$, 则有近似公式

$$f(x, y) \approx \sin x_0 \operatorname{tg} y_0 + \cos x_0 \operatorname{tg} y_0 \cdot (x - x_0)$$

$$+ \frac{\sin x_0}{\cos^2 y_0} \cdot (y - y_0).$$

在本题中, 令 $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$, $x - x_0 = -\frac{\pi}{180}$,

$y - y_0 = \frac{\pi}{180}$, 即得

$$\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

$$\cdot \left(-\frac{\pi}{180} \right) + \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\approx 0.502;$$

(A) 设 $f(x, y) = x^y$, 由于

$$f'_x(1, 1) = \frac{d}{dx} f(x, 1) \Big|_{x=1} = 1,$$

$$f'_y(1, 1) = \frac{d}{dy} f(1, y) \Big|_{y=1} = 0,$$

于是, $x^y \approx x$. 所以, 我们有

$$0.97^{1.05} \approx 0.97.$$

3246. 设矩形的边 $x=6$ 米和 $y=8$ 米, 若第一个边增加 2 毫米, 而第二个边减少 5 毫米, 问矩形的对角线和面积变化多少?

解 面积 $A=xy$, 对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$. 于是,

$$\Delta A \approx ydx + xdy, \quad \Delta l \approx \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

以 $x=6000$, $y=8000$, $dx=2$, $dy=-5$ 代入上述二式, 即得

$$\Delta A \approx 8000 \cdot 2 + 6000 \cdot (-5) = -14000 \text{ (平方毫米)} = -140 \text{ (平方厘米)},$$

$$\Delta l \approx \frac{6000 \cdot 2 + 8000 \cdot (-5)}{\sqrt{6000^2 + 8000^2}} \approx -3 \text{ (毫米)},$$

即对角线减少约 3 毫米，面积减少约 140 平方厘米。

3247. 扇形的中心角 $\alpha = 60^\circ$ 增加 $\Delta \alpha = 1^\circ$ ，为了使扇形的面积仍然不变，则应当把扇形的半径 $R = 20$ 厘米减少若干？

解 扇形的面积 $A = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ ，于是，

$$\Delta A \approx dA = R \alpha dR + \frac{1}{2} R^2 d\alpha.$$

按题设，应有 $\Delta A = 0$ ，即

$$20 \cdot \frac{\pi}{3} dR + \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.$$

解之，得

$$dR \approx -\frac{1}{6} \text{ (厘米)} \approx -1.7 \text{ (毫米)},$$

即应当使半径减少约 1.7 毫米。

3248. 证明乘积的相对误差近似地等于乘数的相对误差的和。

证 设 $u = xy$ ，则 $du = xdy + ydx$ ，从而

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$$

取绝对值，得

$$\left| \frac{du}{u} \right| \leq \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right|,$$

上式各项均表示该量的相对误差，本题获证。

3249. 当测量圆柱的底半径 R 和高 H 时所得的结果如下：

$$R = 2.5 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}; H = 4.0 \text{ 米} \pm 0.2 \text{ 米},$$

则所计算出圆柱的体积可有怎样的绝对误差 Δ 和相对误差 δ ？

解 体积 $V = \pi R^2 H$. 于是，

$$\Delta V \approx dV = 2\pi R dR + \pi R^2 dH.$$

以 $R = 2.5$, $H = 4.0$, $dR = 0.1$, $dH = 0.2$ 代入上式，即得

$$\Delta V \approx 10.2 \text{ 立方米},$$

$$\delta V = \left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx 13\%.$$

3250. 三角形的边 $a = 200 \text{ 米} \pm 2 \text{ 米}$, $b = 300 \text{ 米} \pm 5 \text{ 米}$, 它们之间的角 $C = 60^\circ \pm 1^\circ$, 则所计算出三角形的第三边 c 可有怎样的绝对误差？

解 按余弦定律，有

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

微分之，即得

$$cdc = ada + bdb - b \cos C da - a \cos C db + ab \sin C dC.$$

$$\text{以 } a = 200, b = 300, c = \sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \cdot 200 \cdot 300 \cos 60^\circ},$$

$$C = \frac{\pi}{3}, da = 2, db = 5, dC = \frac{\pi}{180} \text{ 代入上式, 即得}$$

$$dc \approx 7.6 \text{ 米},$$

故第三边 c 之绝对误差约为 7.6 米。

3251. 证明：在点 $(0,0)$ 连续的函数

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

于点 $(0,0)$ 有两个偏导函数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ ，但在点 $(0,0)$ 并非可微分的。

说明导函数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域中的性质。

$$\text{解 } f'_x(0,0) = \left. \frac{d}{dx} [f(x,0)] \right|_{x=0} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \left. \frac{d}{dy} [f(0,y)] \right|_{y=0} = 0.$$

考察极限

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

当动点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，显然对不同的 k 有不同的极限值 $\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$ ，因此，上述极限不存在，即在点 $(0,0)$ ，

$$f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y$$

不能表成 $o(\rho)$ ，其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，故知 $\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 不可微分。

不难得到

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \\ \text{无意义}, & x = 0, y \neq 0. \end{cases}$$

因此, $f'_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的任何邻域中均有无意义之点及无界, $f'_y(x, y)$ 的性质类似.

3252. 证明: 函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ 若 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 及 } f(0, 0) = 0,$$

于点 $(0, 0)$ 的邻域中连续且有有界的偏导函数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$, 但此函数于点 $(0, 0)$ 不能微分.

证 函数 $f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \neq 0$ 的点显然是连续的. 由不等式

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \end{aligned}$$

知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域中连续.

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 由于

$$|f'_x(x, y)| \leq \frac{|y^3|}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} = 1,$$

故 $f'_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域内有界. 同法可以证明 $f'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域内有界.

由于 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, 且极限

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - x f'_x(0, 0) - y f'_y(0, 0)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

是不存在的, 因此可知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不可微分.

3253. 证明: 函数

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \text{ 若 } x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\text{和 } f(0, 0) = 0$$

于点 $(0, 0)$ 的邻域中有偏导函数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$, 这些偏导函数于点 $(0, 0)$ 是不连续的且在此点的任何邻域中是无界的; 然而此函数于点 $(0, 0)$ 可微分.

证 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f'_x(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 均存在, 且

$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

又因

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{y^2} = 0,$$

故知在点 $(0, 0)$ 内有偏导函数 $f'_x(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$.

考虑在点 $(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0)$ 的偏导函数 $f'_x(x, y)$:

$$\begin{aligned} f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right) &= \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi} \cos 2n\pi \\ &= -2\sqrt{2n\pi} \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

因此, $f'_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的任何邻域内无界, 由此

又知 $f'_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续. 同法可证 $f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的任何邻域中也无界, 从而 $f'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 也不连续.

最后,我们证明 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 可微分. 事实上, $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, 且

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - xf'_x(0, 0) - yf'_y(0, 0)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0, \end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + xf'_x(0, 0) + yf'_y(0, 0) \\ &\quad + o(\rho), \end{aligned}$$

即函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 可微分.

3254. 证明: 于某凸形的域 E 内有有界偏导函数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 的函数 $f(x, y)$ 于域 E 内一致连续.

证 由于 $f'_x(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 在 E 内有界, 故存在 $L > 0$, 使当 $(x, y) \in E$ 时, 恒有

$$|f'_x(x, y)| \leq \frac{L}{2},$$

及

$$|f'_y(x, y)| \leq \frac{L}{2}.$$

在 E 内取两点 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$.

(1) 如果以 $|P_1P_2|$ 为直径的圆(包括圆周在内)都属于 E (图 6·25), 则点 $P_3(x_1, y_2)$ 及线段

P_1P_3 、 P_2P_3 都在 E 内.

于是,

$$\begin{aligned} & |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq |f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| + |f(x_1, y_2) - f(x_2, y_2)| \\ & = |f'_y(x_1, \xi)| \cdot |y_1 - y_2| + |f'_x(\eta, y_2)| \cdot |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

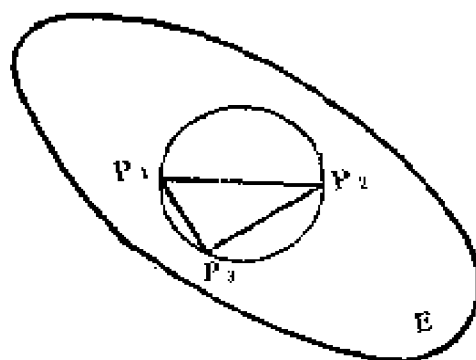


图 6.25

$$\cdot |y_1 - y_2| + |f'_x(\eta, y_2)| \cdot |x_1 - x_2|,$$

其中 ξ 介于 y_1, y_2 之间, η 介于 x_1, x_2 之间. 由偏导函数的有界性, 即得

$$\begin{aligned} & |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ & \leq \frac{L}{2} |y_1 - y_2| + \frac{L}{2} |x_1 - x_2| \\ & \leq \frac{L}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ & \quad + \frac{L}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ & = L \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \end{aligned}$$

或

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq L \cdot |P_1P_2|.$$

(2) 如图 6.26 所示, $P_1 \in E$, $P_2 \in E$, 但点 (x_1, y_2) 和 (x_2, y_1) 都不一定属于 E . 由于 P_1 和 P_2 均为 E 的内点, 故存在 $R > 0$, 使得分别以 P_1, P_2 为

圆心， R 为半径的圆（包括圆周在内）都在 E 内。作两圆的外公切线 Q_1Q_4 及 Q_2Q_3 ，则由切点均在 E 内知，矩形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 整个落在 E 内。

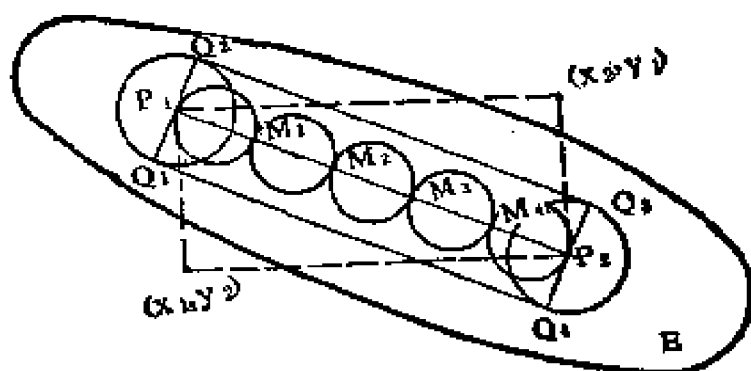


图 6.26

不难看出，在直线段 P_1P_2 上可取足够多的分点： $P_1=M_0, M_1, M_2, \dots, M_n=P_2$ ，使

$$|M_{k-1}M_k| < 2R \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

则以 $|M_{k-1}M_k|$ 为直径的圆全落在矩形内，从而也在 E 内。于是，

$$\begin{aligned} |f(P_1) - f(P_2)| &\leq \sum_{k=1}^n |f(M_k) - f(M_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^n L \cdot |M_k M_{k-1}| = L \cdot \sum_{k=1}^n |M_k M_{k-1}| \\ &= L \cdot |P_1 P_2|. \end{aligned}$$

这就证明了对 E 中任意两点，函数 $f(P)$ 满足里普什兹条件。

对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ ，则当 $P_1 \in E, P_2$

$\in E$ 且 $|P_1 P_2| < \delta$ 时, 就恒有

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq L \cdot |P_1 P_2| < L\delta = \varepsilon,$$

即函数 $f(x, y)$ 在 E 中一致连续.

注. 用 ∂E 表区域 E 的边界, \bar{E} 表 E 加上 ∂E 所成的闭区域. 在本题的假定下, 还可证明 $f(x, y)$ 可开拓为 \bar{E} 上的一致连续函数. 事实上, 对 ∂E 上任一点 P_0 . 由柯西收敛准则知当点 P 从 E 内趋于 P_0 时 $f(P)$ 的极限 A 存在 (根据 $f(P)$ 在 E 的一致连续性易知它满足柯西收敛准则). 我们规定 $f(P_0) = A$. 于是 $f(P)$ 在整个 \bar{E} 上有定义. 在不等式

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq L \cdot |P_1 P_2| \quad (P_1, P_2 \in E)$$

两端让 $P_1 \rightarrow P_0$ ($P_0 \in \partial E$) 取极限, 得

$$|f(P_0) - f(P_2)| \leq L \cdot |P_0 P_2| \\ (P_0 \in \partial E, P_2 \in E),$$

再让 $P_2 \rightarrow P'_0$ ($P'_0 \in \partial E$) 取极限, 得

$$|f(P_0) - f(P'_0)| \leq L \cdot |P_0 P'_0|$$

$$(P_0 \in \partial E, P'_0 \in \partial E).$$

由此可知, $f(P)$ 在 \bar{E} 上满足里普什兹条件, 从而 $f(P)$ 在 \bar{E} 上一致连续.

3255. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 对变数 x 是连续的 (对每一个固定的值 y) 且有对变数 y 的有界的导函数 $f'_y(x, y)$, 则此函数对变数 x 和 y 的总体是连续的.
- 证 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是所论的开域 E 中任一点. 取以 P_0

为中心的一个充分小的开球 G_0 ，使 G_0 完全含于 E 内。设在 G_0 内，有 $|f'_y(x, y)| \leq L$ 。于是，当 (x, y') ， (x, y'') 属于 G_0 时，有

$$\begin{aligned} |f(x, y') - f(x, y'')| &= |f'_y(x, \xi)| \cdot |y' - y''| \\ &\leq L|y' - y''|, \end{aligned}$$

其中 ξ 为介于 y' ， y'' 之间的一数，故 $f(x, y)$ 在 G_0 中满足里普什兹条件。因此，根据 3206 题结果知 $f(x, y)$ 在 G_0 中连续，特别是在 P_0 点连续。由 P_0 点的任意性，即知 $f(x, y)$ 在 E 内连续，证毕。

注：从证明过程中很明显，本题只要假定 $f'_y(x, y)$ 在 E 中每一点的某邻域中有界即可。

在下列问题中求所指出的偏导函数：

6. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ ， $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$ ， $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ ，若

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

解 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + 6x - 6y + 12x^2 - 8y^2,$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6 + 24x.$$

于是，

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -16.$$

3257. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, 若 $u = x \ln(xy)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \ln(xy) + 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x}.$

于是,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

3258. $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, 若 $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

解 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6 \sin y + y^3 \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$$= 6 \sin y - y^3 \cos x.$$

于是,

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = 6 \sin\left(y + \frac{3\pi}{2}\right) - 6 \cos x$$

$$= -6(\cos y + \cos x).$$

3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, 若 $u = \arctg \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

解 注意到

$$u = \arctg x + \arctg y + \arctg z + \varepsilon\pi \quad (\varepsilon = 0, \pm 1),$$

即得

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

3260. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, 若 $u = e^{xyz}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xyz}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = ze^{xyz} + xyz^2e^{xyz}.$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} &= e^{xyz} + xyz e^{xyz} + 2xyz e^{xyz} \\ &+ x^2 y^2 z^2 e^{xyz} = e^{xyz} (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2). \end{aligned}$$

3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$, 若 $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}.$

解 设 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, 则 $u = -\ln r.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x-\xi}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{r^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial \xi} = -\frac{2(y-\eta)}{r^4} + \frac{8(x-\xi)^2(y-\eta)}{r^6}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta} &= \frac{2}{r^4} - \frac{8(y-\eta)^2}{r^6} \\ &- \frac{8(x-\xi)^2}{r^6} + \frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8} \\ &= -\frac{6}{r^4} + \frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}. \end{aligned}$$

3262. $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$, 若 $u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q.$

解 $\frac{\partial^p u}{\partial x^p} = p! \cdot (y - y_0)^q.$

于是,

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} = p! \cdot q! \quad (p, q \text{ 均为自然数}).$$

3263. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, 若 $u = \frac{x+y}{x-y}.$

解 $u = 1 + \frac{2y}{x-y}, \quad \frac{\partial^m u}{\partial x^m} = (-1)^m m! \frac{2y}{(x-y)^{m+1}}.$ 利

用求高阶导数的莱布尼兹公式, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} &= (-1)^m \cdot 2(m!) \cdot \left\{ y \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}} \right] \right. \\ &\quad \left. + C_n^1 \frac{\partial}{\partial y}(y) \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}} \right] \right\} \\ &= 2 \cdot (-1)^m m! \cdot \left\{ \frac{(m+1)(m+2) \cdots (m+n)y}{(x-y)^{m+n+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(m+1)(m+2) \cdots (m+n-1)}{(x-y)^{m+n}} \right\} \\ &= \frac{2 \cdot (-1)^m (m+n-1)! (nx + my)}{(x-y)^{m+n+1}}. \end{aligned}$$

3264. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, 若 $u = (x^2 + y^2)e^{x+y}.$

解 $u = (x^2 + y^2)e^{x+y} = x^2 e^x \cdot e^y + y^2 e^y \cdot e^x = u_1 + u_2.$

显见 $\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m} = e^x \cdot y^2 e^y$, 利用求高阶导数的莱布尼兹公

式，即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n} &= \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}\right) = \frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^x y^2 e^y) \\ &= e^x \frac{\partial^n}{\partial y^n}(y^2 e^y) = e^x \left\{ y^2 \frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^y) \right. \\ &\quad + C_n^1 \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(e^y) \\ &\quad \left. + C_n^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2) \frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}(e^y) \right\} \\ &= e^{x+y} \{ y^2 + 2ny + n(n-1) \}.\end{aligned}$$

同法可求得

$$\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n} = e^{x+y} \{ x^2 + 2mx + m(m-1) \}.$$

于是，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n} &= \frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n} + \frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n} \\ &= e^{x+y} \{ x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + m(m-1) + n(n-1) \}.\end{aligned}$$

3265⁺. $\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$, 若 $u = xye^x \cdot ze^y \cdot ze^z$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r} &= \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}(xe^x \cdot ye^y \cdot ze^z) \\ &= \frac{\partial^p}{\partial x^p}(xe^x) \cdot \frac{\partial^q}{\partial y^q}(ye^y) \cdot \frac{\partial^r}{\partial z^r}(ze^z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^x(x+p) \cdot e^y(y+q) \cdot e^z(z+r) \\
&= e^{x+y+z}(x+p)(y+q)(z+r).
\end{aligned}$$

3266. 若 $f(x, y) = e^x \sin y$, 求 $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0)$.

$$\text{解} \quad f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0) = e^x \sin\left(y + \frac{n\pi}{2}\right) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

3267. 证明: 若

$$u = f(xyz),$$

则

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(t),$$

式中 $t = xyz$, 并求函数 F .

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = yz f'(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yz f''(t) \cdot xz + z f'(t).$$

于是,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} &= x^2 y^2 z^2 f'''(t) + 2xyz f''(t) \\
&\quad + f'(t) + xyz f''(t) \\
&= x^2 y^2 z^2 f'''(t) + 3xyz f''(t) + f'(t) \\
&= t^2 f'''(t) + 3t f''(t) + f'(t) = F(t).
\end{aligned}$$

3268. 设 $u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$, 求 d^4u .

导函数 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ 和 $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$

等于甚么?

$$\text{解 } d^4 u = 24 dx^4 - 2C_1^1 d^3(x^3) dy$$

$$- 2C_1^1 dx d^3(y^3) + 24 dy^4$$

$$= 24(dx^4 - 2dx^3 dy - 2dx dy^3 + dy^4).$$

由 $d^4 u = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u$, 得

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = -12, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} = -12, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24.$$

在下列各题中求所指出的阶的全微分:

$$3269. d^3 u, \text{ 若 } u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y).$$

$$\text{解 } d^3 u = 6(dx^3 + dy^3 - 3dx^2 dy + 3dx dy^2).$$

$$3270. d^3 u, \text{ 若 } u = \sin(x^2 + y^2).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } du &= 2x \cos(x^2 + y^2) dx + 2y \cos(x^2 + y^2) dy \\ &= 2(x dx + y dy) \cos(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 u &= -4 \sin(x^2 + y^2) \cdot (x dx + y dy)^2 \\ &\quad + 2 \cos(x^2 + y^2) \cdot (dx^2 + dy^2). \end{aligned}$$

于是,

$$d^3 u = -8 \cos(x^2 + y^2) \cdot (x dx + y dy)^3$$

$$\begin{aligned}
& -8\sin(x^2+y^2) \cdot (xdx+ydy) \cdot (dx^2+dy^2) \\
& -4\sin(x^2+y^2) \cdot (xdx+ydy) \cdot (dx^2+dy^2) \\
& = -8(xdx+ydy)^3 \cos(x^2+y^2) \\
& -12(xdx+ydy)(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

3271. $d^{10}u$, 若 $u = \ln(x+y)$.

解 $du = \frac{dx+dy}{x+y}$. 于是,

$$d^{10}u = -\frac{9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}.$$

3272. d^6u , 若 $u = \cos x \operatorname{ch} y$.

解 $d^6u = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^6 u$

$$\begin{aligned}
& = -\cos x \operatorname{ch} y dx^6 - 6\sin x \operatorname{sh} y dx^5 dy \\
& + 15\cos x \operatorname{ch} y dx^4 dy^2 \\
& + 20\sin x \operatorname{sh} y dx^3 dy^3 - 15\cos x \operatorname{ch} y dx^2 dy^4 \\
& - 6\sin x \operatorname{sh} y dx dy^5 + \cos x \operatorname{ch} y dy^6 \\
& = -(dx^6 - 15dx^4 dy^2 + 15dx^2 dy^4 \\
& - dy^6) \cos x \operatorname{ch} y - 2dx dy (3dx^4 \\
& - 10dx^2 dy^2 + 3dy^4) \sin x \operatorname{sh} y.
\end{aligned}$$

3273. d^3u , 若 $u = xyz$.

解 注意到 $d^2x = d^2y = d^2z = 0$, 即得

$$\begin{aligned}
d^3u &= d^3(xyz) = C_3^1 dx d^2(yz) = 3dx \cdot (C_2^1 dy dz) \\
&= 6dx dy dz.
\end{aligned}$$

3274. d^4u , 若 $u = \ln(x^x y^y z^z)$.

解 由于 $u = x \ln x + y \ln y + z \ln z$, 故

$$\begin{aligned} d^4 u &= (x \ln x)^{(4)} dx^4 + (y \ln y)^{(4)} dy^4 \\ &\quad + (z \ln z)^{(4)} dz^4 \\ &= 2 \left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3} \right). \end{aligned}$$

3275. $d^n u$, 若 $u = e^{ax+by}$.

解 注意到 $d^2(ax+by) = 0$, 即得

$$\begin{aligned} d^n u &= d^n(e^{ax+by}) = e^{ax+by} [d(ax+by)]^n \\ &= e^{ax+by} (adx + bdy)^n. \end{aligned}$$

3276. $d^n u$, 若 $u = X(x)Y(y)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } d^n u &= \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} X(x) \cdot d^k Y(y) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k X^{(n-k)}(x) Y^{(k)}(y) dx^{n-k} dy^k, \end{aligned}$$

3277. $d^n u$, 若 $u = f(x+y+z)$.

解 注意到 $d^2(x+y+z) = 0$, 即得

$$d^n u = f^{(n)}(x+y+z) \cdot (dx + dy + dz)^n.$$

3278. $d^n u$, 若 $u = e^{ax+by+cz}$.

解 注意到 $d^2(ax+by+cz) = 0$, 即得

$$d^n u = e^{ax+by+cz} (adx + bdy + cdz)^n.$$

3279. $P_n(x, y, z)$ 为 n 次齐次多项式. 证明

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

证 $P_n(x, y, z)$ 可表示为形如

$$Ax^p y^q z^r$$

的单项式之和, 其中 A 为常数, p, q, r 为非负整数,

且 $p+q+r=n$.

由于微分运算对加法及乘以常数是线性的（可交换的），因此要证

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz),$$

只要证明

$$d^n(x^p y^q z^r) = n! dx^p dy^q dz^r$$

就可以了.事实上,

$$\begin{aligned} d^n(x^p y^q z^r) &= C_{n+q}^{p+q} d^{p+q}(x^p y^q) \cdot d^r(z^r) \\ &= \frac{n!}{r!(p+q)!} \{C_{p+q}^{p+q} d^p(x^p) d^q(y^q) \cdot d^r(z^r)\} \\ &= \frac{n!}{r!(p+q)!} \cdot \frac{(p+q)!}{p!q!} \cdot p!q!r! dx^p dy^q dz^r \\ &= n! dx^p dy^q dz^r. \end{aligned}$$

3280. 设:

$$Au = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

求 Au 和 $A^2 u = A(Au)$, 若

$$(a) \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad (b) \quad u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

解 (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$ 于

是,

$$Au = \frac{x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2} = -u,$$

$$A^2 u = A(Au) = A(-u) = -Au = u.$$

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad \text{于是,}$$

$$\Delta u = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0.$$

3281. 设:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

求 Δu , 若

$$(a) \quad u = \sin x \operatorname{ch} y; \quad (6) \quad u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

解 (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x \operatorname{ch} y.$ 于是,

$$\Delta u = -\sin x \operatorname{ch} y + \sin x \operatorname{ch} y = 0.$$

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{由对称}$$

性知 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$ 于是,

$$\Delta u = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

3282. 设:

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

及

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$, 若

(a) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$;

(6) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

解 (a) $\Delta_1 u = 9[(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2],$
 $\Delta_2 u = 6(x + y + z).$

(6) 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $u = \frac{1}{r}.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

由对称性即知

$$\Delta_1 u = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6} = \frac{1}{r^4} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\Delta_2 u = \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right) = 0.$$

求下列复合函数的一阶和二阶导函数:

3283. $u = f(x^2 + y^2 + z^2).$

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$+ 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy f''(x^2 + y^2 + z^2).$$

由对称性即知

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2zf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$+ 4y^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$+ 4z^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 4yz f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 4xz f''(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$3284. \quad u = f\left(x, \frac{x}{y}\right).$$

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''_{11}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{2}{y}f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right) \\ &\quad + \frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right) \\ &\quad - \frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right)^{*).} \end{aligned}$$

*) $f'_1, f'_2, f''_{11}, f''_{12}, f''_{22}$ 均系按其下标的次序分别对第一、第二个中间变量求导函数。以下各题均同，不再说明。

$$3285. u = f(x, xy, xyz).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} &= f'_1(x, xy, xyz) + yf'_2(x, xy, xyz) \\ &\quad + yzf'_3(x, xy, xyz). \end{aligned}$$

将 $f'_1(x, xy, xyz), f'_2(x, xy, xyz), f'_3(x, xy, xyz)$

简记为 f'_1, f'_2, f'_3 , 以后不再说明. 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + y f'_2 + y z f'_3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x f'_2 + x z f'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x y f'_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''_{11} + y f''_{12} + y z f''_{13} + y (f''_{21} + y f''_{22} \\ &\quad + y z f''_{23}) + y z (f''_{31} + y f''_{32} + y z f''_{33}). \end{aligned}$$

由于 $f''_{12} = f''_{21}$, $f''_{13} = f''_{31}$, $f''_{23} = f''_{32}$ (以下各题均同), 故

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''_{11} + y^2 f''_{22} + y^2 z^2 f''_{33} + 2 y f''_{12} \\ &\quad + 2 y z f''_{13} + 2 y^2 z f''_{23}. \end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2 f''_{22} + x^2 z f''_{23} + x^2 z f''_{32} + x^2 z^2 f''_{33} \\ &= x^2 f''_{22} + 2 x^2 z f''_{23} + x^2 z^2 f''_{33}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x f''_{12} + x z f''_{13} + f'_2 + x y f''_{22} + x y z f''_{23}$$

$$+ z f'_3 + x y z f''_{32} + x y z^2 f''_{33}$$

$$= x y f''_{22} + x y z^2 f''_{33} + x f''_{12} + x z f'_{13}$$

$$+ 2 x y z f''_{23} + f'_2 + z f'_3.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = x y f''_{13} + x y^2 f''_{23} + x y^2 z f''_{33} + y f'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2 y f''_{23} + x^2 y z f''_{33} + x f'_3.$$

3286. 设 $u = f(x+y, xy)$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + y f'_2$. 于是,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{11} + x f''_{12} + f'_2 + y f''_{21} + x y f''_{22}$$

$$= f''_{11} + (x+y) f''_{12} + x y f''_{22} + f'_2.$$

3287. 设 $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$, 求 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + 2xf'_2,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + 2xf''_{12} + 2f'_2 + 2xf''_{21} + 4x^2 f''_{22}$$

$$= f''_{11} + 4xf''_{12} + 4x^2 f''_{22} + 2f'_2.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''_{11} + 4yf''_{12} + 4y^2 f''_{22} + 2f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''_{11} + 4zf''_{12} + 4z^2 f''_{22} + 2f'_2.$$

于是,

$$\begin{aligned} \Delta u &= 3f''_{11} + 4(x+y+z)f''_{12} \\ &\quad + 4(x^2+y^2+z^2)f''_{22} + 6f'_2. \end{aligned}$$

求下列复合函数的一阶和二阶全微分 (x, y 及 z 为自变量):

3288. $u=f(t)$, 其中 $t=x+y$.

解 $du=f'(t)(dx+dy), d^2u=f''(t)(dx+dy)^2.$

3289. $u=f(t)$, 其中 $t=\frac{y}{x}.$

解 $du=f'(t) \cdot \frac{xdy-ydx}{x^2},$

$$d^2u = f''(t) \cdot \frac{(xdy - ydx)^2}{x^4} \\ - 2f'(t) \cdot \frac{dx(xdy - ydx)}{x^3}.$$

3290. $u = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$

解 $du = f' \cdot \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

$$d^2u = f'' \cdot \frac{(xdx + ydy)^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{(ydx - xdy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3291. $u = f(t)$, 其中 $t = xyz$.

解 $du = f'(t)(yzdx + xzdy + xydz),$
 $d^2u = f''(t)(yzdx + xzdy + xydz)^2$
 $+ 2f'(t)(zdx dy + ydx dz + xdy dz).$

3292. $u = f(x^2 + y^2 + z^2).$

解 $du = 2f' \cdot (xdx + ydy + zdz),$
 $d^2u = 4f'' \cdot (xdx + ydy + zdz)^2$
 $+ 2f' \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2).$

3293. $u = f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi = ax$, $\eta = by$.

解 $du = af'_1 dx + bf'_2 dy,$

$$d^2u = a^2 f''_{11} dx^2 + 2ab f''_{12} dx dy + b^2 f''_{22} dy^2.$$

3294. $u = f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

解 $du = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot (dx - dy),$

$$d^2u = f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2f''_{12} \cdot (dx^2 - dy^2) + f''_{22} \cdot (dx - dy)^2.$$

3295. $u = f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

解 $du = f'_1 \cdot (ydx + xdy) + f'_2 \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2},$

$$\begin{aligned} d^2u &= f''_{11} \cdot (ydx + xdy)^2 + f''_{22} \cdot \frac{(ydx - xdy)^2}{y^4} \\ &\quad + 2f''_{12} \cdot \frac{y^2dx^2 - x^2dy^2}{y^2} \\ &\quad + 2f'_1 \cdot dx dy - 2f'_2 \cdot \frac{(ydx - xdy)dy}{y^3}. \end{aligned}$$

3296. $u = f(x + y, z).$

解 $du = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot dz,$

$$\begin{aligned} d^2u &= f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2f''_{12} \cdot (dx \\ &\quad + dy)dz + f''_{22}dz^2. \end{aligned}$$

3297. $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$

解 $du = f'_1 \cdot (dx + dy + dz) + 2f'_2 \cdot (xdx$

$$+ ydy + zdz),$$

$$\begin{aligned} d^2u = & f''_{11} \cdot (dx + dy + dz)^2 + 4f''_{12} \cdot (dx \\ & + dy + dz)(xdx + ydy + zdz) \\ & + 4f''_{22} \cdot (xdx + ydy + zdz)^2 + 2f'_2 \cdot (dx^2 \\ & + dy^2 + dz^2). \end{aligned}$$

3298. $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$

解 $du = f'_1 \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} + f'_2 \cdot \frac{zdy - ydz}{z^2},$

$$d^2u = f''_{11} \cdot \frac{(ydx - xdy)^2}{y^4} + f''_{22} \cdot \frac{(zdy - ydz)^2}{z^4}$$

$$+ 2f''_{12} \cdot \frac{(ydx - xdy)(zdy - ydz)}{y^2 z^2}$$

$$- 2f'_1 \cdot \frac{(ydx - xdy)dy}{y^3} - 2f'_2 \cdot \frac{(zdy - ydz)dz}{z^3}.$$

3299. $u = f(x, y, z)$, 其中 $x = t, y = t^2, z = t^3$.

解 $du = (f'_1 + 2tf'_2 + 3t^2f'_3)dt,$

$$d^2u = (f''_{11} + 4t^2f''_{22} + 9t^4f''_{33} + 4tf''_{12} + 6t^2f''_{13}$$

$$+ 12t^3f''_{23} + 2f'_2 + 6tf'_3)dt^2.$$

3300. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz$.

解 $du = af'_1 \cdot dx + bf'_2 \cdot dy + cf'_3 \cdot dz,$

$$d^2u = a^2 f''_{11} \cdot dx^2 + b^2 f''_{22} \cdot dy^2 + c^2 f''_{33} \cdot dz^2$$

$$+ 2abf''_{12} \cdot dx dy + 2acf''_{13} \cdot dx dz + 2bcf''_{23} \cdot dy dz.$$

3301. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$,
 $\zeta = 2xy$.

解 $du = 2f'_1 \cdot (xdx + ydy) + 2f'_2 \cdot (xdx - ydy)$

$$+ 2f'_3 \cdot (ydx + xdy),$$

$$d^2u = 4f''_{11} \cdot (xdx + ydy)^2 + 4f''_{22} \cdot (xdx - ydy)^2$$

$$+ 4f''_{33} \cdot (ydx + xdy)^2 + 8f''_{12} \cdot (x^2 dx^2 - y^2 dy^2)$$

$$+ 8f''_{13} \cdot (xdx + ydy)(ydx + xdy)$$

$$+ 8f''_{23} \cdot (xdx - ydy)(ydx + xdy) + 2f'_1 \cdot (dx^2$$

$$+ dy^2) + 2f'_2 \cdot (dx^2 - dy^2) + 4f'_3 \cdot dx dy.$$

求 $d^n u$, 设:

3302. $u = f(ax + by + cz).$

解 $d^n u = f^{(n)}(ax + by + cz) \cdot (adx + bdy + cdz)^n.$

3303. $u = f(ax, by, cz).$

解 $d^*u = \left(a dx \frac{\partial}{\partial \xi} + b dy \frac{\partial}{\partial \eta} + c dz \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^* f(\xi, \eta, \zeta),$

其中 $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz.$

3304. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi = a_1x + b_1y + c_1z,$
 $\eta = a_2x + b_2y + c_2z, \zeta = a_3x + b_3y + c_3z.$

解 $d^*u = \left[(a_1dx + b_1dy + c_1dz) \frac{\partial}{\partial \xi} + (a_2dx + b_2dy + c_2dz) \frac{\partial}{\partial \eta} + (a_3dx + b_3dy + c_3dz) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right]^* f(\xi, \eta, \zeta)$
 $= \left[dx \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dy \left(b_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + b_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dz \left(c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + c_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right]^* f(\xi, \eta, \zeta).$

3305. 设 $u = f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 和 f 为可微分两次的函数. 证明:

$$\Delta u = F(r),$$

其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, Δ 为拉普拉斯算子,

并求函数 F .

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \cdot \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - y^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) \cdot \frac{z^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

于是,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r)$$

$$+ 2f'(r) \cdot \frac{1}{r} = F(r).$$

3306. 设 u 和 v 为可微分两次的函数而 Δ 为拉普拉斯算子 (参阅 3305 题). 证明:

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\Delta(u, v),$$

$$\text{其中 } \Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

$$\text{证 } \Delta(uv) = \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}$$

$$= \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$+ \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$+ \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$= u \Delta v + v \Delta u + 2 \Delta(u, v),$$

这就是所要证明的.

3307. 证明: 函数

$$u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(a 和 b 为常数) 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}.$$

于是,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3308. 证明: 若函数 $u = u(x, y)$ 满足拉普拉斯方程 (参阅 3307 题), 则函数

$$v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

也满足这方程.

证 设 $\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$, 则 $v(x, y)$
 $= u(\xi, \eta)$. 从而

$$\begin{aligned} v'_{xx} &= u'_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + u'_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + 2u'_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \eta'_x \\ &\quad + u''_{\xi\xi} \cdot \xi''_{xx} + u''_{\eta\eta} \cdot \eta''_{xx} \\ &\quad + 2u''_{\xi\eta} \cdot \xi''_{xx} \eta'_x + u'_{\xi\eta} \cdot \eta''_{xx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'_{yy} &= u'_{\xi\xi} \cdot (\xi'_y)^2 + u'_{\eta\eta} \cdot (\eta'_y)^2 + 2u'_{\xi\eta} \cdot \xi'_y \eta'_y \\ &\quad + u''_{\xi\xi} \cdot \xi''_{yy} + u''_{\eta\eta} \cdot \eta''_{yy} \\ &\quad + 2u''_{\xi\eta} \cdot \xi''_{yy} \eta'_y + u'_{\xi\eta} \cdot \eta''_{yy}. \end{aligned}$$

由于

$$\xi'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\eta'_y, \xi'_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \eta'_x,$$

$$\xi''_{xy} = (\xi'_y)'_y = (\eta'_x)'_y = (\eta'_y)'_x = -\xi''_{xx},$$

$$\eta''_{xy} = (\eta'_y)'_y = (-\xi'_x)'_y = -(\xi'_y)'_x = -\eta''_{xx}$$

及

$$u''_{\xi\xi}(\xi, \eta) + u''_{\eta\eta}(\xi, \eta) = 0,$$

故

$$\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2u'_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \eta'_x + u'_\xi \cdot \xi'_{xx} \\
& + u'_\eta \cdot \eta'_{xx} + u'_{\xi\xi} \cdot (\eta'_x)^2 + u'_{\eta\eta} \cdot (-\xi'_x)^2 \\
& + 2u'_{\xi\eta} \cdot \eta'_x (-\xi'_x) + u'_\xi \cdot (-\xi'_{xx}) + u'_\eta \cdot (-\eta'_{xx}) \\
& = (u'_{\xi\xi} + u'_{\eta\eta}) \left[(\xi'_x)^2 + (\eta'_x)^2 \right] = 0,
\end{aligned}$$

即函数 v 也满足拉普拉斯方程。

3309. 证明: 函数

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

(a 和 b 为常数) 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{8a^3 t^2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}} \cdot \left[(x-b)^2 - 2a^2 t \right],$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-b}{4a^3 t \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{8a^5 t^2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}} \cdot \left[(x-b)^2 - 2a^2 t \right].$$

将 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 比较即得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

即函数 u 满足热传导方程.

3310. 证明: 若函数 $u = u(x, t)$ 满足热传导方程 (参阅 3309 题), 则函数

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} u\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{1}{a^4t}\right) \quad (t > 0)$$

也满足该方程.

证 设 $w = w(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$, 此函数即 3309 题

中的函数 u 乘以 $2\sqrt{\pi}$, 并令 $b = 0$ 后得到. 因此, 它满足热传导方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

显然有

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2x}{4a^2t} w = -\frac{xw}{2a^2t}.$$

令 $\xi = \xi(x, t) = \frac{x}{a^2t}$, $\eta = \eta(t) = -\frac{1}{a^4t}$, 则

$$\xi_x' = \frac{1}{a^2t}, \xi_{xx}'' = 0, \xi_t' = -\frac{x^2}{a^2t^2}, \eta_t' = \frac{1}{a^4t^2}.$$

由于 $v = w(x, t) \cdot u(\xi, \eta)$ 及 $u_t' = a^2 u_{\xi\xi}''$, 故

$$v'_t = w'_t \cdot u + w \cdot (u'_t \cdot \xi'_t + u'_\eta \cdot \eta'_t)$$

$$= a^2 w''_{xx} \cdot u + w \cdot \left[u'_t \cdot \left(-\frac{x^2}{a^2 t^2} \right) + a^2 u''_{tt} \cdot \left(\frac{1}{a^4 t^2} \right) \right],$$

$$v'_x = w'_x \cdot u + w u'_t \cdot \xi'_x,$$

$$v''_{xx} = w''_{xx} \cdot u + 2w'_x \cdot u'_t \xi'_x + w u''_{tt} \cdot (\xi'_x)^2 + w u'_t \cdot \xi''_{xx}$$

$$= w''_{xx} \cdot u + 2 \left(-\frac{xw}{2a^2 t} \right) u'_t \cdot \left(\frac{x}{a^2 t} \right) + w u''_{tt} \cdot \left(\frac{1}{a^2 t} \right)^2$$

$$= w''_{xx} \cdot u - \frac{x^2 w}{a^4 t^2} u'_t + \frac{w}{a^4 t^2} u''_{tt}.$$

将 v'_t 与 v''_{xx} 比较即得

$$v'_t = a^2 v''_{xx},$$

即函数 v 也满足热传导方程。

3311. 证明: 函数

$$u = \frac{1}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$) 当 $r \neq 0$ 时, 满足拉普拉斯方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

证 本题证法与 3282 题(6)的证法完全类似, 只要将该题中的 x, y, z 换成 $x-a, y-b, z-b$ 即可. 事实上,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5}.$$

将上述三式相加, 即证得

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

3312. 证明: 若函数 $u = u(x, y, z)$ 满足拉普拉斯方程 (参阅 3311 题), 则函数

$$v = \frac{1}{r} u\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right)$$

(式中 k 为常数及 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 也满足该方程.

证 证法一

设 $S = S(x, y, z) = \frac{1}{r}$, 则由 3282 题(6)知

$$\Delta S = S''_{xx} + S''_{yy} + S''_{zz} = 0,$$

$$(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2 = \frac{1}{r^4} = S^4.$$

$$S'_x = -\frac{x}{r^3} = -S^3 x, \quad S'_y = -S^3 y, \quad S'_z = -S^3 z.$$

$$\text{记 } v = \frac{1}{r} u \left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2} \right)$$

$$= Su(k^2 S^2 x, k^2 S^2 y, k^2 S^2 z)$$

$$= Sw(x, y, z, S) = F(x, y, z, S).$$

于是,

$$v'_x = F'_x + F'_S \cdot S'_x.$$

注意到 F'_x 和 F'_S 也是自变量 x, y, z 和中间变量 S 的函数, 即得

$$v''_{xx} = F''_{xx} + 2F''_{xS} \cdot S'_x + F''_{SS} \cdot (S'_x)^2 + F'_S \cdot S''_{xx}.$$

由对称性得

$$v''_{yy} = F''_{yy} + 2F''_{yS} \cdot S'_y + F''_{SS} \cdot (S'_y)^2 + F'_S \cdot S''_{yy},$$

$$v''_{zz} = F''_{zz} + 2F''_{zS} \cdot S'_z + F''_{SS} \cdot (S'_z)^2 + F'_S \cdot S''_{zz}.$$

于是,

$$\Delta v = (F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz}) + F'_S \cdot (S''_{xx} + S''_{yy} + S''_{zz})$$

$$+ \left\{ 2(F''_{xs} \cdot S'_x + F''_{ys} \cdot S'_y + F''_{zs} \cdot S'_z) \right. \\ \left. + F''_{ss} \cdot [(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2] \right\}.$$

显然第二个括弧为零，也不难验证第一个括弧为零。事实上，

$$F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz} = k^4 S^6 \cdot (u''_{11} + u''_{22} + u''_{33}) = 0.$$

现在来计算最后一个括弧。注意到

$$Sw'_s = 2k^2 S^2 xu'_1 + 2k^2 S^2 yu'_2 + 2k^2 S^2 zu'_3 \\ = 2xw'_x + 2yw'_y + 2zw'_z,$$

即得

$$F''_{ss} \cdot [(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2] = (Sw)''_{ss} \cdot S^4 \\ = (w + Sw'_s)'_s \cdot S^4 \\ = (w + 2xw'_x + 2yw'_y + 2zw'_z)'_s \cdot S^4 \\ = S^4 w'_s + 2xS^4 w''_{xs} + 2yS^4 w''_{ys} + 2zS^4 w''_{zs}. \quad (1)$$

而

$$2(F''_{xs} \cdot S'_x + F''_{ys} \cdot S'_y + F''_{zs} \cdot S'_z)$$

$$\begin{aligned}
&= 2(Sw)''_{xs} \cdot (-S^3x) + 2(Sw)''_{ys} \cdot (-S^3y) \\
&\quad + 2(Sw)''_{zs} \cdot (-S^3z) \\
&= -2S^3x \cdot (Sw'_x)'_s - 2S^3y \cdot (Sw'_y)'_s - 2S^3z \cdot (Sw'_z)'_s \\
&= -2S^3x \cdot (w'_x + Sw''_{xs}) - 2S^3y \cdot (w'_y \\
&\quad + Sw''_{ys}) - 2S^3z \cdot (w'_z + Sw''_{zs}) \\
&= -S^3 \cdot (2xw' + 2yw'_y + 2zw'_z) - 2S^4w''_{xs} \\
&\quad - 2yS^4w''_{ys} - 2zS^4w''_{zs} \\
&= -S^4w'_s - 2xS^4w''_{xs} - 2yS^4w''_{ys} - 2zS^4w''_{zs}. \quad (2)
\end{aligned}$$

比较(1)式和(2)式即知第三个括弧也为零。于是，最后证得

$$\Delta v = 0$$

证法二

本题也可直接求出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ，进而证得

$\Delta v = 0$ 。事实上，设

$$\frac{k^2 x}{r^2} = t_1, \quad \frac{k^2 y}{r^2} = t_2, \quad \frac{k^2 z}{r^2} = t_3,$$

利用 3306 题的结果即得

$$\begin{aligned}\Delta v = & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 u(t_1, t_2, t_3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t_1, t_2, t_3)}{\partial y^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u(t_1, t_2, t_3)}{\partial z^2} \right] + u(t_1, t_2, t_3) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \\ & + 2 \left[\frac{\partial u(t_1, t_2, t_3)}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} + \frac{\partial u(t_1, t_2, t_3)}{\partial y} \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} + \frac{\partial u(t_1, t_2, t_3)}{\partial z} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \right]. \quad (1)\end{aligned}$$

为书写简便起见, 记 $u(t_1, t_2, t_3) = u$. 分别求 u 及 $\frac{1}{r}$ 对 x, y, z 的一阶偏导函数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} = & k^2 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right. \\ & \left. \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} = & k^2 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right], \\ \frac{\partial u}{\partial z} = & k^2 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right. \\ & \left. \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \right];\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} = -\frac{y}{r^3},$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}.$$

从而得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = & k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \cdot \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \\ & \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_3} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \left. \right] \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) \\ & + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left[\frac{-2xr^4 - 4xr^2(r^2 - 2x^2)}{r^8} \right] \\ & + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \cdot \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) \right. \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_3} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \left. \right] \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) \\ & + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \left[\frac{-2yr^4 - 4xr^2(-2xy)}{r^8} \right] \\ & + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_1} \cdot \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_2} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) \right. \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \left. \right] \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \\ & + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left[\frac{-2zr^4 - 4xr^2(-2xz)}{r^8} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_3} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) \\
&\quad + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left[\frac{-2xr^4 - 4yr^2(-2xy)}{r^8} \right] \\
&\quad + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \cdot \left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) \right. \\
&\quad + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_3} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right] \left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) \\
&\quad + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \left[\frac{-2yr^4 - 4yr^2(r^2 - 2y^2)}{r^8} \right] \\
&\quad + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_2} \right. \\
&\quad \cdot \left(-\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \\
&\quad + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left[\frac{-2zr^4 - 4yr^2(-2yz)}{r^8} \right], \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \\
&\quad \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_3} \cdot \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \\
&\quad + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left[\frac{-2xr^4 - 4zr^2(-2xz)}{r^8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_3} \cdot \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \\
& + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_z} \cdot \left[\frac{-2yr^4 - 4zr^2(-2yz)}{r^8} \right] \\
& + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_2} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} \cdot \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \right] \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \\
& + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_s} \cdot \left[\frac{-2zr^4 - 4zr^2(r^2 - 2z^2)}{r^8} \right].
\end{aligned}$$

$$\text{将 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}, \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z},$$

及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 代入 (1) 式, 合并整理, 并注意

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \text{ 及 } \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} = 0,$$

即得

$$\begin{aligned}
\Delta v = & \frac{1}{r} \left[\frac{k^4}{r^4} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} \right) \right. \\
& - \frac{2k^2}{r^4} \cdot \left(x \frac{\partial u}{\partial t_1} + y \frac{\partial u}{\partial t_2} + z \frac{\partial u}{\partial t_3} \right)
\end{aligned}$$

$$+ 0 \cdot \sum_{\substack{i, j=1 \\ (i \neq j)}}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j} \Big] + u \cdot 0 + \frac{2k^2}{r^5} \left(x \frac{\partial u}{\partial t_1} \right. \\ \left. + y \frac{\partial u}{\partial t_2} + z \frac{\partial u}{\partial t_3} \right) = 0,$$

上式说明函数 $v = v(x, y, z)$ 也满足拉普拉斯方程。

3313. 证明: 函数

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 及 C_1, C_2 为常数) 满足
爱尔木戈尔兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u.$$

证 设

$$v = \frac{1}{r} e^{-ar}, \quad w = \frac{1}{r} e^{ar},$$

则有

$$u = C_1 v + C_2 w.$$

$$v'_x = v'_x \cdot r'_x = e^{-ar} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{a}{r} \right) \cdot \frac{x}{r}$$

$$= -xv \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right),$$

$$v''_{xx} = -v'_x \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right) x - v \cdot \left(-\frac{2}{r^3} - \frac{a}{r^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{x}{r} \cdot x - v \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right) \\
& = x^2 v \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right)^2 + x^2 v \cdot \frac{1}{r} \\
& \quad \cdot \left(\frac{2}{r^3} + \frac{a}{r^2} \right) - v \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right) \\
& = v \cdot \left[\left(\frac{3}{r^4} + \frac{3a}{r^3} + \frac{a^2}{r^2} \right) x^2 - \frac{1}{r^2} - \frac{a}{r} \right].
\end{aligned}$$

利用对称性，即得

$$\begin{aligned}
\Delta v &= v \cdot \left[\left(\frac{3}{r^4} + \frac{3a}{r^3} + \frac{a^2}{r^2} \right) \cdot (x^2 + y^2 \right. \\
& \quad \left. + z^2) - \frac{3}{r^2} - \frac{3a}{r} \right] = a^2 v.
\end{aligned}$$

记 $b = -a$ ，则 $w = \frac{1}{r} e^{-br}$ 。仿上述证明，有

$$\Delta w = b^2 w = a^2 w.$$

于是，

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \Delta(C_1 v + C_2 w) = C_1 \Delta v + C_2 \Delta w \\
&= C_1 a^2 v + C_2 a^2 w = a^2 u,
\end{aligned}$$

即

$$\Delta u = a^2 u.$$

3314. 设函数 $u_1 = u_1(x, y, z)$ 及 $u_2 = u_2(x, y, z)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 。证明：函数

$$v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)u_2(x, y, z)$$

满足二重调和方程

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

证 利用 3306 题的结果, 即得

$$\begin{aligned}\Delta v &= \Delta u_1 + (x^2 + y^2 + z^2) \Delta u_2 \\ &\quad + u_2 \cdot \Delta(x^2 + y^2 + z^2) + 2\left(2x \frac{\partial u_2}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + 2y \frac{\partial u_2}{\partial y} + 2z \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) \\ &= 6u_2 + 4\left(x \frac{\partial u_2}{\partial x} + y \frac{\partial u_2}{\partial y} + z \frac{\partial u_2}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

重复应用同一结果于 Δv , 得

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta v) &= 6\Delta u_2 + 4\left\{x\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + y\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \right. \\ &\quad \left. + z\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial u_2}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u_2}{\partial y}\Delta y \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_2}{\partial z}\Delta z + 2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2) = 0, \\ \Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) &= 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) = 0,\end{aligned}$$

故最后证得

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

3315. 设 $f(x, y, z)$ 是可微分 m 次的 n 次齐次函数. 证明

$$\begin{aligned} & \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(x, y, z) \\ &= n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x, y, z). \end{aligned}$$

证 证法一

根据齐次函数的定义知, 函数 $f(x, y, z)$ 满足

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z). \quad (1)$$

在(1)式两端分别对 t 求 m 次导数. 首先考察 $\frac{d^m f}{dt^m}$. 由求全导数的公式知

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= x \frac{\partial f}{\partial (xt)} + y \frac{\partial f}{\partial (yt)} + z \frac{\partial f}{\partial (zt)} \\ &= t^{n-1} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z). \\ \frac{d^2 f}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt} \right) = x \left\{ x \frac{\partial^2 f}{\partial (xt)^2} \right. \\ &\quad \left. + y \frac{\partial^2 f}{\partial (xt) \partial (yt)} + z \frac{\partial^2 f}{\partial (xt) \partial (zt)} \right\} \\ &\quad + y \left\{ x \frac{\partial^2 f}{\partial (yt) \partial (xt)} + y \frac{\partial^2 f}{\partial (yt)^2} + z \frac{\partial^2 f}{\partial (yt) \partial (zt)} \right\} \\ &\quad + z \left\{ x \frac{\partial^2 f}{\partial (zt) \partial (xt)} + y \frac{\partial^2 f}{\partial (zt) \partial (yt)} + z \frac{\partial^2 f}{\partial (zt)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (xt)^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (yt)^2} + z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (zt)^2} \\
&\quad + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial (xt) \partial (yt)} + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial (yt) \partial (zt)} \\
&\quad + 2zx \frac{\partial^2 f}{\partial (zt) \partial (xt)} \\
&= t^{n-2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(x, y, z).
\end{aligned}$$

一般地，由数学归纳法可得

$$\begin{aligned}
\frac{d^m f}{dt^m} &= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m} C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial^m f}{\partial (xt)^{\alpha_1} \partial (yt)^{\alpha_2} \partial (zt)^{\alpha_3}} \\
&\quad \cdot x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \\
&= t^{n-m} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(x, y, z), \quad (2)
\end{aligned}$$

其中总和是关于 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m$ 的非负整数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一切可能组合而取的，且

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}.$$

而(1)式右端对 t 求 m 次导数，得

$$\begin{aligned}
[t^m f(x, y, z)]^{(m)} &= n(n-1)\cdots(n-m \\
&\quad + 1)t^{n-m} f(x, y, z). \quad (3)
\end{aligned}$$

比较(2)式和(3)式，令 $t=1$ ，即证得

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(x, y, z)$$

$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x, y, z).$$

证法二

当 $m=1$ 时, 则由

$$f(tx, ty, tz)=t^n f(x, y, z)$$

两端对 t 求导, 可得

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial (tx)} + y \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial (ty)} \\ & + z \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial (tz)} \end{aligned}$$

$$=nt^{n-1}f(x, y, z) \quad (t>0).$$

令 $t=1$, 即有

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^1 f = nf.$$

当 $m=2$ 时, 由 3234 题的结果知

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = n(n-1)f.$$

在 3233 题中已证得 $f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z),$

$f'_z(x, y, z)$ 为 $(n-1)$ 次的齐次函数.

今设 $m=k-1$ 时命题为真. 对 f'_x, f'_y, f'_z 用数

学归纳法的假设, 即

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_x$$

$$= (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_x, \quad (4)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_y$$

$$= (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_y, \quad (5)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_z$$

$$= (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_z. \quad (6)$$

将(4)两端乘以 x , (5)式两端乘以 y , (6)式两端乘以 z , 然后相加, 即得

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^k f(x, y, z)$$

$$= (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z)$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) f(x, y, z).$$

即当 $m=k$ 时命题也为真.

于是, 命题对于一切自然数 m 为真, 即

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^n f$$

$$= n(n-1)\cdots(n-k+1) f.$$

3316. 若

$z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$,
其中 f 为可微分的函数. 简化式子

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

解
$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y} = \sec x \cos x \cdot f' \\ + \sec y \cdot (\cos y - \cos y \cdot f') \\ = f' + 1 - f' = 1,$$

即

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

3317. 证明: 函数

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

(其中 f 为任意的可微分函数) 满足方程

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

证
$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left\{ nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x^2}\right) \right. \\ \left. - \frac{2x^ny}{x^3} f'\left(\frac{y}{x^2}\right) \right\} + 2y \frac{x^n}{x^2} f'\left(\frac{y}{x^2}\right) \\ = nx^n f\left(\frac{y}{x^2}\right) = nz,$$

即

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. 证明:

$$z = yf(x^2 - y^2)$$

(其中 f 为任意的可微分函数) 满足方程

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} &= y^2 \cdot 2xyf' + xy \cdot (f \\ &\quad - 2y^2f') = xyz = xz, \end{aligned}$$

即

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. 若

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz \\ &\quad + f(y-x, z-x), \end{aligned}$$

式中 f 为可微分的函数. 简化式子

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2(y+z) + xyz - f'_1 - f'_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2z + f'_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + f_2.$$

将上述三式相加，即得

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

3320. 设：

$$x^2 = vw, \quad y^2 = uw, \quad z^2 = uv$$

及

$$f(x, y, z) = F(u, v, w).$$

证明：

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

证 把 u, v, w 当作自变量^{*)}，故

$$uF'_u = uf'_x \cdot x'_u + uf'_y \cdot y'_u + uf'_z \cdot z'_u,$$

$$vF'_v = vf'_x \cdot x'_v + vf'_y \cdot y'_v + vf'_z \cdot z'_v,$$

$$wF'_w = wf'_x \cdot x'_w + wf'_y \cdot y'_w + wf'_z \cdot z'_w.$$

将上述三式相加，得

$$\begin{aligned} uF'_u + vF'_v + wF'_w &= (ux'_u + vx'_v + wx'_w) f'_x \\ &\quad + (uy'_u + vy'_v + wy'_w) f'_y + (uz'_u + \end{aligned}$$

$$+v z'_v + w z'_w) f'_z. \quad (1)$$

由题设得 $2x \frac{\partial x}{\partial u} = 0$. 因为 x 不恒等于零, 所以 $\frac{\partial x}{\partial u}$

$$= 0. \text{ 同法可得 } \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \frac{\partial z}{\partial w} = 0.$$

再由题设, 得

$$2x \frac{\partial x}{\partial w} = v, \quad 2x \frac{\partial x}{\partial v} = w, \quad 2y \frac{\partial y}{\partial u} = w,$$

$$2y \frac{\partial y}{\partial w} = u, \quad 2x \frac{\partial z}{\partial u} = v, \quad 2x \frac{\partial z}{\partial v} = u.$$

将上述结果代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} u F'_x + v F'_y + w F'_w &= \left(\frac{vw}{2x} + \frac{wv}{2x} \right) f'_x \\ &\quad + \left(\frac{uw}{2y} + \frac{wu}{2y} \right) f'_y + \left(\frac{uv}{2z} + \frac{vu}{2z} \right) f'_z \\ &= x f'_x + y f'_y + z f'_z. \end{aligned}$$

即

$$u F'_x + v F'_y + w F'_w = x f'_x + y f'_y + z f'_z.$$

*) 如果把 x, y, z 当作自变量, 也可以证明本题的结果.

假定任意函数 φ, ψ 等等为可微分足够多次的函数,

验证下列等式:

$$3321. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 若 } z = \varphi(x^2 + y^2).$$

证 由于

$$y \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot 2x\varphi'(x^2 + y^2),$$

$$x \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot 2y\varphi'(x^2 + y^2),$$

所以

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$3322. \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0, \text{ 若 } z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy).$$

$$\text{证 } x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = x^2 \cdot \left[-\frac{y^2}{3x^2} + y\varphi'(xy) \right]$$

$$-xy \cdot \left[\frac{2y}{3x} + x\varphi'(xy) \right] + y^2 = 0.$$

$$3323. \quad (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz, \text{ 若 } z = e^x \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right).$$

$$\text{证 } (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - y^2) e^x \cdot \frac{x\varphi'}{y^2} ye^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$+ xy \cdot \left\{ e^x \cdot \varphi + e^x \varphi' \cdot \left[e^{\frac{x^2}{2y^2}} - \frac{x^2}{y^3} ye^{\frac{x^2}{2y^2}} \right] \right\}$$

$$= xye^x \varphi = xyz.$$

$$3324. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu, \text{ 若 } u = x^\alpha \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} &= nx^n \varphi - \alpha x^{n-\alpha} y \varphi'_1 \\
 &\quad - \beta x^{n-\beta} z \varphi'_2 + \alpha y x^{n-\alpha} \varphi'_1 + \beta z x^{n-\beta} \varphi'_2 \\
 &= nx^n \varphi = nu.
 \end{aligned}$$

$$3325. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}, \text{ 若}$$

$$u = \frac{xy}{z} \ln x + x \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad x \frac{\partial u}{\partial x} &= x \cdot \frac{y}{z} \ln x + \frac{xy}{z} + x \varphi - y \varphi'_1 - z \varphi'_2, \\
 y \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{xy}{z} \ln x + y \varphi'_1, \quad z \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{z} \ln x + z \varphi'_2.
 \end{aligned}$$

将上述三式相加，即得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}.$$

$$3326. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 若 } u = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$$

$$\text{证} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \varphi'' + a^2 \psi'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'' + \psi''.$$

将上述二式比较，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$3327. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ 若}$$

$$u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y).$$

$$\text{证} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi + y\psi' + x\varphi', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi' + \psi + y\psi',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\varphi' + y\psi'' + x\varphi'', \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi' + \psi' + y\psi'' + x\varphi'', \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\varphi'' + 2\psi' + y\psi''. \quad (3)$$

(1) - 2 × (2) + (3), 即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$3328. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ 若}$$

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

证 $u_1 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 为零次齐次函数, $u_2 = x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ 为一次齐次函数. 由 3234 题的结果 (对于二元更成立) 知

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1 = 0, \quad \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2 = 0.$$

于是,

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 (u_1 + u_2)$$

$$= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u_1 + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u_2$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

注. 也可不引用3234题的结果, 求出偏导数直接验证.

3329. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$, 若

$$u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

证 $u_1 = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 为 n 次齐次函数, $u_2 = x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right)$

为 $1-n$ 次齐次函数. 由 3234 题的结果知

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u_1 = n(n-1)u_1,$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u_2 = (1-n)(1-n-1)u_2$$

$$= n(n-1)u_2.$$

于是,

$$\begin{aligned} & x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 (u_1 + u_2) \end{aligned}$$

$$=n(n-1)(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

值得注意的是, 3328 题即为本题的特殊情形:
 $n=0$.

$$3330. \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 若 } u=\varphi(x+\psi(y)).$$

$$\text{证} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''\psi',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'\psi', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''.$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

用逐次微分的方法消去任意函数 φ 和 ψ ;

$$3331. \quad z=x+\varphi(xy).$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 1+y\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'.$$

于是,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$$3332. \quad z=x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right).$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi + \frac{x}{y^2}\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2}{y^3}\varphi'.$$

于是,

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2x\varphi + \frac{2x^2}{y^2}\varphi' - \frac{2x^2}{y^2}\varphi'$$

$$= 2x\varphi = 2z,$$

即

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

3333. $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}).$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x\varphi'}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\varphi'}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

于是,

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3334. $u = \varphi(x - y, y - z).$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi'_1 + \varphi'_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\varphi'_2.$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3335. $u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}\varphi'_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\varphi'_1 + \frac{1}{z}\varphi'_2,$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}\varphi'_2.$$

于是,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0^{*}).$$

*) 注意到 $\varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$ 为零次齐次函数, 本题即3315

题的特殊情形: $n=0$.

3336. $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x)$. 于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

3337. $z = \varphi(x)\psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi' \psi$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi \psi'$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi' \psi'$.

于是,

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

3338. $z = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi' + \psi'$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi' - \psi'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi'' + \psi'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'' + \psi''.$$

于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

$$3339. \quad z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

解 注意到函数 z 为一次齐次函数, 由3315题知

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

$$3340. \quad z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

解 设 $z_1 = \varphi(xy)$, 则由3331题知

$$x \frac{\partial z_1}{\partial x} - y \frac{\partial z_1}{\partial y} = 0.$$

又 $z_2 = \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ 为零次齐次函数, 且函数

$$x \frac{\partial z_2}{\partial x} - y \frac{\partial z_2}{\partial y} = \frac{2x}{y} \psi'$$

也为零次齐次函数. 从而, 函数

$$\begin{aligned} u &= x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x \frac{\partial z_1}{\partial x} - y \frac{\partial z_1}{\partial y} \right) \\ &\quad + \left(x \frac{\partial z_2}{\partial x} - y \frac{\partial z_2}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

是零次齐次函数. 于是, 由3315题知

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

但是,

$$\begin{aligned}
 x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} &= x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
 &\quad + y \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
 &= x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
 &\quad - y \frac{\partial z}{\partial y} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\
 &= x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y},
 \end{aligned}$$

故得

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3341. 求函数

$$z = x^2 - y^2$$

在点 $M(1, 1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成角 $\alpha = 60^\circ$ 的方向 l 上的导函数.

解 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1} = 2, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=1} = -2.$

$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{x=1} = 2 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}.$$

3342. 求函数

$$z = x^2 - xy + y^2$$

在点 $M(1, 1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 上的导函数. 在怎样的方向上此导函数有: (a) 最大的值; (b) 最小的值; (B) 等于 0.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1$. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} &= \cos \alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha + \sin \alpha \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

(a) 当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\partial z}{\partial l}$ 最大,

(b) 当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, 即 $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ 时, $\frac{\partial z}{\partial l}$ 最

小;

(B) 当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 即 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha = \frac{7\pi}{4}$

时, $\frac{\partial z}{\partial l} = 0$.

3343. 求函数

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

在点 $M_0(x_0, y_0)$ 沿与过此点的等位线成垂直的方向上的导数.

解 与等位线垂直的方向即梯度的方向或与梯度相反

的方向。于是，

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial l} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} &= \pm |\operatorname{grad} z| \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)^2} = \pm \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.\end{aligned}$$

3344. 求函数

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在此点的内法线方向上的导数。

解 曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 是函数 z 的一条等位线。随着 x, y 的绝对值增大， z 是减少的，因此，曲线的内法线方向即梯度方向。于是，

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial l} \bigg|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}} &= |\operatorname{grad} z| \bigg|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}} \bigg|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}} \\ &= \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{ab} \quad (a > 0, b > 0).\end{aligned}$$

3345. 求函数

$$u = xyz$$

在点 $M(1,1,1)$ 沿方向 $l \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ 上的导数. 函数在该点的梯度的大小等于甚么?

解 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma.$

$$|grad u| \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} \\ = \sqrt{3}.$$

3346. 求函数

$$u = \frac{1}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处梯度的大小和方向.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}.$ 于是,

$$grad u = -\frac{1}{r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

或简记成

$$grad u = \left\{ -\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right\}.$$

在点 M_0 处的梯度为

$$grad u = \left\{ -\frac{x_0}{r_0^3}, -\frac{y_0}{r_0^3}, -\frac{z_0}{r_0^3} \right\},$$

其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. 从而得

$$|grad u| = \sqrt{\left(-\frac{x_0}{r_0^3}\right)^2 + \left(-\frac{y_0}{r_0^3}\right)^2 + \left(-\frac{z_0}{r_0^3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{r_0^2},$$

$$\cos(\text{grad } u \hat{x}) = \frac{-\frac{x_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}} = -\frac{x_0}{r_0},$$

$$\cos(\text{grad } u \hat{y}) = \frac{-\frac{y_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}} = -\frac{y_0}{r_0},$$

$$\cos(\text{grad } u \hat{z}) = \frac{-\frac{z_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}} = -\frac{z_0}{r_0}.$$

3347. 求函数

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

在点 $A(\varepsilon, 0, 0)$ 及 $B(0, \varepsilon, 0)$ 二点的梯度之间的角度.

解 $\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \{2x, 2y, -2z\}$. 若

以 $\text{grad } u_A$ 及 $\text{grad } u_B$ 分别表示在 A 点及 B 点的梯度, 则有

$$\text{grad } u_A = \{2\varepsilon, 0, 0\}, \quad \text{grad } u_B = \{0, 2\varepsilon, 0\}.$$

由于

$$\text{grad } u_A \cdot \text{grad } u_B = 2\varepsilon \cdot 0 + 0 \cdot 2\varepsilon + 0 \cdot 0 = 0,$$

故知

$$\text{grad } u_A \perp \text{grad } u_B,$$

即在点 A 及点 B 二点的梯度之间的夹角为

$$(\widehat{\text{grad } u_A}, \text{grad } u_B) = \frac{\pi}{2}.$$

3348⁺. 在点 $M(1, 2, 2)$ 处, 函数

$$u = x + y + z$$

的梯度之大小与函数

$$v = x + y + z + 0.001 \sin(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

的梯度之大小相差若干?

解 $\text{grad } u = \{1, 1, 1\}$, $|\text{grad } u| = \sqrt{3}$.

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1 + 1000\pi \frac{x}{r} \cos(10^6 \pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 1000\pi \frac{y}{r} \cos(10^6 \pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 1 + 1000\pi \frac{z}{r} \cos(10^6 \pi r).$$

在点 $M(1, 2, 2)$ 处,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1000\pi}{3} + 1 \approx \frac{1000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2000\pi}{3} + 1 \approx \frac{2000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2000\pi}{3} + 1 \approx \frac{2000\pi}{3},$$

$$|\text{grad } v| \approx 1000\pi \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= 1000\pi.$$

于是, 两梯度之大小相差为

$$|\operatorname{grad} v| - |\operatorname{grad} u| \approx 1000\pi - \sqrt{3} \approx 3140.$$

3349. 证明: 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处函数

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2$$

及

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

(a, b, c, m, n, p 为常数且 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) 二者的梯度之间的角度当点 M_0 无限远移时趋于零.

证 本题的题设条件“点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 无限远移”应理解为“ $x_0 \rightarrow \infty, y_0 \rightarrow \infty, z_0 \rightarrow \infty$ 同时成立” (此时 $\sqrt{(ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2} \rightarrow +\infty$), 否则, 本题的结论不成立.

显见有

$$\operatorname{grad} u = \{2ax_0, 2by_0, 2cz_0\},$$

$$\operatorname{grad} v = \{2ax_0 + 2m, 2by_0 + 2n, 2cz_0 + 2p\}.$$

令 $\alpha = ax_0, \beta = by_0, \gamma = cz_0$;

$$\alpha_1 = ax_0 + m = \alpha + m, \beta_1 = by_0 + n = \beta + n, \gamma_1 = cz_0 + p = \gamma + p.$$

于是, $\operatorname{grad} u$ 与 $\operatorname{grad} v$ 的夹角 θ 满足

$$\cos \theta = \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}}$$

或

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) - (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a\beta_1 - a_1\beta)^2 + (a\gamma_1 - a_1\gamma)^2 + (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2}{(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)} \\
&= \frac{(n\alpha - m\beta)^2 + (p\alpha - m\gamma)^2 + (p\beta - n\gamma)^2}{(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)}.
\end{aligned}$$

令 $\delta = \max(|ax_0|, |by_0|, |cz_0|)$

$= \max(|a|, |\beta|, |\gamma|)$, 则

$$\delta \leq \sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2} \leq \sqrt{3}\delta.$$

于是, 当 $\sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2} \rightarrow +\infty$ 时, $\delta \rightarrow +\infty$.

再令 $q = \max(|m|, |n|, |p|)$, 则下述不等式显然成立:

$$\begin{aligned}
0 \leq \sin^2 \theta &= \frac{(n\alpha - m\beta)^2 + (p\alpha - m\gamma)^2 + (p\beta - n\gamma)^2}{(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)} \\
&\leq \frac{(2q\delta)^2 + (2q\delta)^2 + (2q\delta)^2}{\delta^2(\delta^2 - 6\delta q - 3q^2)} \\
&= \frac{12q^2}{\delta^2 - 6\delta q - 3q^2} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \delta \rightarrow +\infty \text{ 时}).
\end{aligned}$$

于是, 当 $\sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2} \rightarrow +\infty$ 时, $\sin^2 \theta \rightarrow 0$, 即当 $\sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2} \rightarrow +\infty$, $\theta \rightarrow 0$. 证毕.

3350. 设 $u = f(x, y, z)$ 为可微分两次的函数. 若 $\cos \alpha, \cos \beta,$

$\cos \gamma$ 为方向 l 的方向余弦, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)$.

解
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cos \beta + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cos \gamma \right) \cos \alpha \\
& + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \cos \gamma \right) \cos \beta \\
& + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \cos \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cos \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos \gamma \right) \cos \gamma \\
& = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos^2 \gamma \\
& + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cos \beta \\
& + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cos \beta \cos \gamma + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cos \gamma \cos \alpha.
\end{aligned}$$

3351. 设 $u=f(x, y, z)$ 为可微分两次的函数及

$$l_1 \{\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1\}, l_2 \{\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2\},$$

$$l_3 \{\cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3\}$$

为三个互相垂直的方向. 证明:

$$(a) \left(\frac{\partial u}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2;$$

$$(b) \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

$$\text{证 (a)} \left(\frac{\partial u}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha_i + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta_i + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma_i \right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \beta_i \\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \gamma_i \\
&\quad + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \cos \beta_i \\
&\quad + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \beta_i \cos \gamma_i \\
&\quad + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \gamma_i \cos \alpha_i. \tag{1}
\end{aligned}$$

由于 l_1, l_2, l_3 是互相垂直的三个单位矢量，
故

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \cos \beta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \cos \beta_i \cos \gamma_i = 0, \\
&\sum_{i=1}^3 \cos \gamma_i \cos \alpha_i = 0, \\
&\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \cos^2 \beta_i = 1, \\
&\sum_{i=1}^3 \cos^2 \gamma_i = 1. \tag{2}
\end{aligned}$$

将上述诸等式 (2) 代入 (1) 式，即得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2. \end{aligned}$$

(6) 利用3350题的结果, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \beta_i + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \gamma_i \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \cos \beta_i \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \beta_i \cos \gamma_i \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \gamma_i \cos \alpha_i. \end{aligned} \quad (3)$$

将诸等式(2)代入(3)式, 即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. 设 $u=u(x, y)$ 为可微分的函数且当 $y=x^2$ 时有,

$$u(x, y) = 1$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x.$$

求当 $y=x^2$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $\frac{d}{dx}u(x, x^2) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}$.

当 $y=x^2$, $u(x, y)=u(x, x^2)=1$, 故 $\frac{du(x, x^2)}{dx}=0$,

且有 $\frac{\partial u}{\partial x}=x$, $\frac{dy}{dx}=2x$. 将这些结果代入上式, 即得

$$x + 2x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

于是, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2} (x \neq 0)$.

3353. 设函数 $u=u(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

以及下列条件:

$$u(x, 2x) = x, u'_x(x, 2x) = x^2 .$$

求: $u''_{xx}(x, 2x)$, $u''_{xy}(x, 2x)$, $u''_{yy}(x, 2x)$.

解 由于 $u(x, 2x)=x$, 故

$$u'_x(x, 2x) + 2u'_y(x, 2x) = 1 . \quad (1)$$

又因 $u'_x(x, 2x)=x^2$, 故由 (1) 式即得

$$u_y^1(x, 2x) = \frac{1-x^2}{2}. \quad (2)$$

将(2)式两端对 x 求导数, 有

$$u_{yx}^1(x, 2x) + 2u_{yy}^1(x, 2x) = -x; \quad (3)$$

由 $u_x^1(x, 2x) = x^2$ 两端对 x 求导数, 有

$$u_{xx}^1(x, 2x) + 2u_{xy}^1(x, 2x) = 2x. \quad (4)$$

联立(3)式和(4)式并利用题设条件 $u_{xx}'' = u_{yy}''$, 解之

即得

$$u_{xx}^1(x, 2x) = u_{yy}^1(x, 2x) = -\frac{4}{3}x,$$

$$u_{xy}^1(x, 2x) = \frac{5}{3}x.$$

假定 $z = z(x, y)$, 解下列方程:

$$3354. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(y), \quad z = x\varphi(y) + \psi(y).$$

$$3355. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x),$$

$$z = \int_0^x \varphi_1(t) dt + \psi(y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

3356. $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0.$

解 $\frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} = \overline{\varphi}_{n-1}(x),$

$$\frac{\partial^{n-2} z}{\partial y^{n-2}} = y \overline{\varphi}_{n-1}(x) + \overline{\varphi}_{n-2}(x),$$

累次积分 n 次, 最后得

$$z = y^{n-1} \varphi_{n-1}(x) + y^{n-2} \varphi_{n-2}(x) + \dots \\ + y \varphi_1(x) + \varphi_0(x).$$

3357. 假定 $u = u(x, y, z)$ 解方程

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

解 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi_1(x, y),$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_2(x, y) + \psi_1(x, z),$$

$$u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z).$$

3358. 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$$

的满足条件 $z(x, x^2) = 1$ 的解 $z = z(x, y).$

解 由 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ 得

$$z = x^2 y + y^2 + \varphi(x).$$

又因 $z(x, x^2) = 1$, 故

$$1 = x^4 + x^4 + \varphi(x),$$

从而有

$$\varphi(x) = 1 - 2x^4.$$

最后得

$$z = 1 + x^2 y + y^2 - 2x^4.$$

3359. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

的满足条件 $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$ 的解

$z = z(x, y)$.

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \varphi(x).$$

又因 $z'_y(x, 0) = x$, 所以

$$x = 0 + \varphi(x) \text{ 或 } x = \varphi(x).$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x.$$

由此得

$$z = y^2 + xy + \varphi_1(x).$$

又因 $z(x, 0) = 1$, 故

$$1 = 0 + 0 + \varphi_1(x) \text{ 或 } 1 = \varphi_1(x).$$

最后得

$$z = 1 + xy + y^2.$$

3360. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$$

的满足条件 $z(x, 0) = x, z(0, y) = y^2$ 的解 $z = z(x, y)$.

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi_1(x),$$

$$z = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \varphi(x) + \psi(y).$$

现确定 $\varphi(x)$ 及 $\psi(y)$. 由于 $z(x, 0) = x, z(0, y) = y^2$, 故有

$$x = \varphi(x) + \psi(0),$$

$$y^2 = \varphi(0) + \psi(y),$$

于是,

$$z = x + y^2 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - [\varphi(0) + \psi(0)].$$

又因 $z(0, 0) = 0$, 故 $\varphi(0) + \psi(0) = 0$. 最后得

$$z = x + y^2 + \frac{1}{2}xy(x + y).$$

§3. 隐函数的微分法

1° 存在定理 设: 1) 函数 $F(x, y, z)$ 在某点 $\hat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ 等于零; 2) $F(x, y, z)$ 和 $F'_z(x, y, z)$ 在点 \hat{A}_0 的邻域内有定义并且是连续的; 3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的某充分小的邻域内存在唯一的连续函数

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

满足方程 $F(x, y, z) = 0$

而且是 $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2° 隐函数的可微分性 设除了上面的条件外, 4) 如果函数 $F(x, y, z)$ 在点 $\hat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ 的邻域内可微分, 则函数 (1) 在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的邻域内也可微分并且它的导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

求得. 若函数 $F(x, y, z)$ 可微分任意多次, 则用逐次微分方程 (2) 的方法也可计算函数 z 的高阶导函数.

3° 由方程组定义的隐函数 设函数 $F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) (i=1, 2, \dots, n)$ 满足下列条件:

- (1) 于点 $\hat{A}_0(x_{10}, \dots, x_{m0}; y_{10}, \dots, y_{n0})$ 变成为零;
- (2) 在点 \hat{A}_0 的邻域内可微分;
- (3) 在点 \hat{A}_0 函数行列式 $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$.

在这种情况下，方程组

$$F_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

在点 $A_0(x_{10}, \dots, x_{n0})$ 的邻域内唯一地确定出一组可微分的函数：

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

这些方程满足方程 (3) 及原始条件

$$f_i(x_{10}, \dots, x_{n0}) = y_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

这些隐函数的微分可由方程组

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} dy_k = 0$$

$(i=1, 2, \dots, n)^*$ 求得。

3361. 证明：在每一点都不连续的迪里黑里函数

$$y = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数;} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

满足方程

$$y^2 - y = 0.$$

证 当 x 为有理数时， $y^2 - y = 1 - 1 = 0$ ；当 x 为无理数时， $y^2 - y = 0 - 0 = 0$ 。因此，不论 x 为任何实数 x ，均有

$$y^2 - y = 0.$$

3362. 设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a, b) 内。问在怎样的情况下方程

$$f(x)y = 0$$

* 这一段在简明陈述大多数的问题时无条件地假定隐函数和它们的对应导函数存在的条件满足。

当 $a < x < b$ 时才有唯一连续的解 $y = 0$?

解 函数 $f(x)$ 的非零点的集合在区间 (a, b) 内是处处稠密的, 即 $f(x)$ 的零点的集合不能充满区间 (a, b) 的任意一个子区间 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. 此时, 方程 $f(x)y = 0$ 有唯一连续的解 $y = 0$. 事实上, 设 $y = y(x)$ 为方程 $f(x)y = 0$ 的一个连续解, $x_0 \in (a, b)$, 则

(1) 当 $f(x_0) \neq 0$ 时, 显然有 $y(x_0) = 0$;

(2) 当 $f(x_0) = 0$ 时, 由 $f(x)$ 的非零点的稠密性知: 存在数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \rightarrow x_0$ 及 $f(x_n) \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). 于是, $y(x_n) = 0$. 由 $y(x)$ 的连续性即得

$$y(x_0) = y(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n) = 0.$$

于是, 当 $a < x < b$ 时, $y \equiv 0$.

反之, 若方程 $f(x)y = 0$ 在 (a, b) 只有唯一的连续解 $y = 0$, 则 $f(x)$ 的零点集必不能充满 (a, b) 的任何子区间. 事实上, 设在 (a, b) 的某子区间 (α, β) 上 $f(x) \equiv 0$. 定义 (a, b) 上的函数 $y_0(x)$ 如下:

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } a < x < a + \frac{\beta - \alpha}{4} \text{ 时;} \\ -\frac{4}{\beta - \alpha} \left(x - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{4} \right), & \\ \quad \text{当 } a + \frac{\beta - \alpha}{4} \leq x < a + \frac{\beta - \alpha}{2} \text{ 时;} \\ -\frac{4}{\beta - \alpha} \left[x - \alpha - \frac{3(\beta - \alpha)}{4} \right], & \\ \quad \text{当 } a + \frac{\beta - \alpha}{2} \leq x \leq a + \frac{3}{4}(\beta - \alpha) \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } a + \frac{3}{4}(\beta - \alpha) < x < b \text{ 时.} \end{cases}$$

如图6·27所示, 图中 $c_1 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{4}$, $c_0 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}$, $c_2 = \alpha + \frac{3(\beta - \alpha)}{4}$.

显然 $y_0(x) \neq 0$, 但 $y = y_0(x)$ 是方程 $f(x)y = 0$ 在 (a, b) 上的一个连续解.

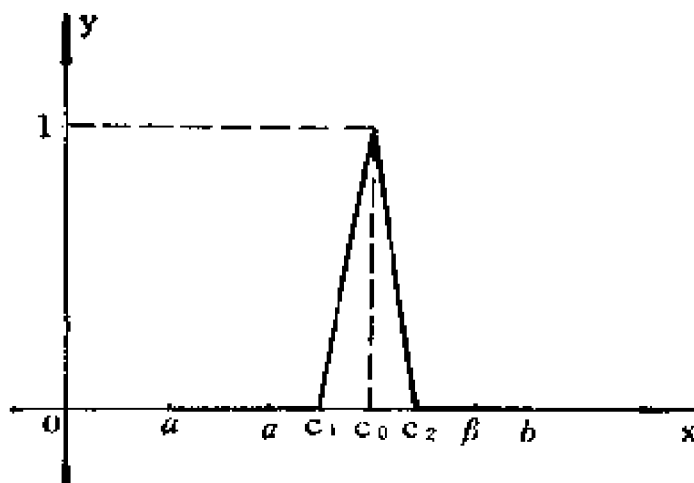


图 6·27

3363. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 于区间 (a, b) 内有定义且连续. 问在怎样的情况下, 方程

$$f(x)y = g(x)$$

于区间 (a, b) 内才有唯一连续的解.

解 下面三个条件显然是必要的:

(1) $f(x)$ 的零点必须是 $g(x)$ 的零点, 否则 y 无解;

(2) $f(x)$ 的非零点集合必须在 (a, b) 内稠密. 否则, 存在 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, 当 $x \in (\alpha, \beta)$ 时, 恒有 $f(x) = g(x) = 0$. 从而当 $x \in (\alpha, \beta)$ 时, 任意改变原方程

一个连续解 $y(x)$ 的函数值 (但保持连续性) 就得出原方程的另一个连续解 (参看3362题的图), 此与原方程连续解的唯一性矛盾.

(3) 如果 $f(x_0) = 0$, 则对任一点列 $x_n \rightarrow x_0$, $f(x_n) \neq 0 (n=1, 2, \dots)$, 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n)}{f(x_n)} = y_0 \quad (y_0 \text{ 是有限数且只与 } x_0 \text{ 有关}).$$

显然, 如果上述极限不存在或对不同的序列取不同的值均导致 y 不连续.

反之, 若上述三个条件满足, 我们证明原方程的连续解存在唯一. 事实上, 这时令

$$y_0(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{f(x)}, & \text{在 } f(x) \neq 0 \text{ 的点;} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n)}{f(x_n)}, & \text{在 } f(x) = 0 \text{ 的点, 这里任取} \\ & x_n \rightarrow x, f(x_n) \neq 0 \quad (n=1, 2, \dots). \end{cases}$$

易知 $y_0(x)$ 是 (a, b) 内的连续函数且满足原方程, 即是原方程的一个连续解. 现若原方程在 (a, b) 内还有一连续解 $y = y_1(x)$, 则

$$f(x)y_1(x) = g(x), f(x)y_0(x) = g(x) \quad (a < x < b).$$

对任何 $x_0 \in (a, b)$, 若 $f(x_0) \neq 0$, 则 $y_1(x_0) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} = y_0(x_0)$; 若 $f(x_0) = 0$, 取 $x_n \rightarrow x_0, f(x_n) \neq 0 (n=1, 2, \dots)$, 则根据 $y_1(x)$ 的连续性, 得

$$y_1(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_1(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n)}{f(x_n)} = y_0(x_0).$$

于是, $y_1(x) \equiv y_0(x)$ ($a < x < b$). 唯一性获证.

3364. 设已知方程

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

及

$$y = y(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2)$$

为满足方程 (1) 的单值函数.

1) 问有多少单值函数 (2) 满足方程 (1)?

2) 问有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

3) 设: (a) $y(0) = 1$; (b) $y(1) = 0$, 问有多少单值连续函数 (2) 满足方程 (1)?

解 1) 无限个. 例如, 令

$$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{当 } -1 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x \neq \frac{1}{n} \text{ 时;} \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{当 } x = \frac{1}{n} \text{ 时} \end{cases}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots),$$

则显然 $y = y_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 都是满足方程 (1) 的单值函数.

2) 二个: $y = -\sqrt{1-x^2}$ 及 $y = \sqrt{1-x^2}$.

3) (a) 满足条件 $y(0) = 1$ 的仅 $y = \sqrt{1-x^2}$ 这一个连续函数; (b) 满足条件 $y(1) = 0$ 的有 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 及 $y = \sqrt{1-x^2}$ 这二个连续函数.

3365. 设已知方程

$$x^2 = y^2 \quad (1)$$

及

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (2)$$

是满足方程 (1) 的单值函数.

- 1) 问有多少单值函数(2)满足方程(1)?
- 2) 问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?
- 3) 问有多少单值可微分的函数(2)满足方程(1)?
- 4) 设: (a) $y(1)=1$; (b) $y(0)=0$, 问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?
- 5) 设 $y(1)=1$ 及 δ 为充分小的数, 问有多少单值连续函数 $y=y(x)$ ($1-\delta \leq x \leq 1+\delta$) 满足方程(1)?

解 1) 无限个. 例如, $y_n(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq \frac{1}{n}; \\ -|x|, & x = \frac{1}{n}, \end{cases}$

($n=1, 2, \dots$) 都是.

2) 四个: $y=-x$, $y=x$, $y=|x|$ 和 $y=-|x|$.

3) 二个: $y=-x$ 和 $y=x$.

4) (a) 二个: $y=x$ 和 $y=|x|$; (b) 四个: 即 2) 中之四个.

5) 一个: $y=x$.

3366⁺. 方程

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4$$

是定义 y 为 x 的多值函数. 问这个函数在怎样的域内, 1) 单值, 2) 有二个值, 3) 有三个值, 4) 有四个值? 求此函数的各枝点及它的单值连续的各枝.

解 由 $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ 得 $y^4 - y^2 + (x^4 - x^2) = 0$.

解之, 得 $y^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}$. 一共有单值连续

的六支，其中当 $\frac{1}{4} + x^2 - x^4 \geq 0$ 即 $|x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

时有二支：

$$y_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}, \quad |x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},$$

$$y_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}, \quad |x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

而当 $0 \leq \frac{1}{4} + x^2 - x^4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 即 $1 \leq x^2 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时

有四支：

$$y_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_4 = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}, \quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \leq x \leq -1;$$

$$y_5 = -\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_6 = -\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4},$$

$$-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \leq x \leq -1.$$

此外还有一个孤立点 $(0,0)$ (参看 1542 题的图形).
考虑上述六支的公共定义域知：

1) 没有单值区域.

2) 双值区域为 $0 < |x| < 1$ 及 $x = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

3) 三值区域为 $x=0$ 及 $x=\pm 1$.

4) 四值区域为 $1 < |x| < \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

枝点的必要条件为

$$(y^4 - y^2 + (x^4 - x^2))'_y = 0,$$

即

$$4y^3 - 2y = 0.$$

于是,

$$y = 0 \text{ 及 } y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由 $y=0$ 解得 $x=0$ 及 $x=\pm 1$; 而由 $y=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 解得

$x = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. 经验证, 得六个枝点:

$$(-1, 0), (1, 0), \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3367. 求由方程

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

所定义的多值函数 y 的各枝点和单值连续的各枝 $y = y(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$).

解 由 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 得

$$y^2 = \frac{-(1+2x^2) \pm \sqrt{8x^2+1}}{2}.$$

因为当 $|x| \leq 1$ 时, $\sqrt{8x^2+1} \geq 1+2x^2$, 故单值连续的各枝为 (共有四枝)

$$y = \varepsilon(x) \sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1} - (1+2x^2)}{2}} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

其中 $\varepsilon(x)$ 分别为 $1, -1, \operatorname{sgn} x, -\operatorname{sgn} x$.

下面再求枝点:

$$\left[(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \right]'_y = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 2y = 0,$$

解之得 $y = 0$, 从而得 $x = 0$ 及 $x = \pm 1$. 经验证得枝点为

$$(0, 0), (1, 0) \text{ 及 } (-1, 0).$$

3368. 设函数 $f(x)$ 当 $a < x < b$ 时连续, 并且函数 $\varphi(y)$ 当 $c < y < d$ 时单调增加而且连续. 问在怎样的条件下方程

$$\varphi(y) = f(x)$$

定义出单值函数

$$y = \varphi^{-1}[f(x)]?$$

研究例子: (a) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$; (b) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

解 根据 $\varphi(y)$ 的严格增加性以及 $\varphi(y)$ 、 $f(x)$ 的连续性可知, 若存在 (x_0, y_0) 满足 $\varphi(y_0) = f(x_0)$, 则在 x_0 近旁由方程 $\varphi(y) = f(x)$ 可唯一地确定 y 为 x 的单值连续函数

$$y = \varphi^{-1}[f(x)] \quad (\text{满足 } y_0 = \varphi^{-1}[f(x_0)]); \quad (1)$$

若更设满足不等式

$$\lim_{y \rightarrow c+0} \varphi(y) < f(x) < \lim_{y \rightarrow d-0} \varphi(y) \quad (a < x < b), \quad (2)$$

则显然函数(1)是整个 $a < x < b$ 上定义的连续函数.

(a) 设 $\varphi(y) = \sin y + \operatorname{sh} y \quad (-\infty < y < +\infty)$,

$f(x)=x$ ($-\infty < x < +\infty$). 由于 $\varphi'(y)=\cos y + \operatorname{ch} y > 0$ ($-\infty < y < +\infty$), 故 $\varphi(y)$ 是 $-\infty < y < +\infty$ 上的严格增函数, 又显然有

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(y) = +\infty,$$

故不等式 (2) 满足. 于是, 由方程 $\sin y + \operatorname{sh} y = x$ 唯一确定 y 为 x 的连续函数, 它定义在整个数轴: $-\infty < x < +\infty$ 上.

(6) $\varphi(y)=e^{-y}$ 及 $f(x)=-\sin^2 x$ 虽然也满足题设条件, 但此方程是矛盾的 ($e^{-y} > 0$, $-\sin^2 x \leq 0$), 即不存在点 (x_0, y_0) , 使有 $e^{-y_0} = -\sin^2 x_0$. 因此, 不能定义 y 为 x 的单值函数.

3369. 设:

$$x = y + \varphi(y), \quad (1)$$

其中 $\varphi(0)=0$ 且当 $-a < y < a$ 时 $\varphi'(y)$ 连续并满足 $|\varphi'(y)| \leq k < 1$. 证明: 当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时存在唯一的可微分函数 $y=y(x)$ 满足方程 (1) 且 $y(0)=0$.

证 设 $F(x, y) = x - y - \varphi(y)$, 则

1) 由于 $\varphi(0)=0$, 故 $F(0, 0)=0$;

2) 当 $-\infty < x < +\infty$, $-a < y < a$ 时, $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$ 及 $F'_y(x, y) = -1 - \varphi'(y)$ 均连续;

3) $F'_y(0, 0) = -1 - \varphi'(0) < 0$, 当然 $F'_y(0, 0) \neq 0$.

于是, 由隐函数的存在及可微性定理知: 存在 $\varepsilon > 0$, 使当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时, 存在唯一的可微分函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x = y + \varphi(y)$ 及 $y(0)=0$.

3370. 设 $y=y(x)$ 为由方程

$$x = ky + \varphi(y)$$

所定义的隐函数，其中常数 $k \neq 0$ 且 $\varphi(y)$ 为以 ω 为周期的可微周期函数，且 $|\varphi'(y)| \leq |k|$ 。证明

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数。

证 由于 $x = ky + \varphi(y)$ ，故 $\frac{dx}{dy} = k + \varphi'(y)$ 。又因

$|\varphi'(y)| \leq |k|$ ，故 $\frac{dx}{dy}$ 与 k 同号，即 x 为 y 的严格

单调函数，且为连续的。由于 $\varphi(y)$ 是连续的以 ω 为周期的函数，故有界，从而当 $k > 0$ 时，

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} x = +\infty;$$

当 $k < 0$ 时，

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} x = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} x = -\infty;$$

由此可知，其反函数 $y = y(x)$ 存在唯一，且是 $-\infty < x < +\infty$ 上有定义的严格单调可微函数。令

$$y(x) - \frac{x}{k} = \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (1)$$

则由 $x = ky(x) + \varphi[y(x)]$ ， $\varphi[y(x) + \omega] = \varphi[y(x)]$ 知 $x + k\omega = ky(x) + \varphi[y(x)] + k\omega = k[y(x) + \omega] + \varphi[y(x) + \omega]$ 。从而，根据反函数的唯一性，得

$$y(x + k\omega) = y(x) + \omega \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2)$$

由 (1) 式与 (2) 式，得

$$\psi(x + k\omega) = y(x + k\omega) - \frac{x + k\omega}{k} = y(x) - \frac{x}{k}$$

$$= \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

同理可证

$$\psi(x - k\omega) = \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

故 $\psi(x)$ 是以 $|k|\omega$ 为周期的可微周期函数. 由(1)得

$$y = y(x) = \frac{1}{k}x + \psi(x).$$

证毕.

对于由下列各方程式所定义的函数 y , 求出 y' 和 y'' :

3371. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2.$

解 用求导数及微分两种方法解之.

解法一

等式两端分别对 x 求导数, 得

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0,$$

故有

$$y' = \frac{y+x}{y-x}.$$

再对上式求导数, 得

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(y-x)(y'+1) - (y+x)(y'-1)}{(y-x)^2} \\ &= \frac{2y - 2xy'}{(y-x)^2} = \frac{2y(y-x) - 2x(y+x)}{(y-x)^3} \\ &= \frac{2(y^2 - 2xy - x^2)}{(y-x)^3} = -\frac{2a^2}{(y-x)^3} = \frac{2a^2}{(x-y)^3}. \end{aligned}$$

解法二

等式两端分别微分, 得

$$2xdx + 2xdy + 2ydx - 2ydy = 0, \quad (1)$$

故有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}.$$

对(1)式两端再微分一次, 并注意 $d^2x = 0$, 得

$$dx^2 + 2dxdy - dy^2 + (x-y)d^2y = 0,$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1 + 2\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y-x} = \frac{1 + \frac{2(y+x)}{y-x} - \left(\frac{y+x}{y-x}\right)^2}{y-x} \\ &= \frac{2a^2}{(x-y)^3}. \end{aligned}$$

$$3372. \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

解 解法一

等式两端对 x 求导数, 得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}.$$

解之即得

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

将上式再对 x 求导数, 得

$$y'' = \frac{(x-y)(1+y') - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(xy' - y)}{(x-y)^2} \\
&= \frac{2x(x+y) - 2y(x-y)}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

解法二

等式两端分别微分，得

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

解之即得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

对 $x dx + y dy = x dy - y dx$ 再微分一次，得

$$dx^2 + dy^2 + y d^2 y = x dy^2,$$

故有

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{1}{x-y} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \\
&= \frac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

以下各题根据情况采用直接求导法或微分法.

3373. $y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1).$

解 等式两端对 x 求导数，得

$$y' - \varepsilon y' \cos y = 1,$$

故有

$$y' = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}$$

将上式再对 x 求导数, 得

$$y'' = -\frac{\varepsilon y' \sin y}{(1 - \varepsilon \cos y)^2} = -\frac{\varepsilon \sin y}{(1 - \varepsilon \cos y)^3}.$$

3374. $x^y = y^x$ ($x \neq y$).

解 取对数得

$$y \ln x = x \ln y \text{ 或 } \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \quad (x > 0, y > 0).$$

两端对 x 求导数, 得

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{y'(1 - \ln y)}{y^2},$$

故有

$$y' = \frac{y^2(1 - \ln x)}{x^2(1 - \ln y)}.$$

将上式再对 x 求导数, 得

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{x^4(1 - \ln y)^2} \left\{ x^2(1 - \ln y) \left[2yy'(1 - \ln x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{y^2}{x} \right] - y^2(1 - \ln x) \left[2x - 2x \ln y - \frac{x^2 y'}{y} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{x^4(1 - \ln y)^3} \left\{ y^2 \left[y(1 - \ln x)^2 - 2(x - y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (1 - \ln x)(1 - \ln y) - x(1 - \ln y)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

3375. $y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

解 $\frac{y}{x} = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, 显然 $\frac{y}{x} \neq 1$.

两端微分, 得

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

于是, $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, 即 $\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$, 故有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

将上式对 x 求导数, 即得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = 0.$$

3376. 证明: 当

$$1 + xy = k(x - y)$$

(式中 k 为常数) 时, 有等式

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

证 将等式 $1 + xy = k(x - y)$ 两端微分, 得

$$xdy + ydx = k(dx - dy),$$

故

$$\begin{aligned} (x-y)(xdy + ydx) &= k(x-y)(dx - dy) \\ &= (1+xy)(dx - dy), \end{aligned}$$

简化即得

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

证毕.

3377. 证明: 若

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

则当 $xy > 0$ 时有等式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

证 将所给等式两端微分, 得

$$2xy^2dx + 2x^2ydy + 2xdx + 2ydy = 0,$$

即

$$x(y^2+1)dx + y(x^2+1)dy = 0. \quad (1)$$

由 $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ 可解得

$$x = \pm \sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \quad (2)$$

因为 $xy > 0$, 故知 x, y 应同取正号或同取负号. 不论取什么符号, 当用(2)式代入(1)式后, 均可得

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

3378. 证明: 方程

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a \neq 0)$$

在点 $x=0, y=0$ 的邻域中定义两个可微分的函数:

$y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$. 求 $y'_1(0)$ 及 $y'_2(0)$.

解 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 即

$$y^4 + (2x^2 + a^2)y^2 - (a^2x^2 - x^4) = 0.$$

解之得

$$y^2 = \frac{-(2x^2 + a^2) + \sqrt{8a^2x^2 + a^4}}{2}$$

(根号前取正号是由于 $y^2 \geq 0$) . 记

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2 + a^4} - 2x^2 - a^2}{2}} = \pm f(x^2).$$

不难看出 $(0,0)$ 为枝点. 从点 $(0,0)$ 出发, 有单值连续
的四个分枝:

$$y_{\text{I}} = f(x^2), \quad 0 \leq x \leq \delta;$$

$$y_{\text{II}} = f(x^2), \quad -\delta \leq x \leq 0;$$

$$y_{\text{III}} = -f(x^2), \quad 0 \leq x \leq \delta;$$

$$y_{\text{IV}} = -f(x^2), \quad -\delta \leq x \leq 0.$$

这几个单值分枝能否组成 $(-\delta, \delta)$ 上的可微分函数,
主要是看组成的函数在 $x=0$ 是否可微. 为此, 研究
各分枝在点 $x=0$ 处的单侧导数.

$$\begin{aligned} y'_{\text{I}+}(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{y_{\text{I}}(x) - y_{\text{I}}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x^2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2 + a^4} - 2x^2 - a^2}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2 + a^4} - 2x^2 - a^2}{2x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{8a^2x^2 + a^4 - (2x^2 + a^2)^2}{2x^2(\sqrt{8a^2x^2 + a^4} + 2x^2 + a^2)}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{4a^2 - 4x^2}{2(\sqrt{8a^2x^2 + a^4} + 2x^2 + a^2)}} = 1.$$

同法可得

$$y'_{\text{I}-}(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x^2)}{x} = -1,$$

$$y'_{\text{II}+}(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-f(x^2)}{x} = -1,$$

$$y'_{\text{IV}-}(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-f(x^2)}{x} = 1.$$

由上可以看出

$$y_1(x) = \begin{cases} f(x^2), & 0 \leq x < \delta, \\ -f(x^2), & -\delta < x < 0, \end{cases}$$

及

$$y_2(x) = \begin{cases} -f(x^2), & 0 \leq x < \delta, \\ f(x^2), & -\delta < x < 0 \end{cases}$$

是仅有的两个过点 $(0,0)$ 的可微分函数, 且 $y'_1(0)=1$ 及 $y'_2(0)=-1$.

*) 此方程的图象系双纽线 (图 6·28), 它的极坐标方程为

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

以上作法及结论由图很容易看

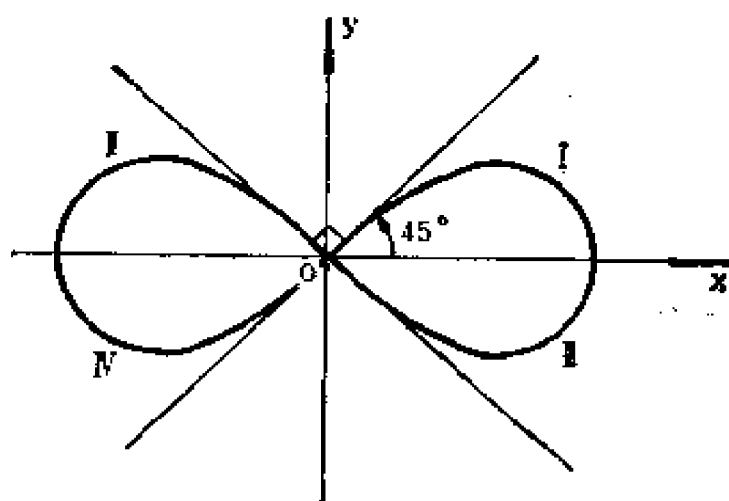


图 6·28

出.

3379. 设:

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3,$$

求 y' 当 $x=0$ 和 $y=0$ 时的值.

解 本题讨论方法与 3378 题类似, 但由于不能直接解出 $y=f(x)$, 故只能用隐函数表示. 由 $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$ 得

$$x^4 + (2y^2 - 3y)x^2 + y^4 + y^3 = 0.$$

解之得

$$x^2 = \frac{(3y - 2y^2) \pm \sqrt{9y^2 - 16y^3}}{2}.$$

令

$$g(y) = \frac{3y - 2y^2 + \sqrt{9y^2 - 16y^3}}{2},$$

$$h(y) = \frac{3y - 2y^2 - \sqrt{9y^2 - 16y^3}}{2},$$

则不难验证: 在 $y=0$ 的邻域内均有 $g(y) \geq 0$; 而仅当 $y \geq 0$ 时才有 $h(y) \geq 0$. 于是, 点 $(0, 0)$ 为枝点, 且从该点出发, 有六个单值连续枝:

I. $x_1 = \sqrt{g(y)}$, $0 \leq y < \varepsilon$; 它在 $0 \leq x < \delta$ 上定义隐函数 $y = f_1(x)$.

II. $x_2 = -\sqrt{g(y)}$, $0 \leq y < \varepsilon$; 它在 $-\delta < x \leq 0$ 上定义隐函数 $y = f_2(x)$.

III. $x_3 = \sqrt{g(y)}$, $-\varepsilon < y \leq 0$; 它在 $0 \leq x < \delta$ 上定义隐函数 $y = f_3(x)$.

IV. $x_4 = -\sqrt{g(y)}$, $-\varepsilon < y \leq 0$; 它在 $-\delta < x \leq 0$

上定义隐函数 $y=f_4(x)$.

V. $x_5=\sqrt{h(y)}$, $0\leq y<\varepsilon$; 它在 $0\leq x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_5(x)$.

VI. $x_6=-\sqrt{h(y)}$, $0\leq y<\varepsilon$; 它在 $-\delta\leq x\leq 0$ 上定义隐函数 $y=f_6(x)$.

上述隐函数的存在性, 易从对右端 y 的表达式求导数而导数不为零获证. 因此, 只要求上述六枝在原点的单侧导数.

$$\begin{aligned} f'_{1+}(0) &= \lim_{x\rightarrow+0} \frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \lim_{y\rightarrow+0} \frac{y}{\sqrt{g(y)}} \\ &= \lim_{y\rightarrow+0} \sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}} \\ &= \lim_{y\rightarrow+0} \sqrt{\frac{2y}{3-2y+\sqrt{9-16y}}} = 0. \end{aligned}$$

$$f'_{2-}(0) = \lim_{x\rightarrow-0} \frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \lim_{y\rightarrow+0} \frac{y}{-\sqrt{g(y)}} = 0.$$

$$\begin{aligned} f'_{3+}(0) &= \lim_{x\rightarrow+0} \frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \lim_{z\rightarrow-0} \frac{y}{\sqrt{g(y)}} \\ &= \lim_{z\rightarrow+0} \frac{-z}{\sqrt{g(-z)}} \\ &= -\lim_{z\rightarrow+0} \sqrt{\frac{2z^2}{\sqrt{9z^2+16z^3}-3z-2z^2}}} \\ &= -\lim_{z\rightarrow+0} \sqrt{\frac{2z^2(\sqrt{9z^2+16z^3}+3z+2z^2)}{(9z^2+16z^3)-(3z+2z^2)^2}} \end{aligned}$$

$$= -\lim_{z \rightarrow +0} \sqrt{\frac{2(\sqrt{9+16z}+3+2z)}{4-4z}} = -\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} f'_{4-}(0) &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow -0} \frac{y}{-\sqrt{g(y)}} \\ &= -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_{5+}(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f_5(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{y}{\sqrt{h(y)}} \\ &= \lim_{y \rightarrow +0} \sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}} \\ &= \lim_{y \rightarrow +0} \sqrt{\frac{2y^2(3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3})}{(3y-2y^2)^2-(9y^2-16y^3)}} \\ &= \lim_{y \rightarrow +0} \sqrt{\frac{2(3-2y+\sqrt{9-16y})}{4+4y}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$f'_{6-}(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f_6(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{y}{-\sqrt{h(y)}} = -\sqrt{3}.$$

于是, 上述六个单值连续枝可组成三个 $(-\delta, \delta)$ 上的可微函数 $y = y_i(x)$ ($i=1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \begin{cases} f_1(x), & x \geq 0 \\ f_2(x), & x < 0 \end{cases}, \quad y'_1(0) = 0; \\ y_2(x) &= \begin{cases} f_3(x), & x \geq 0 \\ f_5(x), & x < 0 \end{cases}, \quad y'_2(0) = -\sqrt{3}; \\ y_3(x) &= \begin{cases} f_5(x), & x \geq 0 \\ f_4(x), & x < 0 \end{cases}, \quad y'_3(0) = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

*) 此方程的图象为三瓣玫瑰线 (图 6·29), 它的极坐标方程为

$$r = a \sin 3\theta.$$

以上作法及结论, 由图很容易看出.

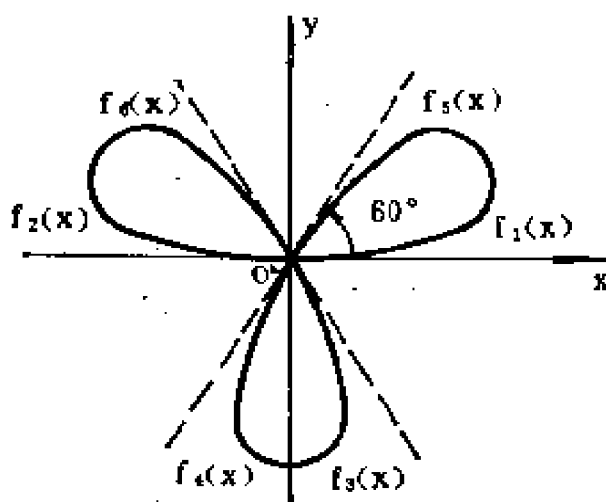


图 6·29

3380. 设 $x^2 + xy + y^2 = 3$,

求 y' , y'' 及 y''' .

解 等式两端对 x 求导数, 得

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0.$$

于是,

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

再对上式求导数, 得

$$y'' = -\frac{1}{(x + 2y)^2} \left\{ (2 + y')(x + 2y) - (1 + 2y')(2x + y) \right\} = -\frac{18}{(x + 2y)^3};$$

$$y''' = \frac{54}{(x + 2y)^4} (1 + 2y') = -\frac{162x}{(x + 2y)^5}.$$

3381. 设:

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0,$$

求 y' , y'' 及 y''' 当 $x = 0$, $y = 1$ 时的值.

解 等式两端对 x 求导数, 得

$$2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0. \quad (1)$$

以 $x=0$, $y=1$ 代入(1)式, 得

$$y' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 0.$$

将(1)式再对 x 求导数, 得

$$2 - y' - y' - xy'' + 4y'^2 + 4yy'' - y'' = 0. \quad (2)$$

以 $x=0$, $y=1$, $y'=0$ 代入(2)式, 得

$$y'' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\frac{2}{3}.$$

将(2)式再对 x 求导数, 得

$$-3y'' - xy''' + 12y'y'' + 4yy''' - y''' = 0. \quad (3)$$

以 $x=0$, $y=1$, $y'=0$, $y''=-\frac{2}{3}$ 代入(3)式, 得

$$y''' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\frac{2}{3}.$$

3382. 证明: 对于二次曲线

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

等式

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[(y'')^{-\frac{2}{3}} \right] = 0$$

为真.

证 原题中的二次曲线应是非退化的, 即

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0,$$

由 $\Delta \neq 0$ 保证 $y'' \neq 0$.

等式两端对 x 求导数, 得

$$2ax + 2by + 2bxy' + 2cyy' + 2d + 2ey' = 0. \quad (1)$$

于是,

$$y' = -\frac{ax + by + d}{bx + cy + e}.$$

(1) 式除以 2 后, 两端再对 x 求导数, 得

$$a + 2by' + cy'^2 + (bx + cy + e)y'' = 0.$$

于是,

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{a + 2by' + cy'^2}{bx + cy + e} = -\frac{1}{(bx + cy + e)^3} \\ &\quad \cdot \{a(bx + cy + e)^2 - 2b(bx + cy + e)(ax + by + d) \\ &\quad + c(ax + by + d)^2\} \\ &= \frac{\Delta}{(bx + cy + e)^3}, \\ (y'')^{-\frac{2}{3}} &= \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot (bx + cy + e)^2 \\ &= \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot [b^2x^2 + c(cy^2 + 2bxy + 2ey) + e^2 + 2bex] \\ &= \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot [b^2x^2 - c(ax^2 + 2dx + f) + 2bex + e^2] \\ &= \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot [(b^2 - ac)x^2 + 2(be - cd)x + e^2 - cf], \end{aligned}$$

即 $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ 是关于 x 的二次三项式, 故

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[(y'')^{-\frac{2}{3}} \right] = 0.$$

对于函数 $z = z(x, y)$ 求一阶和二阶的偏导函数, 设:

3383. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

解 等式两端微分, 得

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0, \quad (1)$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + zd^2z = 0, \quad (2)$$

由 (1) 得

$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

由 (2) 得

$$\begin{aligned} d^2z &= -\frac{1}{z}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= -\frac{1}{z}dx^2 - \frac{1}{z}dy^2 - \frac{1}{z}\left(\frac{x}{z}dx + \frac{y}{z}dy\right)^2 \\ &= -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right)dx^2 - \frac{2xy}{z^3}dxdy - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right)dy^2, \end{aligned}$$

故有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right) = -\frac{z^2 + x^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3}.$$

3384. $z^3 - 3xyz = a^3$.

解 等式两端对 x 求偏导函数, 得

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}.$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

(1) 式除以 3 后再分别对 x 及对 y 求偏导函数, 得

$$2z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\left(2z \frac{\partial z}{\partial y} - x \right) \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - xy) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$- z - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上述两式, 化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}.$$

3385. $x+y+z=e^z$.

解 等式两端微分, 得

$$dx+dy+dz=e^z dz, \quad (1)$$

故有

$$dz = \frac{1}{e^z-1}(dx+dy) = \frac{1}{x+y+z-1}(dx+dy).$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}.$$

再将 (1) 式微分一次, 得

$$d^2 z = e^z d^2 z + e^z dz^2,$$

故有

$$d^2 z = -\frac{e^z}{e^z-1}(dz)^2 = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3}(dx^2 + 2dxdy + dy^2).$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3} \\ &= -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}. \end{aligned}$$

3386. $z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$

解 设 $r = \sqrt{x^2 - y^2}$, 则 $\frac{z}{r} = \operatorname{tg} \frac{z}{r},$

$$d\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{d\left(\frac{z}{r}\right)}{1 + \left(\frac{z}{r}\right)^2}.$$

从而有 $d\left(\frac{z}{r}\right) = 0$, 或 $rdz - zdr = 0$, 即

$$dz = \frac{z}{r^2}(xdx - ydy). \quad (1)$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zx}{r^2} = \frac{xz}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yz}{r^2} = -\frac{yz}{x^2 - y^2}.$$

由 (1) 得

$$(x^2 - y^2)dz = xzdx - yzdy. \quad (2)$$

(2) 式再微分一次, 得

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)d^2z &= -(2xdx - 2ydy)dz + xdx dz \\ &\quad + zdx^2 - ydydz - zdy^2 \\ &= -(xdx - ydy) \left[\frac{z(xdx - ydy)}{x^2 - y^2} \right] + zdx^2 - zdy^2 \\ &= \frac{z}{x^2 - y^2} \left[-x^2dx^2 + 2xydx dy - y^2dy^2 \right. \\ &\quad \left. + (x^2 - y^2)dx^2 - (x^2 - y^2)dy^2 \right] \\ &= \frac{z(-y^2dx^2 + 2xydx dy - x^2dy^2)}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2 z}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 z}{(x^2 - y^2)^2}.$$

3387. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}.$

解: 等式两端对 x 求偏导函数, 得

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} = e^{-(x+y+z)} \cdot \left(-1 - \frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

利用对称性, 得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -1.$$

显见

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3388. 设,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \quad (1)$$

及

$$f(x, y, z) = xyz^3.$$

求: (a) $f'_x(1, 1, 1)$, 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 (1) 所定义的隐函数, (b) $f'_x(1, 1, 1)$, 设 $y = y(x, z)$ 是由方程 (1) 所定义的隐函数. 说明为什么这些导

函数相异.

解 (a) 记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$,
则由方程 (1) 所定义的隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导
函数 $z'_x(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 点的值为

$$\begin{aligned} z'_x(1, 1) &= -\frac{F'_x(1, 1, 1)}{F'_z(1, 1, 1)} = -\frac{\frac{d}{dx}F(x, 1, 1)\Big|_{x=1}}{\frac{d}{dz}F(1, 1, z)\Big|_{z=1}} \\ &= -\frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 2 - 3x)\Big|_{x=1}}{\frac{d}{dz}(2 + z^2 - 3z)\Big|_{z=1}} = -1. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y, z(x, y))]\Big|_{(1, 1, 1)} \\ &= \frac{d}{dx}f(x, 1, 1)\Big|_{x=1} + \frac{\partial}{\partial z}f(1, 1, z)\Big|_{z=1} \cdot z'_x(1, 1) \\ &= 1 + 3 \cdot (-1) = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad y'_x(1, 1) &= -\frac{F'_x(1, 1, 1)}{F'_y(1, 1, 1)} \\ &= -\frac{\frac{d}{dx}F(x, 1, 1)\Big|_{x=1}}{\frac{d}{dy}F(1, y, 1)\Big|_{y=1}} = -1. \end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y(x, z), z)]\Big|_{(1, 1, 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} f(x, 1, 1) \Big|_{x=1} + \frac{d}{dy} f(1, y, 1) \Big|_{y=1} \cdot y'_x(1, 1) \\
&= 1 + 2 \cdot (-1) = -1.
\end{aligned}$$

由 (a) 与 (6) 所求得的对 x 的偏导函数在 $(1, 1, 1)$ 点的值不相等, 可说明如下:

方程 $F(x, y, z) = 0$ 代表一个空间曲面, 而 $f(x, y, z)$ 表示定义在这个曲面上的一个函数. 函数 $G(x, y) = f(x, y, z(x, y))$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxy 平面上后, 原曲面上的函数看成在 Oxy 平面上定义的一个函数, $G'_x(x, y)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率, 它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率, 还包含了原来函数在 Oz 轴方向的变化率的一部份. 同样地, $H(x, z) = f(x, y(x, z), z)$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxz 平面上后, 原曲面上的函数看成在 Oxz 平面上定义的函数, $H'_x(x, z)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率, 它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率, 还包含了原来函数在 Oy 轴方向的变化率的一部份. 一般地, 原来函数在 Oy 轴和 Oz 轴方向的变化率的那两部份是不相等的.

3389. 设 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 当 $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$ 时的值.

解 等式两端微分一次, 得

$$2x dx + 4y dy + 6z dz + x dy + y dx - dz = 0.$$

即

$$(1-6z)dz=(2x+y)dx+(4y+x)dy. \quad (1)$$

再微分一次, 得

$$(1-6z)d^2z=6dz^2+2dx^2+2dxdy+4dy^2. \quad (2)$$

以 $x=1, y=-2, z=1$ 代入 (1) 式, 得 $dz=\frac{7}{5}dy$.

再以 $z=1, dz=\frac{7}{5}dy$ 代入 (2) 式, 得

$$d^2z=-\frac{2}{5}dx^2-\frac{2}{5}dxdy-\frac{394}{125}dy^2.$$

于是, 当 $x=1, y=-2, z=1$ 时,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{1}{5}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{394}{125}.$$

求 dz 和 d^2z , 设:

$$3390. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

解 等式两端微分一次, 得

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0.$$

于是,

$$dz = -\frac{c^2}{z} \left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} \right).$$

再将 dz 微分一次, 得

$$d^2z = -\frac{c^2}{z^2} \left[z \left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} \right) - \left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} \right) dz \right]$$

$$= -\frac{c^4}{z^3} \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2 b^2} dx dy + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dy^2}{b^2} \right].$$

3391. $xyz = x + y + z$.

解 等式两端微分一次, 得

$$yzdx + xzdy + xydz = dx + dy + dz. \quad (1)$$

于是,

$$dz = -\frac{(1-yz)dx + (1-xz)dy}{1-xy}. \quad (2)$$

对 (1) 式再微分一次, 得

$$2zdx dy + 2xdy dz + 2ydx dz + xy d^2 z = d^2 z. \quad (3)$$

以 (2) 式代入 (3) 式, 化简整理得

$$\begin{aligned} d^2 z &= -\frac{2}{(1-xy)^2} \left\{ y(1-yz)dx^2 + [x+y \right. \\ &\quad \left. - z(1+xy)]dx dy + x(1-xz)dy^2 \right\} \\ &= -\frac{2 \{ y(1-yz)dx^2 - 2zdx dy + x(1-xz)dy^2 \}}{(1-xy)^2}. \end{aligned}$$

3392. $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$.

解 等式两端微分一次, 得

$$\frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{dz}{z} - \frac{dy}{y}.$$

于是,

$$dz = \frac{z(ydx + zdy)}{y(x+z)}.$$

对 $(x+z)dz = zdx + \frac{z^2}{y}dy$ 再微分一次, 得

$$\begin{aligned}(x+z)d^2z &= -(dx+dz)dz + dzdx \\ &\quad + \frac{2z}{y}dzdy - \frac{z^2}{y^2}dy^2 \\ &= -dz^2 + \frac{2z}{y}dydz - \frac{z^2}{y^2}dy^2 = -\left(dz - \frac{z}{y}dy\right)^2 \\ &= -\frac{z^2[(ydx + zdy) - (x+z)dy]^2}{y^2(x+z)^2} \\ &= -\frac{z^2(ydx - xdy)}{y^2(x+z)^2}.\end{aligned}$$

于是,

$$d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x+z)^3}.$$

3393. $z = x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{z-x}.$

解 等式两端微分一次, 得

$$dz = dx + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(z-x)^2}} \cdot \frac{(z-x)dy - y(dz - dx)}{(z-x)^2}.$$

化简整理, 得

$$dz = dx + \frac{z-x}{(z-x)^2 + y(y+1)} dy.$$

再对上式微分一次, 得

$$\begin{aligned} d^2z = & \frac{1}{[(z-x)^2 + y(y+1)]^2} \{ [(z-x)^2 \\ & + y(y+1)] dy \cdot (dz - dx) - (z-x) dy \\ & \cdot [2(z-x)(dz - dx) + 2y dy + dy] \}. \end{aligned}$$

将 dz 代入化简整理, 即有

$$d^2z = \frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2 + y^2]}{[(x-z)^2 + y(y+1)]^3} dy^2.$$

3394. 设 $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$, 求 du .

解 等式两端微分, 得

$$3u^2 du - 3u^2(dx + dy) - 6u(x+y)du + 3z^2 dz = 0.$$

于是,

$$du = \frac{u^2(dx + dy) - z^2 dz}{u[u - 2(x+y)]}.$$

3395. 设 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数, 得

$$F'_1 \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + F'_2 \cdot \left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F'_1 + 2xF'_2}{F'_1 + 2zF'_2}. \quad (1)$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1 + 2yF'_2}{F'_1 + 2zF'_2}.$$

(1) 式两端对 y 求偏导函数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{(F'_1 + 2zF'_2)^2} \{ (F'_1 + 2zF'_2) \\ &\quad \cdot [(F'_1)'_y + 2x(F'_2)'_y] - (F'_1 + 2xF'_2) \\ &\quad \cdot [(F'_1)'_y + 2z(F'_2)'_y + 2z'_y \cdot F'_2] \} \\ &= -\frac{1}{(F'_1 + 2zF'_2)^2} \{ 2(x-z)F'_1 \cdot (F'_2)'_y + 2(z-x)F'_2 \\ &\quad \cdot (F'_1)'_y - 2[F'_1F'_2 + x(F'_2)^2]z'_y \} \\ &= -\frac{2(x-z)}{(F'_1 + 2zF'_2)^2} \{ F'_1 \cdot (F'_2)'_y - F'_2 \cdot (F'_1)'_y \} \\ &\quad - \frac{2F'_2 \cdot (F'_1 + 2xF'_2) \cdot (F'_1 + 2yF'_2)}{(F'_1 + 2zF'_2)^3}. \end{aligned}$$

现分别求 $(F'_1)'_y$ 及 $(F'_2)'_y$:

$$(F'_1)'_y = F''_{11} \cdot (1 + z'_y) + F''_{12} \cdot (2y + 2zz'_y),$$

$$(F'_2)'_y = F''_{21} \cdot (1 + z'_y) + F''_{22} \cdot (2y + 2zz'_y).$$

注意到

$$1 + z'_y = \frac{2(z-y)F'_2}{F'_1 + 2zF'_2}, \quad 2y + 2zz'_y = \frac{2(y-z)F'_1}{F'_1 + 2zF'_2},$$

即得

$$F'_1 \cdot (F'_2)'_y - F'_2 \cdot (F'_1)'_y = F'_1 F''_{21} \cdot \frac{2(z-y)F'_2}{F'_1 + 2zF'_2}$$

$$\begin{aligned}
& + F'_1 F''_{22} \cdot \frac{2(y-z)F'_1}{F'_1 + 2zF'_2} \\
& - F'_2 F''_{11} \cdot \frac{2(z-y)F'_2}{F'_1 + 2zF'_2} - F'_2 F''_{12} \cdot \frac{2(y-z)F'_1}{F'_1 + 2zF'_2} \\
& = \frac{2(y-z)}{F'_1 + 2zF'_2} \{ (F'_1)^2 F''_{22} - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + (F'_2)^2 F''_{11} \}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= - \frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1 + 2zF'_2)^3} \{ (F'_1)^2 F''_{22} \\
& - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + (F'_2)^2 F''_{11} \} \\
& - \frac{2F'_2 \cdot (F'_1 + 2xF'_2) \cdot (F'_1 + 2yF'_2)}{(F'_1 + 2zF'_2)^3}.
\end{aligned}$$

3396. 设 $F(x-y, y-z, z-x) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数, 得

$$F'_1 + F'_2 \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + F'_3 \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1 \right) = 0.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_1 - F'_3}{F'_2 - F'_3}.$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_2 - F'_1}{F'_2 - F'_3}.$$

3397. 设 $F(x, x+y, x+y+z)=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 等式两端分别对 x 及对 y 求偏导函数, 得

$$F'_1 + F'_2 + F'_3 \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$F'_2 + F'_3 \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(1 + \frac{F'_1 + F'_2}{F'_3}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(1 + \frac{F'_2}{F'_3}\right).$$

再将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 对 x 求偏导函数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & -\frac{1}{(F'_3)^2} \left\{ F'_3 \cdot \left[F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + F''_{21} + F''_{22} + F''_{23} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \right] \right. \\ & \left. - (F'_1 + F'_2) \cdot \left[F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 代入化简整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & -\frac{1}{(F'_3)^3} \{ (F'_3)^2 \cdot (F''_{11} + 2F''_{12} + F''_{22}) \\ & - 2(F'_1 + F'_2)F'_3 \cdot (F''_{13} + F''_{23}) + (F'_1 + F'_2)^2 F''_{33} \}. \end{aligned}$$

3398. 设 $F(xz, yz)=0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数, 得

$$F'_1 \cdot \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F'_2 \cdot y \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{z F'_1}{x F'_1 + y F'_2}.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 再对 x 求偏导函数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & - \frac{1}{(x F'_1 + y F'_2)^2} \left\{ (x F'_1 + y F'_2) \cdot \left[F'_1 \frac{\partial z}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. + z \left(F''_{11} \cdot \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F''_{12} y \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] \right. \\ & \left. - \left[F'_1 + x \left(F''_{11} \cdot \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F''_{12} y \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + y \left(F''_{21} \cdot \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F''_{22} y \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] z F'_1 \right\}. \end{aligned}$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 代入化简整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & - \frac{1}{(x F'_1 + y F'_2)^3} \{ y^2 z^2 [(F'_1)^2 F''_{22} \\ & - 2 F'_1 F'_2 F''_{12} + (F'_2)^2 F''_{11}] - 2 z (F'_1)^2 \\ & \cdot (x F'_1 + y F'_2) \}. \end{aligned}$$

3399. 设 (a) $F(x+z, y+z)=0$;

(6) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$, 求 $d^2 z$.

解 (a) 等式两端微分, 得

$$F'_1 \cdot (dx + dz) + F'_2 \cdot (dy + dz) = 0. \quad (1)$$

于是,

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{F'_1 dx + F'_2 dy}{F'_1 + F'_2}, \\ dx + dz &= \frac{F'_2 \cdot (dx - dy)}{F'_1 + F'_2}, \\ dy + dz &= -\frac{F'_1 \cdot (dx - dy)}{F'_1 + F'_2}. \end{aligned}$$

对 (1) 式再求一次微分, 得

$$\begin{aligned} F''_{11} \cdot (dx + dz)^2 + 2F''_{12} \cdot (dx + dz)(dy + dz) \\ + F''_{22} \cdot (dy + dz)^2 + (F'_1 + F'_2) d^2 z = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} d^2 z &= -\frac{1}{F'_1 + F'_2} [F''_{11} \cdot (dx + dz)^2 + 2F''_{12} \\ &\quad \cdot (dx + dz)(dy + dz) + F''_{22} \cdot (dy + dz)^2] \\ &= -\frac{1}{(F'_1 + F'_2)^2} [F''_{11} \cdot (F'_2)^2 - 2F'_1 F'_2 F''_{12} \\ &\quad + F''_{22} \cdot (F'_1)^2] (dx - dy)^2. \end{aligned}$$

(6) 等式两端微分, 得

$$F'_1 \cdot \frac{z dx - x dz}{z^2} + F'_2 \cdot \frac{z dy - y dz}{z^2} = 0. \quad (2)$$

于是,

$$dz = \frac{z(F'_1 dx + F'_2 dy)}{xF'_1 + yF'_2},$$

$$zdx - xdz = -\frac{zF'_2 \cdot (ydx - xdy)}{xF'_1 + yF'_2},$$

$$zdy - ydz = -\frac{zF'_1 \cdot (ydx - xdy)}{xF'_1 + yF'_2}.$$

(2) 式乘以 z^2 后再微分一次, 得

$$F''_{11} \cdot \frac{(zdx - xdz)^2}{z^2} + 2F''_{12}$$

$$\cdot \frac{(zdx - xdz)(zdy - ydz)}{z^2} + F''_{22} \cdot \frac{(zdy - ydz)^2}{z^2}$$

$$- (xF'_1 + yF'_2) d^2z = 0.$$

于是,

$$d^2z = \frac{1}{z^2(xF'_1 + yF'_2)} [F''_{11} \cdot (zdx - xdz)^2$$

$$+ 2F''_{12}(zdx - xdz)(zdy - ydz)$$

$$+ F''_{22} \cdot (zdy - ydz)^2]$$

$$= \frac{(ydx - xdy)^2}{(xF'_1 + yF'_2)^3} [F''_{11} \cdot (F'_2)^2$$

$$- 2F'_1F'_2F''_{12} + F''_{22} \cdot (F'_1)^2].$$

3400. 设 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ 为由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所定义的函数, 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

证 根据隐函数求导法, 有

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

三式相乘即得

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

3401. 设 $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{dy}{dz}$.

解 对 z 求导数, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0, \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} + 2z = 0. \end{cases}$$

联立求解, 得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}.$$

3402. 设 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$, $x+y+z=2$, 求 $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$

和 $\frac{d^2y}{dz^2}$ 当 $x=1$, $y=-1$, $z=2$ 时的值.

解 对 z 求导数, 得

$$\begin{cases} 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} = z, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 2x\frac{d^2x}{dz^2} + 2\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dz^2} = 1, & (3) \\ \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{d^2y}{dz^2} = 0. & (4) \end{cases}$$

將 $x=1, y=-1, z=2$ 代入 (1), (2), 解得

$$\frac{dx}{dz} = 0, \quad \frac{dy}{dz} = -1.$$

將上述結果及 x, y, z 值聯同由 (4) 式所決定的式子

$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{d^2y}{dz^2}$ 一起代入 (3) 式, 即得

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{4}.$$

3403. 設 $xu - yv = 0$, $yu + xv = 1$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和

$$\frac{\partial v}{\partial y}.$$

解 微分得

$$\begin{cases} xdu - ydv = vdy - udx, \\ ydu + xdv = -vdx - udy. \end{cases}$$

於是,

$$du = \frac{1}{x^2 + y^2} [-(xu + yv)dx + (xv - yu)dy],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}.$$

同法可得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 > 0).$$

3404. 设 $u+v=x+y$, $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$, 求 du, dv, d^2u 和 d^2v .

解 将原式改写为

$$\begin{cases} u+v=x+y, \\ y\sin u=x\sin v. \end{cases}$$

微分得

$$\begin{cases} du+dv=dx+dy, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sin u dy + y \cos u du = \sin v dx + x \cos v dv. \end{cases} \quad (2)$$

联立求解, 得

$$du = \frac{1}{x \cos v + y \cos u} [(\sin v + x \cos v) dx - (\sin u - x \cos v) dy],$$

$$dv = \frac{1}{x \cos v + y \cos u} [-(\sin v - y \cos u) dx + (\sin u + y \cos u) dy].$$

对 (1), (2) 式再微分一次, 得

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ y \cos u \cdot d^2u + 2 \cos u \cdot dy du - y \sin u \cdot du^2 \\ \quad = x \cos v \cdot d^2v + 2 \cos v \cdot dx dv - x \sin v \cdot dv^2. \end{cases}$$

联立求解, 得

$$d^2u = -d^2v = \frac{1}{x\cos v + y\cos u} [(2\cos v dx - x\sin v dv) dv - (2\cos u dy - y\sin u du) du].$$

3405. 设:

$$e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

求 du, dv, d^2u 和 d^2v 当 $x=1, y=1, u=0, v=\frac{\pi}{4}$ 时的表达式.

解 将所给二式相除及平方相加, 分别得

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{v}{y} = \frac{y}{x}, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{2u}{x}} = \frac{x^2 + y^2}{2}. & (2) \end{cases}$$

微分 (1) 式:

$$\sec^2 \frac{v}{y} \cdot \frac{ydv - vdy}{y^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2}. \quad (3)$$

以 $x=1, y=1, v=\frac{\pi}{4}$ 代入 (3) 代, 得

$$dv = \frac{\pi}{4} dy - \frac{1}{2} (dx - dy).$$

微分 (3) 式:

$$2\sec^2 \frac{v}{y} \operatorname{tg} \frac{v}{y} \cdot \left(\frac{ydv - vdy}{y^2} \right)^2 + \sec^2 \frac{v}{y}$$

$$\begin{aligned} & \frac{y^2 d^2 v - 2(y dv - v dy) dy}{y^3} \\ &= \frac{-2(x dy - y dx) dx}{x^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

以 $x=1$, $y=1$, $v=\frac{\pi}{4}$ 及 dv 值代入 (4) 式, 得

$$d^2 v = \frac{1}{2} (dx - dy)^2.$$

微分 (2) 式:

$$2e^{\frac{2x}{x}} \cdot \frac{x du - u dx}{x^2} = x dx + y dy. \quad (5)$$

以 $x=1$, $y=1$, $u=0$ 代入 (5) 式, 得

$$du = \frac{dx + dy}{2}.$$

微分 (5) 式:

$$\begin{aligned} & 4e^{\frac{2x}{x}} \left(\frac{x du - u dx}{x^2} \right)^2 + 2e^{\frac{2x}{x}} \frac{x^2 d^2 u - 2(x du - u dx) dx}{x^3} \\ &= dx^2 + dy^2. \end{aligned} \quad (6)$$

以 $x=1$, $y=1$, $u=0$ 及 du 代入 (6) 式, 得

$$d^2 u = dx^2.$$

3406. 设:

$$x=t+t^{-1}, \quad y=t^2+t^{-2}, \quad z=t^3+t^{-3}.$$

求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 和 $\frac{d^2 z}{dx^2}$.

$$\text{解} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - \frac{2}{t^3}}{1 - \frac{1}{t^2}} = 2 \left(t + \frac{1}{t} \right);$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - \frac{3}{t^4}}{1 - \frac{1}{t^2}} = 3 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1 \right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)}{1 - \frac{1}{t^2}} = 2;$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 \left(2t - \frac{2}{t^3} \right)}{1 - \frac{1}{t^2}} = 6 \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

注 本题也可消去 t 以求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 和 $\frac{d^2z}{dx^2}$. 事实上,

$$y = \left(t + \frac{1}{t} \right)^2 - 2 = x^2 - 2,$$

$$z = \left(t + \frac{1}{t} \right) \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2} \right) = x(x^2 - 3) = x^3 - 3x.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{dz}{dx} = 3x^2 - 3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 6x.$$

再将 $x = t + \frac{1}{t}$ 代入上述结果, 即得

$$\frac{dy}{dx} = 2 \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad \frac{dz}{dx} = 3 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1 \right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 6 \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

3407. 在 Oxy 平面上怎样的域内方程组

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

(式中参数 u 和 v 取一切可能的实数值) 定义 z 为变

数 x 和 y 的函数? 求导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由 $u + v = x$, $u^2 + v^2 = y$ 解得

$$u = \frac{x \pm \sqrt{2y - x^2}}{2}, \quad v = \frac{x \mp \sqrt{2y - x^2}}{2},$$

其中 $2y - x^2 \geq 0$ 或 $y \geq \frac{x^2}{2}$, 此即所求之域.

再由 $x = u + v$ 及 $y = u^2 + v^2$ 分别对 x 求偏导函数, 得

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x}.$$

联立求解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v - u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u}{v - u} \quad (u \neq v).$$

又由 $z = u^3 + v^3$ 对 x 求偏导函数, 即可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2 \cdot \frac{v}{v-u} \\ &\quad - 3v^2 \cdot \frac{u}{v-u} = -3uv.\end{aligned}$$

同法求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$$

注 本题也可消去 u, v 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$. 事实上,

$$x^2 - y = 2uv,$$

$$\begin{aligned}z &= (u+v)(u^2 - uv + v^2) = x\left(\frac{3}{2}y - \frac{x^2}{2}\right) \\ &= \frac{x}{2}(3y - x^2).\end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}x^2 = -3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}(u+v).$$

但一般说来, 用参数表示的函数和消去参数后的函数, 它们的定义域是不同的.

3408. 设 $x = \cos\varphi\cos\psi$, $y = \cos\varphi\sin\psi$, $z = \sin\varphi$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 由 $x = \cos\varphi\cos\psi$, $y = \cos\varphi\sin\psi$ 对 x 求偏导函数, 得

$$\begin{cases} 1 = -\sin\varphi\cos\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ 0 = -\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\varphi\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{cases}$$

联立求解，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}.$$

于是，

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\operatorname{ctg}\varphi\cos\psi, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ &= \frac{\cos\psi}{\sin^2\varphi}\cdot\left(-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}\right) + \operatorname{ctg}\varphi\sin\psi\cdot\left(-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\right) \\ &= -\frac{\cos^2\psi + \sin^2\psi\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi} = -\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}. \end{aligned}$$

注 本题也可消去 φ, ψ 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. 事实上，

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \cos^2\varphi\cos^2\psi + \cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi \\ &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1. \end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned} 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{z - x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}. \end{aligned}$$

$$= -\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cos^2\psi}{\sin^3\varphi}.$$

3409. 设 $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

解 本题求微分, 可将所有的二阶偏导函数一起求出.

$$dx = \cos v du - u \sin v dv,$$

$$dy = \sin v du + u \cos v dv.$$

联立求解, 得

$$du = \cos v dx + \sin v dy,$$

$$dv = \frac{1}{u}(-\sin v dx + \cos v dy),$$

$$u dv = -\sin v dx + \cos v dy.$$

再对上式微分一次, 得

$$u d^2 v + du dv = -\cos v dv dx - \sin v dv dy$$

$$= -du dv,$$

于是,

$$d^2 z = d^2 v = -\frac{2}{u} du dv = -\frac{2}{u^2} (\cos v dx + \sin v dy)$$

$$\cdot (-\sin v dx + \cos v dy)$$

$$= \frac{2}{u^2} (\sin v \cos v dx^2 - \cos 2v dx dy - \sin v \cos v dy^2),$$

从而有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2 \sin v \cos v}{u^2} = \frac{\sin 2v}{u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}.$$

注 本题也可消去 u, v , 由 $z = v = \arctg \frac{y}{x}$ 获解.

3410. 设 $z = z(x, y)$ 为由方程组:

$$x = e^{u+v}, \quad y = e^{u-v}, \quad z = uv$$

(u 及 v 为参数) 所定义的函数, 求当 $u=0$ 及 $v=0$ 时的 dz 及 d^2z .

解 $dx \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = e^{u+v}(du+dv) \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = du+dv,$

$$dy \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = e^{u-v}(du-dv) \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = du-dv.$$

于是, 当 $u=0$ 及 $v=0$ 时,

$$du = \frac{1}{2}(dx+dy), \quad dv = \frac{1}{2}(dx-dy);$$

$$dz = u dv + v du = 0;$$

$$d^2z = u d^2v + 2 du dv + v d^2u = 2 du dv$$

$$= 2 \left(\frac{dx+dy}{2} \right) \left(\frac{dx-dy}{2} \right) = \frac{1}{2}(dx^2 - dy^2).$$

3411. 设 $z = x^2 + y^2$, 其中 $y = y(x)$ 为由方程 $x^2 - xy + y^2$

$= 1$ 所定义的函数, 求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

解 先由 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0,$$

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0. \quad (1)$$

于是,

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}, \quad y'' = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3} = \frac{6}{(x - 2y)^3}.$$

下面求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2yy' = 2x + 2y \cdot \frac{2x - y}{x - 2y} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2 + 2y'^2 + 2y''y = 2y' + xy''$$

$$= \frac{2(2x - y)}{x - 2y} + \frac{6x}{(x - 2y)^3}.$$

3412. 设 $u = \frac{x+z}{y+z}$, 其中 z 为由方程式 $ze^z = xe^x + ye^y$ 所

定义的函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 将 $ze^z = xe^x + ye^y$ 两端微分, 得

$$e^z(1+z)dz = e^x(1+x)dx + e^y(1+y)dy.$$

又因

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{(y+z)^2} [(y+z)dx + (y+z)dz \\ &\quad - (x+z)dy - (x+z)dz] \\ &= \frac{1}{(y+z)^2} [(y+z)dx - (x+z)dy + (y-x)dz] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(y+z)^2} [(y+z)dx - (x+z)dy \\ + \frac{(y-x)e^x(1+x)}{e^x(1+z)}dx + \frac{(y-x)e^y(1+y)}{e^y(1+z)}dy],$$

故得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y+z} + \frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{x-z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{y-z}.$$

3413. 设方程:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

定义 z 为 x 和 y 的函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 对 x 求偏导函数, 得

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

由 (1) 及 (2) 解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad (4)$$

其中

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

再将 (4) 的结果代入 (3), 即得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right),$$

同法求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right).$$

3414. 设:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

求反函数: $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 的一阶和二阶偏导函数.

解 微分二次, 得

$$dx = \varphi'_1 du + \varphi'_2 dv, \quad (1)$$

$$dy = \psi'_1 du + \psi'_2 dv, \quad (2)$$

$$0 = \varphi''_{11} du^2 + 2\varphi''_{12} dudv + \varphi''_{22} dv^2 + \varphi'_1 d^2u + \varphi'_2 d^2v, \quad (3)$$

$$0 = \psi''_{11} du^2 + 2\psi''_{12} dudv + \psi''_{22} dv^2 + \psi'_1 d^2u + \psi'_2 d^2v. \quad (4)$$

其中右下角标号 1, 2 分别代表对 u, v 的偏导函数, 余类推.

令 $I = \varphi'_1 \psi'_2 - \varphi'_2 \psi'_1$, 则由 (1), (2) 可解得

$$du = \frac{1}{I}(\psi'_2 dx - \varphi'_2 dy), \quad (5)$$

$$dv = \frac{1}{I}(\varphi'_1 dy - \psi'_1 dx). \quad (6)$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I}\psi'_2 = \frac{1}{I}\frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I}\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{I}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{I}\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

由 (3), (4) 解出 d^2u, d^2v , 并把 (5), (6) 的结果代入, 即得

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{1}{I}[\varphi'_2(\psi''_{11}du^2 + 2\psi''_{12}dudv + \psi''_{22}dv^2) \\ &\quad - \psi'_2(\varphi''_{11}du^2 + 2\varphi''_{12}dudv + \varphi''_{22}dv^2)] \\ &= \frac{1}{I^3}[(\varphi'_2\psi''_{11} - \psi'_2\varphi''_{11})(\psi'_2dx - \varphi'_2dy)^2 \\ &\quad + 2(\varphi'_2\psi''_{12} - \psi'_2\varphi''_{12})(\psi'_2dx - \varphi'_2dy)(\varphi'_1dy \\ &\quad - \psi'_1dx) + (\varphi'_2\psi''_{22} - \psi'_2\varphi''_{22})(\varphi'_1dy - \psi'_1dx)^2] \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

比较上式两端的系数, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{I^3}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 \Bigg],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{I^3} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \right.$$

$$\cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right)$$

$$\cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \Bigg].$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{I^3} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right.$$

$$- 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right)$$

$$\cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \Bigg].$$

同法可求得 $d^2 v$ 和 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

3415. 设 (a) $x = u \cos \frac{v}{u}$, $y = u \sin \frac{v}{u}$;

$$(b) x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v,$$

$$\text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

解 利用 3414 题的结果求之.

(a) $\varphi(u, v) = u \cos \frac{v}{u}$, $\psi(u, v) = u \sin \frac{v}{u}$. 于是,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\sin \frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = \cos \frac{v}{u},$$

$$I = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \left(\cos \frac{v}{u} \right.$$

$$\left. + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} \right) \cos \frac{v}{u} - \left(-\sin \frac{v}{u} \right)$$

$$\cdot \left(\sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} \right) = 1.$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial v} = \cos \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sin \frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} - \sin \frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} + \cos \frac{v}{u}.$$

(b) $\varphi(u, v) = e^x + u \sin v$, $\psi(u, v) = e^x - u \cos v$.

于是,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^x + \sin v, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = u \cos v,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = e^x - \cos v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = u \sin v,$$

$$I = (e^u + \sin v)u \sin v - (e^u - \cos v)u \cos v \\ = u(e^u(\sin v - \cos v) + 1).$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e^u - \cos v}{u(e^u(\sin v - \cos v) + 1)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin v}{u(e^u(\sin v - \cos v) + 1)}.$$

3416. 函数 $u = u(x)$ 由方程组

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \\ h(x, y, z) = 0$$

定义. 求 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d^2u}{dx^2}$.

解 微分得

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ \left. + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) f, \quad (1)$$

$$0 = g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ \left. + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) g,$$

$$0 = h'_x dx + h'_y dy + h'_z dz = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) h. \quad (3)$$

令 $\frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} = I_1$, $\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)} = I_2$, $\frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)} = I_3$, 则

由(2), (3)可解得

$$dy = \frac{I_2}{I_1} dx, \quad dz = \frac{I_3}{I_1} dx.$$

将 dy , dz 代入(1), 得

$$\begin{aligned} du &= f'_x dx + f'_y \cdot \frac{I_2}{I_1} dx + f'_z \cdot \frac{I_3}{I_1} dx \\ &= \frac{1}{I_1} (I_1 f'_x + I_2 f'_y + I_3 f'_z) dx = \frac{I}{I_1} dx, \end{aligned}$$

其中 $I = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)}$. 于是,

$$\frac{du}{dx} = \frac{I}{I_1}.$$

对(1), (2), (3)式再求一次微分, 得

$$\begin{aligned} d^2 u &= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + f''_y d^2 y \\ &\quad + f''_z d^2 z, \end{aligned} \quad (4)$$

$$0 = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g + g''_y d^2 y$$

$$+g'_z d^2 z, \quad (5)$$

$$0 = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h + h'_i d^2 y \\ + h'_z d^2 z. \quad (6)$$

于是,

$$d^2 y = \frac{1}{I_1} \left[g'_z \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right. \\ \left. - h'_i \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g \right], \\ d^2 z = \frac{1}{I_1} \left[h'_i \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g - g'_z \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right].$$

令 $\frac{\partial(h, f)}{\partial(y, z)} = I_4$, $\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} = I_5$, 并将 $d^2 y$ 及 $d^2 z$

代入(4), 即得

$$d^2 u = \frac{1}{I_1} \left[I_1 \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f \right. \\ + I_4 \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g \\ \left. + I_5 \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right],$$

再以 $dy = \frac{I_2}{I_1} dx$ 及 $dz = \frac{I_3}{I_1} dx$ 代入上式, 即得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} = & \frac{1}{I_1^3} \left[I_1 \cdot \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f \right. \\ & + I_4 \cdot \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g \\ & \left. + I_5 \cdot \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right]. \end{aligned}$$

3417. 函数 $u=u(x, y)$ 由方程组

$$u=f(x, y, z, t), \quad g(y, z, t)=0, \quad h(z, t)=0$$

定义. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 微分得

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + f'_t dt, \quad (1)$$

$$0 = g'_y dy + g'_z dz + g'_t dt, \quad (2)$$

$$0 = h'_z dz + h'_t dt. \quad (3)$$

令 $I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}$, 则由(2), (3)可解得

$$dz = \frac{1}{I_1} \cdot (-g'_t h'_z) dy, \quad dt = \frac{1}{I_1} \cdot (g'_y h'_z) dy.$$

将 dz 及 dt 代入(1)式, 得

$$du = f'_x dx + f'_y dy - \frac{g'_t}{I_1} (f'_z h'_z - f'_t h'_z) dy.$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y + g'_y \cdot \frac{I_2}{I_1},$$

其中 $I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(z, t)}$.

3418. 设:

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 微分得

$$dx = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw,$$

$$dy = g'_u du + g'_v dv + g'_w dw,$$

$$dz = h'_u du + h'_v dv + h'_w dw.$$

令 $I = \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)}$, 则有

$$du = \frac{1}{I} \begin{vmatrix} dx & f'_v & f'_w \\ dy & g'_v & g'_w \\ dz & h'_v & h'_w \end{vmatrix} = \frac{I_1}{I} dx + \frac{I_2}{I} dy + \frac{I_3}{I} dz,$$

其中 $I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(v, w)}$, $I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(v, w)}$, $I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)}$.

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I_1}{I}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{I_2}{I}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_3}{I}.$$

3419. 设函数 $z = z(x, y)$ 满足方程组

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad g(x, y, z, t) = 0,$$

式中 t 为参变数. 求 dz .

解 微分得

$$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + f'_t dt = 0,$$

$$g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz + g'_t dt = 0.$$

把 dz, dt 看作未知数, 其它为系数. 解之得

$$\begin{aligned} dz &= \frac{1}{I_3} [f'_t \cdot (g'_x dx + g'_y dy) - g'_t \cdot (f'_x dx + f'_y dy)] \\ &= \frac{1}{I_3} [(f'_t g'_x - g'_t f'_x) dx + (f'_t g'_y - g'_t f'_y) dy] \\ &= -\frac{I_1 dx + I_2 dy}{I_3}, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } I_1 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, t)}, \quad I_2 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, t)}, \quad I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}.$$

3420. 设 $u = f(z)$, 其中 z 为由方程式 $z = x + y\varphi(z)$ 所定义的为变数 x 和 y 的隐函数. 证明拉格朗日公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

证 $dz = dx + \varphi(z)dy + y\varphi'(z)dz$. 于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\varphi'(z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)} = \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}.$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = f'(z) \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x},$$

即当 $n = 1$ 时, 拉格朗日公式为真.

对于任意可微函数 $g(z)$, 有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \left[g(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= g'(z) \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + g(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
 &= \varphi(z) g'(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + g(z) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= \varphi(z) g'(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + g(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\
 &= \varphi(z) g'(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi'(z) g(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\
 &\quad + \varphi(z) g(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(z) g(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right].
 \end{aligned}$$

令 $g(z) = \varphi(z)$, 得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi^2(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right],
 \end{aligned}$$

即当 $n=2$ 时, 拉格朗日公式也为真. 设当 $n=k$ 时, 公式为真, 即有

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left[\varphi^k(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

于是,

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left[\varphi^k(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi^k(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} \\
&= -\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi^{k+1}(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} \\
&= -\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left[\varphi^{k+1}(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right],
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时, 拉格朗日公式也为真. 于是, 对于一切自然数 n , 均有

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = -\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left[\varphi^n(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

3421. 证明: 由方程

$$\Phi(x-az, y-bz) = 0 \quad (1)$$

[其中 $\Phi(u, v)$ 是变数 u, v 的任意可微分函数, a 和 b 为常数] 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 为方程

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

的解. 说明曲面(1)的几何性质.

解 由于

$$\Phi'_1 \cdot \left(1 - a \frac{\partial z}{\partial x} \right) - b \Phi'_2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$- \Phi'_1 \cdot a \frac{\partial z}{\partial y} + \Phi'_2 \cdot \left(1 - b \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\Phi'_1}{a\Phi'_1 + b\Phi'_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\Phi'_2}{a\Phi'_1 + b\Phi'_2}.$$

将上面二个等式依次乘以 a, b , 然后相加, 即得

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

这就说明 $z = z(x, y)$ 为方程 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ 的解.

等式 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0$ 表示曲面 (1) 上任一

点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 的法向量 $\vec{n}_1 = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_1}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_1}, -1 \right\}$ 皆与向量 $\vec{r}_1 = \{a, b, 1\}$ 垂直. 过点 P_1 作平行于 \vec{r}_1 的直线 l_1 :

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{1}.$$

易知 l_1 上的点皆在曲面 (1) 上. 于是, 曲面 (1) 是母线平行于 \vec{r}_1 的柱面.

3422. 证明: 由方程

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0 \quad (2)$$

[其中 $\Phi(u, v)$ 是变数 u 和 v 的任意可微分函数] 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程式

$$(x-x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0.$$

说明曲面 (2) 的几何性质.

解 由于

$$\begin{aligned}\Phi'_1 \cdot \frac{z - z_0 - (x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x}}{(z - z_0)^2} - \Phi'_2 \cdot \frac{(y - y_0) \frac{\partial z}{\partial x}}{(z - z_0)^2} &= 0, \\ -\Phi'_1 \cdot \frac{(x - x_0) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z - z_0)^2} + \Phi'_2 \cdot \frac{z - z_0 - (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z - z_0)^2} &= 0,\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(z - z_0) \Phi'_1}{(x - x_0) \Phi'_1 + (y - y_0) \Phi'_2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{(z - z_0) \Phi'_2}{(x - x_0) \Phi'_1 + (y - y_0) \Phi'_2}.\end{aligned}$$

将上面二个等式依次乘以 $x - x_0$ 及 $y - y_0$, 然后相加, 即得

$$(x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z - z_0,$$

本题获证.

等式 $(x - x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial z}{\partial y} - (z - z_0) = 0$ 表示曲面 (2) 在其上任一点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的法向量 $\vec{n}_2 = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_2}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_2}, -1 \right\}$ 与向量 $\vec{r}_2 = \{x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0\}$ 垂直. 作过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 、 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l_2 :

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0} = \frac{y-y_0}{y_2-y_0} = \frac{z-z_0}{z_2-z_0}.$$

易知 l_2 上的任一点皆在曲面(2)上. 于是, 曲面(2)是顶点在 P_0 的锥面.

3423. 证明: 由方程

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2) \quad (3)$$

[其中 $\Phi(u)$ 是变数 u 的任意可微分函数, a, b 和 c 为常数] 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

说明曲面 (3) 的几何性质.

解 由于

$$a + c \frac{\partial z}{\partial x} = \Phi' \cdot \left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

$$b + c \frac{\partial z}{\partial y} = \Phi' \cdot \left(2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x\Phi' - a}{c - 2z\Phi'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y\Phi' - b}{c - 2z\Phi'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $(cy - bz)$ 及 $(az - cx)$, 然后相加, 即得

$$\begin{aligned} & (cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= \frac{(2x\Phi' - a)(cy - bz) + (2y\Phi' - b)(az - cx)}{c - 2z\Phi'} \end{aligned}$$

$$= \frac{(c-2z\Phi')(bx-ay)}{c-2z\Phi'} = bx-ay,$$

本题获证.

设 $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 是曲面 (3) 上任意一点, 并记 $\vec{r}_3 = \{a, b, c\}$. 由于曲面 (3) 在 P_3 点的法向量为

$$\vec{n}_3 = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_3}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_3}, -1 \right\}, \text{ 故由方程}$$

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az-cx)\frac{\partial z}{\partial y} - (bx-ay) = 0$$

知

$$\vec{n}_3 \perp (\vec{P}_3 \times \vec{r}_3),$$

其中 $\vec{P}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$.

设由原点到 P_3 的距离为 d , 即

$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = d^2.$$

考虑平面

$$\Pi: ax+by+cz=d$$

和过点 P_3 的球面

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = d^2,$$

并设平面 Π 与球面 S 的交线为 C , 则

1° 由点 P_3 在曲面 (3) 上可知

$$ax_3 + by_3 + cz_3 = \Phi(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2),$$

即

$$d = \Phi(d^2).$$

这表明曲线 C 上的点的坐标皆满足方程 (3), 即曲线 C 位于曲面 (3) 上.

2°由 Π 为平面, S 为球面 知交线 C 为一圆周曲线.

3°圆 C 的圆心 Q 即为由原点到平面 Π 的垂足, 故 Q 点位于过原点且与平面 Π 垂直的直线 l 上.

综上所述, 可见曲面 (3) 是以直线

$$l: \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

为旋转轴的旋转曲面.

3424. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = y f\left(\frac{z}{y}\right)$$

所给出, 证明:

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

证 由于

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{z}{y}\right) \frac{\partial z}{\partial x},$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right) - 2z}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 + z^2 - z f'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz - y f'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
& (x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} \\
&= \frac{2xy(y^2 + z^2 - x^2) + 2xy(x^2 - y^2 + z^2 - zf')}{y(2z - f')} \\
&= \frac{2xyz(2z - f')}{y(2z - f')} = 2xz,
\end{aligned}$$

本题获证.

3425. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$$

所给出, 证明;

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

证 由于

$$F'_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x}\right) + F'_2 \cdot \left(\frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - z}{x^2}\right) = 0,$$

$$F'_1 \cdot \left(\frac{y \frac{\partial z}{\partial y} - z}{y^2}\right) + F'_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yzF'_2 - x^2yF'_1}{x(xF'_1 + yF'_2)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzF'_1 - xy^2F'_2}{y(xF'_1 + yF'_2)}.$$

于是,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yzF'_2 - x^2yF'_1 + xzF'_1 - xy^2F'_2}{xF'_1 + yF'_2}$$

$$= -\frac{(z-xy)(xF'_1+yF'_2)}{xF'_1+yF'_2} = z-xy,$$

本题获证.

3426. 证明: 由方程组

$$\left. \begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z &= f(\alpha), \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= f'(\alpha) \end{aligned} \right\}$$

[其中 $\alpha = \alpha(x, y)$ 为参变数及 $f(\alpha)$ 为任意可微分的函数]所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

证 由 $x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z = f(\alpha)$ 两端对 x 求偏导函数, 得

$$\begin{aligned} \cos\alpha - x\sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + y\cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ = f'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x}. \end{aligned}$$

由于 $-x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha)$, 代入上式, 即得

$$\cos\alpha + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -z\cos\alpha. \quad (1)$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -z\sin\alpha. \quad (2)$$

将 (1), (2) 两式依次平方, 然后相加, 即得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2,$$

本题获证.

3427. 证明: 由方程组

$$\left. \begin{aligned} z &= ax + \frac{y}{a} + f(a), \\ 0 &= x - \frac{y}{a^2} + f'(a) \end{aligned} \right\}$$

所给出的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

证 由于

$$\begin{aligned} dz &= a dx + \frac{1}{a} dy + \left[x - \frac{y}{a^2} + f'(a) \right] da \\ &= a dx + \frac{1}{a} dy, \end{aligned}$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{1}{a} = 1,$$

本题获证.

3428. 证明: 由方程组

$$\left. \begin{aligned} [z - f(a)]^2 &= x^2(y^2 - a^2), \\ [z - f(a)] f'(a) &= ax^2 \end{aligned} \right\}$$

所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

证 $2[z - f(a)][dz - f'(a)da] = (y^2 - a^2)2xdx + x^2(2ydy - 2ada)$. 于是,

$$\begin{aligned} [z - f(a)]dz &= x(y^2 - a^2)dx + x^2ydy \\ &\quad - \{ax^2 - [z - f(a)]f'(a)\}da \\ &= x(y^2 - a^2)dx + x^2ydy, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x(y^2 - a^2)}{z - f(a)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2y}{z - f(a)}.$$

从而得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x^3y(y^2 - a^2)}{[z - f(a)]^2} \\ &= xy \cdot \frac{x^2(y^2 - a^2)}{[z - f(a)]^2} = xy, \end{aligned}$$

本题获证.

3429. 证明: 由方程组

$$\left. \begin{aligned} z &= ax + y\varphi(a) + \psi(a), \\ 0 &= x + y\varphi'(a) + \psi'(a) \end{aligned} \right\}$$

所给出的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x} = a + x \frac{\partial a}{\partial x} + y\varphi'(a) \frac{\partial a}{\partial x} + \psi'(a) \frac{\partial a}{\partial x}$

$$= \alpha + [x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)] \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \frac{\partial z}{\partial y} &= x \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \varphi(\alpha) + y\varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ &\quad + \psi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \varphi(\alpha), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \varphi'(\alpha) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial y} \left[\varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, 故 $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x}$. 于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0^{*}),$$

本题获证.

*) 此式也可由原方程组第二式两端分别对 x 和 y 求偏导函数而获得.

3430. 证明: 由方程

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

所定义的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证 记 $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s,$
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$

将所给方程两端分别对 x 和对 y 逐次求偏导数, 得

$$\begin{aligned} \varphi(z) + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]p &= 0, \\ [x\varphi'(z) + \psi'(z)]q &= 1; \\ 2\varphi'(z)p + [x\varphi''(z) + \psi''(z)]p^2 + [x\varphi'(z) \\ &+ \psi'(z)]r = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(z)q + [x\varphi''(z) + \psi''(z)]pq + [x\varphi'(z) \\ + \psi'(z)]s = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$[x\varphi''(z) + \psi''(z)]q^2 + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]t = 0. \quad (3)$$

将 (1), (2), (3) 三式依次乘以 q^2 , $(-2pq)$ 及 p^2 , 然后相加, 并注意到 $x\varphi'(z) + \psi'(z) \neq 0$ (因为 $[x\varphi'(z) + \psi'(z)]q = 1$), 即得

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0,$$

此即所要证明的.

§4. 变量代换

1° 在含有导函数的式子中的变量代换. 设于式

$$A = \Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots)$$

中需要把 x, y 换为新的变量: t (自变量) 及 u (函数), 这些变量由方程

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u) \quad (1)$$

与原来的变量 x 和 y 联系起来.

把方程式 (1) 微分, 便有:

$$y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}.$$

同样地可表示出高阶的导函数 y''_{xx} , ... 因此我们得:

$$A = \Phi_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \dots).$$

2° 在含有偏导函数的式子中自变量的代换, 若于下式中

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots\right)$$

令

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad (2)$$

其中 u 和 v 为新的自变量, 则挨次的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$

由下列方程所确定:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v}, \end{aligned}$$

等等.

3° 在含有偏导函数的式子中自变量和函数的代换. 在一般的情况下, 设有方程

$$x = f(u, v, w), y = g(u, v, w), z = h(u, v, w), \quad (3)$$

其中 u, v 为新的自变量及 $w = w(u, v)$ 为新的函数, 则对于偏

导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ 得到这样的方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v}, \end{aligned}$$

等等.

在某些情况下, 使用全微分法进行变量代换是方便的.

3431. 把 y 看作新的自变量, 变换方程

$$y' y'' - 3 y''^2 = x.$$

解 函数 $y = y(x)$ 的各阶导函数 y', y'', y''', \dots 与其反函数 $x = x(y)$ 的各阶导函数 x', x'', x''', \dots 之间有下述关系.

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad \text{公式 1}$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{x'}\right)' \cdot y'_x = -\frac{x''}{x'^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{x''}{(x')^3}, \quad \text{公式 2}$$

$$y''' = (y'')' = -\left[\frac{x''}{(x')^3}\right]' \cdot y'_x$$

$$= \frac{3(x'')^2 - x' x'''}{(x')^5}. \quad \text{公式 3}$$

以公式 1、2、3 代入所给方程，化简整理即得

$$x''' + x(x')^5 = 0.$$

3432. 用同样的方法变换方程

$$(y')^2 y^{(4)} - 10 y' y'' y''' + 15 (y'')^3 = 0.$$

解 解法一

由公式 3 可得

$$y^{(4)} = (y''')' = \left[\frac{3(x'')^2 - x' x'''}{(x')^5}\right]' \cdot y'_x$$

$$= \frac{6x' x'' x''' - (x')^2 x^{(4)} - x' x'' x'' - 5[3(x'')^2 - x' x'''] x''}{(x')^6}$$

$$\cdot \frac{1}{x'} = \frac{10x' x'' x''' - (x')^2 x^{(4)} - 15(x'')^3}{(x')^7}. \quad \text{公式 4}$$

以公式 1、2、3、4 代入所给方程，化简整理即得

$$x^{(4)} = 0.$$

解法二

由公式 4 可看出

$$x^{(4)} = \frac{10y' y'' y''' - (y')^2 y^{(4)} - 15(y'')^3}{(y')^7}.$$

因此, 所给方程可改写为

$$-x^{(4)}(y')^7 = 0.$$

由于 $y' \neq 0$, 故得

$$x^{(4)} = 0.$$

3433. 取 x 作函数, $t = xy$ 作自变量, 变换方程

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0.$$

解 将 $t = t(x)$ 看作 x 的函数, 对 $t = xy$ 两端分别求 x 的一阶、二阶导数, 得

$$\frac{dt}{dx} = y + xy', \quad (1)$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 2y' + xy''. \quad (2)$$

由于 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}}$, 故由 (1) 式得

$$y' = \frac{1 - y \frac{dx}{dt}}{x \frac{dx}{dt}}. \quad (3)$$

由公式 2 及 (2) 式可得

$$-\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = 2y' + xy'',$$
$$y'' = -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} - \frac{2y'}{x}. \quad (4)$$

將 (4) 式代入所給方程，得

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + xy\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = 0 \text{ 或 } \frac{d^2x}{dt^2} - t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = 0.$$

引入新變量，變換下列常微分方程：

3434. $x^2y'' + xy' + y = 0$ ，若 $x = e^t$ 。

解 當函數 y 不變，只作自變量的代換 $x = x(t)$ 時，

注意到對 $\frac{dt}{dx}$ ， $\frac{d^2t}{dx^2}$ 運用公式 1 及 2，即得

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \text{公式 5}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2t}{dx^2} \\ &= \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}. \end{aligned} \quad \text{公式 6}$$

在本题中， $x = e^t$ ，故有

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = e^t = x,$$

从而有

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{dy}{dt}}{x}, \\ y'' &= \frac{x \frac{d^2y}{dt^2} - x \frac{dy}{dt}}{x^3} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

將 y' 及 y'' 代入所給方程，即得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0.$$

3435. $y'' = \frac{6y}{x^3}$, 若 $t = \ln|x|$.

解 应用复合函数求导公式, 有

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}{x^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{x^4} \left[x^2 \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{dt}{dx} - 2x \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] \\ &= \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

将 y'' 代入所给方程, 即得

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

3436. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$, 若 $x = \cos t$.

解 注意到 $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\cos t$, 用公式 5 及 6, 就有

$$y' = -\frac{\frac{dy}{dt}}{\sin t}, \quad y'' = \frac{-\sin t \frac{d^2 y}{dt^2} + \cos t \frac{dy}{dt}}{-\sin^3 t}.$$

将 y', y'' 及 x 代入所给方程, 即得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

3437. $y'' + y' \operatorname{th} x + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 x} y = 0$, 若 $x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

解 仍用公式 5 及 6, 注意到

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sin t}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\cos t}{\sin^2 t},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sin t}, \quad \operatorname{th} x = -\cos t,$$

就有

$$y' = \sin t \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \sin^2 t \frac{d^2 y}{dt^2} + \sin t \cos t \frac{dy}{dt}.$$

将 $y', y'', \operatorname{ch} x$ 及 $\operatorname{th} x$ 代入所给方程, 即得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + m^2 y = 0.$$

3438. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, 令 $y = u e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$.

解 $y' = \frac{du}{dx} e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi} - \frac{1}{2} u \cdot p(x) e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$

$$y'' = \frac{d^2 u}{dx^2} e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi} - p(x) \frac{du}{dx} e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$$

$$+ \frac{1}{4} u \cdot p^2(x) e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$$

$$-\frac{1}{2}u \cdot p'(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

将 y', y'' 代入所给方程, 化简整理即得

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) \right]u = 0.$$

3439. $x^4 y'' + x y y' - 2y^2 = 0$. 令

$$x = e^t, \quad y = u e^{2t},$$

其中 $u = u(t)$.

$$\text{解 } y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{2t}(2u + u')}{e^t} = e^t(2u + u'),$$

$$y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t(u'' + 3u' + 2u)}{e^t} = u'' + 3u' + 2u,$$

其中 u' 及 u'' 表示 u 对 t 的一阶及二阶导函数, 以下各题类似, 不再说明.

将 y', y'' 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$u'' + (u + 3)u' + 2u = 0.$$

3440. $(1+x^2)^2 y'' = y$, 若

$$x = \operatorname{tg} t, \quad y = \frac{u}{\cos t},$$

其中 $u = u(t)$.

$$\text{解 } y' = \frac{\frac{u' \cos t + u \sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} = u' \cos t + u \sin t,$$

$$y'' = \frac{\frac{u'' \cos t + u \cos t}{1}}{\cos^2 t} = (u'' + u) \cos^3 t.$$

将 y' , y'' 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$u'' = 0.$$

3441. $(1 - x^2)^2 y'' = -y$, 若

$$x = \tanh t, \quad y = \frac{u}{\cosh t},$$

其中 $u = u(t)$.

$$\text{解 } y' = \frac{\frac{u' \cosh t - u \sinh t}{\cosh^2 t}}{\frac{1}{\cosh^2 t}} = u' \cosh t - u \sinh t,$$

$$y'' = \frac{\frac{u'' \cosh t - u \cosh t}{1}}{\cosh^2 t} = (u'' - u) \cosh^3 t.$$

将 y'' 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$u'' = 0.$$

3442. $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0$, 若 $x = u + t$, $y = u - t$,

其中 $u = u(t)$,

$$\text{解 } y' = \frac{u' - 1}{u' + 1},$$

$$y'' = \frac{\frac{u''(u' + 1) - u''(u' - 1)}{(u' + 1)^2}}{u' + 1} = \frac{2u''}{(u' + 1)^3}.$$

将 y', y'' 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$u'' + 8u(u')^3 = 0.$$

3443. $y''' - x^3 y'' + x y' - y = 0$, 若 $x = \frac{1}{t}$ 及 $y = \frac{u}{t}$, 其中 $u = u(t)$.

$$\text{解 } y' = \frac{\frac{u' t - u}{t^2}}{-\frac{1}{t^2}} = u - t u',$$

$$y'' = \frac{-t u''}{-\frac{1}{t^2}} = t^3 u'',$$

$$y''' = \frac{3t^2 u'' + t^3 u'''}{-\frac{1}{t^2}} = -t^4 (3u'' + t u''').$$

将 y', y'', y''' 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$t^5 u + (3t^4 + 1)u'' + u' = 0.$$

3444. 假定

$$u = \frac{y}{x-b}, \quad t = \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|,$$

并取 u 作为变量 t 的函数, 以变换斯托克斯方程

$$y'' = \frac{A y}{(x-a)^2 (x-b)^2}.$$

解 由于 $t = \ln |x-a| - \ln |x-b|$, 故有

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$$

$$\text{或} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{(x-a)(x-b)}{a-b}. \quad (1)$$

又因 $u = \frac{y}{x-b}$, 故 $y = u(x-b)$,

$$\begin{aligned} y' &= (x-b) \frac{du}{dx} + u = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}} (x-b) + u \\ &= \frac{(a-b)u'}{x-a} + u, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \left[\frac{(a-b)u''}{x-a} + u' - \frac{(a-b)u'}{(x-a)^2} \frac{dx}{dt} \right] \\ &\cdot \frac{b-a}{(x-a)(x-b)} = \frac{(a-b)^2(u''-u')}{(x-a)^2(x-b)}. \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)式代入所给方程, 即得

$$u'' - u' = \frac{Au}{(a-b)^2} \quad (a \neq b).$$

3445. 证明: 若方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

由代换 $x = \varphi(\xi)$ 变换为方程

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + P(\xi) \frac{dy}{d\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

则

$$\begin{aligned} & [2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}} \\ &= [2p(x)q(x) + q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

证 $\frac{dx}{d\xi} = \varphi'(\xi)$, $\frac{d^2x}{d\xi^2} = \varphi''(\xi)$. 由公式 5 及 6, 得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\xi}}{\varphi'(\xi)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(\varphi'(\xi))^2} \frac{d^2y}{d\xi^2} \\ &\quad - \frac{\varphi''(\xi)}{[\varphi'(\xi)]^3} \frac{dy}{d\xi}. \end{aligned}$$

代入原方程, 两端同乘 $[\varphi'(\xi)]^2$, 即得

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{d\xi^2} + \left\{ p[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi) - \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)} \right\} \frac{dy}{d\xi} \\ & + q[\varphi(\xi)][\varphi'(\xi)]^2 y = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$P(\xi) = p\varphi' - \frac{\varphi''}{\varphi'}, \quad Q(\xi) = q \cdot (\varphi')^2;$$

$$Q'(\xi) = q' \cdot (\varphi')^2 + 2q\varphi'\varphi''.$$

从而得知

$$\begin{aligned} & [2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left\{ 2\left(p\varphi' - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) q \cdot (\varphi')^2 + q' \cdot (\varphi')^2 \right. \\ & \quad \left. + 2q\varphi'\varphi'' \right\} [q \cdot (\varphi')^2]^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$= \{2pq \cdot (\varphi')^3 + q' \cdot (\varphi')^3\} q^{-\frac{3}{2}} \cdot (\varphi')^{-3},$$

$$= [2p(x)q(x) + q'(x)] [q(x)]^{-\frac{3}{2}},$$

本题获证.

3446. 在方程

$$\Phi(y, y', y'') = 0$$

(其中 Φ 为变量 y, y', y'' 的齐次函数) 中令 $y = e^{\int_{x_0}^x u dx}$.

$$\text{解 } y' = u \cdot e^{\int_{x_0}^x u dx}, \quad y'' = (u' + u^2) e^{\int_{x_0}^x u dx}.$$

代入方程 $\Phi(y, y', y'') = 0$, 由于 Φ 关于 y, y', y'' 是齐次的, 因此, 各项含有的因式 $e^{\int_{x_0}^x u dx}$ 均可约去, 最后得

$$\Phi(1, u, u' + u^2) = 0.$$

3447. 在方程

$$F(x^2 y'', xy', y) = 0$$

(其中 F 为其变量的齐次函数) 中令 $u = x \cdot \frac{y'}{y}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{yu}{x}, \quad y'' = \frac{x(u'y + y'u) - yu}{x^2} \\ &= \frac{y[xu' + (u^2 - u)]}{x^2}. \end{aligned} \quad \text{于是,}$$

$$xy' = uy, \quad x^2 y'' = y[xu' + (u^2 - u)].$$

由于 F 为其变量的齐次函数, 因此, 各项含有的因子 y 均可约去, 最后得

$$F(xu' + u^2 - u, u, 1) = 0.$$

3448. 证明: 经射影变换

$$x = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a\xi + b\eta + c}, \quad y = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2}{a\xi + b\eta + c},$$

方程式

$$y''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

不变其形状.

证 本题似有误. 事实上, 作压缩变换

$$x = \xi, \quad y = a\eta \quad (a \neq 0)$$

(它是射影变换的特例), 则原方程变为

$$a\eta''(1+a\eta'^2) - 3a^3\eta'\eta''^2 = 0,$$

显然形式已改变.

3449. 证明:

$$S[x(t)] = \frac{x''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{x''(t)}{x'(t)} \right]^2$$

对于线性分式变换

$$y = \frac{ax(t) + b}{cx(t) + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

其值不变.

证 已知的变换

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c}\right) + \left(b - \frac{ad}{c}\right)}{cx+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx+d)} \end{aligned}$$

可由下述变换所构成:

$$y = \alpha + \beta y_2, \quad y_2 = \frac{1}{y_1}, \quad y_1 = cx + d.$$

只要证明在上述各种变换下 S 的值不变即可.

1° 令 $y_1 = cx + d$, 则 $y_1'(t) = cx'(t)$, $y_1''(t) = cx''(t)$, $y_1'''(t) = cx'''(t)$. 于是,

$$\begin{aligned} S[y_1(t)] &= \frac{y_1'''(t)}{y_1'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{y_1''(t)}{y_1'(t)} \right]^2 \\ &= \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{x''(t)}{x'(t)} \right]^2 = S[x(t)]; \end{aligned}$$

$$2^\circ \text{ 令 } y_2 = \frac{1}{y_1}, \text{ 则 } y_2'(t) = -\frac{y_1'}{y_1^2},$$

$$y_2''(t) = -\frac{y_1 y_1'' - 2y_1'^2}{y_1^3},$$

$$y_2'''(t) = -\frac{y_1''' y_1^2 - 6y_1'' y_1' y_1 + 6y_1'^3}{y_1^4}. \text{ 于是,}$$

$$\begin{aligned} S[y_2(t)] &= \frac{y_2'''(t)}{y_2'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{y_2''(t)}{y_2'(t)} \right]^2 \\ &= \frac{\frac{y_1''' y_1^2 - 6y_1'' y_1' y_1 + 6y_1'^3}{y_1^4}}{-\frac{y_1'}{y_1^2}} - \frac{3}{2} \left[\frac{\frac{y_1 y_1'' - 2y_1'^2}{y_1^3}}{-\frac{y_1'}{y_1^2}} \right]^2 \\ &= \frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{6y_1''}{y_1} + \frac{6y_1'^2}{y_1^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{y_1''}{y_1'} - \frac{2y_1'}{y_1} \right)^2 \\ &= \frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y_1''}{y_1'} \right)^2 = S[y_1(t)] = S[x(t)]; \end{aligned}$$

3° 由1°及2°即知

$$\begin{aligned} S(y(t)) &= S(\alpha + \beta y_2) = \frac{(\alpha + \beta y_2)'''}{(\alpha + \beta y_2)'} \\ &\quad - \frac{3}{2} \left\{ \frac{(\alpha + \beta y_2)''}{(\alpha + \beta y_2)'} \right\}^2 \\ &= \frac{y_2'''}{y_2'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y_2''}{y_2'} \right)^2 = S[y_2(t)] = S[x(t)]. \text{ 证毕.} \end{aligned}$$

将下列方程式改变为极坐标 r 与 φ 所表示的方程, 即令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

3450. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$

解 当 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ 时,

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \sin \varphi \frac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi,$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \cos \varphi \frac{d^2r}{d\varphi^2} - 2 \sin \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \cos \varphi,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = \sin \varphi \frac{d^2r}{d\varphi^2} + 2 \cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi.$$

由公式 5 及 6, 即得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\sin \varphi \frac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi}{\cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi}, \quad \text{公式 7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{d\varphi^2} \frac{dx}{d\varphi} - \frac{dy}{d\varphi} \frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^3}$$

$$= \frac{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2}}{\left(\cos\varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin\varphi \right)^3}. \quad \text{公式 8}$$

将公式 7 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \text{ 或 } r' = r.$$

以下各题, $\frac{dr}{d\varphi}$ 及 $\frac{d^2 r}{d\varphi^2}$ 均简记为 r' 及 r'' .

$$3451. (xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } xy' - y &= r \cos\varphi \cdot \frac{r' \sin\varphi + r \cos\varphi}{r' \cos\varphi - r \sin\varphi} - r \sin\varphi \\ &= \frac{r(r' \sin\varphi \cos\varphi + r \cos^2\varphi - r' \sin\varphi \cos\varphi + r \sin^2\varphi)}{r' \cos\varphi - r \sin\varphi} \\ &= \frac{r^2}{r' \cos\varphi - r \sin\varphi}, \\ 1 + y'^2 &= 1 + \left(\frac{r' \sin\varphi + r \cos\varphi}{r' \cos\varphi - r \sin\varphi} \right)^2 \\ &= \frac{r'^2 + r^2}{(r' \cos\varphi - r \sin\varphi)^2}. \end{aligned}$$

将 $xy' - y, 1 + y'^2$ 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$r'^2 = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^2.$$

$$3452. (x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^3.$$

$$\text{解 } x + yy' = r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$= \frac{rr' \cos^2 \varphi - r^2 \sin \varphi \cos \varphi + rr' \sin^2 \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$= \frac{rr'}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}.$$

将公式 8, $x + yy'$ 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$r(r^2 + 2r'^2 - rr'') = r'^3.$$

3453. 把式子

$$\frac{x + yy'}{xy' - y}$$

变换为极坐标的式子.

解 将 3451 题中 $xy' - y$ 的结果及 3452 题中 $x + yy'$ 的结果代入所给式子, 即得

$$\frac{x + yy'}{xy' - y} = \frac{r'}{r}.$$

3454. 把平面曲线的曲率

$$K = \frac{|y''_{xx}|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

用极坐标 r 及 φ 表示之.

解 将 3451 题中 $1 + y'^2$ 的结果及公式 8 代入, 化简整理即得

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3455. 将方程组

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2)$$

改变为极坐标方程.

解 由原方程组得

$$\cos\varphi \frac{dr}{dt} - r\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} = r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi \frac{dr}{dt} + r\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = -r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi.$$

联立解之, 即得

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} [r\cos\varphi \cdot (r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi)$$

$$- (-r\sin\varphi)(-r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi)] = kr^2,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} [\cos\varphi \cdot (-r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi)$$

$$- \sin\varphi \cdot (r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi)] = -1,$$

即原方程组转化为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = kr^2, \\ \frac{d\varphi}{dt} = -1. \end{cases}$$

3456. 引用新函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, 变换式子

$$W = x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

解 由 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 两端微分, 得

$$dr = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy$$

或

$$r dr = x dx + y dy. \quad (1)$$

由 $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ 两端微分, 得

$$d\varphi = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} dy - \frac{y}{r^2} dx$$

或

$$r^2 d\varphi = x dy - y dx. \quad (2)$$

于是, 由(1)及(2)可得

$$\begin{aligned} x r dr - y r^2 d\varphi &= (x^2 dx + x y dy) - (x y dy - y^2 dx) \\ &= (x^2 + y^2) dx = r^2 dx, \end{aligned}$$

$$dx = \frac{x}{r} dr - y d\varphi. \quad (3)$$

同理可得

$$dy = \frac{y}{r} dr + x d\varphi. \quad (4)$$

从而由(3)及(4), 得

$$\begin{aligned} x d^2 y - y d^2 x &= x \left(\frac{y}{r} d^2 r - \frac{y}{r^2} dr^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} dr dy + dx d\varphi + x d^2 \varphi \right) \\ &\quad - y \left(\frac{x}{r} d^2 r - \frac{x}{r^2} dr^2 + \frac{1}{r} dx dr - dy d\varphi - y d^2 \varphi \right) \\ &= \frac{dr}{r} (x dy - y dx) + (x dx + y dy) d\varphi \\ &\quad + (x^2 + y^2) d^2 \varphi \\ &= \frac{dr}{r} (r^2 d\varphi) + (r dr) d\varphi + r^2 d^2 \varphi \\ &= 2r dr d\varphi + r^2 d^2 \varphi, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} W &= x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \\ &= \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right). \end{aligned}$$

3457. 在勒襄德变换中曲线 $y = y(x)$ 的每一点 (x, y) 对应于点 (X, Y) , 其中

$$X = y', \quad Y = xy' - y.$$

求 Y' , Y'' 及 Y''' .

$$\text{解 } Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dx}{dX} = \frac{xy''}{\frac{dX}{dx}} = \frac{xy''}{y''} = x;$$

$$Y'' = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{1}{y''};$$

$$Y''' = \frac{\frac{dY''}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{-\frac{y'''}{y''^2}}{y''} = -\frac{y'''}{y''^3}.$$

引入新变量 ξ 及 η , 解下列方程:

$$3458. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \text{令 } \xi = x + y, \eta = x - y.$$

解 当仅作自变量代换, 引入新自变量

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

这个最简单的情形时, 只要把 ξ, η 看作中间变量, 用复合函数求偏导函数的公式, 即可求出:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

代入原方程, 即得变换后的方程. 本题中,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -1.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程, 得

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \text{ 或 } \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0,$$

即

$$z = \varphi(\xi) = \varphi(x+y),$$

其中 φ 为任意的函数.

3459. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 令 $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$.

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 2y$.

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程, 得

$$y \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - 2xy \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \text{ 或 } y \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0.$$

由于 $y \neq 0$, 故 $\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$, 即

$$z = \varphi(\eta) = \varphi(x^2 + y^2),$$

其中 φ 为任意的函数.

3460. $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ ($a \neq 0$), 令 $\xi = x$, $\eta = y - bz$.

解 当变量间的变换关系比较复杂时, 用全微分法较好. 首先, 根据新旧变元之间的关系, 求出它们微分之间的关系

$$d\xi = dx, \quad d\eta = dy - b dz. \quad (1)$$

其次, 将所求得的微分式代入表示新变元关系的全微分式, 并按旧变元关系重新整理.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial z}{\partial \xi} dx + \frac{\partial z}{\partial \eta} (dy - b dz),$$

$$\left(1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} dx + \frac{\partial z}{\partial \eta} dy,$$

$$dz = \frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}} dx + \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}} dy.$$

把整理后的式子与表示旧变元的全微分式

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

比较, 即得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

代入原方程, 得

$$a \frac{\partial z}{\partial \xi} + b \frac{\partial z}{\partial \eta} = 1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta} \text{ 或 } \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{a}.$$

于是,

$$z = \frac{\xi}{a} + \varphi(\eta) = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz).$$

3461. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, 令 $\xi = x$ 及 $\eta = \frac{y}{x}$.

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程, 得

$$x \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{y}{x} \frac{\partial z}{\partial \eta} = z,$$

$$x \frac{\partial z}{\partial \xi} = z \text{ 或 } \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} = z.$$

解之, 得

$$z = \xi \varphi(\eta) = x \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

取 u 与 v 作新的自变量, 变换下列方程式:

3462. $x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy$, 若 $u = \ln x$,

$$v = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

注意到 $x=e^u$ 及 $y=\operatorname{sh} v$, 代入原方程, 即得

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \operatorname{sh} v.$$

3463. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 若 $u = \ln \sqrt{x^2+y^2}$,

$$v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2},$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程, 得

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \left(x \frac{\partial z}{\partial u} - y \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

$$\cdot \left(y \frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$3464. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{若 } u = \frac{y}{x},$$

$$v = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

解 本题用微分法较好。

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2},$$

$$dv = dz + \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= dz + \frac{xdx + ydy + zdz}{r}$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{dy}{x} - \frac{ydx}{x^2} \right)$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial v} \left(dz + \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy + \frac{z}{r} dz \right).$$

于是,

$$\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz = \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dx$$

$$+ \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1}.$$

代入原方程, 得

$$\begin{aligned} & x \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + y \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= (z+r) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\ & 2(z+r) \frac{\partial z}{\partial v} = z+r. \end{aligned}$$

如果 $z+r=0$, 则可推得 $x^2+y^2=0$; 但由于 $x \neq 0$, 所以 x^2+y^2 不可能为零. 于是, $z+r \neq 0$, 从而得

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}.$$

3465. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$, 若 $u=2x-z^2$, $v=\frac{y}{z}$.

解 $du=2dx-2zdz$, $dv=\frac{dy}{z}-\frac{y}{z^2}dz$.

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial u} (2dx - zdz) \\ &+ \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{1}{z} dy - \frac{y}{z^2} dz \right). \end{aligned}$$

于是,

$$\left(1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz = 2 \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial u} \left(1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial v} \left(1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1}.$$

代入原方程，得

$$2x \frac{\partial z}{\partial u} + y \cdot \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{x}{z} \left(1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

$$\left(\frac{y}{z} - \frac{xy}{z^2} \right) \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{x}{z}.$$

再以 $y = zv$, $x = \frac{1}{2}(u + z^2)$ 代入上式，最后得

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v} \cdot \frac{z^2 + u}{z^2 - u}.$$

3466⁺. $(x+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, 若 $u = x + z$,

$$v = y + z.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial u} (dx + dz) \\ &+ \frac{\partial z}{\partial v} (dy + dz). \end{aligned}$$

于是，

$$\left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz = \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1}.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入原方程, 并注意到 $x + y + z = u + v - z$, 即得

$$u \frac{\partial z}{\partial u} + v \frac{\partial z}{\partial v} = (u + v - z) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

$$(2u + v - z) \frac{\partial z}{\partial u} + (2v + u - z) \frac{\partial z}{\partial v} = u + v - z.$$

3467. 取

$$\xi = y + ze^{-x}, \quad \eta = x + ze^{-y}$$

作为新的自变量, 变换式子

$$(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} = (z^2 - e^{x+y}).$$

解 $dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta$

$$= \frac{\partial z}{\partial \xi} (dy + e^{-x} dz - ze^{-x} dx) + \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\cdot (dx + e^{-y} dz - ze^{-y} dy),$$

于是,

$$\left(1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) dz = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} - ze^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) dx$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - ze^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} - ze^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \left(1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - ze^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \left(1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^{-1}.$$

代入原式，化简整理即得

$$\text{原式} = \frac{e^{x+y} - z^2}{1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

3468. 假定

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

变换式子

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

解 $dx = vdu + u dv$, $dy = udu - v dv$. 解之，得

$$du = \frac{vdx + udy}{u^2 + v^2}, \quad dv = \frac{udx - vdy}{u^2 + v^2}.$$

于是，

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\frac{\partial z}{\partial u} (vdx + udy) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial z}{\partial v} (udx - vdy) \right] \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\left(v \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} \right) dx + \left(u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} \right) dy \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 &= \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \left[\left(v \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

3469. 于方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

中令 $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = z - x$.

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

三式相加即得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

3470. 取 x 作为函数, 而 y 和 z 作为自变量, 变换方程

$$(x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$\text{解 } dx = \frac{\partial x}{\partial y} dy + \frac{\partial x}{\partial z} dz, \quad dz = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}} dx - \frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}} dy.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}},$$

代入原方程, 得

$$(x-z) \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}} - y \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}} = 0,$$

即

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-z}{y} \quad (y \neq 0).$$

3471. 取 x 作为函数, 而 $u=y-z$, $v=y+z$ 作为自变量, 变换方程

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

解 $du = dy - dz$, $dv = dy + dz$.

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \frac{\partial x}{\partial u} (dy - dz) \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial v} (dy + dz). \end{aligned}$$

于是,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \right) dz = -dx + \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \right) dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}}.$$

代入原方程，去分母，即得

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0).$$

3472⁺. 取 x 作为函数及 $u = xz$, $v = yz$ 作为自变量，变换式子

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

解 $du = xdz + zdx$, $dv = ydz + zdy$.

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \frac{\partial x}{\partial u} (xdz + zdx) \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial v} (ydz + zdy). \end{aligned}$$

于是，

$$\left(x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v} \right) dz = \left(1 - z \frac{\partial x}{\partial u} \right) dx - z \frac{\partial x}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - z \frac{\partial x}{\partial u}}{x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z \frac{\partial x}{\partial v}}{x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v}}.$$

代入原式，即得

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\left(1 - z \frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}{\left(x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \\
&= \frac{1 - 2z \frac{\partial x}{\partial u} + z^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{\left(x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \\
&= \frac{1 - 2 \cdot \frac{u}{x} \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{u}{x}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{v}{u} \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \\
&= \frac{u^2 \left\{ x^2 - 2xu \frac{\partial x}{\partial u} + u^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right] \right\}}{x^4 \left(u \frac{\partial x}{\partial u} + v \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}.
\end{aligned}$$

3473. 于方程

$$\begin{aligned}
&(y+z+u) \frac{\partial u}{\partial x} + (x+z+u) \frac{\partial u}{\partial y} \\
&+ (x+y+u) \frac{\partial u}{\partial z} = x+y+z
\end{aligned}$$

中, 令: $e^{\xi} = x-u$, $e^{\eta} = y-u$, $e^{\zeta} = z-u$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } du &= \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta \\
&= \frac{\partial u}{\partial \xi} e^{-\xi} (dx - du) + \frac{\partial u}{\partial \eta} e^{-\eta} (dy - du) \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial \zeta} e^{-\zeta} (dz - du).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \left(1 + e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) du \\ &= e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} dx + e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} dy + e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} dz. \end{aligned}$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 代入原方程, 即得

$$\begin{aligned} & (y+z+u)e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (x+z+u)e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ & + (x+y+u)e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

$$= (x+y+z) \left(1 + e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right).$$

消去同类项, 得

$$\begin{aligned} & (x-u)e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (y-u)e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + (z-u)e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ & + (x+y+z) = 0, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} + 3u + e^{\xi} + e^{\eta} + e^{\zeta} = 0.$$

于下列方程中, 代入新的变量 u, v, w , 其中 $w = w(u, v)$:

$$3474. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z, \text{ 令 } u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

$$w = \ln z - (x+y).$$

$$\text{解} \quad du = 2x dx + 2y dy, \quad dv = -\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy,$$

$$dw = \frac{1}{z} dz - dx - dy.$$

另一方面, $dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$, 故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} dz - dx - dy &= \frac{\partial w}{\partial u} (2x dx + 2y dy) \\ &+ \frac{\partial w}{\partial v} \left(-\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy \right). \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} dz &= \left(2xz \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + z \right) dx \\ &+ \left(2yz \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} + z \right) dy. \end{aligned}$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入原方程, 得

$$\begin{aligned} &yz \left(2x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + 1 \right) \\ &- xz \left(2y \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} + 1 \right) \\ &= (y - x)z, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

3475. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, 令 $u = x$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$,

$$w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

解 $du = dx$, $dv = \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy$, $dw = \frac{1}{x^2} dx$
 $-\frac{1}{z^2} dz$. 于是,

$$\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{z^2} dz = \frac{\partial w}{\partial u} dx + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy \right),$$

$$dz = z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) dx + \frac{z^2}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v}.$$

代入原方程, 得

$$z^2 \left(1 - x^2 \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \right) + z^2 \frac{\partial w}{\partial v} = z^2$$

或 $x^2 z^2 \frac{\partial w}{\partial u} = 0$.

由于 $z \neq 0$, $x \neq 0$, 故得

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

3476. $(xy+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1-y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x+yz$, 设 $u = yz - x$,

$$v = xz - y, \quad w = xy - z.$$

解 $dw = ydx + xdy - dz = \frac{\partial w}{\partial u} (zdy + ydz - dx)$

$$+ \frac{\partial w}{\partial v}(zdx + xdz - dy).$$

整理得

$$\begin{aligned} \left(1 + x \frac{\partial w}{\partial v} + y \frac{\partial w}{\partial u}\right) dz &= \left(y + \frac{\partial w}{\partial u} - z \frac{\partial w}{\partial v}\right) dx \\ &+ \left(x + \frac{\partial w}{\partial v} - z \frac{\partial w}{\partial u}\right) dy. \end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(y + \frac{\partial w}{\partial u} - z \frac{\partial w}{\partial v}\right) \left(1 + x \frac{\partial w}{\partial v} + y \frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x + \frac{\partial w}{\partial v} - z \frac{\partial w}{\partial u}\right) \left(1 + x \frac{\partial w}{\partial v} + y \frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1}.$$

代入原方程, 得

$$\begin{aligned} &(xy + z) \left(y + \frac{\partial w}{\partial u} - z \frac{\partial w}{\partial v}\right) \\ &+ (1 - y^2) \left(x + \frac{\partial w}{\partial v} - z \frac{\partial w}{\partial u}\right) \\ &= (x + yz) \left(1 + x \frac{\partial w}{\partial v} + y \frac{\partial w}{\partial u}\right), \end{aligned}$$

即

$$(1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz) \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

不难验证, 由方程 $1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz = 0$ 所确定的隐函数不是原方程的解 (证略). 于是,

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

$$3477. \left(x \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ 令 } x = ue^w, y = ve^w,$$

$$z = we^w.$$

$$\text{解 } dx = e^w du + ue^w dw, \quad dy = e^w dv + ve^w dw, \\ dz = e^w(1+w)dw.$$

于是, 有

$$e^w dw = \frac{1}{1+w} dz,$$

$$e^w du = dx - ue^w dw = dx - \frac{u}{1+w} dz,$$

$$e^w dv = dy - ve^w dw = dy - \frac{v}{1+w} dz.$$

在全微分式 $dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$ 的两端都乘以 e^w , 并

将上述结果代入, 得

$$\frac{dz}{1+w} = \frac{\partial w}{\partial u} \left(dx - \frac{u}{1+w} dz \right) \\ + \frac{\partial w}{\partial v} \left(dy - \frac{v}{1+w} dz \right)$$

或

$$\left(1 + u \frac{\partial w}{\partial u} + v \frac{\partial w}{\partial v} \right) dz = (1+w) \frac{\partial w}{\partial u} dx$$

$$+(1+w) \frac{\partial w}{\partial v} dy.$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入原方程, 得

$$\begin{aligned} & \left[ue^w(1+w) \frac{\partial w}{\partial u} \right]^2 + \left[ve^w(1+w) \frac{\partial w}{\partial v} \right]^2 \\ &= (we^w)^2 (1+w)^2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}. \end{aligned}$$

消去 $[e^w(1+w)]^2$, 即得

$$u^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = w^2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}.$$

3478. 假定 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arctg} z$, $w = x + y + z$, 其中 $w = w(u, v)$, 变换式子

$$(x-y) : \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

解 $dw = dx + dy + dz = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$

$$= \frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{dz}{1+z^2} \right).$$

于是,

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{1+z^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) dz = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial w}{\partial u} - 1 \right) dx \\ & + \left(\frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial w}{\partial u} - 1 \right) dy. \end{aligned}$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入所给式子, 即得

$$\begin{aligned}\frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}} &= \frac{(x-y)\left(1 - \frac{1}{1+z^2} \frac{\partial w}{\partial v}\right)}{\frac{x-y}{x^2+y^2} \frac{\partial w}{\partial u}} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 v) \frac{\partial w}{\partial v} e^{2v}}{\frac{\partial w}{\partial u}}.\end{aligned}$$

3479. 假定 $u = xe^z$, $v = ye^z$, $w = ze^z$, 其中 $w = w(u, v)$. 变换式子

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } dw &= e^z(1+z)dz = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial w}{\partial u} (e^z dx + xe^z dz) + \frac{\partial w}{\partial v} (e^z dy + ye^z dz).\end{aligned}$$

于是,

$$\left(1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}\right)dz = \frac{\partial w}{\partial u} dx + \frac{\partial w}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{1+z-x\frac{\partial w}{\partial u}-y\frac{\partial w}{\partial v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{1 + z - x \frac{\partial w}{\partial u} - y \frac{\partial w}{\partial v}},$$

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial w}{\partial v}.$$

3480. 在方程

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$$

$$\text{中令: } \xi = \frac{x}{z}, \eta = \frac{y}{z}, \zeta = z, w = \frac{u}{z},$$

其中 $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } dw &= \frac{zdu - udz}{z^2} = \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial w}{\partial \zeta} d\zeta \\ &= \frac{\partial w}{\partial \xi} \left(\frac{zdx - xdz}{z^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial \eta} \left(\frac{zdy - ydz}{z^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial \zeta} dz. \end{aligned}$$

两端同乘 z^2 , 整理得

$$\begin{aligned} zdu &= z \frac{\partial w}{\partial \xi} dx + z \frac{\partial w}{\partial \eta} dy + \left(u - x \frac{\partial w}{\partial \xi} - y \frac{\partial w}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. + z^2 \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) dz. \end{aligned}$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 代入原方程, 得

$$x \frac{\partial w}{\partial \xi} + y \frac{\partial w}{\partial \eta} + \left(u - x \frac{\partial w}{\partial \xi} - y \frac{\partial w}{\partial \eta} + z^2 \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \\ = u + \frac{xy}{z},$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{xy}{z^3} = \frac{\xi \eta}{\zeta}.$$

假定 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 改变下列各式为极坐标 r 和 φ 所表示的式子.

3481. $w = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}.$

解 $dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi,$
 $dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi.$

联立解之, 得

$$dr = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy, \quad d\varphi = \frac{x}{r^2} dy - \frac{y}{r^2} dx.$$

于是,

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) dx + \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) dy, \\ \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{cases} \end{aligned}$$

公式 9

将公式 9 代入原式, 即得

$$\begin{aligned}w &= x \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - y \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\&= \frac{\partial u}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

3482. $w = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$

解 将公式 9 代入, 即得

$$\begin{aligned}w &= x \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + y \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\&= r \frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}$$

3483. $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$

解 $w = \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2$
 $= \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2.$

3484. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

解 先导出极坐标变换的所有二阶偏导函数的变换式. 将 r, φ 看作中间变量, x, y 看作自变量. 由于

$$d^2 r = d(dr) = d\left(\frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy\right)$$

$$= \frac{1}{r}(dx^2 + dy^2) - \frac{xdx + ydy}{r^2}dr$$

$$= \frac{1}{r}(dx^2 + dy^2) - \frac{1}{r^3}(xdx + ydy)^2$$

$$= \frac{1}{r^3}(ydx - xdy)^2,$$

$$d^2\varphi = d(d\varphi) = d\left(\frac{x}{r^2}dy - \frac{y}{r^2}dx\right)$$

$$= -\frac{2(xdy - ydx)}{r^3}dr$$

$$= -\frac{2}{r^4}(xdy - ydx)(xdx + ydy),$$

故有

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}dr^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}drd\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}d\varphi^2$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial r}d^2r + \frac{\partial u}{\partial\varphi}d^2\varphi$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{xdx + ydy}{r}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}$$

$$\cdot \left(\frac{xdx + ydy}{r}\right)\left(\frac{xdy - ydx}{r^2}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{xdy - ydx}{r^2}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{(ydx - xdy)^2}{r^3}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{2}{r^4}\right)(xdy - ydx)(xdx + ydy).$$

将上式右端按 dx^2 , $dx dy$, dy^2 合并同类项, 并与全微分式

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

比较, 即得

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2xy}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{y^2}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2xy}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{x^2}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{xy}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{x^2 - y^2}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - \frac{xy}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad - \frac{xy}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right. \quad \text{公式10}$$

将公式10代入原式, 即得

$$w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

$$3485. \quad w = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

解 将公式10代入原式, 化简整理得

$$w = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

$$3486. \quad w = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

解 将公式10中的 u 换成 z ，然后代入原式，化简整理得

$$w = \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}.$$

3487. 在式子

$$I = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

中，令 $x = r \cos \varphi$ ， $y = r \sin \varphi$ 。

解 对函数 u 及 v 分别用公式9，即得

$$I = \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{y}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ - \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{x}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

3488. 引用新的自变量

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

于是, 由 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

解之, 得 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi)$, 从而

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

其中 φ 及 ψ 为任意的函数.

取 u 及 v 作新的自变量, 变换下列方程:

$$3489. \quad 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

设 $u = x + 2y + 2$ 及 $v = x - y - 1$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理即得

$$3 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

$$3490. (1+x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

设 $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 及 $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$= -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{1+x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{1+y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

3491⁺. $ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (a, b, c 为常数), 设 $u = \ln x, v = \ln y$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得

$$a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0.$$

3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{aligned} \right. \quad \text{公式11}$$

本题中,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

注意到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

则由公式11, 即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = 0.$$

由于 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \neq 0$, 故得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0$, 设 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$.

解 由于 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$, 故有

$$x^2 + y^2 = e^{2u}, \quad u = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{y}{x}, \quad v = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (v \text{ 的多值性不影响求导}$$

所得的结果). 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} = - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

由 3492 题得

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \\
& \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + m^2 z \\
& = \left[\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\
& \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + m^2 z \\
& = e^{-2s} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + m^2 z = 0,
\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + m^2 e^{2s} z = 0.$$

3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} \quad (y > 0)$, 设 $u = x - 2\sqrt{y}$ 及 $v = x + 2\sqrt{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}.$$

由公式11得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$- \frac{2}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

3495. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}.$$

由公式11得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

$$+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$3496. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{设 } u = x + y, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2 y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，得

$$\frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

注意到 $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{u}{xy}$ ，即 $xy = \frac{u}{v}$ ，于是

就有

$$\begin{aligned}
\frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 y^2} &= \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} (x-y)^2 \\
&= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 [(x+y)^2 - 4xy] \\
&= v^2 \left(u^2 - 4\frac{u}{v}\right) = uv(uv - 4).
\end{aligned}$$

从而得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2}{u(4-uv)} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\begin{aligned}
3497. \quad xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} \\
= 0, \quad \text{设 } u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ 及 } v = xy.
\end{aligned}$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial z}{\partial u} + y \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y \frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + (x^2 + y^2)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程, 得

$$[(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 y^2] \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 4xy \frac{\partial z}{\partial u},$$

即

$$(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial z}{\partial u}.$$

$$3498. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \sin y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{设 } u = x \operatorname{tg} \frac{y}{2}, \quad v = x.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \frac{y}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \operatorname{tg} \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x^2}{4} \sec^4 \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$+ \frac{x}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

代入原方程, 得

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \left(x \sin y \sec^2 \frac{y}{2} - \frac{x}{2} \sin^2 y \sec^2 \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right)$$

$$\cdot \frac{\partial z}{\partial u} = \left(2x \operatorname{tg} \frac{y}{2} - 2x \operatorname{tg} \frac{y}{2} \sin^2 \frac{y}{2} \right) \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= 2x \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cos^2 \frac{y}{2} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

3499. $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ($x > 0$, $y > 0$), 设 $x = (u+v)^2$

及 $y = (u-v)^2$.

解 由 $x = (u+v)^2$ 及 $y = (u-v)^2$ 分别对 x 及对 y 求偏导函数, 得

$$\begin{cases} 1 = 2(u+v) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ 0 = 2(u-v) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2(u+v) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ 1 = 2(u-v) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4(u+v)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4(u-v)}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4(u+v)} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{4(u-v)} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4(u+v)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4(u+v)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
&= -\frac{1}{8(u+v)^3} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{1}{16(u+v)^3} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{1}{8(u-v)^3} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{1}{16(u-v)^3} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

代入原方程，得

$$\begin{aligned}
x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{1}{8(u+v)} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
&\quad + \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8(u-v)} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
& - \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) \\
& = \frac{1}{16} \left(\frac{4v}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{4u}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial v} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) = 0,
\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u^2 - v^2} \left(v \frac{\partial z}{\partial u} - u \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0.$$

3500. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y} \right)^3$, 设 $u = x$, $v = y + z$.

解 由 $u = x$, $v = y + z$ 得

$$du = dx, \quad dv = dy + dz,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{\partial z}{\partial v} (dy + dz).$$

于是,

$$\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz = \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}}.$$

$$1 + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{1}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}}. \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}} \right) \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^3} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial z}{\partial u} \right]. \quad (2)
 \end{aligned}$$

将 (1) 式和 (2) 式代入原方程, 去分母即得

$$\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 1.$$

3501. 利用线性变换

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y$$

变换方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

(其中 A , B 和 C 为常数及 $C \neq 0$, $AC - B^2 < 0$)
为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

求满足方程 (1) 的函数的普遍形状.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

将上述结果代入原方程, 得

$$(A + 2B\lambda_1 + C\lambda_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2[A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1 \lambda_2] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (A + 2B\lambda_2 + C\lambda_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

当 $A + 2B\lambda_1 + C\lambda_1^2 = 0$ 及 $A + 2B\lambda_2 + C\lambda_2^2 = 0$. 即 λ_1 与 λ_2 为方程

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

的根时 (注意, 由假定 $C \neq 0$, $AC - B^2 < 0$, 故此方程恰有两个相异的实根), 原方程变换为

$$[A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1 \lambda_2] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

由根与系数的关系得: $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2B}{C}$, $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{A}{C}$.

于是,

$$A+B(\lambda_1+\lambda_2)+C\lambda_1\lambda_2=\frac{2(AC-B^2)}{C}\neq 0.$$

从而必有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

此时, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$, 故 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi)$ 且

$$u = \int f(\xi) d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

$$= \varphi(x + \lambda_1 y) + \psi(x + \lambda_2 y).$$

3502. 证明拉普拉斯方程

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

在满足条件 $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$

的非退化的变数代换

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

下形式不变.

$$\text{证} \quad \begin{cases} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \\ dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} du + \frac{\partial \varphi}{\partial u} dv. \end{cases}$$

令 $I = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2$. 由于变换是非退化的, 故知

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 = I \neq 0.$$

由上述方程组解得

$$du = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial v} dy \right),$$

$$dv = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial u} dy \right).$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由3492题的证明及公式11, 并考虑到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{I^2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right] = \frac{1}{I},$$

即得

$$\begin{aligned} \Delta z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) \\ &= \frac{1}{I} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

或

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

即形式是不变的.

3503. 假定 $u=f(r)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 改变方程

$$(a) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (b) \quad \Delta(\Delta u) = 0.$$

解 (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{r}.$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f'(r) \frac{x}{r} \right] = \frac{f'(r)}{r} \\ &\quad + \frac{x^2}{r^2} f''(r) + x f'(r) \cdot \left(-\frac{x}{r^3} \right) \\ &= \frac{x^2}{r^2} f''(r) + \frac{y^2}{r^3} f'(r). \end{aligned}$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} f''(r) + \frac{x^2}{r^3} f'(r).$$

于是,

$$\Delta u = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0,$$

也可写成 $\Delta u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0.$

$$\begin{aligned}
(6) \quad \Delta(\Delta u) &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (\Delta u) \right] \\
&= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) \right] \\
&= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right] \\
&= \frac{d^4 u}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 u}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{du}{dr} = 0.
\end{aligned}$$

3504. 若令

$$w = f(u),$$

其中

$$u = (x - x_0)(y - y_0),$$

方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0$$

变成怎样的形状?

解 $\frac{\partial w}{\partial x} = (y - y_0) \frac{dw}{du}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{dw}{du} + u \frac{d^2 w}{du^2}.$ 于

是, 方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0$ 变换成

$$u \frac{d^2 w}{du^2} + \frac{dw}{du} + cw = 0.$$

3505. 假定

$$x + y = X, \quad y = XY,$$

变换式子 $A = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}.$

解 $X = x + y$, $Y = \frac{y}{X} = \frac{y}{x+y} = 1 - \frac{x}{x+y}$. 于

$$\text{是, } \frac{\partial X}{\partial x} = 1, \frac{\partial X}{\partial y} = 1, \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{y}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{x}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{y}{(x+y)^2} \frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{2y}{(x+y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}$$

$$+ \frac{y^2}{(x+y)^4} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{2y}{(x+y)^3} \frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{x-y}{(x+y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}$$

$$- \frac{xy}{(x+y)^4} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - \frac{x-y}{(x+y)^3} \frac{\partial u}{\partial Y}.$$

代入所给式子, 得

$$A = X \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Y \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}.$$

3506. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y-y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z^2 = 0$$

在变换 $x=uv$ 及 $y=\frac{1}{v}$

下形状不变.

证 $v=\frac{1}{y}$, $u=\frac{x}{v}=xy$. 于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} \right) = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

代入原方程, 得

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2xy^3 \frac{\partial z}{\partial u} + 2x(y-y^3) \frac{\partial z}{\partial v} - 2(y-y^3)$$

$$+ \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v} + x^2 y^2 z^2 = 0,$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2 \frac{\partial z}{\partial u} + 2(v-v^3) \frac{\partial z}{\partial v} + u^2 v^2 z^2 = 0,$$

故其形状不变.

3507. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

在变换 $u = x + z$ 及 $v = y + z$

下形状不变.

证 将 u, v 作中间变量, x, y 作自变量. 微分得

$$du = dx + dz, \quad dv = dy + dz, \quad d^2u = d^2v = d^2z.$$

于是,

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy. \end{aligned}$$

令 $A = 1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$, 则有 $dz = \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial v} dy$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

从而有

$$du = dx + dz = \frac{1 - \frac{\partial z}{\partial v}}{A} dx + \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{A} dy,$$

$$dv = dy + dz = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{A} dx + \frac{1 - \frac{\partial z}{\partial u}}{A} dy,$$

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv^2 \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial u} d^2u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2v. \end{aligned}$$

上面最后一个等式即

$$\begin{aligned}
 A d^2 z = & \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left[\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy \right]^2 \right. \\
 & + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \left[\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy \right] \\
 & \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial u} dx + \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) dy \right] + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left[\frac{\partial z}{\partial u} dx \right. \\
 & \left. \left. + \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) dy \right]^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & \frac{1}{A^3} \left[\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right. \\
 & \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left. \right], \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = & \frac{1}{A^3} \left[\frac{\partial z}{\partial v} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right. \\
 & + \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\
 & \left. + \frac{\partial z}{\partial u} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right], \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = & \frac{1}{A^3} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial v} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right. \\
 & \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left. \right].
 \end{aligned}$$

代入原方程，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

故其形状不变.

3508. 假定

$$x = \eta \zeta, \quad y = \xi \zeta, \quad z = \xi \eta,$$

变换方程 $xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$

解 由于

$$\begin{cases} 1 = \zeta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ 0 = \zeta \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ 0 = \eta \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{cases}$$

故有

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\xi}{2\eta\zeta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\zeta}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{2\eta}.$$

同法求得

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{2\zeta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\eta}{2\xi\zeta}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{2\xi}.$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\xi}{2\eta\zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\zeta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\xi}{2\eta\zeta} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} \\
&\quad - \frac{\xi}{2\eta\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\zeta} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
&\quad + \frac{1}{2\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\eta} \right) \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
&= -\frac{1}{4\eta\zeta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi}{4\eta\zeta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\
&\quad - \frac{1}{4\xi\zeta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\eta}{4\xi\zeta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
&\quad + \frac{1}{4\xi\eta\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{4\xi\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2\zeta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (1)
\end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{4\xi\eta\zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{4\eta\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\
&\quad - \frac{1}{4\xi^2\zeta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\eta}{4\xi^2\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
&\quad - \frac{1}{4\xi^2\eta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\zeta}{4\xi^2\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta}, \quad (2) \\
&\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = -\frac{1}{4\eta^2\zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi}{4\eta^2\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\xi\eta\zeta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{4\xi\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
& - \frac{1}{4\eta^2\xi} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\zeta}{4\eta^2\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2\eta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi}. \quad (3)
\end{aligned}$$

將(1), (2), (3) 三式连同 x, y, z 一起代入原方程, 化简整理得

$$\begin{aligned}
& \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \xi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \\
& = 2 \left(\xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} + \zeta \xi \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \right),
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
& \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
& = 2 \left(\xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} + \zeta \xi \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \right).
\end{aligned}$$

3509. 假定

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_2 + x_3 - x_1, \quad y_2 = x_1 + x_3 - x_2, \\
y_3 &= x_1 + x_2 - x_3,
\end{aligned}$$

变换方程

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \\
& + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.
\end{aligned}$$

解 不难看出

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right) z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right) z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_3} \right) z.$$

把上述结果代入所给方程的左端，即得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \\ & + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} \\ & = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial z}{\partial x_3} + \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(2 \frac{\partial z}{\partial y_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(2 \frac{\partial z}{\partial y_1} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(2 \frac{\partial z}{\partial y_2} \right) \\ & = 2 \left[\left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{\partial z}{\partial y_3} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{\partial z}{\partial y_1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{\partial z}{\partial y_2} \Big] \\
& = 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} \right).
\end{aligned}$$

从而原方程变换为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} = 0.$$

3510. 假定

$$\xi = \frac{y}{x}, \eta = \frac{z}{x}, \zeta = y - z,$$

变换方程

$$\begin{aligned}
& x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
& + 2xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.
\end{aligned}$$

解 定义算子 A :

$$Au = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) u,$$

则有

$$\begin{aligned}
A^2 u &= A(Au) = x \frac{\partial}{\partial x} (Au) + y \frac{\partial}{\partial y} (Au) \\
&+ z \frac{\partial}{\partial z} (Au)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \left(x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right) u \\
&\quad + y \left(x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \right) u \\
&\quad + z \left(x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \right) u, \\
&= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u + Au.
\end{aligned}$$

于是, 原方程可改写成

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = 0 \quad \text{或} \quad A^2 u - Au = 0.$$

但是,

$$\begin{aligned}
Au &= x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \\
&= x \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{z}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + y \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
&\quad + z \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
&= (y - z) \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^2 u &= A(Au) = \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) Au = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
&= \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta},
\end{aligned}$$

从而 $\Delta^2 u - \Delta u = \xi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$. 由于 $\xi \neq 0$, 故原方程

变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

3511. 假定

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\text{变换式子 } \Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

$$\text{及 } \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

为球坐标所表的式子.

解 先作变换

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = z,$$

它相当于对 x, y 坐标作一次极坐标变换.

利用 3483 题及 3484 题的结果, 对新变元 R, φ, z 有

$$\begin{aligned} \Delta_1 u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

再作变换

$$R=r\sin\theta, \quad \varphi=\varphi, \quad z=r\cos\theta.$$

它相当于对 R, z 坐标又作一次极坐标变换, 其中 R 相当于公式 9 中的 y , θ 相当于公式 9 中的 φ . 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \frac{R}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

再利用 3483 题及 3484 题的结果, 得

$$\begin{aligned} \Delta_1 u &= \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2, \\ \Delta_2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Big],$$

注意到两次变换的乘积就是所给的变换，因此，最后得到的 $\Delta_1 u$ 及 $\Delta_2 u$ 的结果即为所求。

3512. 在方程

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

中引入新函数 w ，假定 $w=z^2$ 。

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dw}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\&=-\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} \\&=-\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-\frac{1}{2z}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{4z^3}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

代入原方程，化简整理得

$$w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

即形式是不变的。

取 u 和 v 为新的自变量及 $w=w(u, v)$ 为新函数，变

换下列方程:

$$3513. \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}, \quad \text{设 } u = \frac{x}{y}, \quad v = x, \quad w = xz - y.$$

解 从 3513 题到 3522 题均属作变换

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y, z)$$

的类型. 我们来导出一般公式, 顺便指出一般方法.

将 u, v 看作中间变量, x, y 看作自变量, 则有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy^2.$$

$$d^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz^2$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} dy dz$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} dz dx + \frac{\partial w}{\partial z} d^2 z.$$

将 dw, du 及 dv 代入全微分式

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv,$$

化简整理得

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} dz &= \left(\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{cases} \quad \text{公式12}$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是原方程中旧变元间的偏导函数, 而 $\frac{\partial w}{\partial u}$

及 $\frac{\partial w}{\partial v}$ 是变换后新变元间的偏导函数, 其它均为由已

给变换导出的已知关系式.

把上面求得的 d^2w , du , dv , d^2u , d^2v 代入表示新变元关系的二阶全微分式:

$$\begin{aligned}d^2w &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} dv^2 \\ &+ \frac{\partial w}{\partial u} d^2u + \frac{\partial w}{\partial v} d^2v,\end{aligned}$$

再把式中的 dz 表成已求得的 $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, 按

dx^2 , $dx dy$ 及 dy^2 合并同类项, 最后把所得的结果与表示旧变元关系的全微分式:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

相比较，即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\
& + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \Big]. \quad \text{公式13}
\end{aligned}$$

公式13太复杂，一般不直接应用。本题用求偏导数法较方便。由于

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial y} - 1$$

$$\text{及 } \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u},$$

故得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u}.$$

于是，

$$\begin{aligned}
y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{y} \left(y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
&= y^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
&= y^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2}{x} \right) - y^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \\
&= \frac{2}{x} - y^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\
&= \frac{2}{x} + \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

由于 $\frac{x}{y^3} \neq 0$ ，故原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0.$$

3514. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ，设 $u = x + y$ ， $v = \frac{y}{x}$ ，

$$w = \frac{z}{x}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ ， $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$ ， $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}$ ，

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{x}.$$

代入公式12，得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= x \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{z}{x^2} \right) \\
&= x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x} \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{z}{x},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial v} \right) = x \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}.$$

$$\text{令 } R = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x} \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{z}{x} - \frac{\partial w}{\partial v} = w - (1+v)$$

$\cdot \frac{\partial w}{\partial v}$. 于是,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \\ & \quad - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \\ & = \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ & = \frac{\partial R}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial R}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial v} \left[w - (1+v) \frac{\partial w}{\partial v} \right] \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \\ & = \left[\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial v} - (1+v) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right] \left[-\frac{1}{x} (1+v) \right] \\ & = \frac{1}{x} (1+v)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0, \end{aligned}$$

由于 $x \neq 0$, $1+v \neq 0$, 故原方程变为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

3515. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = x + y, v = x - y$,

$$w = xy - z.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1,$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y, \frac{\partial w}{\partial y} = x, \frac{\partial w}{\partial z} = -1.$$

代入公式12, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}.$$

令 $R = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y - 2 \frac{\partial w}{\partial u} = u - 2 \frac{\partial w}{\partial u}$. 于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial R}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(u - 2 \frac{\partial w}{\partial u} \right) = 2 - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0,$$

原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}.$$

3516. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$, 设 $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$,

$$w = ze^v.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} = -\frac{\partial v}{\partial y},$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = ze^v, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = e^v.$$

代入公式12, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{-v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{-v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \right) = z.$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + z \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-v} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

$$= e^{-v} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) = e^{-v} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \right) = z.$$

原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2ze^z = 2w.$$

3517. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = x$, $v = x$

$+ y$, $w = x + y + z$.

解 由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial v} - 1.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}.$$

同 3514 题的方法可求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\
&= \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

将上述结果代入原方程，即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

3518. $(1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$, 设

$$x = \sin u, \quad y = \sin v, \quad z = e^w.$$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dw} \frac{\partial w}{\partial u} \frac{du}{dx} = \frac{e^w}{\cos u} \frac{\partial w}{\partial u},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^w}{\cos v} \frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^w}{\cos u} \frac{\partial w}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{e^w}{\cos u} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{\cos u} \left[\frac{e^w}{\cos u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \frac{e^w}{\cos u} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{e^w \sin u}{\cos^2 u} \frac{\partial w}{\partial u} \right] \\
&= \frac{e^w}{\cos^2 u} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \operatorname{tg} u \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \right],
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^w}{\cos^2 v} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \operatorname{tg} v \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \right].$$

将上述结果代入原方程，并注意到

$$1 - x^2 = \cos^2 u, \quad 1 - y^2 = \cos^2 v,$$

化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

3519. $(1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4}z = 0 \quad (|x| \leq 1)$, 设

$$u = \frac{1}{2}(y + \arccos x), \quad v = \frac{1}{2}(y - \arccos x), \quad w =$$

$$z\sqrt{1-x^2}.$$

解 由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{xz}{2(1-x^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right).$$

于是,

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x^2) \frac{\partial z}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{xz}{2} \right] \\ &= -\frac{x}{4(1-x^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{z}{2} + \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial x} \\ &\quad + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z}{2} + \frac{x^2 z}{4(1-x^2)} + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\
&= \frac{z}{4} + \frac{z}{4(1-x^2)} + \frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\
&= \frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

将上述结果代入原方程，并注意到

$$\arccos x = u - v, \quad x = \cos(u - v),$$

$$1 - x^2 = \sin^2(u - v),$$

化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{w}{4 \sin^2(u - v)}.$$

$$3520. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}}{x^2 - y^2} - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^2} \quad (|x|$$

$\geq |y|)$, 设 $u = x + y, v = x - y, w = \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

解 原方程可改写为

$$\frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2x}{(x^2 - y^2)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2y}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^3}$$

或

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^3}. \end{aligned} \quad (1)$$

由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{x^2 - y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{xz}{x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2 - y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \right) - \frac{yz}{x^2 - y^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right. \\ & \quad \cdot \left. \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{xz}{(x^2 - y^2)^2} \right] \\ &= - \frac{x}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{x}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial z}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{z}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{4x^2 z}{(x^2 - y^2)^3} \\
& + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \\
= & \frac{z}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{3x^2 z}{(x^2 - y^2)^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \\
& \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\
= & \frac{z}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{3x^2 z}{(x^2 - y^2)^3} \\
& + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right. \\
& \cdot \left. \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \right) - \frac{yz}{(x^2 - y^2)^2} \right] \\
= & - \frac{z}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{3y^2 z}{(x^2 - y^2)^3} \\
& + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

把上述结果代入方程(1)，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

3521. 证明, 任何方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c 为常数) 用代换

$$z = ue^{\alpha x + \beta y}$$

(其中 α 与 β 为常量, $u = u(x, y)$) 可以化为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \quad (c_1 = \text{常数}).$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta y} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\alpha x + \beta y} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\alpha x + \beta y} \left(\alpha \beta u + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right).$$

将上述结果代入所给方程, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\beta + a) \frac{\partial u}{\partial x} + (\alpha + b) \frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha \beta + a\alpha \\ & + b\beta + c)u = 0. \end{aligned}$$

按题意, 需 $\beta + a = 0$ 及 $\alpha + b = 0$, 即 $\beta = -a, \alpha = -b$, 这是可能的. 事实上, 只需取代换

$$z = ue^{-(bx+ay)},$$

原方程即变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \quad (c_1 \text{ 为常数}).$$

3522. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

对于变量代换

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

(u' 为变量 x' 与 y' 的函数) 其形状不变.

证 $dx' = \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} dy, \quad dy' = \frac{1}{y^2} dy,$

$$\ln u' = \ln u + \frac{1}{2} \ln y + \frac{x^2}{4y},$$

$$du' = \frac{u'}{u} du + \frac{u'}{2y} dy + \frac{xu'}{2y} dx - \frac{x^2 u'}{4y^2} dy.$$

把上面三个微分式代入

$$du' = \frac{\partial u'}{\partial x'} dx' + \frac{\partial u'}{\partial y'} dy'$$

得

$$\begin{aligned} & \frac{u'}{u} du + \frac{u'}{2y} dy + \frac{xu'}{2y} dx - \frac{x^2 u'}{4y^2} dy \\ &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \right) + \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{dy}{y^2}, \end{aligned}$$

整理得

$$du = \left(\frac{u}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y} \right) dx + \left(-\frac{u}{y^2 u'} \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) dy$$

$$-\frac{xu}{y^2u'} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{x^2u}{4y^2} - \frac{u}{2y} \Big) dy.$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{u}{y^2u'} \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{xu}{y^2u'} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ &\quad + \frac{x^2u}{4y^2} - \frac{u}{2y}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y} \right) \\ &= \frac{u}{yu'} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{1}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{yu'^2} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 \frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{u}{2y} - \frac{x}{2y} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{u}{y^2u'} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \left(\frac{1}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{x}{2y} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{u}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y} \right) - \frac{u}{y^2u'^2} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 - \frac{u}{2y} \\ &= \frac{u}{y^2u'} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{xu}{y^2u'} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ &\quad + \frac{x^2u}{4y^2} - \frac{u}{2y}. \end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式和(2)式代入原方程, 得

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial u'}{\partial y'},$$

即方程的形式不变.

3523. 在方程

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \\ + p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(其中 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$) 中令 $u = x + z$, $v = y + z$,

$w = x + y + z$, 假定 $w = w(u, v)$.

解 本题用全微分法解较好. 由

$$dz = p dx + q dy \text{ 及 } u = x + z, v = y + z, w = x + y + z$$

可得

$$du = dx + dz = (1+p)dx + qdy,$$

$$dv = dy + dz = p dx + (1+q)dy,$$

$$d^2u = d^2v = d^2w = d^2z.$$

把上述结果代入新变元的全微分式

$$d^2w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} dv^2 \\ + \frac{\partial w}{\partial u} d^2u + \frac{\partial w}{\partial v} d^2v,$$

并记 $S = 1 - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}$, 即得

$$\begin{aligned}
Sd^2z &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left[(p+1)dx + qdy \right]^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \\
&\cdot \left[(p+1)dx + qdy \right] \left[pdx + (q+1)dy \right] \\
&+ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \left[pdx + (q+1)dy \right]^2.
\end{aligned}$$

将上式与

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

比较, 可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{S} \left[(1+p)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2p(1+p) \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{S} \left[q(p+1) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + (1+p+q+2pq) \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + p(q+1) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{S} \left[q^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2q(q+1) \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \right.$$

$$\left. + (q+1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right].$$

代入原方程, 并注意到

$$\begin{aligned}
&q(1+q)(1+p)^2 - (1+p+q+2pq)q \\
&\cdot (p+1) + p(1+p)q^2 \\
&= q(1+p) \left[(1+p)(1+q) - (1+p \right.
\end{aligned}$$

$$+q+2pq)+pq]=0,$$

$$p^2q(1+q)-(1+p+q+2pq)p(q+1) \\ +p(1+p)(q+1)^2=0$$

及

$$2p(1+p)q(1+q)-(1+p+q+2pq)^2 \\ +2q(q+1)p(1+p)=-(1+p+q)^2,$$

原方程变换为

$$-\frac{(1+p+q)^2}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0.$$

3524. 在方程

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\ + \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(z \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

中令 $x=e^{\xi}$, $y=e^{\eta}$, $z=e^{\zeta}$, $u=e^w$, 其中 $w=w(\xi, \eta, \zeta)$.

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{e^w}{x} \frac{\partial w}{\partial \xi},$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = e^w \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad (1)$$

$$y \frac{\partial u}{\partial y} = e^w \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad z \frac{\partial u}{\partial z} = e^w \frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

(1)式两端对 x 求偏导函数, 得

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = e^w \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \frac{d\xi}{dx} + e^w \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{d\xi}{dx}.$$

两端同乘 x , 整理得

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^w \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + e^w \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - e^w \frac{\partial w}{\partial \xi}. \quad (2)$$

同法可得

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^w \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + e^w \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - e^w \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad (3)$$

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = e^w \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 + e^w \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - e^w \frac{\partial w}{\partial \zeta}. \quad (4)$$

将(2), (3), (4)三式代入原方程, 化简整理即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} &= (e^w - 1) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right] + \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

3525. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

的形状与变量 x , y 和 z 所分别担任的角色无关.

证 令 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, 则 $dz = p dx + q dy$. 若以 x 作为新函数, 则有

$$\begin{aligned} d^2 x &= \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz^2 \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial y} d^2 y + \frac{\partial x}{\partial z} d^2 z. \end{aligned}$$

今以作为旧变元的关系:

$$d^2x = 0, \quad d^2y = 0, \quad dz = pdx + qdy$$

代入上式, 可得

$$d^2z = -\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} dy \right. \\ \left. \cdot (pdx + qdy) + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} (pdx + qdy)^2 \right].$$

于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -p \left(p^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -p \left(p \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + pq \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -p \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2q \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + q^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right). \quad (3)$$

代入原方程, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = p^2 \left(p^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \\ \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2q \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + q^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \\ - p^2 \left(p \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + pq \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right)^2 \\ = p^4 \left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] = 0,$$

即

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} \right)^2 = 0.$$

类似地, 若以 y 作为函数, 则也有

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} \right)^2 = 0,$$

即方程的形状与变量 x , y 和 z 所分别担任的角色无关.

3526. 取 x 作为变量 y 和 z 的函数, 解方程

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ & + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

解 将 3525 题中的(1), (2), (3)三式及 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$,

$q = \frac{\partial z}{\partial y}$ 代入, 得

$$\begin{aligned} & q^2 \left(-p^3 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + 2pq \left(p^2 \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + p^2 q \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \\ & - p^2 \left(p \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2pq \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + pq^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \\ & = -p^3 \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0, \end{aligned}$$

即 $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$ 或 $p = 0$. 由

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$$

解之，得原方程的解为

$$x = \varphi(z)y + \psi(z),$$

其中 φ, ψ 为任意函数；由 $p = 0$ 解之，得 $z = f(y)$

(f 为任意函数)，它也是原方程的解。

3527⁺. 运用勒襄德变换

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z,$$

其中 $Z = Z(X, Y)$ ，变换方程

$$\begin{aligned} & A\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ & + C\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{解 } dZ = d\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy - dz + x dX + y dY \\ &= x dX + y dY. \end{aligned}$$

于是，

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = x, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = y.$$

微分上式，得

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} dX + \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dY, \\ dy = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dX + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} dY. \end{cases} \quad (1)$$

又由 $X = \frac{\partial z}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial z}{\partial y}$ 微分得

$$\begin{cases} dX = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy, \\ dY = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy. \end{cases} \quad (2)$$

由 (1) 式与 (2) 式, 得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 1,$$

因此

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是, 由 (1) 式解之, 得

$$\begin{cases} dX = I^{-1} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} dx - \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dy \right), \\ dY = I^{-1} \left(-\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dx + \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} dy \right). \end{cases} \quad (3)$$

比较 (2) 式与 (3) 式, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = I^{-1} \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -I^{-1} \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = I^{-1} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}.$$

代入原方程, 即得

$$\begin{aligned} & A(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - 2B(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ & + C(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0. \end{aligned}$$

§5. 几何上的应用

1° 切线和法平面 在曲线

$$x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t)$$

上的一点 $M(x, y, z)$ 的切线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

在此点的法平面方程为

$$\frac{dx}{dt}(X-x) + \frac{dy}{dt}(Y-y) + \frac{dz}{dt}(Z-z) = 0.$$

2° 切平面和法线 曲面 $z=f(x, y)$ 上点 $M(x, y, z)$ 处的切平面方程为

$$Z-z = \frac{\partial z}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

在 M 点处的法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-1}.$$

若曲面的方程给成隐函数的形状 $F(x, y, z) = 0$, 则切平面方程为:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

3° 平面曲线族的包线 含一个参数的曲线族 $f(x, y, \alpha) = 0$ (α 为参数) 的包线满足方程组:

$$f(x, y, \alpha) = 0, f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

4° 曲面族的包面 含一个参数的曲面族 $F(x, y, z, \alpha) = 0$ 的包面满足方程组:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

在含两个参数的曲面族 $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ 的情形, 其包面满足下面的方程组:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0, \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \\ \Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0. \end{aligned}$$

对下列曲线写出在已知点的切线和法平面方程:

3528. $x = a \cos \alpha \cos t, y = a \sin \alpha \cos t, z = a \sin t$; 在点 $t = t_0$.

解 曲线

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

在点 $t = t_0$ 的切向量为

$$\vec{v}(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}.$$

本题中, 当 $t = t_0$ 时曲线上点的坐标及曲线在该点的切向量分别为

$$x_0 = x(t_0) = a \cos \alpha \cos t_0,$$

$$y_0 = y(t_0) = a \sin \alpha \cos t_0,$$

$$z_0 = z(t_0) = a \sin t_0,$$

$$\vec{v}(t_0) = \{-a \cos \alpha \sin t_0, -a \sin \alpha \sin t_0, a \cos t_0\}.$$

于是, 切线方程为

$$\frac{x-x_0}{-a \cos \alpha \sin t_0} = \frac{y-y_0}{-a \sin \alpha \sin t_0} = \frac{z-z_0}{a \cos t_0},$$

即

$$\frac{x-x_0}{-\cos \alpha \sin t_0} = \frac{y-y_0}{-\sin \alpha \sin t_0} = \frac{z-z_0}{\cos t_0};$$

法平面方程为

$$(-a \cos \alpha \sin t_0)(x-x_0) + (-a \sin \alpha \sin t_0)(y-y_0) + (a \cos t_0)(z-z_0) = 0,$$

以 x_0, y_0, z_0 的值代入上式, 化简整理得

$$x \cos \alpha \sin t_0 + y \sin \alpha \sin t_0 - z \cos t_0 = 0,$$

即法平面过原点.

3529. $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$; 在点 $t = \frac{\pi}{4}$.

解 $x_0 = a \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{a}{2}, y_0 = \frac{b}{2}, z_0 = \frac{c}{2};$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \{a, 0, -c\}.$$

于是, 切线方程为

$$\begin{cases} \frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c}, \\ y = \frac{b}{2}; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, \\ y = \frac{b}{2}; \end{cases}$$

法平面方程为

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) + (-c)\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0,$$

即

$$ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2).$$

3530. $y = x, z = x^2$; 在点 $M(1, 1, 1)$.

解 设 $x = t$, 则 $y = t, z = t^2$. 于是,

$$\vec{v}(1) = \{1, 1, 2\},$$

切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2};$$

法平面方程为

$$(x-1) + (y-1) + 2(z-1) = 0 \text{ 或 } x + y + 2z = 4.$$

3531. $x^2 + z^2 = 10, y^2 + z^2 = 10$; 在点 $M(1, 1, 3)$.

解 当曲线以两个曲面方程

$$F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0$$

交线形式给出时, 可先求出两曲面在交点处的法向量:

$$\vec{n}_1 = \{F'_{1x}, F'_{1y}, F'_{1z}\}, \vec{n}_2 = \{F'_{2x}, F'_{2y}, F'_{2z}\},$$

则曲线在该点的切向量为

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1x} \\ F'_{2z} & F'_{2x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix} \right\}.$$

本题中,

$$\vec{n}_1 = \{2, 0, 6\}, \vec{n}_2 = \{0, 2, 6\},$$

$$\vec{v} = \{1, 0, 3\} \times \{0, 1, 3\} = \{-3, -3, 1\}.$$

于是, 切线方程为

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{1}$$

或
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1};$$

法平面方程为

$$-3(x-1) - 3(y-1) + (z-3) = 0,$$

即

$$3x + 3y - z = 3.$$

3532. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $x + y + z = 0$; 在点 $M(1, -2, 1)$.

解 $F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0$, $F_2 = x + y + z = 0$.

$$\vec{n}_1 = 2\{1, -2, 1\}, \vec{n}_2 = \{1, 1, 1\},$$

$$\vec{v} = \{1, -2, 1\} \times \{1, 1, 1\}$$

$$= -3\{1, 0, -1\}.$$

于是, 切线方程为

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{z-1}{-1}, & \text{或} \\ y = -2; & \begin{cases} x+z=2, \\ y+2=0; \end{cases} \end{cases}$$

法平面方程为

$$(x-1) - (z-1) = 0 \text{ 或 } x - z = 0.$$

3533. 在曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上求出一點, 此点的切线是平行于平面 $x+2y+z=4$ 的.

解 $\vec{v} = \{1, 2t, 3t^2\}$, 平面法向量 $\vec{n} = \{1, 2, 1\}$.

按题设, 应有

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 + 4t + 3t^2 = 0.$$

解之, 得 $t = -1$ 或 $t = -\frac{1}{3}$. 于是, 所求的点为 M_1

$$(-1, 1, -1), M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right).$$

3534. 证明: 螺旋线 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ 的切线与 Oz 轴形成定角.

证 $\frac{dx}{dt} = -a \sin t$, $\frac{dy}{dt} = a \cos t$, $\frac{dz}{dt} = b$. 于是, 切

线与 Oz 轴形成之角 γ 的余弦

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

由于 $\cos \gamma$ 为常数, 故知切线与 Oz 轴形成定角.

3535. 证明: 曲线

$$x = ae^t \cos t, y = ae^t \sin t, z = ae^t$$

与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同.

证 圆锥 $x^2 + y^2 = z^2$ 的顶点在原点, 过圆锥上任一点 $P(x, y, z)$ 的母线也过原点. 因此, 母线的方向向量为 $\vec{v}_1 = \{x, y, z\}$.

曲线在点 P 的切向量为 $\vec{v}_2 = \{x', y', z'\} = \{ae^t \cdot (\cos t - \sin t), ae^t (\sin t + \cos t), ae^t\} = \{x - y, x + y,$

$z\}$.

注意到 $x^2 + y^2 = z^2$, 即得

$$\begin{aligned}\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} \\ &= \frac{x(x-y) + y(x+y) + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2 + z^2}} \\ &= \frac{2z^2}{\sqrt{2z^2} \sqrt{3z^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}},\end{aligned}$$

于是, 交角相同.

3536. 证明斜驶线

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = e^{k\varphi} \quad (k = \text{常数}),$$

(其中 φ ——地球上点的经度, ψ ——地球上点的纬度) 与地球的一切子午线相交成定角.

证 取直角坐标系如下: 赤道平面为 Oxy 平面, 球心为坐标原点, Ox 轴正向过 0° 子午线, Oz 轴正向过北极, 并取 $Oxyz$ 坐标系为右手系.

下面我们先确定斜驶线和子午线在直角坐标系中的方程. 为此, 假定讨论地球上的点的经度为 φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), 纬度为 ψ ($-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$), 则它在上述坐标系下的坐标为

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \cos \varphi, \\ y = R \cos \psi \sin \varphi, \\ z = R \sin \psi, \end{cases}$$

其中 R 为地球半径.

对 $\lg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = e^{i\varphi}$ 的两端微分, 得

$$\frac{d\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)} = ke^{i\varphi}d\varphi = k\lg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)d\varphi.$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\psi} &= \left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)k\lg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \right]^{-1} \\ &= \left[k\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \right]^{-1} = \frac{1}{k\cos\psi}.\end{aligned}$$

今将斜驶线方程看作决定 φ 为 ψ 的隐函数. 因此, 对斜驶线来说, 在 (φ_0, ψ_0) 点, 有

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\psi} &= -R\sin\psi_0\cos\varphi_0 - R\cos\psi_0\sin\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi} \\ &= -R\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{\sin\varphi_0}{k}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\psi} &= -R\sin\psi_0\sin\varphi_0 + R\cos\psi_0\cos\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi} \\ &= -R\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0 - \frac{\cos\varphi_0}{k}\right),\end{aligned}$$

$$\frac{dz}{d\psi} = R\cos\psi_0.$$

于是, 可取斜驶线切向量

$$\vec{v}_1 = \left\{ \sin\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{\sin\varphi_0}{k}, \sin\psi_0\sin\varphi_0 \right.$$

$$-\frac{\cos\varphi_0}{k}, -\cos\psi_0\}.$$

当 φ 为常数时即得子午线, 故其参数方程为

$$\begin{cases} x = R \cos\psi \cos\varphi_0, \\ y = R \cos\psi \sin\varphi_0, \\ z = R \sin\psi. \end{cases}$$

于是, 子午线在点 (φ_0, ψ_0) 的切向量为

$$\vec{v}_2 = \{\sin\psi_0 \cos\varphi_0, \sin\psi_0 \sin\varphi_0, -\cos\psi_0\}.$$

从而得

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k_2}}} = \text{常数},$$

即斜驶线与子午线相交成定角.

3537. 已知曲线

$$z = f(x, y), \quad \frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha},$$

其中 f 为可微分函数. 求曲线上 $M_0(x_0, y_0)$ 点的切线与 Oxy 平面所成角的正切.

解 解法一

将曲线看作由参数方程

$$x = x, \quad y = \varphi(x) = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha, \quad z = \psi(x)$$

及 $f(x, \varphi(x))$ 给出, 则切向量为

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \{1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0)\} \\ &= \{1, \operatorname{tg} \alpha, f'_x[x_0, \varphi(x_0)] \\ &\quad + f'_y[x_0, \varphi(x_0)] \varphi'(x_0)\} \end{aligned}$$

$$= \{1, \operatorname{tg} \alpha, f'_x(x_0, y_0) + \operatorname{tg} \alpha \cdot f'_y(x_0, y_0)\}.$$

于是, 曲线上 M_0 点的切线与 Oxy 平面所成角 φ 的正切为

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\psi'(x_0)}{\sqrt{1 + \varphi'^2(x_0)}} = \frac{f'_x(x_0, y_0) + \operatorname{tg} \alpha \cdot f'_y(x_0, y_0)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \\ &= f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha. \end{aligned}$$

解法二

将曲线看作两条曲线的交线, 则所给曲线在 M_0 点的切线方程为

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} f'_x(x_0, y_0) & -1 \\ -\frac{1}{\sin \alpha} & 0 \end{vmatrix}} &= \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} -1 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & \frac{1}{\cos \alpha} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ -\frac{1}{\cos \alpha} & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{vmatrix}}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha} = \frac{z - z_0}{f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha},$$

因此, 切线与 Oxy 平面所成角 φ 的正切为

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \\ &= f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha. \end{aligned}$$

3538. 求函数

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

在点 $M(1, 2, -2)$ 沿曲线

$$x=t, y=2t^2, z=-2t^4$$

在此点的切线方向上的导函数.

解
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

在点 $M(1, 2, -2)$ 它们的值分别为 $\frac{8}{27}$, $-\frac{2}{27}$, $\frac{2}{27}$.

又曲线在该点的切线的方向余弦为 $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, $-\frac{8}{9}$.

于是, 所求的导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_M = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{2}{27} \right) \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{27} \cdot \left(-\frac{8}{9} \right) = -\frac{16}{243}.$$

写出下列曲面上已知点的切面和法线方程:

3539. $z = x^2 + y^2$; 在点 $M_0(1, 2, 5)$.

解 当曲面由方程 $F(x, y, z) = 0$ 给出时, 法向量

为 $\vec{n} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$; 特别是曲面由显式方程

$z=f(x, y)$ 给出时, 法向量为 $\vec{n}=\{f'_x, f'_y, -1\}$.
 本题中, $\vec{n}=\{2x, 2y, -1\}_{M_0}=\{2, 4, -1\}$.
 于是, 切面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,$$

或

$$2x+4y-z=5,$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}.$$

3540. $x^2+y^2+z^2=169$; 在点 $M_0(3, 4, 12)$.

解 设 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-169=0$, 则在点 M_0 处 $\vec{n}=\{2x, 2y, 2z\}_{M_0}=\{6, 8, 24\}=2\{3, 4, 12\}$. 于是, 切面方程为

$$3(x-3)+4(y-4)+12(z-12)=0$$

或

$$3x+4y+12z=169;$$

法线方程为

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12} \text{ 或 } \frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}.$$

3541. $z=\arctg \frac{y}{x}$; 在点 $M_0(1, 1, \frac{\pi}{4})$.

解 $\vec{n}=\left\{\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, -1\right\}_{M_0}=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right\}$. 于是, 切面方程为

$$z - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

或
$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-y);$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}.$$

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$; 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

解 $\vec{n} = 2\{ax_0, by_0, cz_0\}$. 于是, 切面方程为

$$ax_0(x-x_0) + by_0(y-y_0) + cz_0(z-z_0) = 0,$$

注意到 $ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1$, 上述方程即化为

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = 1;$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}.$$

3543. $z = y + \ln \frac{x}{z}$; 在点 $M_0(1, 1, 1)$.

解 $F(x, y, z) = y + \ln x - \ln z - z = 0$.

$$\vec{n} = \left\{ \frac{1}{x}, 1, -\frac{1}{z} - 1 \right\}_{M_0} = \{1, 1, -2\}.$$

于是, 切面方程为

$$(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0 \text{ 或 } x + y - 2z = 0;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

3544. $2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y}{2}} = 8$; 在点 $M_0(2, 2, 1)$.

解 $F(x, y, z) = 2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y}{2}} - 8$,

$$\vec{n} = \left\{ \frac{1}{z} 2^{\frac{x}{2}} \ln 2, \frac{1}{z} 2^{\frac{y}{2}} \ln 2, \left(x \cdot 2^{\frac{x}{2}} \right. \right.$$

$$\left. + y \cdot 2^{\frac{y}{2}} \right) \left(-\frac{1}{z^2} \ln 2 \right) \Big\}_{M_0}$$

$$= 4 \ln 2 \{ 1, 1, -4 \}.$$

于是, 切面方程为

$$(x-2) + (y-2) - 4(z-1) = 0 \text{ 或 } x + y - 4z = 0;$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}.$$

3545. $x = a \cos \psi \cos \varphi$, $y = b \cos \psi \sin \varphi$, $z = c \sin \psi$; 在点 $M_0(\varphi_0, \psi_0)$.

解 当曲面由参数方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

给出时, 曲面上分别令 $u = u_0$, $v = v_0$ 得到的两条曲线的切向量分别为

$$\vec{v}_1 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\},$$

$$\vec{v}_2 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\},$$

则切面的法向量为

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right\}.$$

本题中,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \left\{ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right\}_{M_0} \\ &= \{-a \cos \psi_0 \sin \varphi_0, b \cos \psi_0 \cos \varphi_0, 0\} \\ &= \cos \psi_0 \{-a \sin \varphi_0, b \cos \varphi_0, 0\}, \\ \vec{v}_2 &= \left\{ \frac{\partial x}{\partial \psi}, \frac{\partial y}{\partial \psi}, \frac{\partial z}{\partial \psi} \right\}_{M_0} \\ &= \{-a \sin \psi_0 \cos \varphi_0, -b \sin \psi_0 \sin \varphi_0, c \cos \psi_0\}, \\ \vec{n} &= \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \\ &= abc \left\{ \frac{\cos \psi_0 \cos \varphi_0}{a}, \frac{\cos \psi_0 \sin \varphi_0}{b}, \frac{\sin \psi_0}{c} \right\}. \end{aligned}$$

于是, 切面方程为

$$\begin{aligned} &\frac{\cos \psi_0 \cos \varphi_0}{a} (x - a \cos \psi_0 \cos \varphi_0) + \frac{\cos \psi_0 \sin \varphi_0}{b} \\ &\cdot (y - b \cos \psi_0 \sin \varphi_0) \\ &+ \frac{\sin \psi_0}{c} (z - c \sin \psi_0) = 0, \end{aligned}$$

即

$$\frac{x}{a} \cos \psi_0 \cos \varphi_0 + \frac{y}{b} \cos \psi_0 \sin \varphi_0 + \frac{z}{c} \sin \psi_0 = 1;$$

法线方程为

$$\frac{x - a \cos \psi_0 \cos \varphi_0}{\frac{\cos \psi_0 \cos \varphi_0}{a}} = \frac{y - b \cos \psi_0 \sin \varphi_0}{\frac{\cos \psi_0 \sin \varphi_0}{b}} = \frac{z - c \sin \psi_0}{\frac{\sin \psi_0}{c}},$$

即

$$\frac{x \sec \psi_0 \sec \varphi_0 - a}{bc} = \frac{y \sec \psi_0 \csc \varphi_0 - b}{ac} = \frac{z \csc \psi_0 - c}{ab}.$$

3546. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r \operatorname{ctg} \alpha$; 在点 $M_0(\varphi_0, r_0)$.

解 $\vec{v}_1 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right\}_{M_0}$

$$= r_0 \{-\sin \varphi_0, \cos \varphi_0, 0\},$$

$$\vec{v}_2 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right\}_{M_0}$$

$$= \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, \operatorname{ctg} \alpha\},$$

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = r_0 \{\cos \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha, \sin \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha, -1\}.$$

于是, 切面方程为

$$\cos \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha (x - r_0 \cos \varphi_0) + \sin \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha (y - r_0 \sin \varphi_0) - (z - r_0 \operatorname{ctg} \alpha) = 0.$$

即

$$x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 - z \operatorname{tg} \alpha = 0;$$

法线方程为

$$\frac{x - r_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{y - r_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{z - r_0 \operatorname{ctg} \alpha}{-1}$$

或

$$\frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=\frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\frac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}.$$

3547. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$; 在点 $M_0(u_0, v_0)$.

解 $\vec{v}_1 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\}_{M_0} = \{\cos v_0, \sin v_0, 0\},$

$$\vec{v}_2 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\}_{M_0}$$

$$= \{-u_0\sin v_0, u_0\cos v_0, a\},$$

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \{a\sin v_0, -a\cos v_0, u_0\}.$$

于是, 切面方程为

$$a\sin v_0(x - u_0\cos v_0) - a\cos v_0(y - u_0\sin v_0) + u_0(z - av_0) = 0,$$

即

$$ax\sin v_0 - ay\cos v_0 + u_0z = au_0v_0;$$

法线方程为

$$\frac{x - u_0\cos v_0}{a\sin v_0} = \frac{y - u_0\sin v_0}{-a\cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0}.$$

3548. 求曲面

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

的切平面当切点 $M(u, v)$ ($u \neq v$) 无限接近于曲面的边界线 $u = v$ 上的点 $M_0(u_0, v_0)$ 时的极限位置.

解 $\vec{n}(u, v) = \{1, 2u, 3u^2\} \times \{1, 2v, 3v^2\}$
 $= (v - u)\{6uv, -3(u + v), 2\},$

则 \vec{n} 方向上的单位向量为

$$\vec{n}^0(u, v) = \left\{ \frac{6uv}{l}, -\frac{3(u+v)}{l}, \frac{2}{l} \right\},$$

其中 $l = \sqrt{36u^2v^2 + 9(u+v)^2 + 4}$. 于是

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \vec{n}^0 = \left\{ \frac{6u_0^2}{l_0}, -\frac{6u_0}{l_0}, \frac{2}{l_0} \right\},$$

其中 $l_0 = \sqrt{36u_0^4 + 36u_0^2 + 4}$. 而 $M_0(u_0, v_0)$

$= (2u_0, 2u_0^2, 2u_0^3)$, 故知切面在 M_0 点的极限位置为

$$\begin{aligned} & 3u_0^2x - 3u_0y + z \\ &= 3u_0^2(2u_0) - 3u_0(2u_0^2) + 2u_0^3 \\ &= 2u_0^3, \end{aligned}$$

或

$$\frac{3x}{u_0} - \frac{3y}{u_0^2} + \frac{z}{u_0^3} = 2.$$

3549. 在曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ 上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

解 $\vec{n} = \{2(x+y+z), 2(x+2y+2z), 2(x+2y+3z)\}$. 当

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x+2y+2z=0, \\ x+2y+3z=\lambda \end{cases}$$

时, \vec{n} 与 $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$ 平行, 即切面平行于 Oxy 平面. 解之, 得 $x=0, y=-\lambda, z=\lambda$. 将求得的 x, y, z 值代入所给的曲面方程, 得 $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$. 于是, 切面平行于 Oxy 坐标平面的切点为 $(0, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$.

$\mp 2\sqrt{2}$). 同法可求得切面平行于 Oyz 坐标平面及 Oxz 坐标平面的诸切点分别为 $(\pm 4, \mp 2, 0)$ 及 $(\pm 2, \mp 4, \pm 2)$.

3550. 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

上怎样的点, 椭球面的法线与坐标轴成等角?

解 $\vec{n} = 2 \left\{ \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right\}$. 按题设, 应有

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{l} = \frac{\frac{y}{b^2}}{l} = \frac{\frac{z}{c^2}}{l} \quad \left(l = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \right),$$

即

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} = \lambda.$$

将上式代入椭球面方程, 得 $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

于是, 所求的点为 $x = \pm \frac{a^2}{d}$, $y = \pm \frac{b^2}{d}$, $z = \pm \frac{c^2}{d}$,

其中 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3551. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的平行于平面

$$x + 4y + 6z = 0$$

的各切平面.

解 $\vec{n} = 2\{x, 2y, 3z\}$. 按题设, 应有

$$x = \lambda, \quad 2y = 4\lambda, \quad 3z = 6\lambda,$$

解之, 得 $x = \lambda$, $y = 2\lambda$, $z = 2\lambda$. 将它们代入方程

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, 得 $\lambda = \pm 1$, 故切点为 $(\pm 1, \pm 2, \pm 2)$. 于是, 所求的切面方程为

$$(x \mp 1) + 4(y \mp 2) + 6(z \mp 2) = 0,$$

即

$$x + 4y + 6z = \pm 21.$$

3552. 证明: 曲面 $xyz = a^3$ ($a > 0$) 的切平面与坐标面形成体积一定的四面体.

证 在曲面上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0,$$

它与各坐标面的交点为 $A(3x_0, 0, 0)$, $B(0, 3y_0, 0)$, $C(0, 0, 3z_0)$. 注意到各坐标轴的垂直关系, 即知以 A 、 B 、 C 、 O 诸点为顶点的四面体的体积为

$$\begin{aligned} V_{ABCO} &= \frac{1}{3} OC \cdot \left(\frac{1}{2} OA \cdot OB \right) \\ &= \frac{1}{6} 3z_0 \cdot 3x_0 \cdot 3y_0 = \frac{9}{2} x_0 y_0 z_0 = \frac{9}{2} a^3, \end{aligned}$$

它为一个常数, 本题获证.

3553. 证明: 曲面

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

的切平面在坐标轴上割下的诸线段, 其和为常量.

证 在曲面上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即

$$\sqrt{y_0 z_0}(x-x_0)+\sqrt{x_0 z_0}(y-y_0)+\sqrt{x_0 y_0} \cdot (z-z_0)=0.$$

此切面在坐标轴上所割下的诸线段分别为

$$\sqrt{ax_0}, \sqrt{ay_0}, \sqrt{az_0},$$

其和为 $\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$, 它是常数, 本题获证.

3554. 证明: 锥面

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

的切平面经过其顶点.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right), \frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)$. 于是,

锥面在任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切面方程为

$$\begin{aligned} z-z_0 &= \left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right] (x-x_0) \\ &\quad + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) (y-y_0), \end{aligned}$$

化简整理得

$$z = \left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right] x + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) y,$$

它显然通过锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的顶点 $(0,0,0)$.

3555. 证明: 旋转面

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (f' \neq 0)$$

的法线与旋转轴相交.

证 在旋转面上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 其中 $z_0 = f(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$, 则曲面在该点的法向量为

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right\}_{P_0} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ &\cdot \{x_0 f', y_0 f', -\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\}. \end{aligned}$$

于是, 法线方程为

$$\frac{x - x_0}{x_0 f'} = \frac{y - y_0}{y_0 f'} = \frac{z - z_0}{-\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

显然, 法线通过 Oz 轴上的点

$$\left(0, 0, f(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}) + \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})} \right),$$

即法线和 Oz 轴相交.

3556. 求椭球面

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

在坐标面上的射影.

解 先考虑椭球面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$ 在 Oxy 平面上的射影. 该射影即通过所给曲面上的每一点向 Oxy 平面作垂线所得到的垂足的全体, 它是 Oxy 平面上的一个区域, 这个区域的边界由曲面上这样的点的投影构成: 这一点向 Oxy 平面所作的垂线在它的切面内 (这里用到了椭球面的凸性), 即该点的法线与 Oxy

平面平行，注意到该点的法向量为 $\{2x-y, 2y-x, 2z\}$ ，因此，该点的坐标满足

$$\begin{cases} 2z=0, \\ x^2+y^2+z^2-xy=1, \end{cases}$$

这些点的投影为

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2-xy=1, \end{cases}$$

它即椭球面在 Oxy 平面上射影的边界。

同法可考虑切面与 Oxz 平面垂直，则有

$$2y-x=0.$$

因此，对 Oxz 平面投影为边界点的椭球面上的点应满足方程

$$\begin{cases} 2y-x=0, \\ x^2+y^2+z^2-xy=1. \end{cases}$$

这是椭球面与平面的交线，将它改写为柱面与平面的交线

$$\begin{cases} 2y-x=0, \\ \frac{3x^2}{4}+z^2=1. \end{cases}$$

于是，椭球面在 Oxz 平面上射影的边界由方程

$$\begin{cases} y=0, \\ \frac{3x^2}{4}+z^2=1 \end{cases}$$

所确定。

同法可确定椭球面在 Oyz 平面上射影的边界由

方程

$$\begin{cases} x = 0, \\ \frac{3y^2}{4} + z^2 = 1 \end{cases}$$

所确定.

于是, 椭球面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$ 在 Oxy 平面上的射影为圆: $x^2 + y^2 - xy \leq 1, z = 0$; 在 Oyz 平面上的射影为椭圆: $\frac{3}{4}y^2 + z^2 \leq 1, x = 0$; 在 Oxz 平面上的射影为椭圆 $\frac{3}{4}x^2 + z^2 \leq 1, y = 0$.

3557. 分正方形 $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 为直径 $\leq \delta$ 的有限个部分 σ . 若曲面

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

在属于同一部分 σ 的任何两点 $P(x, y)$ 及 $P_1(x_1, y_1)$ 的法线方向相差小于 1° , 求数 δ 的上界.

解 记曲面在点 $P(x, y)$ 及 $P_1(x_1, y_1)$ 的法向量为 \vec{n} 及 \vec{n}_1 , 则 $\vec{n} = \{2x, 2y, 1\}$, $|\vec{n}| \geq 1$, $\vec{n}_1 = \{2x_1, 2y_1, 1\}$, $|\vec{n}_1| \geq 1$, 且有

$$\vec{n} \times \vec{n}_1 = \{2(y - y_1), 2(x_1 - x), 4(xy_1 - x_1y)\},$$

$$\sin(\widehat{\vec{n}, \vec{n}_1}) = \frac{|\vec{n} \times \vec{n}_1|}{|\vec{n}| |\vec{n}_1|} \leq |\vec{n} \times \vec{n}_1|$$

$$= 2 \sqrt{(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2 + 4(xy_1 - x_1y)^2}.$$

注意到 $(xy_1 - x_1y)^2 = [x(y_1 - y) + y(x - x_1)]^2$

$$\leq 2[x^2(y_1 - y)^2 + y^2(x - x_1)^2]$$

$$\leq 2[(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2],$$

并记 $\rho = \sqrt{(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2}$, 即有

$$\widehat{\sin(n, n_1)} \leq 2\sqrt{\rho^2 + 4 \cdot 2\rho^2} = 6\rho.$$

当 $\varphi = \widehat{(n, n_1)} < 1^\circ$ 时, $\varphi \approx \widehat{\sin(n, n_1)}$. 于是, 要 $\varphi <$

$\frac{\pi}{180}$, 只要 $6\rho < \frac{\pi}{180}$, 即 $\rho < \frac{\pi}{1080} \approx 0.003$ 即可.

从而得

$$\delta < 0.003.$$

3558. 设:

$$z = f(x, y), \text{ 其中 } (x, y) \in D \quad (1)$$

为曲面的方程, $\varphi(P_1, P)$ 为曲面 (1) 在点 $P(x, y) \in D$ 及 $P_1(x_1, y_1) \in D$ 二点的法线之间的夹角.

证明: 若域 D 有界且为封闭的, 函数 $f(x, y)$ 在域 D 内有有界的二阶导函数, 则李雅甫诺夫不等式

$$\varphi(P_1, P) < C\rho(P_1, P) \quad (2)$$

成立. 其中 C 为常数, $\rho(P_1, P)$ 为点 P 与 P_1 之间的距离.

证 本题应加区域是凸的这个条件, 否则结论就不成立. 例如,

$$z = \begin{cases} 0, & \text{当 } y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1, \\ y^3, & \text{当 } y > 0, x \geq y^4, x^2 + y^2 \leq 1, \\ -y^3, & \text{当 } y > 0, x \leq -y^4, x^2 + y^2 \leq 1, \end{cases}$$

如图6·30所示, 函数 z 在单位圆内缺一个角的闭区域内定义, 且有连续的二

阶偏导函数, 取 $P_n(\frac{1}{n^3},$

$\frac{1}{n})$ 与 $P'_n(-\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n})$, 则

$$\vec{n} = \vec{n}(P_n) = \{0, 3y^2,$$

$$-1\}_{P_n} = \{0, \frac{3}{n^2}, -1\},$$

$$\vec{n}' = \vec{n}(P'_n) = \{0, -3y^2, -1\}_{P'_n}$$

$$= \{0, -\frac{3}{n^2}, -1\},$$

$$\vec{n} \times \vec{n}' = \left\{ -\frac{6}{n^2}, 0, 0 \right\},$$

$$\sin \varphi_n = \frac{|\vec{n} \times \vec{n}'|}{|\vec{n}| |\vec{n}'|} = \frac{\frac{6}{n^2}}{1 + \frac{9}{n^4}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

又因

$$\rho_n(P_n, P'_n) = \frac{2}{n^3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \varphi_n}{\rho_n} \cdot \frac{\varphi_n}{\sin \varphi_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \varphi_n}{\rho_n}$$

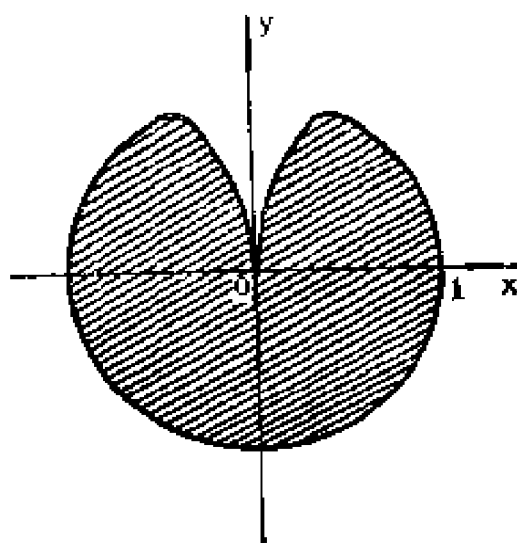


图 6·30

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\frac{6}{n^2}}{1 + \frac{9}{n^4}}}{\frac{2}{n^3}} = +\infty,$$

故不存在常数 C , 使 $\varphi_n \leq C\rho_n$.

下面证明当 D 为凸的有界闭域时, 不等式(2)为真.

由 3253 题知: 当 $f(x, y)$ 在 D 内有二阶连续的偏导函数时, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 内是二元连续的. 又因 D 是有界闭域, 故 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上有界, 记

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M.$$

又由 3254 题的证明过程可知: 当 D 是凸域, $f(x, y)$ 有有界二阶偏导函数时, 对 D 中任意两点 P 及 P_1 ,

$\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 满足里普什兹条件, 即存在常数 L , 使有

$$\left| \frac{\partial f(P)}{\partial x} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial x} \right| \leq L\rho(P_1, P),$$

$$\left| \frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \right| \leq L\rho(P_1, P).$$

$$\vec{n}(P_1) = \left\{ \frac{\partial f(P_1)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_1)}{\partial y}, -1 \right\}$$

及 $\vec{n}(P) = \left\{ \frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, -1 \right\}$ 知: 对于 $\varphi = \varphi$

(P_1, P) 有下列不等式

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{|\vec{n}(P_1) \times \vec{n}(P)|^2}{|\vec{n}(P_1)|^2 |\vec{n}(P)|^2} \leq |\vec{n}(P_1) \times \vec{n}(P)|^2 \\ &= \left[\frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial f(P)}{\partial x} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial x} \right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x} \frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \frac{\partial f(P)}{\partial x} \right]^2 \\ &\leq L^2 \rho^2 + L^2 \rho^2 + 2 \left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x} \right]^2 \\ &\quad \cdot \left[\frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \right]^2 \\ &\quad + 2 \left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \right]^2 \left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x} - \frac{\partial f(P)}{\partial x} \right]^2 \\ &\leq 2L^2 \rho^2 + 2M^2 L^2 \rho^2 + 2M^2 L^2 \rho^2 \\ &= 2L^2 \rho^2 (1 + 2M^2). \end{aligned}$$

于是,

$$\sin \varphi \leq C_1 \rho(P_1, P),$$

其中 $C_1^2 = 2L^2(1 + 2M^2)$, 从而得

$$\begin{aligned} \varphi(P_1, P) &\leq \frac{\pi}{2} \sin \varphi^{**} \leq \frac{\pi}{2} C_1 \rho(P_1, P) \\ &= C \rho(P_1, P), \end{aligned}$$

其中 $C = \frac{\pi}{2} C_1$ 为常数, 本题获证.

*) 利用 1290 题的结果.

3559. 圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 与曲面 $bz = xy$ 在公共点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 相交成怎样的角?

解 二曲面在 M_0 点的法向量为

$$\vec{n}_1 = \{y_0, x_0, -b\} \text{ 及 } \vec{n}_2 = \{2x_0, 2y_0, 0\}.$$

于是, 交角 φ 满足

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2x_0 y_0 + 2x_0 y_0 + 0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + b^2} \sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2}} \\ &= \frac{4bz_0}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot 2a} = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

3560. 证明: 球坐标的坐标曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y = x \operatorname{tg} \varphi$, $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \theta$ 两两相交.

证 各曲面在其交点 $P(x, y, z)$ 处的法向量分别为

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \{2x, 2y, 2z\}, \quad \vec{n}_2 = \{\operatorname{tg} \varphi, -1, 0\}, \\ \vec{n}_3 &= \{2x, 2y, -2z \operatorname{tg}^2 \theta\}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 2x \operatorname{tg} \varphi - 2y = 2y - 2y = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 &= 4x^2 + 4y^2 - 4z^2 \operatorname{tg}^2 \theta = 4z^2 \operatorname{tg}^2 \theta \\ &\quad - 4z^2 \operatorname{tg}^2 \theta = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 &= 2x \operatorname{tg} \varphi - 2y = 0, \end{aligned}$$

故知这些曲面在其交点处分别两两直交.

3561. 证明: 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ 形成三直交系.

证 设球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ 与球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$ 交于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点, 则它们在 P_0 点的法向量为

$$\vec{n}_1 = \{2(x_0 - a), 2y_0, 2z_0\},$$

$$\vec{n}_2 = \{2x_0, 2(y_0 - b), 2z_0\}.$$

由于

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 4[x_0(x_0 - a) + y_0(y_0 - b) + z_0^2] \\ &= 2[2x_0^2 + 2y_0^2 + 2z_0^2 - 2ax_0 - 2by_0] \\ &= 2[(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2ax_0) + (x_0^2 + y_0^2 \\ &\quad + z_0^2 - 2by_0)] = 0,\end{aligned}$$

故知这二球在其交点处直交, 同法可证其它球的两两直交性.

3562. 当 $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \lambda = \lambda_3$ 时, 经过每一点 $M(x, y, z)$ 有三个二次曲面:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0).$$

证明这些曲面是直交的.

证 先证 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ 的存在性. 考虑 λ^2 的多项式

$$\begin{aligned}F(\lambda^2) &= x^2(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2) + y^2(a^2 - \lambda^2) \\ &\quad \cdot (c^2 - \lambda^2) + z^2(a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2) \\ &\quad + (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2).\end{aligned}$$

显然有

$$F(a^2) = x^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) \geq 0,$$

$$F(b^2) = y^2(a^2 - b^2)(c^2 - b^2) \leq 0,$$

$$F(c^2) = z^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) \geq 0,$$

$$\lim_{\lambda^2 \rightarrow \infty} F(\lambda^2) = -\infty.$$

因此, $F(\lambda^2) = 0$ 在 $(a^2, +\infty), (b^2, a^2)$ 及 $(c^2,$

b^2)内各有一根, 记为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$. 但 $F(\lambda^2)$ 是关于 λ^2 的三次多项式, 因此, 也仅有三个实根 λ_i^2 ($i=1, 2, 3$), 且知 $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j; i, j=1, 2, 3$). 由 $F(\lambda_i^2)=0$ 不难推得

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2} + \frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2} = -1 \quad (i=1, 2, 3).$$

下面再证明这三个二次曲面是两两直交的, 由于

$$\vec{n}_i = \left\{ \frac{2x}{a^2-\lambda_i^2}, \frac{2y}{b^2-\lambda_i^2}, \frac{2z}{c^2-\lambda_i^2} \right\} \quad (i=1, 2, 3),$$

及当 $i \neq j$ 时,

$$\begin{aligned} \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j &= \frac{4x^2}{(a^2-\lambda_i^2)(a^2-\lambda_j^2)} + \frac{4y^2}{(b^2-\lambda_i^2)(b^2-\lambda_j^2)} \\ &\quad + \frac{4z^2}{(c^2-\lambda_i^2)(c^2-\lambda_j^2)} \\ &= \frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2} \left[\left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_i^2} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_i^2} + \frac{z^2}{c^2-\lambda_i^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x^2}{a^2-\lambda_j^2} + \frac{y^2}{b^2-\lambda_j^2} + \frac{z^2}{c^2-\lambda_j^2} \right) \right] \\ &= \frac{4}{\lambda_i^2-\lambda_j^2} [(-1) - (-1)] = 0, \end{aligned}$$

故本题获证.

3563. 求函数 $u=x+y+z$ 在沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的外法线方向上的导函数.

在球面上怎样的点使得上述的导函数有：(a) 最大值，(b) 最小值，(B) 等于零？

解 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1$ ，则在 M_0 点处球面的外法线单位向量为 $\left\{ \frac{x_0}{r_0}, \frac{y_0}{r_0}, \frac{z_0}{r_0} \right\} = \{x_0, y_0, z_0\}$ 。

于是，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \cdot \{x_0, y_0, z_0\} \\ &= \{1, 1, 1\} \cdot \{x_0, y_0, z_0\} = x_0 + y_0 + z_0. \end{aligned}$$

(a) 利用 1294 题的结果，得

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 + z_0 &= 1 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 + 1 \cdot z_0 \\ &\leq \sqrt{3} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

当 $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，上述等式成立，此点恰在球面上。因此，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ 点 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 取得最大值。

(b) 同法可得

$$\begin{aligned} -(x_0 + y_0 + z_0) &= (-1)x_0 + (-1)y_0 \\ &\quad + (-1)z_0 \leq \sqrt{3}, \end{aligned}$$

或

$$x_0 + y_0 + z_0 \geq -\sqrt{3}.$$

故在点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ ， $\frac{\partial u}{\partial n}$ 取得最小值。

(B) 当 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 时 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

因此, 所求的点为由方程

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

所确定的解 (x, y, z) , 它在单位球面与过圆心的平面 $x+y+z=0$ 的交线——圆上面.

3564. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在沿椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的外法线方向上的导函数.

解 $\vec{n}=\left\{\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right\}$, 此法向量的单位向量

为 $\vec{n}^0=\left\{\frac{x_0}{a^2\Delta}, \frac{y_0}{b^2\Delta}, \frac{z_0}{c^2\Delta}\right\}$, 其中

$$\Delta=\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0} &= \frac{x_0}{a^2\Delta} 2x_0 + \frac{y_0}{b^2\Delta} 2y_0 + \frac{z_0}{c^2\Delta} 2z_0 \\ &= \frac{2}{\Delta} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \right) = \frac{2}{\Delta} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}. \end{aligned}$$

3565. 设 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 u 和 v 在沿曲面 $F(x, y, z)=0$

上的点的法线方向上的导函数, 证明:

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n}.$$

$$\text{证 } \frac{\partial}{\partial n}(uv) = \frac{\partial}{\partial x}(uv) \cos \alpha$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(uv) \cos \beta + \frac{\partial}{\partial z}(uv) \cos \gamma$$

$$= u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right)$$

$$+ v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right)$$

$$= u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n}.$$

求含一个参变数的平面曲线族的包线:

$$3566. \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad (p = \text{常数}).$$

$$\text{解 } \begin{cases} f(x, y, \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = -x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

消去 α , 得

$$x^2 + y^2 = p^2. \quad (1)$$

由于原曲线族没有奇点, 且 (1) 也不是原曲线族中的某一支, 故 (1) 为原曲线族的包线方程.

$$3567. \quad (x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{解 } \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} = 0, \\ 2(x-a) + a = 0. \end{cases}$$

消去 a , 得 $y = \pm x$, 同 3566 题的理由可知, 它是包线方程.

$$3568. \quad y = kx + \frac{a}{k} \quad (a = \text{常数}).$$

$$\text{解 } \begin{cases} kx - y + \frac{a}{k} = 0, \\ x - \frac{a}{k^2} = 0. \end{cases}$$

消去 k , 得 $y^2 = 4ax$, 同 3566 题的理由可知, 它是包线方程.

$$3569. \quad y^2 = 2px + p^2.$$

$$\text{解 } \begin{cases} 2px - y^2 + p^2 = 0, \\ x + p = 0. \end{cases}$$

消去 p , 得 $x^2 + y^2 = 0$, 它仅为一点 $(0, 0)$. 于是, 原曲线族无包线.

3570. 设有长为 l 的线段, 其两端点沿坐标轴滑动, 求如此产生的线段族的包线.

解 如图 6.31 所示, 直线方程为

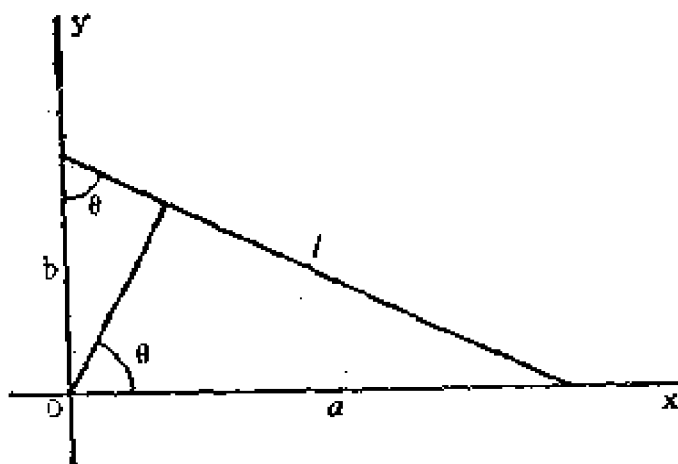


图 6.31

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

但是 $a = l \sin \theta$, $b = l \cos \theta$, 所以,

$$\frac{x}{\sin \theta} + \frac{y}{\cos \theta} = l. \quad (1)$$

对 θ 求导数, 得

$$-\frac{x}{\sin^2 \theta} \cos \theta + \frac{y}{\cos^2 \theta} \sin \theta = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{x}{\sin^3 \theta} = \frac{y}{\cos^3 \theta}. \quad (2)$$

由(1), (2)消去 θ , 得 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$, 同 3566 题的理由可知, 它是包线方程.

3571. 求椭圆族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的包线, 已知此族中椭圆的面积 S 为常数.

解 由题设 $\pi ab = S$, 得 $a = \frac{S}{\pi b}$, 且

$$\frac{\pi^2 b^2 x^2}{S^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

对 b 求导数, 得

$$\frac{2\pi^2 b x^2}{S^2} - \frac{2y^2}{b^3} = 0. \quad (2)$$

由(2)式 $b^4 = \frac{y^2 S^2}{\pi^2 x^2}$ 或 $b^2 = \pm \frac{yS}{\pi x}$. 再代入(1), 得

$$\pm \frac{\pi xy}{S} \pm \frac{\pi xy}{S} = 1, \text{ 即}$$

$$|xy| = \frac{S}{2\pi},$$

同 3566 题的理由可知, 它是包线方程.

3572. 炮弹在真空中以初速度 v_0 射出, 当投射角 α 在铅垂平面中变化下, 求炮弹轨道的包线.

解 炮弹轨道方程为

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

对 α 求导数, 得

$$0 = \frac{x}{\cos^2 \alpha} - \frac{gx^2 \sin \alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha}. \quad (2)$$

由(2)式得 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{xg}$. 代入(1)式, 得

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \frac{v_0^2}{xg} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{x^2 g^2} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \end{aligned}$$

同 3566 题的理由可知, 它是包线方程.

3573. 证明: 平面曲线的法线的包线是此曲线的渐屈线.

证 这里我们仅就由显式 $y=f(x)$ 所给出的平面曲线情形加以证明.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 的法线方程为

$$(X-x) + y'(Y-y) = 0. \quad (1)$$

对 x 求导数, 得

$$-1 + y''(Y - y) - y'^2 = 0$$

或

$$y''(Y - y) = 1 + y'^2, \quad (2)$$

由(1), (2)解得

$$\begin{cases} X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \\ Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \end{cases}$$

此即 $y = f(x)$ 的渐屈线方程(参看第二章§14前言3°).
同 3566 题的理由可知, 它是平面曲线的法线的包线方程.

3574. 研究下列曲线族的判别曲线的性质 (c ——参变数):

(a) 立方抛物线 $y = (x - c)^3$;

(b) 半立方抛物线 $y^2 = (x - c)^3$;

(B) 奈尔半立方抛物线 $y^3 = (x - c)^2$;

(r) 环索线 $(y - c)^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x}$.

解 (a)
$$\begin{cases} f(x, y, c) = y - (x - c)^3 = 0, \\ f'_c(x, y, c) = 3(x - c)^2 = 0. \end{cases}$$

消去 c , 得 $y = 0$, 它为判别曲线的方程.

原曲线无奇点, 且 $y = 0$ 也不是原曲线族的某一支, 因此, 它是包线. 此包线与原曲线在 $(c, 0)$ 点相切, 且 $(c, 0)$ 点是曲线的拐点, 即它又是原曲线族拐点的轨迹. 如图6·32(1)所示.

$$(6) \begin{cases} y^2 - (x-c)^3 = 0, \\ 3(x-c)^2 = 0. \end{cases}$$

消去 c , 得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为 $(c, 0)$, 因此它是奇点的轨迹. 要看是否为包线, 还要看在奇点的两支是否与判别曲线相切. 事实上, 两支分别为 $y_1 = (x-c)^{\frac{3}{2}}$, $y_2 = -(x-c)^{\frac{3}{2}}$, 均有 $y'_1(c)=0$, $y'_2(c)=0$. 因此, $y=0$ 为原曲线族的包线. 如图 6·32(2) 所示.

$$(B) \begin{cases} y^3 - (x-c)^2 = 0, \\ 2(x-c) = 0. \end{cases}$$

消去 c , 得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为 $(c, 0)$. 由于 $y = (x-c)^{\frac{3}{2}}$ 在 $x=c$ 处的导数为无穷, 因此, 它与 $y=0$ 不相切, 从而它无包线. 奇点 $(c, 0)$ 为尖点. 如图 6·32(3) 所示.

$$(F) \begin{cases} (y-c)^2 - x^2 \frac{a-x}{a+x} = 0, \\ -2(y-c) = 0. \end{cases}$$

消去 c , 得 $x^2(a-x)=0$, 即判别曲线为直线 $x=0$ 及 $x=a$.

显然 $x=0$ 为原曲线族奇点的轨迹, 用 §6. 的方法可判别出它是二重点的轨迹. 事实上,

$$A = f'_{xx}(0, c) = 2, \quad B = f'_{xy}(0, c) = 0,$$

$$C = F''_{yy}(0, c) = -2, \quad AC - B^2 = -4 < 0.$$

从而知 $x=0$ 不是包线.

但是, 在 $x=a$ 处 $f'_x(a, y) \neq 0$ ($a \neq 0$), 因此 $x=a$ 不是原曲线族奇点的轨迹, 同时它又不是原曲线族的某一支. 因此, $x=a$ 是原曲线族的包线, 如图 6.32 (4) 所示.

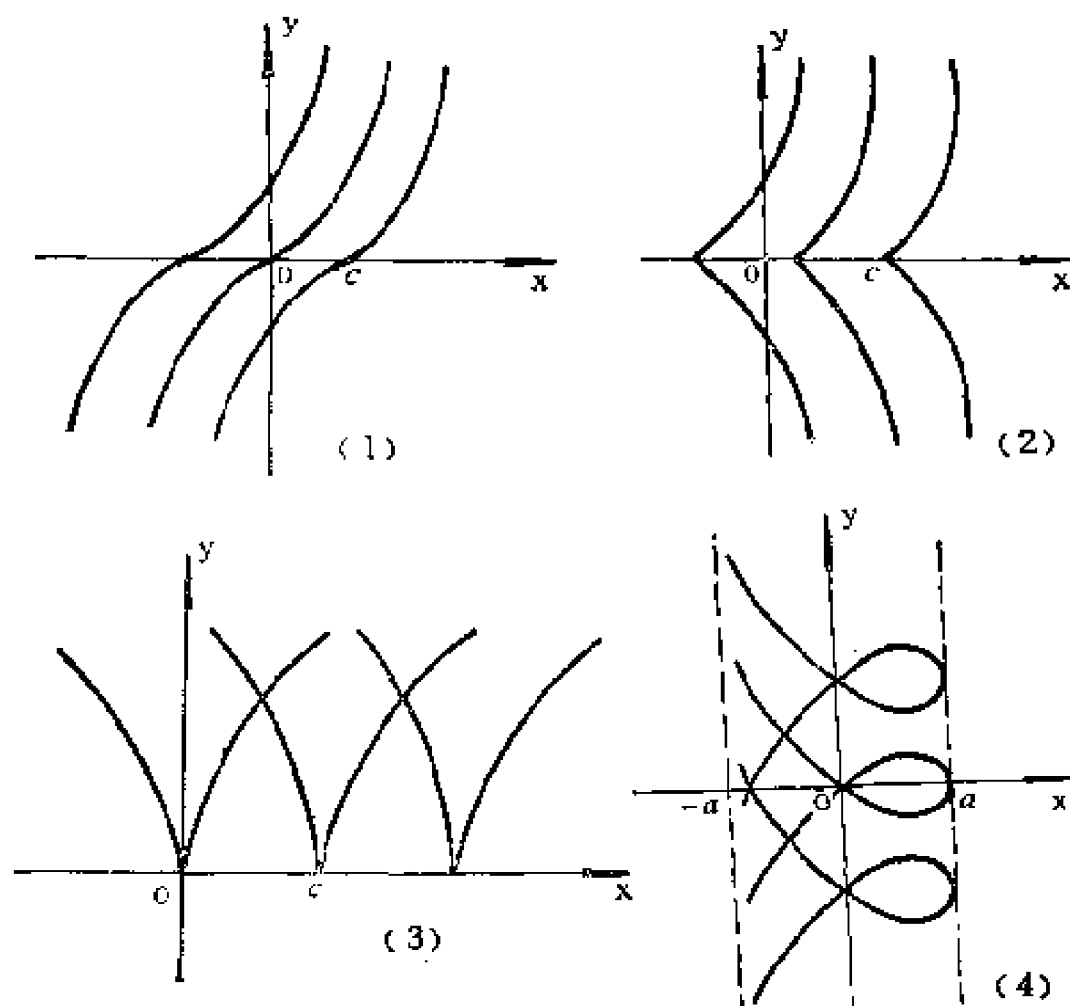


图 6.32

3575. 求半径为 r , 中心在圆周 $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = 0$ (t —参数, $R > r$) 上的球族的包面.

解
$$\begin{cases} (X - R \cos t)^2 + (Y - R \sin t)^2 + Z^2 = r^2, & (1) \\ 2R \sin t (X - R \cos t) - 2R \cos t (Y - R \sin t) = 0, & (2) \end{cases}$$

(2)式化简得 $X \sin t - Y \cos t = 0$. 于是,

$$\operatorname{tg} t = \frac{Y}{X}, \quad \cos t = \pm \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$

$$\sin t = \pm \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式, 得

$$(X^2 + Y^2) \left(1 \pm \frac{R}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right)^2 + Z^2 = r^2.$$

当取“+”号时, 由于 $R^2 > r^2$, 故它不代表任何点(不是虚的)的轨迹.

当取“-”号时, 由于原曲面族无奇点, 且 $(\sqrt{X^2 + Y^2} - R)^2 + Z^2 = r^2$ 不是原曲面族的某一个, 因此, 它是原曲面族的包面(圆环).

3576. 求球族

$$(x - t \cos \alpha)^2 + (y - t \cos \beta)^2 + (z - t \cos \gamma)^2 = 1$$

(其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 及 t —参变数)的包面.

$$\text{解} \quad \begin{cases} (x - t \cos \alpha)^2 + (y - t \cos \beta)^2 \\ + (z - t \cos \gamma)^2 - 1 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -2 \cos \alpha (x - t \cos \alpha) - 2 \cos \beta (y - t \cos \beta) \\ - 2 \cos \gamma (z - t \cos \gamma) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{由(2)得} \quad t = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式, 化简整理得

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 = 1. \quad (4)$$

由于原曲面族的奇点均不在此方程所表示的曲面上, 并且曲面(4)也不是原曲面族中的某一个, 因此, 曲面(4)为原曲面族的包面.

3577. 求椭球面族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的包面, 这些椭球的体

积 V 是常数.

解 引入辅助函数

$$F(x, y, z, a, b, c) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \lambda abc,$$

则包面的方程由方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} abc = \frac{3V}{4\pi}, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_a = -\frac{2x^2}{a^3} + \lambda bc = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_b = -\frac{2y^2}{b^3} + \lambda ac = 0, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_c = -\frac{2z^2}{c^3} + \lambda ab = 0 & (5) \end{cases}$$

确定.

由(3)、(4)、(5)可解得

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{\lambda abc}{2} = \mu. \quad (6)$$

将(6)式代入(1)式, 得

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \mu = \frac{1}{3}.$$

于是,

$$a = \sqrt{3}|x|, \quad b = \sqrt{3}|y|, \quad c = \sqrt{3}|z|. \quad (7)$$

将(7)式代入(2)式, 得

$$|xyz| = \frac{V}{4\pi\sqrt{3}}. \quad (8)$$

由于原曲面族无奇点, 且曲面(8)也不是原曲面族中的某一个, 故知曲面(8)为原曲面族的包面.

3578. 求半径为 ρ , 中心在圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 上的球族的包面.

解 设球心为 (a, b, c) , 则球的方程为

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2,$$

其中 $a^2 + b^2 = c^2$.

引入辅助函数

$$F(x, y, z, a, b, c) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \lambda(a^2 + b^2 - c^2),$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_a = -2(x-a) + 2\lambda a = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_b = -2(y-b) + 2\lambda b = 0, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_c = -2(z-c) - 2\lambda c = 0 & (5) \end{cases}$$

确定.

由(3)、(4)、(5)可得

$$\frac{x}{a} - 1 = \frac{y}{b} - 1 = -\frac{z}{c} + 1 = \lambda.$$

引入记号 $\frac{1}{\mu} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 2 - \frac{z}{c}$, 则有

$$a = \mu x, \quad b = \mu y, \quad c = \frac{\mu z}{2\mu - 1}. \quad (6)$$

將(6)式代入(1), (2)两式, 得

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(2\mu - 1)^2} = \frac{\rho^2}{(\mu - 1)^2}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{(2\mu - 1)^2} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

(7) + (8)得

$$2(x^2 + y^2) = \frac{\rho^2}{(\mu - 1)^2}$$

$$\text{或} \quad \sqrt{2} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} |2\mu - 2|. \quad (9)$$

$$\text{由(8)得} \quad 2\mu - 1 = \pm \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (10)$$

將(10)代入(9), 整理得

$$\sqrt{2} \rho = |\sqrt{x^2 + y^2} \pm z|. \quad (11)$$

由于原曲面族无奇点, 且曲面(11)也不是原曲面族的某一个. 因此, 曲面(11)为原曲面族的包面.

3579. 有一发光点位于坐标原点. 若 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$, 求由球

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2$$

投影所生成的阴影圆锥.

解 解法一.

所求的阴影圆锥的表面, 可看作是一个过原点的平面族的包面, 此平面族的方程为

$$ax + by + cz = 0,$$

其中 a, b, c 满足约束条件

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = \pm R, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1. \end{cases}$$

引进辅助函数

$$F(x, y, z, a, b, c) = ax + by + cz + \lambda(ax_0 + by_0 + cz_0) + \mu(a^2 + b^2 + c^2),$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1, & (2) \\ ax_0 + by_0 + cz_0 = \pm R, & (3) \\ F'_a = x + \lambda x_0 + 2\mu a = 0, & (4) \\ F'_b = y + \lambda y_0 + 2\mu b = 0, & (5) \\ F'_c = z + \lambda z_0 + 2\mu c = 0 & (6) \end{cases}$$

确定。

方程 (4)、(5)、(6) 要能解出 λ, μ ，其中 a, b, c 必须满足关系式

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a \\ y & y_0 & b \\ z & z_0 & c \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

$$\text{记 } r_1 = \begin{vmatrix} y & y_0 \\ z & z_0 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} z & z_0 \\ x & x_0 \end{vmatrix}, \quad r_3 = \begin{vmatrix} x & x_0 \\ y & y_0 \end{vmatrix},$$

$$\text{则上述关系式可记为 } ar_1 + br_2 + cr_3 = 0. \quad (8)$$

由 (1)、(3)、(8) 可解得

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ \pm R & y_0 & z_0 \\ 0 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}} = \frac{\pm R(zr_2 - yr_3)}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}.$$

或

$$a^2 = \frac{R^2(zr_2 - yr_3)^2}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2},$$

$$b^2 = \frac{R^2(xr_3 - zr_1)^2}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2}, \quad c^2 = \frac{R^2(xr_2 - yr_1)^2}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2}. \quad (9)$$

将(9)式代入(2)式, 即得

$$\begin{aligned} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2 &= R^2[(yr_3 - zr_2)^2 \\ &\quad + (xr_3 - zr_1)^2 + (xr_2 - yr_1)^2] \\ &= R^2[(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad - (xr_1 + yr_2 + zr_3)^2] \\ &= R^2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

(其中利用了 $xr_1 + yr_2 + zr_3 = 0$, 这是不难验证的.)

于是, 有

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = R^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (10)$$

由于原平面族无奇点, 且曲面(10)不是平面族的某一个, 因此, 曲面(10)即为包面. 所求的阴影圆锥为此锥面的内部, 即满足不等式

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq R^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

的空间区域 (严格说来, 还要除去球前部的区域).

解法二

显然，阴影圆锥是由通过坐标原点的球面 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ 的全体切线构成的。由解析几何知，如果点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 不在二次曲面

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz \\ &\quad + 2gxz + 2hxy + 2px + 2qy + 2rz + d \\ &= \varphi(x, y, z) + 2px + 2qy + 2rz + d = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

上，则通过点 P_1 而和二次曲面(1)相切的全体切线所构成的锥面方程为

$$\begin{aligned} &[(x-x_1)F'_x(x_1, y_1, z_1) + (y-y_1) \\ &\quad \cdot F'_y(x_1, y_1, z_1) + (z-z_1)F'_z(x_1, y_1, z_1)]^2 \\ &\quad - 4\varphi(x-x_1, y-y_1, z-z_1) \\ &\quad \cdot F(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{今有 } F(x, y, z) &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \\ &\quad + (z-z_0)^2 - R^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2(x_0x + y_0y + z_0z) \\ &\quad + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} F'_x(0, 0, 0) &= -2x_0, \quad F'_y(0, 0, 0) = -2y_0, \\ F'_z(0, 0, 0) &= -2z_0, \end{aligned}$$

故由(2)即得阴影圆锥面的方程为

$$\begin{aligned} &(-2x_0x - 2y_0y - 2z_0z)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad \cdot (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2) = 0 \end{aligned}$$

或

$$(y_0^2 + z_0^2)x^2 + (x_0^2 + z_0^2)y^2 + (x_0^2 + y_0^2)z^2$$

$$-2x_0y_0xy-2y_0z_0yz-2z_0x_0zx \\ -R^2(x^2+y^2+z^2)=0.$$

由于

$$(y_0^2+z_0^2)x_0^2+(x_0^2+z_0^2)y_0^2+(x_0^2+y_0^2)z_0^2 \\ -2x_0^2y_0^2-2y_0^2z_0^2-2z_0^2x_0^2 \\ -R^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=-R^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)\leq 0,$$

故所求的阴影圆锥为此锥面的内部, 即满足不等式

$$(y_0^2+z_0^2)x^2+(z_0^2+x_0^2)y^2 \\ +(x_0^2+y_0^2)z^2-2x_0y_0xy-2y_0z_0yz \\ -2z_0x_0zx-R^2(x^2+y^2+z^2)\leq 0$$

或

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2 \\ \leq R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域 (严格说来, 还要除去球前部的区域) .

解法三

如图 6.33 所示, 由三角形的面积公式

$$\frac{1}{2}|\vec{r}| \cdot |\vec{l}_0| \sin \alpha$$

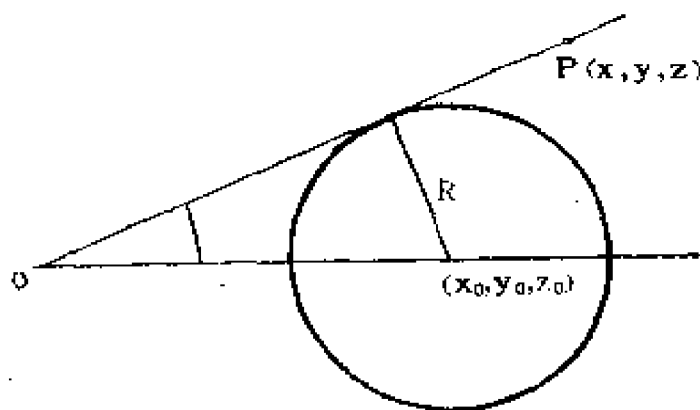


图 6.33

得到

$$|\vec{r} \times \vec{l}_0| = |\vec{r}| \cdot |\vec{l}_0| \cdot \frac{R}{|\vec{l}_0|},$$

其中 $\vec{l}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $\vec{r} = \{x, y, z\}$, 而 $P(x, y, z)$ 为锥面上的任意一点. 平方之, 即得圆锥曲面的方程为

$$|\vec{r} \times \vec{l}_0|^2 = R^2 |\vec{r}|^2.$$

于是, 所求的阴影圆锥为适合不等式

$$|\vec{r} \times \vec{l}_0|^2 \leq R^2 |\vec{r}|^2,$$

即

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2 \\ & \leq R^2 (x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

的空间区域 (严格说来, 还要除去球前部的区域) .

3580. 若参变量 p 和 q 受方程

$$p^2 + q^2 = 1$$

的限制, 求平面族

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

的包面.

解 解法一

引进辅助函数

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) = & z - z_0 - p(x - x_0) \\ & - q(y - y_0) + \lambda(p^2 + q^2), \end{aligned}$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 1, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_1 = -(x - x_0) + 2\lambda p = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_2 = -(y - y_0) + 2\lambda q = 0 & (4) \end{cases}$$

确定.

(3) $\times p$ + (4) $\times q$, 得 $2\lambda = z - z_0$. 于是, 由(3), (4)得

$$p = \frac{x - x_0}{z - z_0}, \quad q = \frac{y - y_0}{z - z_0}. \quad (5)$$

将(5)式代入(1)式, 得

$$(z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

由于原平面族无奇点, 且显见上述曲面不是平面, 故上述曲面即为包面.

解法二

引入新参数 θ ; 令 $p = \sin\theta$, $q = \cos\theta$.

$$\begin{cases} z - z_0 = \cos\theta \cdot (x - x_0) + \sin\theta \cdot (y - y_0), & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\theta \cdot (x - x_0) = \cos\theta \cdot (y - y_0). & (2) \end{cases}$$

于是,

$$\sin\theta = \frac{\pm(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{\pm(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}.$$

代入(1)式, 得

$$(z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

由于原平面族无奇点, 且上述曲面不是平面, 故上述曲面即为包面.

§6. 台 劳 公 式

1° 台劳公式 若函数 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 的某邻域内有直到 $n+1$ 阶 (连 $n+1$ 阶的在内) 的一切连续偏导函数, 则在此邻域内下面的公式成立

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^i f(a, b) + R_n(x, y), \quad (1)$$

其中

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f \left[a + \theta_n(x-a), \right. \\ \left. b + \theta_n(y-b) \right] \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

2° 台劳级数 若函数 $f(x, y)$ 可以无穷次地微分及 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, y) = 0$, 则此函数可表成幂级数的形状

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i+j \geq 1}^{\infty} \frac{1}{i!j!} f_{x^i y^j}^{(i+j)}(a, b) (x-a)^i (y-b)^j. \quad (2)$$

特别情形, 当 $a=b=0$ 时公式(1)和(2)分别名为马克老林公式和马克老林级数.

对于多于两个变量的函数有类似的公式.

3° 平面曲线的奇点 设在某点 $M_0(x_0, y_0)$ 可微分两次的曲线 $F(x, y)=0$ 适合下列条件

$$F(x_0, y_0)=0, F'_x(x_0, y_0)=0, F'_y(x_0, y_0)=0$$

及数

$$A=F''_{xx}(x_0, y_0), B=F''_{xy}(x_0, y_0), C=F''_{yy}(x_0, y_0)$$

不全为零. 于是, 若

(1) $AC-B^2>0$, 则 M_0 —孤立点;

(2) $AC-B^2<0$, 则 M_0 —二重点 (节);

(3) $AC-B^2=0$, 则 M_0 —上升点或孤立点.

在 $A=B=C=0$ 的情形, 奇点的种类可能更复杂. 至于不属于光滑的曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线, 奇点还可能有更复杂的类型: 中断的点, 角点等等.

3581. 在点 $A(1, -2)$ 的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x, y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y-6, \frac{\partial f}{\partial y}=-x-2y-3;$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

所有三阶偏导函数均为零, 因此, 有 $R_2(x, y)=0$. 在点 $A(1, -2)$ 处,

$$f(1, -2)=5, \frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2.$$

于是,

$$f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1) \cdot (y+2) - (y+2)^2.$$

3582. 在点 $A(1, 1, 1)$ 的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3yz, \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3xz,$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3xy;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3z, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -3x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3y;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 6, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = -3, \text{ 其余}$$

的三阶混合偏导函数均为零;

所有的四阶偏导函数均为零, 因此, $R_4(x, y, z) = 0$. 在点 $A(1, 1, 1)$ 处,

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1) &= 0, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 6, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = -3, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \cdots = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x} = 0. \text{ 于是,}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(1, 1, 1) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!} \left[(x-1) \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + (y-1) \frac{\partial}{\partial y} + (z-1) \frac{\partial}{\partial z} \right]^i f(1, 1, 1) \\ &= 3 \{ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ &\quad - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) \\ &\quad - (y-1)(z-1) \} + (x-1)^3 + (y-1)^3 \\ &\quad + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1). \end{aligned}$$

3583. 当从 $x=1, y=-1$ 变到 $x_1=1+h, y_1=-1+k$ 时, 求函数 $f(x, y)=x^2y+xy^2-2xy$ 的增量.

解 记 $A(1, -1)$ 及 $P(1+h, -1+k)$, 则

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_A = (2xy + y^2 - 2y) \Big|_A = 1,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_A = (x^2 + 2xy - 2x) \Big|_A = -3;$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_A = 2y \Big|_A = -2, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_A = 2x \Big|_A = 2,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_A = (2x + 2y - 2) \Big|_A = -2;$$

$$\left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_A = \left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right|_A = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right|_A = \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right|_A = 2;$$

所有四阶偏导函数均为零, 因此, $R_3(x, y)=0$.
于是, 按台劳公式即得

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(P) - f(A) = \sum_{i=1}^3 \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(A) \\ &= (h - 3k) + (-h^2 - 2hk + k^2) + hk(h + k),\end{aligned}$$

3584. 设:

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 \\ &\quad + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,\end{aligned}$$

按数 h, k 和 l 的正整数幂展开 $f(x+h, y+k, z+l)$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(Ax + Dy + Ez), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2D,$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(By + Dx + Fz), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2B,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2F,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(Cz + Ex + Fy), \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2C, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2E.$$

所有三阶偏导函数均为零, 因此, $R_2(x, y) = 0$.
于是, 按台劳公式即得

$$\begin{aligned}f(x+h, y+k, z+l) &= f(x, y, z) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^i f(x, y, z) \\ &= f(x, y, z) + 2[h(Ax + Dy + Ez) \\ &\quad + k(By + Dx + Fz) + l(Cz + Ex + Fy)] \\ &\quad + [Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl] \\ &= f(x, y, z) + 2[h(Ax + Dy + Ez) + k(Dx\end{aligned}$$

$$+By+Fz)+l(Ex+Fy+Cz)]+f(h,k,l).$$

3585. 写出函数

$$f(x, y) = x^y$$

在点 $A(1,1)$ 的邻域内的展开式, 到二次项为止.

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^y \ln^3 x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = yx^{y-1} \ln^2 x + 2x^{y-1} \ln x.$$

于是, 按台劳公式在点 $(1,1)$ 附近展到二次项, 得

$$x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2 [1 + \theta(x-1), 1 + \theta(y-1)], \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \text{其中余项}$$

$$\begin{aligned} R_2(x, y) &= \frac{1}{3!} \{ y(y-1)(y-2)x^{y-3} dx^3 \\ &\quad + 3[(2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x] dx^2 dy \\ &\quad + 3[yx^{y-1} \ln^2 x + 2x^{y-1} \ln x] dx dy^2 + x^y \ln^3 x dy^3 \} \\ &= \frac{1}{6} x^y \left[\left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right) \right] \end{aligned}$$

$$\cdot \left(-\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy \right) + \left(\frac{2y}{x^3} dx^3 - \frac{3}{x^2} dx^2 dy \right) \Bigg],$$

$$dx = x - 1, \quad dy = y - 1.$$

3586. 根据马克老林公式展开函数

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

到四次项为止.

解 由于

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 \\ &+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \dots \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3, \end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} = [1 + (-x^2 - y^2)]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

3587. 若 $|x|$ 和 $|y|$ 同 1 比较为很小的量, 对于下列二式

$$(a) \frac{\cos x}{\cos y}; \quad (b) \operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x+y}$$

推出准确到二次项的近似公式.

$$\text{解 } (a) \frac{\cos x}{\cos y} = \cos x \cdot (1 - \sin^2 y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 y + \dots\right)$$

$$\approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 y\right)$$

$$\approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} y^2\right) \approx 1 - \frac{1}{2} (x^2 - y^2).$$

$$(6) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+x+y}{1-x+y} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 + \frac{x}{1+y}}{1 - \frac{x}{1+y}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{1+y}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{x}{1+y}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{1+y}\right)^3 + \dots$$

$$\approx \frac{\pi}{4} + x(1-y+y^2) \approx \frac{\pi}{4} + x - xy.$$

3588. 假定 x, y, z 的绝对值是很小的量, 简化下式

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z.$$

解 我们简化上式到二次项.

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2} (x+y+z)^2 - \left(1 - \frac{1}{2} x^2\right)$$

$$\cdot \left(1 - \frac{1}{2} y^2\right) \left(1 - \frac{1}{2} z^2\right).$$

$$\approx 1 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)$$

$$\begin{aligned}
& -\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2\right) \\
& = -(xy + yz + zx).
\end{aligned}$$

3589. 依 h 的乘幂把函数

$$\begin{aligned}
F(x, y) = & \frac{1}{4}[f(x+h, y) + f(x, y+h) \\
& + f(x-h, y) + f(x, y-h)] - f(x, y)
\end{aligned}$$

展开, 准确到 h^4 .

解 记 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, ... 余类似,

即得

$$\begin{aligned}
F(x, y) = & \frac{1}{4}\{[f(x+h, y) - f(x, y)] \\
& + [f(x, y+h) - f(x, y)] \\
& + [f(x-h, y) - f(x, y)] + [f(x, y-h) \\
& - f(x, y)]\} \\
\approx & \frac{1}{4}\left\{\left[h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right] \right. \\
& + \left[h\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right] \\
& + \left[-h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ -h \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right. \\
& \left. + \frac{1}{24} h^4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right\} \\
& = \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{48} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right).
\end{aligned}$$

3590. 已知中心在点 $P(x, y)$ 半径为 ρ 的圆周, 设 $f(P) = f(x, y)$ 及 $P_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, 3$) 为已知圆周之内接正三角形的顶点, 并且 $x_1 = x + \rho, y_1 = y$. 依 ρ 的正整数幂把函数

$$F(\rho) = \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)]$$

展开准确到 ρ^2 .

解 如图6.34所示.

$\triangle P_1 P_2 P_3$ 之三顶点分别为

$$P_1(x + \rho, y),$$

$$P_2\left(x - \frac{\rho}{2}, y\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right),$$

$$P_3\left(x - \frac{\rho}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right).$$

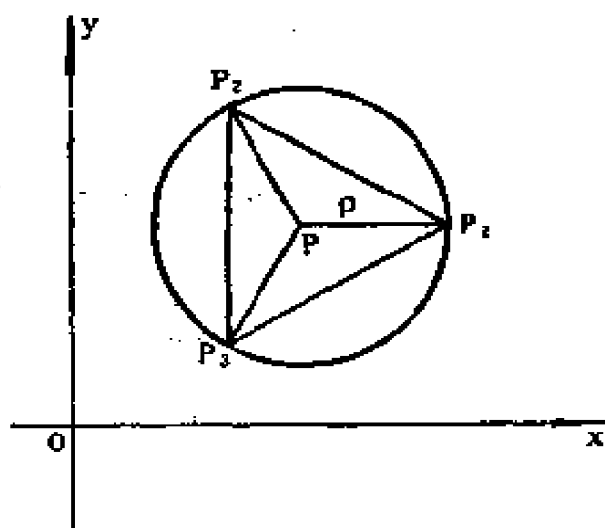


图 6.34

于是,

$$\begin{aligned}
F(\rho) &= \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)] \\
&\approx \frac{1}{3} \left\{ \left[f(P) + \rho \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] + \left[f(P) \right. \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \rho \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\sqrt{3}\rho^2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] \\
&\quad \left. + \left[f(P) + \left(-\frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rho \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\sqrt{3}\rho^2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] \right\} \\
&= f(P) + \frac{\rho^2}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).
\end{aligned}$$

3591. 依 h 与 k 的乘幂把函数

$$\begin{aligned}
\Delta_{xy} f(x, y) &= f(x+h, y+k) - f(x+h, y) \\
&\quad - f(x, y+k) + f(x, y)
\end{aligned}$$

展开.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \Delta_{xy} f(x, y) &= \left[f(x, y) + h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{h^n k^{n-m}}{m! (n-m)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right] \\
&\quad - \left[f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right] \\
&\quad - \left[f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right] + f(x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^m k^{n-m}}{m! (n-m)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \\
&= hk \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^{m-1} k^{n-m-1}}{m! (n-m)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right].
\end{aligned}$$

3592. 依 ρ 的乘幂把函数

$$F(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) d\varphi$$

展开.

$$\begin{aligned}
\text{解 } F(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\rho^n \cos^m \varphi \sin^{n-m} \varphi}{m! (n-m)!} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right] d\varphi \\
&= f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\rho^n}{m! (n-m)!} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \\
&\quad \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^{n-m} \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

下面计算上式中的积分.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^{n-m} \varphi d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^{n-m} \varphi d\varphi \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m (\pi - \varphi) \sin^{n-m} (\pi - \varphi) d\varphi \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m (\pi + \varphi) \sin^{n-m} (\pi + \varphi) d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(2\pi - \varphi) \sin^{n-m}(2\pi - \varphi) d\varphi \\
& = \frac{1}{2\pi} [1 + (-1)^n + (-1)^n + (-1)^{n-n}] \\
& \quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi \sin^{n-m} \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

当 m, n 中至少有一个为奇数时, 显见上述积分为零.

当 m, n 均为偶数时, 由 2290 题的结果知:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \varphi \sin^{2n-2m} \varphi d\varphi & = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} \varphi \sin^{2n-2m} \varphi d\varphi \\
& = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi (2m)! (2n-2m)!}{2^{2n+1} m! n! (n-m)!} = \frac{(2m)! (2n-2m)!}{2^{2n} m! n! (n-m)!}.
\end{aligned}$$

代入原式, 并注意到其中的 m, n 只能为偶数, 适当改变一下指标的编号, 即得

$$\begin{aligned}
F(\rho) & = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\rho^{2n}}{(2m)! (2n-2m)!} \\
& \quad \cdot \frac{\partial^{2n} f(x, y)}{\partial x^{2m} \partial y^{2n-2m}} \cdot \frac{(2m)! (2n-2m)!}{2^{2n} m! n! (n-m)!} \\
& = f(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \\
& \quad \cdot \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m! (n-m)!} \frac{\partial^{2n} f(x, y)}{\partial x^{2m} \partial y^{2n-2m}} \\
& = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n f(x, y).
\end{aligned}$$

将下列函数展开成马克老林级数:

3593. $f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n$.

解 $f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n = \left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots\right]\left[1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\dots\right]$

$$= 1+(mx+ny) + \frac{1}{2!}[m(m-1)x^2 + 2mnxy + n(n-1)y^2] + \dots$$

($|x| < 1, |y| < 1$).

3594. $f(x, y) = \ln(1+x+y)$.

解 $f(x, y) = \ln[1+(x+y)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x+y)^k$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} x^m y^{k-m} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{m!(k-m)!} x^m y^{k-m} \quad (1)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m-1} (m+n-1)!}{m!n!} x^m y^n. \quad (2)$$

当 $m=0, n=0$ 时, 分子出现 $(-1)_1$, 规定该项为零. 下面讨论一下收敛区间. (1) 成立, 只要求 $|x+y| < 1$ 即可. 但从 (1) 式到 (2) 式, 必需要求 (1) 式绝对收敛, 这样才能将各项重新排列. 不难看出 (1) 式级数各项取绝对值后即函数 $-\ln[1-(|x|+|y|)]$ 的展开式, 它的收敛性要求 $|x|+|y| < 1$. 这就是 $f(x, y)$ 的展

开式的收敛区域.

$$3595. f(x, y) = e^x \sin y.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x, y) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n+1}}{m! (2n+1)!} \\ &\quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty). \end{aligned}$$

$$3596. f(x, y) = e^x \cos y.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x, y) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n}}{m! (2n)!} \\ &\quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty). \end{aligned}$$

$$3597. f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \operatorname{sh} y &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{n!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|y| < +\infty). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2m+1} y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}$$

$$(|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

3598. $f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y,$

解 $\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} \quad (|y| < +\infty).$

于是,

$$f(x, y) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m} y^{2n}}{(2m)!(2n)!}$$

$$(|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

3599. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2).$

解 $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2 + y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^n \frac{x^{2k} y^{2(2n+1-k)}}{k!(2n+1-k)!}$$

$$= \sum_{m, n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{n+m}{2} \pi \right) \frac{x^{2n} y^{2m}}{n!m!} \quad (x^2 + y^2 < +\infty).$$

3600. $f(x, y) = \ln(1+x) \ln(1+y).$

解 $f(x, y) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} \right]$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{x^m y^n}{mn} \quad (|x| < 1, |y| < 1).$$

3601. 写出函数

$$f(x, y) = \int_0^1 (1+x)t^2 y dt$$

的马克劳林级数前面不为零的三项.

解 $(1+x)t^2 y = e^{t^2 y \ln(1+x)} \approx 1 + t^2 y \ln(1+x)$

$$+ \frac{1}{2!} (t^2 y \ln(1+x))^2$$

$$\approx 1 + t^2 y \left(x - \frac{x^2}{2} \right) = 1 + t^2 x y - \frac{t^2}{2} x^2 y.$$

于是,

$$f(x, y) \approx \int_0^1 \left(1 + t^2 x y - \frac{t^2}{2} x^2 y \right) dt$$

$$= 1 + \frac{1}{3} y \left(x - \frac{x^2}{2} \right).$$

3602. 按二项式 $x-1$ 和 $y+1$ 的正整数幂将函数 e^{x+y} 展开成幂级数.

解 $e^{x+y} = e^{(x-1)+(y+1)} = e^{x-1} \cdot e^{y+1}$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^m (y+1)^n}{m! n!}$$

$$(|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

3603. 写出函数 $f(x, y) = \frac{x}{y}$ 在点 $M(1, 1)$ 的邻域内的台劳级数展开式.

解 令 $x = 1 + h$, $y = 1 + k$, 则得

$$\frac{x}{y} = \frac{1+h}{1+k} = (1+h) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 + (x-1)] (y-1)^n$$

$$(|x| < +\infty, 0 < y < 2).$$

3604. 设 z 为由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 所定义的 x 和 y 的隐函数, 当 $x=1$ 和 $y=1$ 时它的值为 $z=1$.

写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

解 对原方程微分一次, 得

$$3z^2 dz - 2x dz - 2z dx + dy = 0. \quad (1)$$

再微分一次, 得

$$(3z^2 - 2x) d^2 z + 6z dz^2 - 4dx dz = 0. \quad (2)$$

以 $x=1, y=1, z=1$ 代入(1), (2)两式, 得

$$dz = 2dx - dy,$$

$$d^2 z = (4dx - 6dz) dz = (4dx - 12dx + 6dy)$$

$$\cdot (2dx - dy)$$

$$= -16dx^2 + 20dx dy - 6dy^2,$$

.....

于是, 可求得在 $x=1, y=1$ 处,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -16, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6;$$

.....

从而有

$$z = 1 + 2(x-1) - (y-1) - [8(x-1)^2$$

$$-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+ \cdots$$

研究下列曲线的奇点的种类并大略地绘出这些曲线:

3605. $y^2 = ax^2 + x^3$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2 = 0, \\ F'_x(x, y) = 2ax + 3x^2 = 0, \\ F'_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases}$$

得 $x = 0, y = 0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

其次, 由于

$$A = F''_{xx}(0, 0) = 2a, B = F''_{xy}(0, 0) = 0,$$

$$C = F''_{yy}(0, 0) = -2, AC - B^2 = -4a,$$

故当 $a > 0$ 时, 点 $(0, 0)$ 为二重点; 当 $a < 0$ 时, 点 $(0, 0)$ 为孤立点; 当 $a = 0$ 时, 原方程化为 $y^2 = x^3$, 由 3574(6) 的讨论知点 $(0, 0)$ 为尖点.

如图 6.35 所示, 点 A_1 为 $(-a, 0)$.

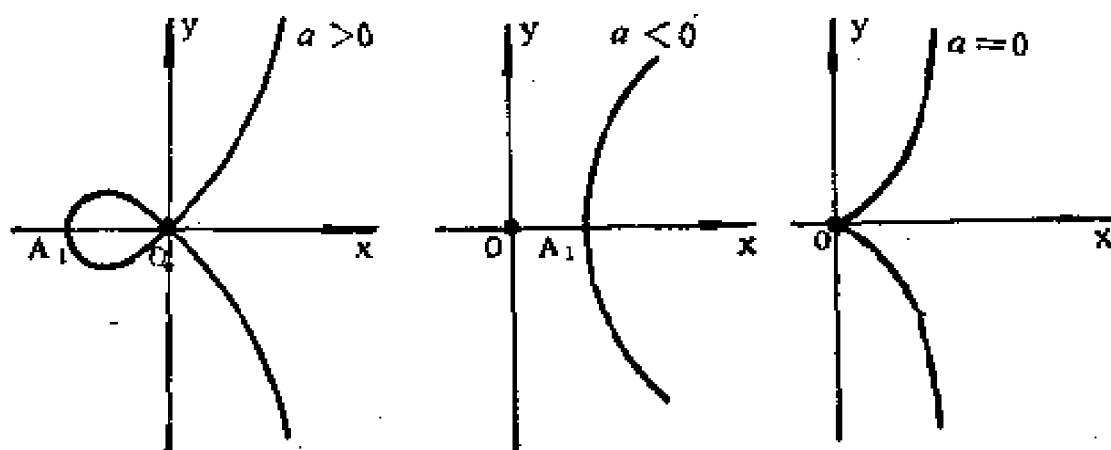


图 6.35

3606. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0, \\ F'_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0, \\ F'_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0,0)$ 为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0, B=F''_{xy}(0,0)=-3, C=F''_{yy}(0,0)=0$, 且 $AC-B^2=-9<0$, 故点 $(0,0)$ 为二重点. 图象参看 370 题(6).

3607. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = x^2 + y^2 - x^4 - y^4 = 0, \\ F'_x(x, y) = 2x - 4x^3 = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0,0)$ 为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=2, B=F''_{xy}(0,0)=0, C=F''_{yy}(0,0)=2$, 且 $AC-B^2=4>0$, 故点 $(0,0)$ 为孤立点. 图象参看 1542 题.

3608. $x^2 + y^4 = x^6$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = x^2 + y^4 - x^6 = 0, \\ F'_x(x, y) = 2x - 6x^5 = 0, \\ F'_y(x, y) = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0,0)$ 为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=2, B=F''_{xy}(0,0)=0, C=F''_{yy}(0,0)=0$, 且 $AC-B^2=0$, 故点 $(0,0)$ 为上升点或孤立点. 本题中, 点 $(0,0)$ 为孤立点 (图6·36). 事

实上, 将原方程改写为 $y^4 = x^6 - x^2$, 对 $(0, 0)$ 点的很小的邻域内的点 $(|x| < 1, |y| < 1)$, 左端 $y^4 \geq 0$, 右端 $x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) \leq 0$, 除点 $(0, 0)$ 外没有适合方程的点, 故点 $(0, 0)$ 为孤立点.

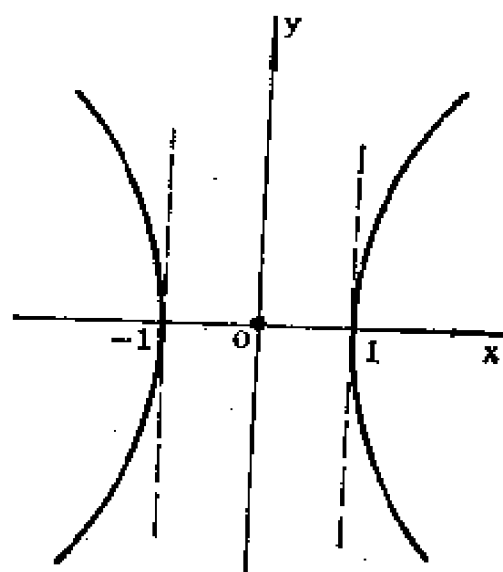


图 6.36

3609. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0, \\ F'_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 2a^2x = 0, \\ F'_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2) + 2a^2y = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = -2a^2$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2a^2$, 且 $AC - B^2 = -4a^4 < 0 (a \neq 0)$, 故点 $(0, 0)$ 为二重点. 图象参看 3367 题, 只须将该题中的 1 换成 a .

3610. $(y - x^2)^2 = x^5$.

解 解方程组

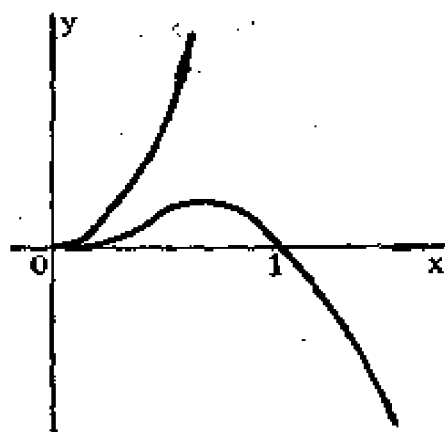
$$\begin{cases} F(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5 = 0, \\ F'_x(x, y) = -4x(y - x^2) - 5x^4 = 0, \\ F'_y(x, y) = 2(y - x^2) = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = 0$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = 0$, 故对点 $(0, 0)$ 还需要再讨论一下. 由原方程可解出 $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$, 右边只允许 $x \geq 0$, 当 $0 < x < 1$ 时不论取“+”号还是“-”号均有 $y > 0$, 且均有

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{dy}{dx} = 0,$$

故点 $(0, 0)$ 为尖点, 如图 6.37 所示.



3611. $(a+x)y^2 = (a-x)x^2.$

图 6.37

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = (a+x)y^2 - (a-x)x^2 = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = y^2 - 2ax + 3ax^2 = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_y(x, y) = 2(a+x)y = 0. & (3) \end{cases}$$

由(3)得 $x = -a$ 或 $y = 0$.

将 $y = 0$ 代入(1)、(2), 得 $x = 0$.

将 $x = -a$ 代入(1)式, 得 $(a-x)x^2 = 0$. 若 $a \neq 0$, 则得出矛盾的结果. 若 $a = 0$, 则也得到 $x = 0$, $y = 0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = -2a$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2a$, 且 $AC - B^2 = -4a^2$, 故当 $a \neq 0$ 时, 点 $(0, 0)$ 为二重点; 当 $a = 0$ 时, 方程转化为 $xy^2 = -x^3$, 从而曲线为 $x = 0$, 点 $(0, 0)$ 为上升点.

如图 6.38 所示, 图中点 A_1 为 $(a, 0)$

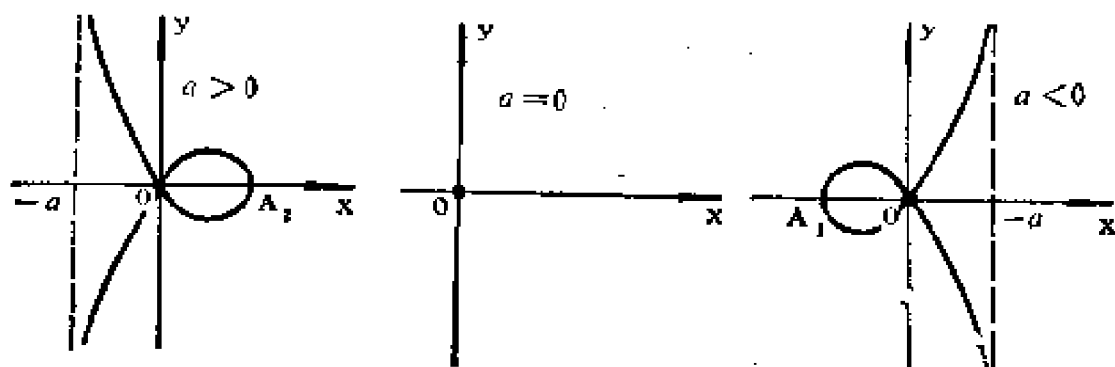


图 6.38

3612. 研究参变量 a, b, c ($a \leq b \leq c$) 的值与曲线 $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ 的形状之关系.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c) = 0, & (1) \\ F'_x(x, y) = -(x-a)(x-b) - (x-a) \\ \quad \cdot (x-c) - (x-b)(x-c) = 0, & (2) \\ F'_y(x, y) = 2y = 0. & (3) \end{cases}$$

由(3)得 $y=0$, 代入(1), 联立(1), (2)求解.

当 $a < b < c$ 时, (1), (2)无解. 因此无奇点, 此时曲线如图 6.39(1)所示;

当 $a = b < c$ 时, 显然(1), (2)有解 $x=a, y=0$, 由于 $A = F''_{xx}(a, 0) = -2(a-c)$, $B = F''_{xy}(a, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(a, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = -4(a-c) > 0$, 故点 $A_1(a, 0)$ 为孤立点, 如图 6.39(2)所示;

当 $a < b = c$ 时, 显然(1), (2)有解 $x=b, y=0$. 由于 $A = F''_{xx}(b, 0) = -2(c-a)$, $B = F''_{xy}(b, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(b, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = -4(c-a) < 0$, 故点 $A_2(b, 0)$ 为二重点, 如图 6.39(3)所示;

当 $a=b=c$ 时, 显然有解 $x=a, y=0$. 由于 $AC-B^2=0$, 此时原方程为 $y^2=(x-a)^3$, 且由3574题(6)的结果知, 点 $A_1(a, 0)$ 为尖点, 如图6·39(4)所示.

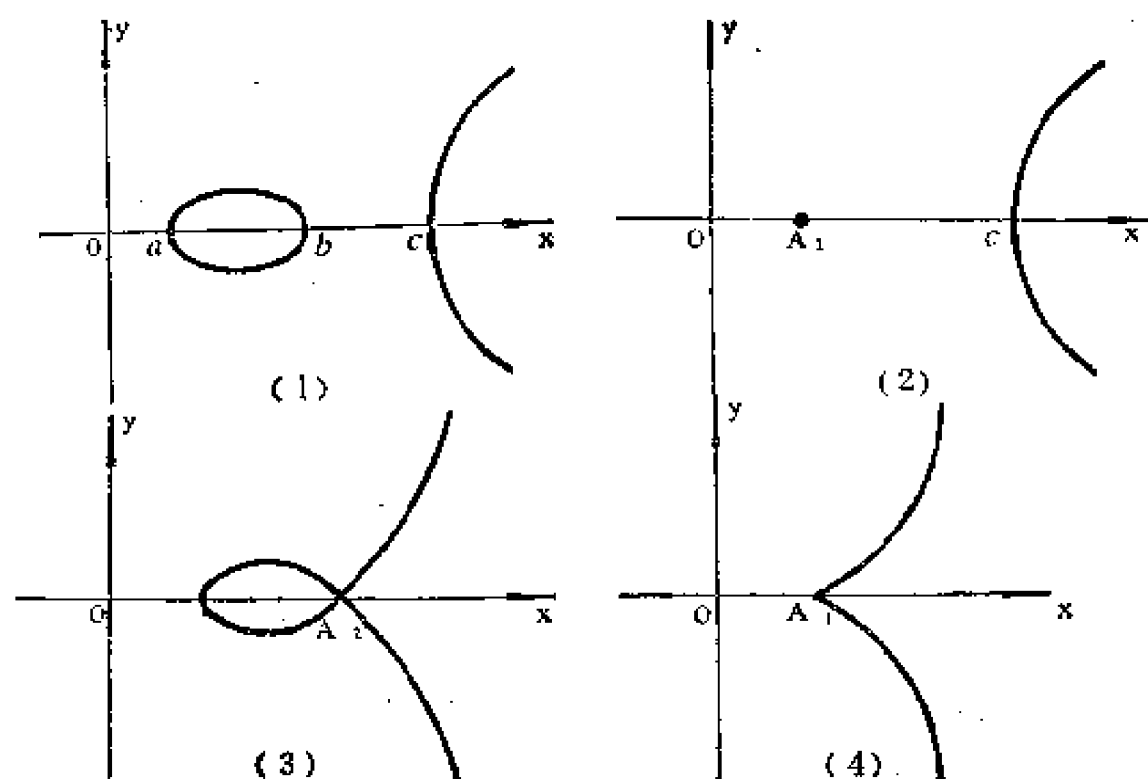


图 6·39

研究超越曲线的奇点:

3613. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - 1 + e^{-x^2} = 0, \\ F'_x(x, y) = -2xe^{-x^2} = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又 $A = F''_{xx}(0, 0) = -2$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = -4 < 0$, 故点 $(0, 0)$ 为二重点.

3614. $y^2 = 1 - e^{-x^3}.$

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - 1 + e^{-x^3} = 0, \\ F'_x(x, y) = -3x^2 e^{-x^3} = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得 $x=0$, $y=0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = 0$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = 0$, 故对点 $(0, 0)$ 还需再讨论一下. 原式可解为 $x = -\sqrt[3]{\ln(1-y^2)} \geq 0$, 在 $(0, 0)$ 附近, 第一及第四象限各有原曲线的一支, 因此, 点 $(0, 0)$ 为尖点.

3615. $y = x \ln x.$

解 $F(x, y) = x \ln x - y$,
 $F'_x(x, y) = 1 + \ln x$, $F'_y(x, y) = -1 \neq 0$, 故无奇点. 如图 6.40 所示.

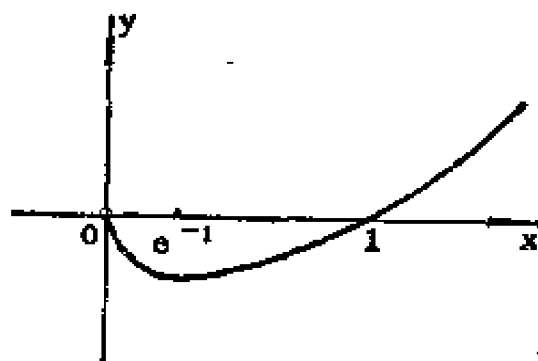


图 6.40

3616. $y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$

解 在 $x=0$ 处, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow -0} y = 0,$$

故 $x=0$ 为“可移去”的第一类不连续点, 补充函数在该点的值为零后, 即得知函数

$$y = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续. 由于 $F'_x(x, y) = 1 \neq 0$, 故无奇点.
当 $x \neq 0$ 时, 由于,

$$y' = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y' = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{(1+z)e^z + 1}{(1+e^z)^2} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{e^z(z+2)}{2e^z(1+e^z)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z+2}{2(1+e^z)} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} y'$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{(1-z)e^{-z} + 1}{(1+e^{-z})^2} = 1,$$

故点 $(0,0)$ 为角点, 如图 6.41 所示

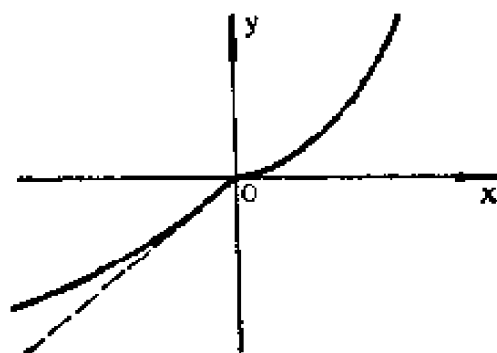


图 6.41

3617. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin x}\right).$

解 $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 点为不连续点. 由于

$$\lim_{x \rightarrow k\pi+0} y = (-1)^k \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow k\pi-0} y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2},$$

故点 $x = k\pi$ 为函数的第一类不连续点.

3618. $y^2 = \sin \frac{\pi}{x}.$

解 $y = \pm \sqrt{\sin \frac{\pi}{x}}$, 它在 $(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1})$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 内无定义.

在边界点 $x = \frac{1}{2k}$ 及 $x = \frac{1}{2k-1}$, $y = 0$.

函数图象有上下两支.

设 $F(x, y) = y^2 - \sin \frac{\pi}{x}$, 则在边界点, 由于 $F'_x \neq 0$, $F'_y = 0$, 故也无奇点.

在 $(0, 0)$ 点的任何邻域内, 有无穷多个曲线的封闭分支, 这些分支没有一个过 $(0, 0)$ 点, 它不属于任何一种类型.

3619. $y^2 = \sin x^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - \sin x^2 = 0, \\ F'_x(x, y) = -2x \cos x^2 = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得 $x = 0$, $y = 0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = -2$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = -4 < 0$, 故点 $(0, 0)$ 为二重点.

3620. $y^2 = \sin^3 x$.

解 显见, 函数 y 的周期为 2π , 在 $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ 内函数有定义, 而在 $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 内无定义.

解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - \sin^3 x = 0, \\ F'_x(x, y) = -3\sin^2 x \cos x = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得 $x = 0, y = 0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

在点 $(0, 0)$ 的左侧 (指充分小的范围, 下同, 不再说明) 无曲线的点, 而在右侧的第一、第四象限分别有曲线的两枝, 因此, 点 $(0, 0)$ 为尖点, 如图 6.42 所示.

由周期性可知,
点 $(k\pi, 0)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 也为尖点.
只是当 k 是偶数时,
右侧才有曲线的两枝;
当 k 是奇数时,
左侧才有曲线的两枝.

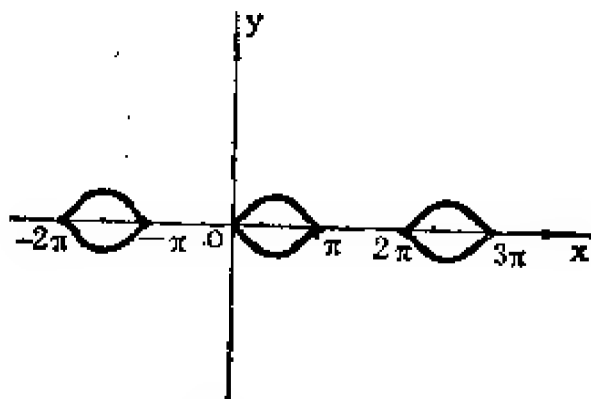


图 6.42

§7. 多变量函数的极值

1° 极值的定义 若函数 $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ 于点 P_0 的邻域内有定义并且当 $0 < \rho(P_0, P) < \delta$ 时, $f(P_0) > f(P)$ 或 $f(P_0) < f(P)$, 则说, 函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极值 (相应地为极大值或极小值).*)

2° 极值的必要条件 可微分的函数 $f(P)$ 仅在静止点 P_0 , 即是说在 $df(P_0) = 0$ 的点 P_0 能达到极值. 所以, 函数 $f(P)$ 的极值点应当满足方程组 $f'_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

3° 极值的充分条件 函数 $f(P)$ 于点 P_0 有:

(a) 极大值, 若 $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) < 0$,

(b) 极小值, 若 $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) > 0$.

研究二次微分 $d^2f(P_0)$ 的符号可用化相应的二次式成典式的方法来进行.

特别是, 对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x, y)$ 在静止点 (x_0, y_0) [$df(x_0, y_0) = 0$], $D = AC - B^2 \neq 0$ [其中 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$] 成立时, 有:

(1) 极小值, 若 $D > 0$, $A > 0$ ($C > 0$);

(2) 极大值, 若 $D > 0$, $A < 0$ ($C < 0$);

(3) 极值不存在, 若 $D < 0$.

4° 条件极值 在关系式 $\varphi_i(P) = 0$ ($i = 1, \dots, m$; $m < n$)

*) 编者注: 若将不等式 $f(P_0) > f(P)$ (或 $f(P_0) < f(P)$) 换为不等式 $f(P_0) \geq f(P)$ (或 $f(P_0) \leq f(P)$), 则称 $f(P)$ 在点 P_0 有弱极大值 (或弱极小值).

存在的条件下, 求函数 $f(P_0) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值的问题, 可归结为对于拉格朗日函数

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(P)$$

[其中 $\lambda_i (i = 1, \dots, m)$ 为常数因子] 求普通极值的问题. 关于条件极值的存在和性质的问题, 在最简单的情况, 根据研究函数 $L(P)$ 于静止点 P_0 的二次微分 $d^2 L(P_0)$ 的符号, 并在变量 dx_1, dx_2, \dots, dx_n 由下面的关系式

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

所限制的条件下, 得到解决.

5° 绝对极值 于有界且封闭的区域内可微分的函数 $f(P)$ 在此域内或于静止点, 或于域的边界点达到自己的最大值和最小值.

研究下列多变量函数的极值:

3621. $z = x^2 + (y-1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0, 1)$. 显然 $z(0, 1) = 0$, 且当 $(x, y) \neq (0, 1)$ 时 $z > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z(P_0) = 0$ (实际是最小值).

3622. $z = x^2 - (y-1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2(y-1) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0, 1)$. 由于

$A = z''_{xx}(0, 1) = 2$, $B = z''_{xy}(0, 1) = 0$, $C = z''_{yy}(0, 1) = -2$, 且 $AC - B^2 = -4 < 0$, 故极值不存在(或用该点附近的 z 值可正可负说明).

3623. $z = (x - y + 1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2(x - y + 1) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2(x - y + 1) = 0 \end{cases}$$

得静止点分布在直线 $x - y + 1 = 0$ 上. 对于此直线上的点均有 $z = 0$, 但是 $z \geq 0$ 恒成立. 因此, 函数 z 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上的各点取得弱极小值 $z = 0$.

3624. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(1, 0)$. 由于

$A = z''_{xx}(1, 0) = 2$, $B = z''_{xy}(1, 0) = -1$, $C = z''_{yy}(1, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = 3 > 0$, 故函数 z 在点

P_0 取得极小值 $z(P_0) = -1$.

3625. $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = x y^3 (12 - 3x - 2y) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2 (18 - 3x - 4y) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(2, 3)$, 并且直线 $x = 0$ 及直线 $y = 0$ 上的点都是静止点.

不难断定在 P_0 点, $A = -162$, $B = -108$, $C = -144$, $AC - B^2 > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0) = 108$.

在直线 $x = 0$ 及 $y = 0$ 上的各点均有 $z = 0$. 先分析直线 $y = 0$ 的情况. 在直线上 $x \neq 0$ 及 $x \neq 6$ 处, $x^2(6 - x - y) \neq 0$, 在确定点的足够小的邻域内也不变号, 但是 y^3 可正可负, 因此函数 z 变号, 即在上述情况下没有极值. 当 $x = 0$ 及 $x = 6$ 类似地可判断也无极值.

其次分析直线 $x = 0$ 的情况. 在直线上 $y = 0$ 及 $y = 6$ 的点的情况类似地可判断无极值. 但当 $0 < y < 6$ 时, $y^3(6 - x - y) > 0$, 且在所讨论点的足够小的邻域内保持正号. 因此, 在足够小的邻域内, $z = x^2 y^3 (6 - x - y) \geq 0$ 也成立, 但邻域内任意近处总有 $z = 0$ 的点. 于是, 对于 $x = 0$, $0 < y < 6$ 的点函数 z 取得弱极小值 $z = 0$. 同法可判定, 对于直线 $x = 0$ 上 $y < 0$ 及 $y > 6$ 的各点处, 函数 z 取得弱极大值 $z = 0$.

3626. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0,0)$ 及 $P_1(1,1)$.

不难断定, 在点 P_0 有 $A=0$, $B=-3$, $C=0$ 及 $AC-B^2=-9<0$, 故无极值; 而在点 P_1 有 $A=6$, $B=-3$, $C=6$ 及 $AC-B^2=27>0$, 故函数 z 在该点取得极小值 $z(P_1)=-1$.

3627. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$ 及 $P_2(-1,1)$.

在点 P_0 附近, 当 $x=y$ 且足够小时, 有 $z=2x^4-4x^2<0$; 但当 $x=-y$ 时, $z=2x^4>0$, 因此, 在点 P_0 无极值.

不难断定, 在点 P_1 及 P_2 均有 $A=10$, $B=-2$, $C=10$ 及 $AC-B^2=96>0$, 故函数 z 在点 P_1 及 P_2 取得极小值 $z=-2$.

3628. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x>0, y>0)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{50}{y^2} = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(5, 2)$. 不难断定, 在该点有 $A = \frac{4}{5}$,

$B = 1$, $C = 5$ 及 $AC - B^2 = 3 > 0$, 故函数 z 在该点取得极小值 $z(P_0) = 30$.

3629. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0).$

解 考虑函数 $u = z^2 = x^2 y^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

显然 z 的极值均为 u 的极值, 且 u 在点 (x, y) 取得的极值不为零时, z 也在点 (x, y) 取得极值; u 在点 (x, y) 取得的极值为零时, 情况复杂一些, 但对 z 也不难讨论.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{2}{a^2} x^3 y^2 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 y \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{2}{b^2} x^2 y^3 = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0, 0)$, $P_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$,

$-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $P_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 及 $P_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

由于 z 在点 P_0 附近变号, 所以 $z(P_0)$ 不是极值。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^2 \left(1 - \frac{6x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{6y^2}{b^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy \left(1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2} \right).$$

在 P_1, P_2, P_3, P_4 各点, 得

$$A = -\frac{8}{9}b^2, \quad B = \pm \frac{4}{9}ab, \quad C = -\frac{8}{9}a^2,$$

$$AC - B^2 = \left(\frac{64}{81} - \frac{16}{81} \right) a^2 b^2 > 0,$$

故函数 u 取得正的极大值. 于是, 相应地函数 z 在点

P_1 及 P_2 取得极大值 $z(P_1) = z(P_2) = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$, 而在点

P_3 及 P_4 取得极小值 $z(P_3) = z(P_4) = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

3630. $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0).$

解 令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 则

$$z(x, y) = z(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{a r \cos \varphi + b r \sin \varphi + c}{\sqrt{r^2 + 1}}.$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{a \cos \varphi + b \sin \varphi - cr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{-ar \sin \varphi + br \cos \varphi}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}} = 0. & (2) \end{cases}$$

先设 a, b 不同时为零. 由 (2) 考虑到 $r=0$ 不是解 ($r=0$, φ 为任意值不满足 (1) 式), 故有 $a \sin \varphi = b \cos \varphi$. 于是,

$$\cos \varphi = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (3)$$

显见当 $c=0$ 时无解 (因由 (1) 有 $a \cos \varphi + b \sin \varphi = 0$, 再由 (3) 得 $a=b=0$. 与 a, b 不同时为零之假定矛盾). 当 $c \neq 0$ 时,

$$r = \frac{a \cos \varphi + b \sin \varphi}{c} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}.$$

为保证 $r > 0$, 在 $\cos \varphi$ 及 $\sin \varphi$ 前取与 c 一致的符号. 此时, 有

$$x = \frac{a}{c}, \quad y = \frac{b}{c}.$$

$$\text{由于这时 } z''_{rr} = -\frac{c(1+3r^2)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$z''_{\varphi\varphi} = -\frac{cr^2}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad z'_{r\varphi} = 0$$

及 $z''_{rr} z''_{\varphi\varphi} - (z'_{r\varphi})^2 > 0$, 故当 $c > 0$ 时 $z''_{rr} < 0$, 函数 z 在点 $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取得极大值 $z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; 当 $c < 0$ 时 $z''_{rr} > 0$, 函数 z 在点 $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取得极小值 $z = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

下设 $a=b=0$. 由假定 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ 知 $c \neq 0$.

此时解方程组(1), (2)得 $r=0$, φ 任意; 即 $x=0$,

$y=0$. 由于这时 $z=\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, 故显然知: 当

$c>0$ 时 z 在点 $(0,0)$ 取极大值 $z=c$; 当 $c<0$ 时, z 在点 $(0,0)$ 取极小值 $z=c$.

综合上述结果, 得结论: 若 $c>0$, 则 z 在点

$(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取极大值 $z_{\text{极大}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 若 $c<0$,

则 z 在点 $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取极小值 $z_{\text{极小}}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

若 $c=0$ (由假定, 这时 $a^2+b^2\neq 0$), 则 z 无极值.

注. 此题也可不作变量代换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, (极坐标), 而直接在直角坐标 x, y 下进行讨论, 即

解方程组 $\frac{\partial z}{\partial x}=0, \frac{\partial z}{\partial y}=0$ 并计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 之值. 但此法计算较繁, 没有用极坐标简单.

3631. $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

点 $(0,0)$ 为偏导函数无意义的点. 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $z<1$, 故 $z(0,0)=1$ 为极大值.

3632. $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2).$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 8x - 3y) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x + 2y) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0,0)$ 及 $P_1(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 16x - 6y + 4),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 9e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 4y + \frac{2}{3}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 6x - y - 1).$$

在点 P_0 , $A=16$, $B=-6$, $C=6$ 及 $AC-B^2=60>0$,
故函数 z 取得极小值 $z(P_0)=0$, 在点 P_1 , $A=14e^{-2}$,

$B=-9e^{-2}$, $C=\frac{3}{2}e^{-2}$ 及 $AC-B^2=-60e^{-4}<0$, 故

无极值.

3633. $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{x^2-y}(5x - 2x^2 + xy - 1) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2-y}(2x - y - 4) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(1, -2)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2-y}(10x^2 - 4x^3 + 2x^2y - 6x + y + 5),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2-y} (3 - 2x + y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2e^{x^2-y} (2x^2 - xy - 4x + 1),$$

在点 P_0 , $A = -2e^3$, $B = 2e^3$, $C = -e^3$ 及 $AC - B^2 = -2e^6 < 0$, 故无极值.

3634. $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2 + xy + y^2)}$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 5e^{-(x^2 + xy + y^2)} - (5x + 7y - 25) \cdot (2x + y)e^{-(x^2 + xy + y^2)} = 0, & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 7e^{-(x^2 + xy + y^2)} - (5x + 7y - 25) \cdot (x + 2y)e^{-(x^2 + xy + y^2)} = 0. & (2) \end{cases}$$

(1) $\times 7 -$ (2) $\times 5$, 消去因子 $e^{-(x^2 + xy + y^2)}$, 得

$$3(5x + 7y - 25)(3x - y) = 0.$$

以 $5x + 7y - 25 = 0$ 代入 (1)、(2), 显然矛盾, 故必有 $5x + 7y - 25 \neq 0$, 从而 $y = 3x$. 代入 (1), 得

$$26x^2 - 25x - 1 = 0,$$

解得静止点 $P_0(1, 3)$ 及 $P_1(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26})$. 在点 P_0 ,

$$\begin{aligned} A &= z''_{xx}(P_0) = [z'_x(x, 3)]'_x|_{x=1} \\ &= \{e^{-(x^2 + 3x + 9)} [5 - (5x - 4)(2x + 3)]\}'_x|_{x=1} \\ &= [e^{-(x^2 + 3x + 9)}]'|_{x=1} \cdot [5 - (5x - 4)(2x + 3)]|_{x=1} \\ &\quad + [e^{-(x^2 + 3x + 9)}]|_{x=1} \cdot [5 - (5x - 4) \\ &\quad \cdot (2x + 3)]'|_{x=1} \\ &= -27e^{-13}. \end{aligned}$$

同法可求得

$$B = z''_{xy}(P_0) = -36e^{-13}, C = z''_{yw}(P_0) = -51e^{-13}.$$

于是, $AC - B^2 = 81e^{-26} > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0) = e^{-13} \approx 2.26 \cdot 10^{-6}$.

同法可得函数 z 在点 P_1 取得极小值 $z(P_1) = -26e^{-\frac{1}{52}} \approx -25.51$.

3635. $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - \frac{4}{x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - \frac{10}{y} = 0 \end{cases} \quad (x > 0, y > 0)$$

得静止点 $P_0(1, 2)$. 在点 P_0 ,

$$A = 6, B = 1, C = \frac{9}{2}, AC - B^2 = 26 > 0,$$

故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z(P_0) = 7 - 10\ln 2 \approx 0.0635$.

3636. $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq y \leq$

$$\frac{\pi}{2}).$$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \sin(x - y) = 0, & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y + \sin(x - y) = 0. & (2) \end{cases}$$

(1) + (2), $\cos x = \sin y$. 由于 x, y 均为锐角, 故有

$y = \frac{\pi}{2} - x$. 代入 (1), 得

$$\cos x - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x + \cos 2x$$

$$= 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0.$$

但是 $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, 故 $\cos\frac{3x}{2} = 0$. 从而得静止点 $P_0\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$. 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos y - \cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(x-y),$$

故在点 P_0 , 有

$$A = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad C = -\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$AC - B^2 = \frac{1+2\sqrt{3}}{4} > 0.$$

于是, 函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

3637. $z = \sin x \sin y \sin(x+y)$ ($0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi$).

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \sin y \sin(2x+y) = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \sin(x+2y) = 0. & (2) \end{cases}$$

由 (1) 及 (2) 可得下列四个方程组:

$$\text{I: } \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = 0. \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin(2x+y) = 0. \end{cases}$$

$$\text{III: } \begin{cases} \sin y = 0, \\ \sin(x+2y) = 0, \end{cases} \quad \text{IV: } \begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \sin(x+2y) = 0. \end{cases}$$

考虑到 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, 于是得原方程组 (1) 与 (2) 的六个解

$$P_1(0, 0), P_2(0, \pi), P_3(\pi, 0),$$

$$P_4(\pi, \pi), P_5\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), P_6\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

由于所考虑的区域是闭正方形 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, 故点 P_1, P_2, P_3, P_4 都是此区域的边界点. 因此 P_1, P_2, P_3, P_4 不是函数 z 达极值的点 (根据极值的定义, 首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义). 由于

$$z''_{xx} = 2 \sin y \cos(2x+y), \quad z''_{xy} = \sin 2(x+y),$$

$$z''_{yy} = 2 \sin x \cos(x+2y).$$

在点 P_5 有 $AC - B^2 = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0$ 且 $A = -\sqrt{3} < 0$, 故函数 z 在点 P_5 取得极大值 $z(P_5) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$; 在点 P_6 有 $AC - B^2 = (\sqrt{3})(\sqrt{3})$

$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0$ 且 $A = \sqrt{3} > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取

得极小值 $z(P_0) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

3638. $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3 \arctg \frac{y}{x}$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{3y}{x^2 + y^2} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2 + \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{3x}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(1, 1)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-x^2 + 6xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - 6xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-3x^2 - 2xy + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

在点 P_0 有 $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{2}$ 及 $AC - B^2 =$

$-\frac{5}{2} < 0$, 故无极值.

3639. $z = xy \ln(x^2 + y^2)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0, & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0. & (2) \end{cases}$$

将 (1) 式乘以 x 减去 (2) 式乘以 y , 得

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}(x^2-y^2)=0.$$

于是, $x=0$, $y=0$, $x=y$, $x=-y$ 为四组解, 对应地得静止点 $P_1(0,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1,0)$

$$P_4(-1,0), P_5\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right),$$

$$P_7\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \text{ 及 } P_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right).$$

代入原式, 不难看出, 函数 z 在点 P_1 、 P_2 、 P_3 及 P_4 均无极值 (邻域内函数值可正可负), 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \ln(x^2+y^2) + \frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

在点 P_5 及 P_6 , $A=2$, $B=0$, $C=2$ 及 $AC-B^2=4>0$, 故函数 z 在点 P_5 及 P_6 取得极小值 $z(P_5)=$

$$z(P_6) = -\frac{1}{2e} \approx -0.184.$$

在点 P_7 及 P_8 , $A=-2$, $B=0$, $C=-2$ 及 $AC-B^2=4>0$, 故函数 z 在点 P_7 及 P_8 取极大值 $z(P_7)=$

$$z(P_8) = \frac{1}{2e} \approx 0.184.$$

$$3640. \quad z = x + y + 4 \sin x \sin y.$$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 4\cos x \sin y = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + 4\sin x \cos y = 0. & (2) \end{cases}$$

(2) - (1) 得 $\sin(x - y) = 0$, 故 $x - y = n\pi$;

(2) + (1) 得 $\sin(x + y) = \frac{1}{2}$, 故 $x + y = m\pi -$

$$(-1)^m \frac{\pi}{6}.$$

于是, 得静止点 $P_0(x_0, y_0)$, 其中

$$\begin{cases} x_0 = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{12} + (m+n) \frac{\pi}{2}, \\ y_0 = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{12} + (m-n) \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

在点 P_0 , 有

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= (-4\sin x_0 \sin y_0) (-4\sin x_0 \sin y_0) \\ &\quad - (4\cos x_0 \cos y_0)^2 \\ &= 16(\sin x_0 \sin y_0 - \cos x_0 \cos y_0) \\ &\quad \cdot (\sin x_0 \sin y_0 + \cos x_0 \cos y_0) \\ &= -16\cos(x_0 + y_0)\cos(x_0 - y_0) \\ &= -16\cos\left[m\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6}\right]\cos n\pi \\ &= -16(-1)^{n+n} \cos \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

当 m 及 n 有相同的奇偶性时, $m+n$ 为偶数, $AC - B^2 \leq 0$, 故无极值, 当 m 及 n 有不同的奇偶性时, $m+n$

为奇数, $AC-B^2 > 0$, 故有极值, 看 A 的符号决定取得极大值还是极小值. 由于

$$\begin{aligned} A &= -4 \sin x_0 \sin y_0 = 2[\cos(x_0 + y_0) - \cos(x_0 - y_0)] \\ &= 2\{(-1)^m \cos \frac{\pi}{6} - (-1)^n\}, \end{aligned}$$

故当 m 为奇数及 n 为偶数时, $A < 0$, 取得极大值; 当 m 为偶数及 n 为奇数时, $A > 0$, 取得极小值. 极值为

$$z(x_0, y_0) = m\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)(-1)^{m+1} + 2 \cdot (-1)^n.$$

3641. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}.$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{-(x^2 + y^2)}(1 - x^2 - y^2) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{-(x^2 + y^2)}(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0, 0)$ 及 $P(x_0, y_0)$, 其中 $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

在点 P_0 有 $z = 0$, 而当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时 $z > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z = 0$.

由1437题知, 在满足 $x_0^2 + y_0^2 = 1$ 的点 (x_0, y_0) 的邻域内, 不论是 $x^2 + y^2 > 1$ 还是 $x^2 + y^2 < 1$, 均有

$$z(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)} \leq e^{-1}.$$

但是点 (x_0, y_0) 的邻域内总有 $x^2 + y^2 = 1$ 的点 (x, y) , 因此, 函数 z 在点 (x_0, y_0) 取得弱极大值 $z = e^{-1}$.

3642. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$

解 $du = 2(x+1)dx + 2(y+2)dy + 2(z-3)dz.$

$$\text{令 } \frac{\partial u}{\partial x} = 2(x+1) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2(y+2) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2(z-3) = 0, \quad \text{得静止点 } P_0(-1, -2, 3).$$

在该点由于

$$d^2u = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \geq 0$$

(当 $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$ 时),

故函数 u 在点 P_0 取得极小值 $u(P_0) = -14$.

$$3643. \quad u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

$$\text{解 } du = (3x^2 + 12y)dx + (2y + 12x)dy + (2z + 2)dz.$$

$$\text{令 } \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 12x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z + 2 = 0, \quad \text{得静止点 } P_0(0, 0, -1) \text{ 及}$$

$$P_1(24, -144, -1).$$

$$d^2u = 6xdx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy.$$

在点 P_0 , 有

$$d^2u = 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy = 2dz^2 + 2dy(dy + 12dx),$$

当 $dz = 0$, $dy \geq 0$ 及 $dy + 12dx \leq 0$ 时, $d^2u \leq 0$;

而当 dx, dy 及 dz 均大于零时, $d^2u \geq 0$. 因此 d^2u 的符号不定, 故无极值.

在点 P_1 , 有

$$d^2u = 144dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy$$

$$= (12dx + dy)^2 + dy^2 + 2dz^2$$

$$\geq 0 \quad (\text{当 } dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \text{ 时}),$$

故函数 u 在点 P_1 取得极小值 $u(P_1) = -6913$.

$$3644. \quad u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad du &= \left(1 - \frac{y^2}{4x^2}\right) dx + \left(\frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}\right) dy \\ &\quad + \left(\frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right) dz. \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ 得方程组}$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0. \end{cases}$$

解之得静止点 $P_0\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{y^2}{2x^3} dx^2 - \frac{y}{x^2} dx dy + \left(\frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\right) dy^2 \\ &\quad - \frac{4z}{y^2} dy dz + \left(\frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\right) dz^2. \end{aligned}$$

在点 P_0 , 有

$$\begin{aligned} d^2u &= 4dx^2 - 4dxdy + 3dy^2 - 4dydz + 6dz^2 \\ &= (2dx - dy)^2 + dy^2 + (dy - 2dz)^2 + 2dz^2 > 0 \\ &\quad (\text{当 } dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \text{ 时}), \end{aligned}$$

故函数 u 在点 P_0 取得极小值 $u(P_0) = 4$.

3645. $u = xyz^3(a - x - 2y - 3z)$ ($a > 0$) .

解 $du = y^2z^3(a - 2x - 2y - 3z)dx + 2xyz^3(a - x - 3y - 3z)dy + 3xy^2z^2(a - x - 2y - 4z)dz$.

令 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, 得方程组

$$\begin{cases} y^2z^3(a - 2x - 2y - 3z) = 0 \\ 2xyz^3(a - x - 3y - 3z) = 0 , \\ 3xy^2z^2(a - x - 2y - 4z) = 0 . \end{cases}$$

解之得静止点 $P_0(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7})$; 直线 $x = 0$, $2y + 3z = a$; 平面 $y = 0$; 平面 $z = 0$.

同 3625 题的方法, 不难确定: 直线 $x = 0$, $2y + 3z = a$ 及平面 $z = 0$ 上的点不取得极值. $y = 0$ 时, 当 $xz^3(a - x - 3z) > 0$ 取得弱极小值 $u = 0$; 当 $xz^3(a - x - 3z) < 0$ 取得弱极大值 $u = 0$; 当 $xz^3(a - x - 3z) = 0$ 不取得极值.

在点 P_0 , 有

$$\begin{aligned} d^2u &= -\frac{2a^5}{7^5} (dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 + 2dxdy + \\ &6dydz + 3dxdz) = -\frac{a^5}{7^5} [(dx + 2dy + 3dz)^2 + dx^2 + \\ &2dy^2 + 3dz^2] < 0 \quad (\text{当 } dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \text{ 时}) , \end{aligned}$$

故函数 u 在点 P_0 取得极大值 $u(P_0) = \frac{a^7}{7^7}$.

$$3646. \quad u = \frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{b} \quad (x > 0, y > 0, z > 0, \\ a > 0, b > 0).$$

$$\text{解} \quad du = \left(\frac{2x}{y} - \frac{a^2}{x^2} \right) dx + \left(\frac{2y}{z} - \frac{x^2}{y^2} \right) dy \\ + \left(\frac{2z}{b} - \frac{y^2}{z^2} \right) dz.$$

$$\text{令} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ 得方程组}$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} - \frac{a^2}{x^2} = 0, \\ \frac{2y}{z} - \frac{x^2}{y^2} = 0, \\ \frac{2z}{b} - \frac{y^2}{z^2} = 0. \end{cases}$$

$$\text{解之得静止点 } P_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt[15]{16a^4b}, \frac{1}{4} \sqrt[5]{16a^4b}, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \sqrt[15]{\frac{1}{4}a^8b^7} \right).$$

$$d^2u = \frac{2a^2}{x^3} dx^2 + \frac{2}{y} dx^2 - \frac{4x}{y^2} dx dy + \frac{2}{z} dy^2 \\ + \frac{2x^2}{y^3} dy^2 - \frac{4y}{z^2} dy dz + \frac{2}{b} dz^2 + \frac{2y^2}{z^3} dz^2. \\ = \frac{2a^2}{x^3} dx^2 + \frac{2}{y} \left(dx - \frac{x}{y} dy \right)^2 + \frac{2}{z} \left(dy - \frac{y}{z} dz \right)^2 \\ + \frac{2}{b} dz^2.$$

在点 P_0 , $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $d^2u > 0$ (当 $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$ 时), 故函数 u 在点 P_0 取得极小值

$$u(P_0) = \frac{15a^{16}}{4} \sqrt{\frac{a}{16b}}.$$

3647. $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$

$$(0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi; 0 \leq z \leq \pi).$$

解 $du = [\cos x - \cos(x+y+z)]dx$
 $+ [\cos y - \cos(x+y+z)]dy$
 $+ [\cos z - \cos(x+y+z)]dz.$

令 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, 得方程组

$$\begin{cases} \cos x - \cos(x+y+z) = 0, \\ \cos y - \cos(x+y+z) = 0, \\ \cos z - \cos(x+y+z) = 0. \end{cases}$$

注意到 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq \pi$, 解之得静

止点 $P_0(0,0,0)$, $P_1(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 及 $P_2(\pi, \pi, \pi)$.

在点 P_1 , 有

$$\begin{aligned} d^2u &= -\sin x dx^2 - \sin y dy^2 - \sin z dz^2 \\ &\quad + \sin(x+y+z)[d(x+y+z)]^2 \\ &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 - (dx+dy+dz)^2 < 0, \end{aligned}$$

故函数 u 在点 P_1 取得极大值 $u(P_1) = 4$.

由于 P_0 与 P_2 是所考虑区域 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq \pi$ 的边界点, 故函数在点 P_0 与 P_2 不达极值 (根据极值定义, 首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义). 但如果放宽要求, 对于边界点, 仅将

其函数值与属于所考虑的区域而与此边界点很接近的点的函数值相比较，则在边界点也可引入达极值和达弱极值的概念。今对于点 P_0 及 P_2 的邻域中且属于上述区域的点 (x, y, z) ，显然有 $\sin x \geq 0, \sin y \geq 0, \sin z \geq 0$ 。又

$$\begin{aligned}\sin(x+y+z) &= \sin x \cos y \cos z - \sin x \sin y \sin z \\ &\quad + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z \\ &\leq \sin x + \sin y + \sin z - \sin x \sin y \sin z,\end{aligned}$$

故 $u \geq 0$ 。而当 $x=y=0$ 时或 $x=y=\pi$ 时都恒有 $u=0$ 。因此，函数 u 在点 P_0 及 P_2 都达到弱极小值 $u(P_0)=u(P_2)=0$ （按上述边界点达极值的意义）。

3648. $u = x_1 x_2^2 \cdots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n)$

$$(x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0).$$

解 先考虑满足 $1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n = 0, x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ 的点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 。显然函数 u 在这种点不达到极值（因为，例如，若保持 x_2, x_3, \dots, x_n 不变，而将 x_1 增大任意小的值，就有 $u < 0$ ，但将 x_1 减小任意小的值，则有 $u > 0$ ），故下面只需

考察满足 $1 - \sum_{k=1}^n kx_k \neq 0, x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ 的点

$$(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

我们有

$$du = u \sum_{k=1}^n \frac{k}{x_k} dx_k - \frac{u}{1 - \sum_{k=1}^n kx_k} \sum_{k=1}^n k dx_k$$

$$= u \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{x_k} - \frac{k}{1 - \sum_{k=1}^n kx_k} \right) dx_k \right],$$

考慮到 $x_k \geq 0$ 及 $1 - \sum_{k=1}^n kx_k \neq 0$, 故有 $u \neq 0$.

解方程組

$$\frac{k}{x_k} - \frac{k}{1 - \sum_{k=1}^n kx_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

得靜止點 $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{2}{n^2 + n + 2} = x_0.$$

$$\begin{aligned} d^2u &= \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{x_k} - \frac{k}{1 - \sum_{k=1}^n kx_k} \right) dx_k \right] du \\ &\quad + u \left[\sum_{k=1}^n \left(-\frac{k}{x_k^2} \right) dx_k^2 + \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^n kx_k \right)^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\sum_{k=1}^n k dx_k \right) \left(-\sum_{k=1}^n k dx_k \right) \right]. \end{aligned}$$

在點 P_0 , 有

$$d^2u = -\frac{u}{x_0^2} \left[\sum_{k=1}^n k dx_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n k dx_k \right)^2 \right]$$

$$= -x_0^{\frac{n(n+1)}{2}-1} \left[\sum_{k=1}^n k dx_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n k dx_k \right)^2 \right]$$

≤ 0 (当 $\sum_{k=1}^n dx_k^2 \neq 0$ 时),

故函数 u 在点 P_0 取得极大值 $u(P_0) = \left(\frac{2}{n^2+n+2} \right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$.

3649. $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$ ($x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$) .

解 设 $y_1 = x_1, y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \dots, y_k = \frac{x_k}{x_{k-1}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$,

则 $x_n = y_1 y_2 \cdots y_n, y_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), 且

$$u = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + \frac{2}{y_1 y_2 \cdots y_n}.$$

记 $A = y_1 y_2 \cdots y_n$, 则可得

$$du = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{2}{A y_k} \right) dy_k.$$

令 $\frac{\partial u}{\partial y_k} = 0$ 得方程组

$$1 - \frac{2}{A y_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

解之得静止点 $P_0(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 其中

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 2^{\frac{1}{n+1}} = y_0.$$

在点 P_0 , 有

$$d^2u \Big|_{P=P_0} = \frac{2}{A} \sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k^2} dy_k^2 + \frac{2}{A y_k^2} \left(\sum_{k=1}^n dy_k \right)^2 \Big|_{P=P_0}$$

$$= \frac{1}{y_0} \left[\sum_{k=1}^n dy_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n dy_k \right)^2 \right] \geq 0$$

(当 $\sum_{k=1}^n dy_k^2 \neq 0$ 时),

故函数 u 在 P_0 点取得极小值, 也即在

$$x_1 = y_1 = 2^{\frac{1}{n+1}},$$

$$x_2 = y_2 x_1 = 2^{\frac{2}{n+1}},$$

.....

$$x_k = y_k x_{k-1} = 2^{\frac{k}{n+1}},$$

.....

$$x_n = y_n x_{n-1} = 2^{\frac{n}{n+1}}$$

处, 函数 u 取得极小值 $u = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

3650. 惠更斯问题. 在 a 和 b 二正数间插入 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 使得分数

$$u = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

的值是最大.

解 记 $w = \frac{1}{u} = (a+x_1)\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)\left(1+\frac{x_3}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{b}{x_n}\right)$.

设 $y_1 = \frac{x_2}{x_1}, y_2 = \frac{x_3}{x_2}, \dots, y_n = \frac{b}{x_n}$, 并记

$A = y_1 y_2 \cdots y_n$, 则有

$$x_1 = \frac{b}{y_1 y_2 \cdots y_n} = \frac{b}{A},$$

$$w = \left(a + \frac{b}{A}\right) (1 + y_1)(1 + y_2) \cdots (1 + y_n).$$

又记 $m = a + \frac{b}{A}$, 则有

$$\begin{aligned} dw &= \sum_{k=1}^n \frac{w}{1+y_k} dy_k - \frac{wb}{mA} \sum_{k=1}^n \frac{dy_k}{y_k} \\ &= w \sum_{k=1}^n \left(\frac{y_k}{1+y_k} - \frac{b}{mA} \right) \frac{dy_k}{y_k}. \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial w}{\partial y_k} = 0$ 得方程组

$$\frac{y_k}{1+y_k} = \frac{b}{mA} \quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

解之得静止点 $P_0(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 其中

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = y_0.$$

在点 P_0 , 有

$$\begin{aligned} d^2u \Big|_{P=P_0} &= w \sum_{k=1}^n d \left(\frac{y_k}{1+y_k} - \frac{b}{mA} \right) \frac{dy_k}{y_k} \Big|_{P=P_0} \\ &= w \sum_{k=1}^n d \left(\frac{y_k}{1+y_k} \right) \left(\frac{dy_k}{y_0} \right) \Big|_{P=P_0} \\ &= w \sum_{k=1}^n \frac{dy_k}{y_0} \left[d \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{b}A} \right) \Big|_{P=P_0} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2} \sum_{k=1}^n dy_k^2 + \frac{w(P_0)}{y_0 \left(1 + \frac{a}{b} A\right)_{P=P_0}^2} \\
&\quad \cdot \sum_{k=1}^n \left[dy_k \left(\sum_{k=1}^n \frac{aA}{by_k} dy_k \right) \right]_{P=P_0} \\
&= \frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2} \left[\sum_{k=1}^n dy_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n dy_k \right)^2 \right] \\
&\geq 0 \quad \left(\text{当 } \sum_{k=1}^n dy_k^2 \neq 0 \text{ 时} \right),
\end{aligned}$$

故函数 w 在点 P_0 取得极小值, 从而函数 u 在

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b}{A} = \frac{b}{y_0^n} = \frac{b}{a} \cdot a y_0^{-n} = a y_0^{n+1} \cdot y_0^{-n} = a y_0, \\ x_2 = x_1 y_1 = a y_0^2, \\ x_3 = x_2 y_2 = a y_0^3, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \frac{b}{y_n} = \frac{b}{a} a y_0^{-1} = a y_0^{n+1} y_0^{-1} = a y_0^n, \end{cases}$$

即数 $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ 构成有公比 $y_0 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的几何级数时, 其值最大, 并且 u 的最大值为

$$u = \frac{1}{a(1+y_0)^{n+1}} = \left(a^{\frac{1}{n+1}} + b^{\frac{1}{n+1}} \right)^{-(n+1)}.$$

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值:

3651. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

解 微分得

$$(x-1)dx+(y+1)dy+(z-2)dz=0.$$

显见,当 $x=1$, $y=-1$ 时 $dz=0$. 代入原方程可解得 $z=6$ 及 $z=-2$. 又 $z=2$ 时为不可微的. 为判断极值, 求二阶微分, 得

$$dx^2+dy^2+(z-2)d^2z+dz^2=0.$$

以 $x=1$, $y=-1$, $z=6$ 代入, 并考虑 $dz=0$, 得

$$d^2z=-\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)<0 \quad (\text{当 } dx^2+dy^2\neq 0 \text{ 时}),$$

故当 $x=1$, $y=-1$ 时, 隐函数 z 取得极大值 $z=6$. 同法可判断得: 当 $x=1$, $y=-1$ 时, 隐函数 z 也取得极小值, 且其值为 $z=-2$.

不难看出, $z=2$ 是球的切面平行于 Oz 轴的地方, 因此函数 z 不取得极值.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0.$

解 微分一次, 得

$$(2x-z+2)dx+(2y-z+2)dy+(2z-x-y+2)dz=0.$$

解方程组

$$\begin{cases} 2x-z+2=0, \\ 2y-z+2=0, \\ x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0 \end{cases}$$

得 $x_1=y_1=-(3+\sqrt{6})$, $z_1=-(4+2\sqrt{6})$;

$x_2=y_2=-(3-\sqrt{6})$, $z_2=2\sqrt{6}-4$.

再微分一次, 并注意到 $dz=0$, 即得

$$2dx^2 + 2dy^2 + (2z - x - y + 2)dz = 0.$$

在点 (x_1, y_1, z_1) , $d^2z = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dz^2) > 0$, 故当 $x = y = -(3 + \sqrt{6})$ 时, 取得极小值 $z = -(4 + 2\sqrt{6})$. 同法可知, 当 $x = y = -(3 - \sqrt{6})$ 时, 取得极大值 $z = 2\sqrt{6} - 4$.

对于 dz 的系数 $2z - x - y + 2 = 0$ 时代表的情况, 与上题类似也不取得极值.

3653. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$

解 微分一次, 得

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + z^2)(xdx + ydy + zdz) \\ = a^2(xdx + ydy - zdz). \end{aligned}$$

令 $dz = 0$, 得方程

$$[2(x^2 + y^2 + z^2) - a^2](xdx + ydy) = 0.$$

解之, 得 $x = y = 0$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$.

以 $x = y = 0$ 代入原方程, 解得 $z = 0$. 这是隐函数的一个奇点. 把原式看作 z^2 的一个方程, 舍去增根, 可解出

$$z^2 = -(a^2 + x^2 + y^2) + \sqrt{a^4 + 3a^2(x^2 + y^2)},$$

显然 z 有正负两支在 $(0, 0, 0)$ 点相交. 因此, 不认为 z 在 $(0, 0, 0)$ 点取得极值.

以 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$ 代入原方程, 解得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{8}a^2, \quad z^2 = \frac{a^2}{8}.$$

为考虑极值, 将一次微分式改写为

$$\begin{aligned} & [2(x^2 + y^2 + z^2) - a^2](xdx + ydy) + \\ & [2(x^2 + y^2 + z^2) + a^2]zdz = 0. \end{aligned}$$

将上式再微分一次, 注意到 $dz = 0$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$, 即得

$$a^2 z d^2 z = -2(xdx + ydy)^2,$$

故当 $x^2 + y^2 = \frac{3}{8}a^2$, $z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ 时, $d^2 z \leq 0$, 函

数 z 取得弱极大值 $z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$; 当 $x^2 + y^2 = \frac{3}{8}a^2$,

$z = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$ 时, $d^2 z \geq 0$, 函数 z 取得弱极小值 $z =$

$$-\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

求下列函数的条件极值点:

3654. $z = xy$, 若 $x + y = 1$.

解 设 $F(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda = 0, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

得 $x = y = -\lambda = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{4}$. 由于当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $y \rightarrow \mp$

∞ , 故 $z = xy \rightarrow -\infty$. 从而得知: 点 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

为条件极值点，且 $z = \frac{1}{4}$ 为极大值。

如将 $z = xy$ 改写为 $z = y(1-y)$ ，则成为普通极值，易知极大值点为 $y = \frac{1}{2}$ ，从而 $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ，

$$z = \frac{1}{4}.$$

3655. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ ，若 $x^2 + y^2 = 1$ 。

解 设 $F(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ ，解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{a} + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{b} + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

可得

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|ab|}, \quad x = \mp \frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$y = \mp \frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

其中 $\varepsilon = \operatorname{sgn} ab \neq 0$ 。相应地， $z = \mp \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|}$ 。

由于函数 z 在闭圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值并且最大值与最小值

不相等. 这里可疑点仅两个.

因此, 当 $x = -\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = -\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时, 函数

值 $z = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ 必为最小值, 从而是极小值; 当

$x = \frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时, $z = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ 为最

大值, 从而是极大值.

3656. $z = x^2 + y^2$, 若 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

解 设 $F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \frac{1}{a}\lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \frac{1}{b}\lambda = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

可得

$$\lambda = -\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}, \quad x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

由于当 $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ 时, $z \rightarrow +\infty$, 故函数 z 必在有限处取得最小值. 这里可疑点仅一个. 因此, 当

$x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时, 函数 z 取得极小值

$$z = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

注 如果用二阶微分判别, 则易从

$$d^2 z = 2(dx^2 + dy^2) > 0$$

(不论 dx, dy 之间有何约束条件, 此式恒成立) 可

知 $z = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ 为极小值.

3657. $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, 若 $x^2 + y^2 = 1$.

解 设 $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2[(A - \lambda)x + By] = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 2[Bx + (C - \lambda)y] = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1. & (3) \end{cases}$$

由 $x^2 + y^2 = 1$ 知 x, y 不全为零, 故 λ 必须满足方程

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0. \quad (4)$$

当 $(A - C)^2 + 4B^2 = 0$ 时, 所研究的函数为常数; 当 $(A - C)^2 + 4B^2 \neq 0$ 时, 方程 (4) 有两个不等的实根, 记为 λ_1 和 λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). 由方程组 (1)、(2)、(3) 可解出

$$x_{1,2} = \frac{\pm(\lambda_1 - C)}{\sqrt{B^2 + (\lambda_1 - C)^2}}, y_{1,2} = \frac{\pm(\lambda_1 - A)}{\sqrt{B^2 + (\lambda_1 - A)^2}},$$

$$x_{3,4} = \frac{\pm(\lambda_2 - C)}{\sqrt{B^2 + (\lambda_2 - C)^2}}, y_{3,4} = \frac{\pm(\lambda_2 - A)}{\sqrt{B^2 + (\lambda_2 - A)^2}}.$$

相应地, 有

$$\begin{aligned} z(x_1, y_1) &= Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 \\ &= (Ax_1 + By_1)x_1 + (Bx_1 + Cy_1)y_1. \end{aligned}$$

由 (1)、(2) 可解得

$$Ax_1 + By_1 = \lambda_1 x_1, \quad Bx_1 + Cy_1 = \lambda_1 y_1,$$

故得

$$z(x_1, y_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 y_1^2 = \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2) = \lambda_1.$$

同理可得

$$z(x_2, y_2) = \lambda_1, \quad z(x_3, y_3) = z(x_4, y_4) = \lambda_2.$$

由于函数 z 在单位球面上连续且不为常数, 故必取得最大值和最小值并且最大值和最小值不相等. 这里可疑点仅四个 (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, 4$), 而且 $z(x_1, y_1) = z(x_2, y_2) = \lambda_1$, $z(x_3, y_3) = z(x_4, y_4) = \lambda_2$. 于是, 当 $x = x_{1,2}$, $y = y_{1,2}$ 时, 函数 z 取得最大值 $z = \lambda_1$, 因而也是极大值; 当 $x = x_{3,4}$, $y = y_{3,4}$ 时, 函数 z 取得最小值 $z = \lambda_2$, 因而也是极小值.

3658. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, 若 $x - y = \frac{\pi}{4}$.

解 设 $F(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(x - y - \frac{\pi}{4})$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -\sin 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\sin 2y - \lambda = 0, \\ x - y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

可得

$$x_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad y_k = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

相应地, 当 k 为偶数时, $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$; 当 k 为奇数时, $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

由于所给连续函数 z 必在任意有限区域内取得最大值和最小值, 而且 z 又是关于 x, y 的周期(周期为 π)函数, 故当 k 为偶数时, 函数 z 在点 (x_k, y_k) 取得最大值 $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, 从而是极大值; 当 k 为奇数时, 函数 z 在点 (x_k, y_k) 取得最小值 $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, 从而是极小值.

3659. $u = x - 2y + 2z$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

解 设 $F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

可得

$$x = \pm \frac{1}{3}, \quad y = \mp \frac{2}{3}, \quad z = \pm \frac{2}{3}.$$

相应地, $u = \pm 3$.

由于所给函数在闭球面上连续且不为常数, 故必取得最大值及最小值并且最大值与最小值不相等. 这里可疑点仅两个, 于是, 当 $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}$ 时, 函数 u 取得最大值 $u = 3$, 因而也是极大值; 当 $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{2}{3}$ 时, 函数 u 取得最小值 $u = -3$, 因而也是极小值.

3660. $u = x^m y^n z^p$, 若 $x + y + z = a$ ($m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, $a > 0$)*).

解 设 $w = \ln u = m \ln x + n \ln y + p \ln z$.

$$F(x, y, z) = w - \frac{1}{\lambda}(x + y + z - a).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{m}{x} - \frac{1}{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{n}{y} - \frac{1}{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{p}{z} - \frac{1}{\lambda} = 0, \\ x + y + z = a \end{cases}$$

*) 编者注: 应加上条件 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

可得

$$x = \frac{am}{m+n+p}, \quad y = \frac{an}{m+n+p}, \quad z = \frac{ap}{m+n+p}.$$

$$\text{相应地, } u = \frac{a^{m+n+p} m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分, 边界由三条直线

$$\begin{cases} x+y=a, \\ z=0, \\ z+x=a, \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y+z=a, \\ x=0, \\ x=0, \\ y=0 \end{cases}$$

组成. 当点 P 趋于边界上的点时, 显然有 $w \rightarrow -\infty$. 因此, 函数 w 在区域内取得最大值. 由于可疑点仅

$$\text{一个, 故当 } x = \frac{am}{m+n+p}, \quad y = \frac{an}{m+n+p}$$

$$z = \frac{ap}{m+n+p} \text{ 时, 函数 } u \text{ 取得最大值}$$

$$u = \frac{a^{m+n+p} m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}, \text{ 因而也是极大值.}$$

$$3661. \quad u = x^2 + y^2 + z^2, \text{ 若 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0).$$

$$\text{解 设 } F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$$

-1). 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

可得

$$x = \pm a, y = z = 0; \quad x = z = 0, y = \pm b;$$

$$x = y = 0, z = \pm c.$$

相应地, 有

$u(\pm a, 0, 0) = a^2$, $u(0, \pm b, 0) = b^2$, $u(0, 0, \pm c) = c^2$. 由于 $a > b > c > 0$, 故连续函数 u 在点 $(\pm a, 0, 0)$ 取得最大值 a^2 , 因而也是极大值; 在点 $(0, 0, \pm c)$ 取得最小值 c^2 , 因而也是极小值.

在点 $(0, \pm b, 0)$ 处, 对应的 $\lambda = -b^2$, 且

$$\begin{aligned} d^2F &= 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) dx^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) dy^2 \\ &\quad + 2\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) dz^2 \\ &= 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 + 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) dz^2. \end{aligned}$$

把 x, z 当自变量, y 看成由条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所确定的 x 和 z 的函数. 在点 $(0, \pm b, 0)$, 有 $d^2u = d^2F$,

而 $1 - \frac{b^2}{a^2} > 0$, $1 - \frac{b^2}{c^2} < 0$. 因此, d^2u 的符号不定,

从而函数 u 在点 $(0, \pm b, 0)$ 不取得极值.

3662. $u = xy^2z^3$, 若 $x + 2y + 3z = a$ ($x > 0, y > 0, z > 0$, $a > 0$).

解 设 $w = \ln u = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$,

$$F(x, y, z) = w - \frac{1}{\lambda}(x + 2y + 3z - a).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{y} - \frac{2}{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{3}{z} - \frac{3}{\lambda} = 0, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases}$$

可得

$$x = y = z = \frac{a}{6}.$$

类似3660题的讨论可知, 函数 u 当 $x = y = z = \frac{a}{6}$ 时取

得极大值 $u = \left(\frac{a}{6}\right)^6$.

3663. $u = xyz$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

解 设 $F(x, y, z) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x + \mu = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda y + \mu = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0. & (5) \end{cases}$$

(1) - (2), (2) - (3), 得

$$\begin{cases} (x - y)(2\lambda - z) = 0, & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y - z)(2\lambda - x) = 0. & (7) \end{cases}$$

由(6), 若 $x - y = 0$, 代入(5)得 $z = -2x$. 再代入

(4), 解得静止点 $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 和

$$P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

如果 $x - y \neq 0$, 则 $z = 2\lambda$. 由(7), 若 $y - z = 0$,

类似上面解法可得静止点 $P_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

和 $P_4\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; 若 $y - z \neq 0$, 则

$x = 2\lambda$, 故 $x = z$, 类似上面解法又可得静止点 $P_5\left(\frac{1}{\sqrt{6}},$

$-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 和 $P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

相应地, 有

$$u(P_1) = u(P_3) = u(P_5) = -\frac{1}{3\sqrt{6}},$$

$$u(P_2) = u(P_4) = u(P_6) = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

类似前面各题的讨论可知, 函数 u 在点 P_1, P_3 及 P_5 取得极小值 $u = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$; 在点 P_2, P_4 及 P_6 取得极大值 $u = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

3664. $u = \sin x \sin y \sin z$, 若 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$

$$(x > 0, y > 0, z > 0).$$

解 由 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ 及 $x > 0, y > 0, z > 0$ 不难得出

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < z < \frac{\pi}{2}.$$

设 $w = \ln u = \ln \sin x + \ln \sin y + \ln \sin z$,

$$F(x, y, z) = w + \lambda \left(x + y + z - \frac{\pi}{2} \right).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{ctg} x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \operatorname{ctg} y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \operatorname{ctg} z + \lambda = 0, \\ x + y + z = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

并注意到点 $P(x, y, z)$ 在第一卦限, 即得静止点 P_0 .

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right).$$

类似3660题的讨论, 当点 (x, y, z) 趋于平面 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ 在第一卦限部分的边界时, $u \rightarrow 0$; 而在边界内部 $u > 0$. 因此, 函数 u 在边界内部取得最大值, 故在点 P_0 取得极大值 $u(P_0) = \frac{1}{8}$.

3665. $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$ ($a > b > c > 0$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$).

解 设 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2\left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right)x + \mu \cos \alpha = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 2\left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right)y + \mu \cos \beta = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = 2\left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right)z + \mu \cos \gamma = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. & (6) \end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x, y, z , 然后相加, 并注意到(4)、(5)两式, 即得

$$\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = u(x, y, z). \quad (7)$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 然后相加, 并注意到(5)、(6)两式, 即得

$$\mu = -2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2}\right). \quad (8)$$

将(8)式代入(1)、(2)、(3), 得

$$\begin{cases} \left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} - \lambda\right)x - \frac{\cos\alpha\cos\beta}{b^2}y - \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}z = 0, \\ -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}x + \left(\frac{\sin^2\beta}{b^2} - \lambda\right)y - \frac{\cos\beta\cos\gamma}{c^2}z = 0, \\ -\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{a^2}x - \frac{\cos\beta\cos\gamma}{b^2}y + \left(\frac{\sin^2\gamma}{c^2} - \lambda\right)z = 0. \end{cases} \quad (9)$$

要 $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$ 为方程组(9)的非零解, 必须有

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha - a^2\lambda & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta & \sin^2\beta - b^2\lambda & -\cos\beta\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & \sin^2\gamma - c^2\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

展开计算可得

$$\lambda \left[\lambda^2 - \left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} + \frac{\sin^2\gamma}{c^2} \right) \lambda + \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2} + \frac{\cos^2\beta}{c^2a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2} \right) \right] = 0. \quad (10)$$

由(7)知 $\lambda \neq 0$, 且不难验证(10)式在消去 λ 后得到

的二次方程有两个不等的实根 $\lambda_1 < \lambda_2$.

固定 $\lambda = \lambda_1$, 代入方程组(9), 可得到关于 (x, y, z) 有一个自由度的一个解系, 再代入方程(4), 可得对应于 $\lambda = \lambda_1$ 的两个静止点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$. 由(7)知, 对应的 $u(P_1) = u(P_2) = \lambda_1$. 同理可求得对应于 $\lambda = \lambda_2$ 的两个静止点 $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 和 $P_4(x_4, y_4, z_4)$, 且有 $u(P_3) = u(P_4) = \lambda_2$.

P_1, P_2, P_3, P_4 为满足方程组(1)~(5)的一切解所对应的点. 类似前面各题的讨论可知, 函数 u 在点 P_1 及 P_2 取得极小值 λ_1 , 而在点 P_3 及 P_4 取得极大值 λ_2 .

3666† $u = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$, 若 $Ax + By + Cz = 0, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \frac{\xi}{\cos \alpha} = \frac{\eta}{\cos \beta} = \frac{\zeta}{\cos \gamma}$,

其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

解 设 $F(x, y, z) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 + \lambda(Ax + By + Cz) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$.

记 $\xi = \rho \cos \alpha, \eta = \rho \cos \beta, \zeta = \rho \cos \gamma, \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - \rho \cos \alpha) + \lambda A + 2\mu x = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - \rho \cos \beta) + \lambda B + 2\mu y = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - \rho \cos \gamma) + \lambda C + 2\mu z = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. & (6) \end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 A 、 B 、 C , 然后相加, 并注意到(5)式, 即得

$$-2\rho(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) + \lambda(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

$$\lambda = \frac{2\rho(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)}{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (7)$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x 、 y 、 z , 然后相加, 并注意到(4)式和(5)式, 即得

$$2(1+\mu)R^2 = 2\rho(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma). \quad (8)$$

又将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$, 然后相加, 并注意到(6)式, 即得

$$\begin{aligned} 2(1+\mu)(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) \\ = 2\rho - \lambda(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) \\ = 2\rho \left[1 - \frac{(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

由(8)、(9)可得

$$\begin{aligned} (1+\mu)^2 R^2 &= (1+\mu)\rho(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) \\ &= \rho^2 \left[1 - \frac{(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2} \right]. \end{aligned}$$

即

$$1+\mu = \pm \frac{\rho}{R} \sqrt{1 - \frac{(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (10)$$

由(1)、(2)、(3)可得

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\rho\cos\alpha - \lambda A}{2(1+\mu)}, \quad y = \frac{2\rho\cos\beta - \lambda B}{2(1+\mu)}, \\ z &= \frac{2\rho\cos\gamma - \lambda C}{2(1+\mu)}. \end{aligned}$$

把(7)式和(10)式代入上式, 即可得 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 其中 P_1 对应于(10)式取正号, 而 P_2 对应于(10)式取负号, 下面求 $u(P_1)$ 和 $u(P_2)$. 由(9)、(10)可得

$$\begin{aligned} & x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \\ &= \pm R \sqrt{1 - \frac{(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} u(P_1) &= (x_1 - \rho \cos \alpha)^2 + (y_1 - \rho \cos \beta)^2 \\ &\quad + (z_1 - \rho \cos \gamma)^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2\rho(x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta \\ &\quad + z_1 \cos \gamma) + \rho^2 \\ &= R^2 + \rho^2 - 2\rho R \sqrt{1 - \frac{(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} u(P_2) &= R^2 + \rho^2 + 2\rho R \\ &\quad \cdot \sqrt{1 - \frac{(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

类似以前各题的讨论可知: $u(P_2)$ 为极大值, $u(P_1)$ 为极小值.

3667. $u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, 若 $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1$

($a_i > 0$; $i = 1, 2, \cdots, n$).

解 设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \lambda \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} - 1 \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i + \frac{\lambda}{a_i} = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} = 1 \end{cases}$$

可得静止点 $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中

$$x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

由于 $d^2u = d^2F = 2 \sum_{i=1}^n dx_i^2 > 0$ (它不受约束条件的

限制), 故当 $x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1}$ 时, 函数 u 取得极小值

$$u = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1} \right]^2 = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1}.$$

3668. $u = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$ ($p > 1$), 若 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ ($a > 0$).

解 设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = px_i^{p-1} + \lambda = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n x_i = a \end{cases}$$

得 $x_i = \frac{a}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 由于

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} p(p-1)x_i^{p-2}, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

故当 $x_i = \frac{a}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 时,

$$d^2 F = p(p-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{n}\right)^{p-2} dx_i^2 \geq 0 \quad \left(\text{当 } \sum_{i=1}^n dx_i^2 \neq 0 \text{ 时}\right),$$

它不受约束条件的限制, 故函数 u 取得极小值 $u = \frac{a^p}{n^{p-1}}$.

这里应该指出的是, 对于一般的实数 p , 应限定 $x_i \geq 0$.

3669. $u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n}$, 若 $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = 1$ ($\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0; i=1, 2, \dots, n$)*).

解 设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n} + \lambda(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n - 1)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\alpha_i}{x_i^2} + \lambda \beta_i = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n \beta_i x_i = 1 \end{cases}$$

得 $x_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right)^{-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 由于

$$d^2 F = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i^3} dx_i^2 \geq 0,$$

* 编者注: 本题应加条件 $x_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

故当 $x_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i \beta_i} \right)^{-1}$ 时, 函数 u 取得极小值

$$u = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i \beta_i} \right)^2.$$

3670. $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, 若 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$ ($a > 0$, $\alpha_i > 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$)*).

解 设 $w = \ln u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i$,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= w - \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n x_i - a \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \ln x_i - \frac{x_i}{\lambda} \right) + \frac{a}{\lambda}. \end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i} - \frac{1}{\lambda} = 0 & (i = 1, 2, \cdots, n), \\ \sum_{i=1}^n x_i = a \end{cases}$$

得 $x_i = \frac{a \alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$). 由于

$$d^2 w = - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i^2} dx_i^2 < 0 \quad \left(\text{当 } \sum_{i=1}^n dx_i^2 \neq 0 \text{ 时} \right)$$

不论 dx_i 之间有什么约束条件恒成立, 故函数 w 当

$x_i = \frac{a \alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 时取得极大值,

* 编者注: 本题应加条件 $x_i > 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$).

即函数 u 当 $x_i = \frac{\alpha \alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ 时取得极大值

$$u = \left(\frac{\alpha}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}.$$

3671. 若 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$, 求二次型 $u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 的极值.

解 设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = u - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_1} = (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, & (1) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, & (2) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, & (n) \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1. & (n+1) \end{cases}$$

前 n 个方程要有非零解, 必须矩阵 (a_{ij}) 的特征方程 $|A - \lambda E| = 0$ 有解, 其中 A 为以 a_{ij} 为元素的实对称矩阵, E 为单位矩阵. 由线性代数中关于欧氏空间的理论知, 此特征方程必有 n 个实根, 即有 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 满足 $|A - \lambda E| = 0$. 对于任一根 λ_k , 代入方程 (1)~(n), 可求得 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的一个解空间, 解空间的维数, 等于 λ_k 的重数. 解空间中的单位元素即方程组 (1)~(n+1) 的根. 当 λ_k 是单重根时, 解空

间是一维的, 单位元素只有两个. 当 λ_k 是多重根时, 对应 λ_k 的单位元素就有无穷多个了.

对于 λ_k 的解 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 显然满足方程组 (1)~(n+1). 因此, 有 $\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i = \lambda_k x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). 从而得

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_k x_i^2 = \lambda_k \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_k. \end{aligned}$$

由于函数 u 在 n 维球面 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ 上连续, 故必取得最大值和最小值. 于是, 对应于 λ_1 和 λ_n 的解, 分别使函数 u 取得最大值 λ_1 和最小值 λ_n , 因而也是 u 的极大值和极小值, 或是 u 的弱极大值和弱极小值, 视 λ_1 和 λ_n 的重数而定 (多重时为弱极值). 由线性代数中把 d^2F 化标准型的方法, 可证: 对于不等于 λ_1 和 λ_n 的 λ_k , 二次型不取得极值.

3672. 若 $n \geq 1$ 及 $x \geq 0$, $y \geq 0$, 证明不等式

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n.$$

证 考虑函数 $z = \frac{x^n + y^n}{2}$ 在条件 $x+y=a$ ($a>0, x \geq 0, y \geq 0$) 下的极值问题. 设

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - a).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{n}{2} x^{n-1} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{n}{2} y^{n-1} + \lambda = 0, \\ x + y = a \end{cases}$$

可得 $x = y = \frac{a}{2}$.

将点 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ 与边界点 $(0, a)$ 、 $(a, 0)$ 的函数值进行比较 (注意到 $n \geq 1$):

$$z(0, a) = z(a, 0) = \frac{a^n}{2} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n = z\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \quad (n \geq 1),$$

即知函数 z 当 $x + y = a$ 时的最小值为 $\left(\frac{a}{2}\right)^n$, 从而有

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n$$

(当 $x + y = a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ 时). (1)

下面我们证明

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n \quad (\text{当 } x \geq 0, y \geq 0 \text{ 时}). \quad (2)$$

当 $x = y = 0$ 时, 不等式 (2) 显然成立; 当 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 且 x, y 不同时为零时, 令 $x + y = a$, 则 $a > 0$. 于是, 由不等式 (1) 即得

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n = \left(\frac{x + y}{2}\right)^n.$$

由此可知, 不等式 (2) 成立. 证毕.

3673. 证明和尔塞不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{k}} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{k'}} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

($a_i \geq 0$, $x_i \geq 0$, $i=1, 2, \dots, n$; $k > 1$, $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$).

证 我们首先证明函数

$$u = \left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{k}} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{k'}} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

在条件 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$ ($A > 0$) 下的最小值是 A . 为此,

对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, 显然有

$$(a_1^{\frac{1}{k}})^{\frac{1}{k}} (x_1^{\frac{1}{k'}})^{\frac{1}{k'}} = a_1 x_1 = A.$$

设当 $n=m$ 时, 命题为真, 故对任意 m 个数 a_1 ,

a_2, \dots, a_m ($a_i \geq 0$), 当 $\sum_{i=1}^m a_i x_i = A$ ($x_1 \geq 0, \dots, x_m \geq 0$) 时, 必有

$$A \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^{\frac{1}{k}} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^m x_i^{\frac{1}{k'}} \right)^{\frac{1}{k'}}.$$

我们证明当 $n=m+1$ 时命题也真. 设 $\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A$,

$u = a^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{\frac{1}{k'}} \right)^{\frac{1}{k'}}$, 其中 $a = \sum_{i=1}^{m+1} a_i^{\frac{1}{k}}$, 求 u 的最小值. 令

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) &= u(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \\ &\quad - \lambda \left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i - A \right). \end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{a_i^{\frac{1}{k}}}{k'} \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}-1} (k' x_i^{k'-1}) - \lambda a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, m+1),$$

可得

$$\frac{x_i^{k'-1}}{a_i} = \frac{\lambda}{a_i^{\frac{1}{k}}} \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k}} = \mu^{k'-1} \quad (i=1, 2, \dots, m+1).$$

(这里引入了记号 μ)，即

$$x_i = (a_i \mu^{k'-1})^{\frac{1}{k'-1}} = a_i^{\frac{1}{k'-1}} \mu = \mu a_i^{k-1},$$

从而有

$$\mu \sum_{i=1}^{m+1} a_i a_i^{k-1} = \mu \sum_{i=1}^{m+1} a_i^k = \mu a = A,$$

$$\mu = \frac{A}{a}.$$

于是，解得满足极值必要条件的唯一解

$$x_i^0 = \frac{A}{a} a_i^{k-1} \quad (i=1, 2, \dots, m+1).$$

对应的函数值为

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m+1}^0) = a^{\frac{1}{k}} \left[\sum_{i=1}^{m+1} \left(\frac{A}{a} a_i^{k-1} \right)^{k'} \right]^{\frac{1}{k'}} \\ &= a^{\frac{1}{k}} \frac{A}{a} \left[\sum_{i=1}^{m+1} a_i^{(k-1)k'} \right]^{\frac{1}{k'}} = a^{\frac{1}{k}-1} A \left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i^k \right)^{\frac{1}{k'}} \\ &= A a^{\frac{1}{k}-1} a^{\frac{1}{k'}} = A. \end{aligned}$$

所研究的区域 $\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A, x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, m+1)$

是 $m+1$ 维空间中一个 m 维平面在第一卦限的部份，其边界由 $m+1$ 个 $m-1$ 维平面(之一部分)所组成：

$x_i = 0, \sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A (a_i \geq 0, x_i \geq 0; i=1, 2, \dots, m+1)$ 。在这些边界面上，求

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \\ &= u(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{m+1}) \\ &= a^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j^{k'} + \sum_{j=i+1}^{m+1} x_j^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \end{aligned}$$

的最小值变为求 m 个变量的最小值。以估计 $x_{m+1}=0$,

$\sum_{i=1}^m a_i x_i = A$ 的最小值为例。根据归纳法假设，注意到

$$a = \sum_{i=1}^{m+1} a_i^k \geq \sum_{i=1}^m a_i^k, \text{ 即有}$$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_m, 0) &= a^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^m x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^m a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum_{i=1}^m x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \geq \sum_{i=1}^m a_i x_i = A. \end{aligned}$$

因此， u 在边界面上的最小值不小于 A 。由此可知，

u 在区域上的最小值为 $u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m+1}^0) = A$ ，故命题当 $n=m+1$ 时为真。于是，由归纳法可知

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \geq A,$$

当 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A, x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 时。(1)

下面我们证明和尔塞不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \quad (a_i \geq 0, x_i \geq 0) \quad (2)$$

成立. 事实上, 若 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, 则(2)式显然成立;

若 $\sum_{i=1}^n a_i x_i > 0$, 令 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$, 则 $A > 0$. 于是, 根

$$\text{据不等式(1)知} \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \geq A = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

故不等式(2)成立. 证毕.

注. 和尔塞(Hölder)不等式是一个重要而常用的不等式, 而且还可推广到一般的形式, 证明方法也很多.

例如, 可参看 G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya 合著的名著 "Inequalities" (Second Edition, 1952), Chapter I, 2.7—2.8.

3674. 对于 n 阶行列式 $A = |a_{ij}|$ 证明哈达马不等式

$$A^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

证 证法一

为区别起见, 以下用 A 表矩阵 (a_{ij}) , $|A|$ 表行列式 $|a_{ij}|$. 考虑函数 $u = |A| = |a_{ij}|$ 在条件 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 下的极值问题. 其中 $S_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

由于上述 n 个条件限制下的 n^2 元点集是有界闭集, 故连续函数 u 必在其上取得最大值和最小值. 下面我们求函数 u 满足条件极值的必要条件. 设

$$F = u - \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - S_i \right).$$

由于函数 u 是多项式. 当按第 i 行展开时, 有

$$u = |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i a_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

得 $a_{ij} = \frac{A_{ij}}{2\lambda_i}$. 当 $i \neq k$ 时, 有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij} A_{kj}}{2\lambda_i} = \frac{1}{2\lambda_i} \sum_{j=1}^n A_{ij} a_{kj} = 0,$$

故当函数 u 满足极值的必要条件时, 行列式不同的两行所对应的向量必直交. 若以 A' 表示 A 的转置矩阵, 则由行列式的乘法得

$$u^2 = |A'| \cdot |A| = \begin{vmatrix} S_1 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n S_i.$$

因此, 函数 u 满足极值的必要条件时, 必有

$$u = \pm \sqrt{\prod_{i=1}^n S_i}.$$

由于显然函数 u 在条件 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 下不恒为常数, 故

$$u_{max} = \sqrt{\prod_{i=1}^n S_i}, \quad u_{min} = -\sqrt{\prod_{i=1}^n S_i}.$$

从而

$$|A|^2 \leq \prod_{i=1}^n S_i,$$

$$\text{当 } \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \text{ 时,} \quad (1)$$

下面我们证明

$$|A|^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right). \quad (2)$$

若至少有一个 i , 使 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0$, 则 $a_{ij} = 0$ ($j=1, 2, \dots, n$). 从而 $|A| = 0$, 于是不等式(2)显然成立.

若对一切 i ($i=1, 2, \dots, n$), 都有 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \neq 0$. 令

$S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$, 则 $S_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$). 于是, 根据不等式(1)即得

$$|A|^2 \leq \prod_{i=1}^n S_i = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right),$$

故不等式(2)成立. 证毕.

证法二

如将原题归一化, 则也可获证. 设

$$\overline{a_{ij}} = \frac{a_{ij}}{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (i, j=1, 2, \dots, n),$$

则有

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

从而原命题就可转化为证明不等式

$$|A| \leq 1,$$

其中 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1 (i=1, 2, \dots, n)$, $A = (a_{ij})$, $|A| = |a_{ij}|$.

设 $F = |A| + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - 1 \right)$. 解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = A_{ij} + 2\lambda_i a_{ij} = 0,$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 ($i, j=1, 2, \dots, n$). 于上式两端乘以 a_{ij} , 并对 $j=1, 2, \dots, n$ 求和, 即得

$$|A| + 2\lambda_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

从而有

$$\lambda_i = -\frac{|A|}{2} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

也即

$$A_{ij} = a_{ij} |A| \quad (i, j=1, 2, \dots, n),$$

故得

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}|A| & \dots & a_{1n}|A| \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}|A| & \dots & a_{nn}|A| \end{vmatrix},$$

上式左端的行列式叫做 $|A|$ 的附属行列式, 记为 $|A^*|$. 由线性代数知识可知, 当 $|A| = 0$ 时, $|A^*| = 0$. 当 $|A|$

$$\neq 0 \text{ 时, } |A||A^*| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n, \text{ 故有}$$

$|A^*| = |A|^{n-1}$. 于是,

$$|A|^{n-1} = |A|^{n+1}.$$

由于 $|A|$ 的极值必须满足上式, 故不难推知 $|A|_{\max} =$

1, $|A|_{\min} = -1$. 从而得知, 当 $\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = 1$ ($i=1,$

2, ..., n) 时, 恒有

$$|A|^2 \leq 1 \text{ 或 } |A| \leq 1.$$

求下列函数在指定域内的上确界(sup)和下确界(inf):

3675. $z = x - 2y - 3$, 若 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x + y \leq 1$.

解 以 D 表区域 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x + y \leq 1$, 它是一个有界闭区域 (为一闭三角形), 故连续函数 z 在其上必有最大值和最小值. 由于 z 是 x, y 的线性函数, 故不存在静止点, 因此, 最大值与最小值都在 D 的边界上达到. D 的边界为三条直线段: $y = 0$ ($0 \leq x \leq 1$), $x = 0$ ($0 \leq y \leq 1$), $x + y = 1$ ($0 \leq x \leq 1$); 在其上 z 分别变成一元函数: $z = x - 3$ ($0 \leq x \leq 1$), $z = -2y - 3$ ($0 \leq y \leq 1$), $z = 3x - 5$ ($0 \leq x \leq 1$). 由于这些函数都是一元线性函数, 故也无静止点, 其最大值与最小值必在此三线段的端点 (即点 $(0, 0)$, 点 $(1, 0)$, 点 $(0, 1)$) 达到. 由此可知, z 在 D 上的最大值与最小值必在此三点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 中达到.

由于

$$z(0, 0) = -3, \quad z(1, 0) = -2, \quad z(0, 1) = -5,$$

故

$$\sup z = -2, \quad \inf z = -5.$$

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, 若 $x^2 + y^2 \leq 25$.

解 考虑函数 z 在区域 $x^2 + y^2 \leq 25$ 内的静止点:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

在区域内无解, 故连续函数 z 的最大值与最小值必在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上达到.

考虑函数 z 在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上的条件极值. 设 $F(x, y) = z - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 12 - 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 16 - 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

可得静止点 $P_1(3, -4)$ 及 $P_2(-3, 4)$. 由于

$$z(3, -4) = -75, \quad z(-3, 4) = 125,$$

故得

$$\sup z = 125, \quad \inf z = -75.$$

3677. $z = x^2 - xy + y^2$, 若 $|x| + |y| \leq 1$.

解 求函数 z 在区域 $|x| + |y| \leq 1$ 内的静止点:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x = 0, \end{cases}$$

解得静止点 $P_0(0, 0)$. 相应地, $z(P_0) = 0$.

再在边界: $x \geq 0, y \geq 0, x+y=1$ 上求静止点. 设 $F_1 = x^2 - xy + y^2 - \lambda(x+y-1)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x - y - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y - x - \lambda = 0, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

得静止点 $P_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 相应地, $z(P_1) = \frac{1}{4}$.

同法可在另外三条边界线: $x \geq 0, y \leq 0, x-y=1$ 上; $x \leq 0, y \geq 0, x-y=-1$ 上; $x \leq 0, y \leq 0, x+y=-1$ 上分别求得静止点 $P_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_3(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 及 $P_4(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. 相应地, $z(P_2) = z(P_3) = \frac{3}{4}, z(P_4) = \frac{1}{4}$.

最后, 在上述四条边界线的端点 $P_5(1, 0), P_6(0, 1), P_7(-1, 0)$ 及 $P_8(0, -1)$ 上求得函数值:

$$z(P_5) = z(P_6) = z(P_7) = z(P_8) = 1.$$

比较 $z(P_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, 8$), 即得

$$\sup z = 1, \inf z = 0.$$

3678. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

解 容易求得函数 u 在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$ 内的静止点为 $P_0(0, 0, 0)$, 而在边界 $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ 上的静止点为 $P_1(10, 0, 0), P_2(-10, 0, 0), P_3(0, 10, 0),$

$P_4(0, -10, 0)$, $P_5(0, 0, 10)$ 及 $P_6(0, 0, -10)$. 相应地, $u(P_0) = 0$, $u(P_1) = u(P_2) = 100$, $u(P_3) = u(P_4) = 200$, $u(P_5) = u(P_6) = 300$. 于是,

$$\sup u = 300, \quad \inf u = 0.$$

3679. $u = x + y + z$, 若 $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

解 所讨论的立体区域由曲面 $x^2 + y^2 = z$ ($0 \leq z \leq 1$) 和平面 $z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$ 所围成, 两个曲面的交线为 $x^2 + y^2 = z = 1$.

显见在立体区域内部无静止点. 在边界面 $z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$ 的内部, $u(x, y, 1) = x + y + 1$ 也无静止点. 在边界面 $x^2 + y^2 = z$ ($0 \leq z \leq 1$) 上, 有

$$u = x + y + x^2 + y^2 \quad (x^2 + y^2 \leq 1).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + 2y = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 相应地, $u(P_1) = -\frac{1}{2}$.

在边界线 $x^2 + y^2 = z = 1$ 上, 设

$$F(x, y) = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

得静止点 $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ 及 $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. 相应地, $u(P_2)=1+\sqrt{2}$, $u(P_3)=1-\sqrt{2}$. 于是,

$$\sup u = 1 + \sqrt{2}, \inf u = -\frac{1}{2}.$$

3680. 求函数

$$u = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}$$

在域 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 内的下确界 (inf) 与上确界 (sup).

解 函数 u 在区域 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 上是连续函数, 因此, 把区域扩大包括边界时, 上、下确界不变, 下面就扩大后的区域加以讨论.

显然当 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 时 $u \geq 0$, 且 $u(0, 0, 0) = 0$, 故 $\inf u = 0$.

在区域内部, 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-(x+2y+3z)} [1 - (x + y + z)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-(x+2y+3z)} [1 - 2(x + y + z)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{-(x+2y+3z)} [1 - 3(x + y + z)],$$

而 $e^{-(x+2y+3z)} \neq 0$, 故函数 u 在域内无静止点.

又因

$$\begin{aligned} u &= (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)} = (x + y + z)e^{-(x+y+z)} \\ &\quad \cdot e^{-(y+2z)} \leq (x + y + z)e^{-(x+y+z)} \rightarrow 0 \quad [(x + y + z) \rightarrow +\infty], \end{aligned}$$

故函数 u 的最大值必在有限的边界上达到. 考虑界面:

$$x=0; u(0, y, z) = (y+z)e^{-(2y+3z)}, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$y=0; u(x, 0, z) = (x+z)e^{-(x+3z)}, x \geq 0, z \geq 0.$$

$$z=0; u(x, y, 0) = (x+y)e^{-(x+2y)}, x \geq 0, y \geq 0.$$

同样可证明, 这些界面上无静止点.

最后考虑边界线: $x=0, y=0, z \geq 0$,

$$u(0, 0, z) = ze^{-3z}$$

可解得静止点 $P_1(0, 0, \frac{1}{3})$. 相应地, $u(P_1) = \frac{1}{3}e^{-1}$.

同法在边界线: $x=0, z=0, y \geq 0$ 上可解得静止

点 $P_2(0, \frac{1}{2}, 0)$; 在边界线: $y=0, z=0, x \geq 0$

上可解得静止点 $P_3(1, 0, 0)$. 相应地, $u(P_2) = \frac{1}{2}e^{-1}$,

$u(P_3) = e^{-1}$. 至于边界线的一端为原点, 另一端伸向无穷远, 均已讨论过. 于是,

$$\sup u = e^{-1}.$$

3681. 证明: 函数 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值.

证 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -(1 + e^y) \sin x = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^y (\cos x - 1 - y) = 0 \end{cases}$$

得 $x = k\pi, y = (-1)^k - 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(1+e^y)\cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y(\cos x - 2 - y),$$

故在点 $(2m\pi, 0)$ ($m=0, \pm 1, \dots$), $A=-2$, $B=0$, $C=-1$ 及 $AC-B^2=2>0$, 此时函数 z 取得极大值; 而在点 $((2m+1)\pi, -2)$ ($m=0, \pm 1, \dots$), $A=1+e^{-2}$, $B=0$, $C=-e^{-2}$ 及 $AC-B^2=-e^{-2}-e^{-4}<0$, 此时函数 z 无极值.

3682. 函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 有极小值的充分条件是否为此函数在沿着过 M_0 点的每一条直线上有极小值呢?

解 研究函数

$$f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2).$$

对于每一条通过原点的直线: $y=kx$ ($-\infty < x < +\infty$) 均有

$$\begin{aligned} f(x, kx) &= (x - k^2 x^2)(2x - k^2 x^2) \\ &= x^2(1 - k^2 x)(2 - k^2 x), \end{aligned}$$

当 $0 < |x| < \frac{1}{k^2}$ 时, $f(x, kx) > 0$. 但是 $f(0, 0) = 0$, 因此, 函数 $f(x, y)$ 在直线 $y=kx$ 上在原点取得极小值零.

对于通过原点的另一条直线: $x=0$, 有 $f(0, y) = y^4$, 故在原点也取得极小值零.

因此, 函数 $f(x, y)$ 在一切通过原点的直线上均有极小值. 但是,

$$f(a, \sqrt{1.5a}) = -0.25a^2 < 0 \quad (a > 0),$$

因此, 函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不取得极小值.

此例说明: 尽管 $f(x, y)$ 在沿着过点 M_0 的每一条直线上在 M_0 均有极小值, 但却不能保证 $f(x, y)$ 作为二元函数在点 M_0 一定有极小值.

3683. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得它们的倒数的和为最小.

解 按题设, 我们应求函数 $u = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$ 在条件 $a = \prod_{i=1}^n x_i$

或 $\ln a = \sum_{i=1}^n \ln x_i$ ($a > 0, x_i > 0$) 下的极值. 设 $F(x_1,$

$x_2, \dots, x_n) = u + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i - \ln a \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{1}{x_i^2} + \frac{\lambda}{x_i} = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ a = \prod_{i=1}^n x_i \end{cases}$$

可得 $x_i = \frac{1}{\lambda}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 从而解得

$$x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_n^0 = a^{\frac{1}{n}}, u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = na^{-\frac{1}{n}}.$$

当点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 趋向于边界时, 至少有一个 $x_i \rightarrow 0$, 即 $\frac{1}{x_i} \rightarrow +\infty$, 而 $u \geq \frac{1}{x_i}$, 故 $u \rightarrow +\infty$.

因此, 函数 u 必在区域内部取得最小值. 于是, 将正数 a 分为 n 个相等的正的因数 $a^{\frac{1}{n}}$ 时, 其倒数和 $na^{-\frac{1}{n}}$ 最小.

3684. 分解已知正数 a 为 n 个相加数, 使得它们的平方和为最小.

解 考虑函数 $u = \sum_{i=1}^n x_i^2$ 在条件 $a = \sum_{i=1}^n x_i$ ($a > 0$) 下的极值. 设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = u + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - a \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i + \lambda = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n x_i = a \end{cases}$$

得 $x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_n^0 = \frac{a}{n}$, $u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \frac{a^2}{n}$.

当 n 个相加数中有若干个相加数 $\rightarrow \pm \infty$ 时, 平方和 $\rightarrow +\infty$. 因此, 函数 u 必在有限区域内取得最小值. 于是, 将正数 a 分解为 n 个相等的相加数 $\frac{a}{n}$ 时, 其平方和 $\frac{a^2}{n}$ 最小.

3685. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得它们的已知正乘幂的和为最小.

解 考虑函数 $u = \sum_{i=1}^n x_i^{a_i}$ ($a_i > 0$) 在条件 $\ln a = \sum_{i=1}^n \ln x_i$ ($a > 0, x_i > 0$) 下的极值. 设 $F = u - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i - \ln a \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = a_i x_i^{a_i-1} - \frac{\lambda}{x_i} = 0 & (i=1, 2, \dots, n), (1) \\ \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln a. & (2) \end{cases}$$

由 (1) 得 $x_i = \left(\frac{\lambda}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}$. 代入 (2), 得

$$\ln a + \sum_{i=1}^n \frac{\ln \alpha_i}{\alpha_i} = \ln \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}.$$

令 $\beta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}$, 则有

$$\lambda = a^{\frac{1}{\beta}} \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{1}{\beta \alpha_i}} = \left(a \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$x_i^0 = \frac{\left(a \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}}}}{(a_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{\alpha_i} = \beta \lambda = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \right) \left(a \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}}}.$$

显然, 函数 u 在区域内部达到最小值. 于是, 所求得的 u 即为最小值.

3686. 已知在平面上的 n 个质点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, \dots , $P_n(x_n, y_n)$, 其质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n .

$P(x, y)$ 点在怎样的位置, 这一体系对于此点的转动惯量为最小?

解 设 $f(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$, 解方

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \sum_{i=1}^n m_i (x - x_i) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \sum_{i=1}^n m_i (y - y_i) = 0 \end{cases}$$

得

$$x_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i,$$

其中 $M = \sum_{i=1}^n m_i$.

当 $x \rightarrow \infty$ 或 $y \rightarrow \infty$ 时, 显然 $f \rightarrow +\infty$. 因此, 点 $P(x_0, y_0)$ 即为所求.

3687. 已知容积为 V 的开顶长方浴盆, 当其尺寸怎样时, 有最小的表面积?

解 设浴盆长、宽、高分别为 x 、 y 、 h , 则考虑函数 $S = 2(x+y)h + xy$ 在条件 $V = xyh$ ($x > 0, y > 0, h > 0$) 下的极值.

设 $F(x, y, h) = S - \lambda(xyh - V)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y + 2h - \lambda y h = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2h - \lambda x h = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h} = 2(x+y) - \lambda xy = 0, & (3) \end{cases}$$

$$xyh = V.$$

(1), (2), (3) 可改写为

$$\frac{1}{h} + \frac{2}{y} = \lambda = \frac{1}{h} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y},$$

故有

$$x_0 = y_0 = 2h_0 = \sqrt[3]{2V}, \quad h_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

从实际问题的常识可以断定,一定在某一处达到最小.

因此,当长宽均为 $\sqrt[3]{2V}$,高为 $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ 时,浴盆的表面积最小,且最小表面积为 $S = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

从数学上来考虑,应讨论 x, y, h 趋于边界的情况.当 x, y, h 中有任一个趋于零,例如, $h \rightarrow +0$,则由 $V = xyh$ 即可断定 $xy \rightarrow +\infty$.但是, $S \geq xy$,故 $S \rightarrow +\infty$.当 x, y, h 中有任一个趋于 $+\infty$ 时,一定引起至少有另一个趋于零.重复上面的讨论可知 $S \rightarrow +\infty$.因此,连续函数 S 必在区域内部取得最小值.

3688. 横断面为半圆形的圆柱形的张口浴盆,其表面积等于 S ,当其尺寸怎样时,此盆有最大的容积?

解 设圆柱半径为 r ,高为 h ,则考虑函数 $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$ 在条件 $S = \pi(r^2 + rh)$ ($r > 0, h > 0$)下的极值.为简单起见,忽略系数 $\frac{1}{2}\pi$.设 $F = r^2 h - \lambda(r^2 + rh - \frac{S}{\pi})$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} = 2rh - \lambda(2r + h) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial h} = r^2 - \lambda r = 0, \\ r^2 + rh = \frac{S}{\pi} \end{cases}$$

得

$$r_0 = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}, \quad h_0 = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}},$$

$$\text{从而有 } V_0 = \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0 = \sqrt{\frac{S^3}{27\pi^3}}.$$

由实际情况知, V 一定达到最大体积. 因此, 当 $h_0 = 2r_0 = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ 时, 体积 $V_0 = \sqrt{\frac{S^3}{27\pi^3}}$ 最大.

从数学角度看, 由 $r^2 + rh = \frac{S}{\pi}$ 知 r^2 和 rh 恒有界.

当 $r \rightarrow +0$ 或 $h \rightarrow +0$ 时必有 $V \rightarrow 0$. 当 $h \rightarrow +\infty$ 时, 由 rh 有界可推出 $r \rightarrow +0$. 因而 $V \rightarrow 0$ (显然不可能 $r \rightarrow +\infty$). 于是, 体积 V 必在区域内部达到最大值.

3689. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求出一点, 这点到 n 个已知点 $M_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 距离的平方和为最小.

解 考虑函数 $u = \sum_{i=1}^n [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极值. 设 $F(x, y, z) = u - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2 \left[\sum_{i=1}^n (x-x_i) - \lambda x \right] = 2 \left[(n-\lambda)x - \sum_{i=1}^n x_i \right] \\ = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 2 \left[(n-\lambda)y - \sum_{i=1}^n y_i \right] = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = 2 \left[(n-\lambda)z - \sum_{i=1}^n z_i \right] = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

由 (1), (2), (3) 得

$$x = \frac{1}{n-\lambda} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y = \frac{1}{n-\lambda} \sum_{i=1}^n y_i, \quad z = \frac{1}{n-\lambda} \sum_{i=1}^n z_i,$$

代入 (4), 得

$$(n-\lambda)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)^2 = N^2$$

($N \geq 0$). 于是, 得

$$x' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i, \quad z' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i$$

及

$$x'' = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y'' = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i, \quad z'' = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i.$$

从而,

$$\begin{aligned} u(x', y', z') &= \sum_{i=1}^n \{ (x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2 + \\ &\quad (z' - z_i)^2 \} \\ &= n(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2x' \sum_{i=1}^n x_i - 2y' \sum_{i=1}^n y_i \\ &\quad - 2z' \sum_{i=1}^n z_i + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ &= n - \frac{2}{N} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)^2 \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ &= n - 2N + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned} u(x'', y'', z'') &= n + 2N + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ &\geq u(x', y', z'). \end{aligned}$$

由于函数 u 在闭球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上连续，故必取得最大值及最小值。于是，当 $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ 时， u 最小（同时也证明了当 $x = x''$, $y = y''$, $z = z''$ 时， u 最大）。

3690. 由直圆柱及以直圆锥作顶构成一个体。当已知体的全表面积等于 Q 时，求它的尺寸大小，使得体的体积为最大。

解 设圆柱部分的底半径为 R ，高为 h ；圆锥部分的母线与底面的夹角为 α ，则有 $\pi R^2 + 2\pi Rh + \frac{\pi R^2}{\cos \alpha} = Q$ （常数）（ $R > 0$, $h > 0$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ）。考虑函数 $V(\alpha, h, R) = \pi R^2 h + \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg} \alpha$ 在上述条件下的极值。设

$$F(\alpha, h, R) = 3R^2 h + R^3 \operatorname{tg} \alpha - \lambda \left(R^2 + 2Rh + \frac{R^2}{\cos \alpha} - \frac{Q}{\pi} \right).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{R^3}{\cos^2 \alpha} - \frac{\lambda R^2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h} = 3R^2 - 2R\lambda = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial R} = 6Rh + 3R^2 \operatorname{tg} \alpha - \left(2R + 2h + \frac{2R}{\cos \alpha} \right) \lambda = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^2 + 2Rh + \frac{R^2}{\cos \alpha} = \frac{Q}{\pi}. & (4) \end{cases}$$

由 (2) 得 $\lambda = \frac{3}{2}R$. 代入 (1), 得 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. 由于 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, 故由 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ 得 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. 代入 (3), 得

$$6Rh + \frac{6}{\sqrt{5}}R^2 = 3R^2 + 3Rh + \frac{9}{\sqrt{5}}R^2,$$

即

$$Rh = R^2 + \frac{R^2}{\sqrt{5}} \text{ 或 } h = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)R.$$

代入 (4), 得

$$R^2 + \left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)R^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}R^2 = \frac{Q}{\pi}.$$

于是,

$$R = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4} \sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

相应地, 有

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^3 \\ &= \left(1 + \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^2 \cdot R = \frac{3+\sqrt{5}}{3}\pi \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{4} \frac{Q}{\pi} \\ &\quad \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4} \sqrt{\frac{Q}{\pi}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12} \sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}. \end{aligned}$$

现在讨论边界情况. 由 (4) 知 R^2 , Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 均为正的可有界量.

(i) 当 $R \rightarrow +0$ 时, 由 Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 有界可知

$$V = \pi(Rh)R + \frac{\pi}{3}\left(\frac{R^2}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha \cdot R \rightarrow 0.$$

(ii) 当 $h \rightarrow +0$ (所研究的体退化为圆锥) 时, 需要求当圆锥全表面积 $\pi R^2 + \frac{\pi R^2}{\cos\alpha} = Q$ (常数) 时圆锥体积 $V = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha$ 的最大值. 用 l 表圆锥的斜

$$\text{高, 即 } l = \frac{R}{\cos\alpha}, R \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{R^2}{\cos^2\alpha} - R^2} = \sqrt{l^2 - R^2}.$$

于是, $l = \frac{Q - \pi R^2}{\pi R}$, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2}$, 故

$$V^2 = \frac{1}{9} QR^2(Q - 2\pi R^2) \quad (0 < R < \sqrt{\frac{Q}{\pi}}).$$

由此易知 V^2 (从而 V) 当 $R^2 = \frac{Q}{4\pi}$ (即 $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$) 时达最大值, 并且最大体积 $V_1 = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}$.

不难验证 $V_1 < V_0$.

(iii) 当 $h \rightarrow +\infty$ 时, 由 Rh 有界知 $R \rightarrow +0$. 由(i)知 $V \rightarrow 0$.

(iv) 当 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 时, 由 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 有界可知 $R \rightarrow +0$, 由(i)知 $V \rightarrow 0$.

(v) 当 $\alpha \rightarrow +0$ (所研究的体退化为圆柱) 时, 可以求得达到最大体积的尺寸为 $h = 2R$ 及 $Q = \sqrt[3]{54\pi} V_2^{\frac{2}{3}}$ (参看1563题), 即

$$V_2 = \sqrt{\frac{Q^3}{54\pi}} = \frac{\sqrt{6}}{18} \sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

不难证明 $V_2 \leq V_0$.

综上所述, 我们得到当 $R = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$,
 $\alpha = \arcsin \frac{2}{3}$ 时, 所研究的体积 V 达到最大值

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{12} \sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

3691. 一个体, 其体积等于 V , 形为直角平行直六面体, 上底及下底为正的四面体. 当角锥的侧面对它们的底成怎样的倾角, 体的全表面积为最小?

解 设长方体两底 (正方形) 边长为 a , 高为 h , 棱锥侧面与底面的夹角为 α , 则 $V = a^2 h + \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha$. 考虑函数 $S = 4ah + \frac{2a^2}{\cos \alpha}$ 在上述条件下的极值. 设 $F =$

$S - \lambda \left(a^2 h + \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha - V \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 4h + \frac{4a}{\cos \alpha} - 2\lambda ah - \lambda a^2 \operatorname{tg} \alpha = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h} = 4a - \lambda a^2 = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{2a^2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\lambda a^3}{3 \cos^2 \alpha} = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 h + \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha = V. & (4) \end{cases}$$

由 (2), (3) 可得 $\alpha = \arcsin \frac{2}{3}$. 同3690题进一步可求出 a 和 h .

类似3687题的讨论, 当 $a \rightarrow +0$, $a \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow +\infty$, $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 等情况均能证明 $S \rightarrow +\infty$. 对于边

界为 $\alpha = 0$ 及 $h = 0$ 这两种退化情况, 类似 3690 题, 可证明此时的全表面积比 $\alpha = \arcsin \frac{2}{3}$ 时的全表面积为大. 于是, 当 $\alpha = \arcsin \frac{2}{3}$ 时, 体的全表面积最小.

3692. 已知矩形的周长为 $2p$, 将它绕其一边旋转而构成一体积, 求所得体积为最大的那个矩形.

解 设矩形的边长为 x 及 y , 则考虑函数 $V = \pi y^2 x$ 在条件 $x + y = p$ 下的极值. 设 $F = V - \lambda(x + y - p)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \pi y^2 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2\pi xy - \lambda = 0, \\ x + y = p \end{cases}$$

得 $x = \frac{p}{3}$, $y = \frac{2p}{3}$.

由于在边界上, 一边为零, 一边为 p , 推出 $V = 0$.

于是, 当矩形的两边分别为 $\frac{p}{3}$ 及 $\frac{2p}{3}$ 时, 旋转体的体积最大.

3693. 已知三角形的周长为 $2p$, 求出这样的三角形, 当它绕着自己的一边旋转所构成的体积最大.

解 如图 6.43 所示, 以 AC 为轴旋转, 取参数: 高 h 及二角 α, β . 考虑函数

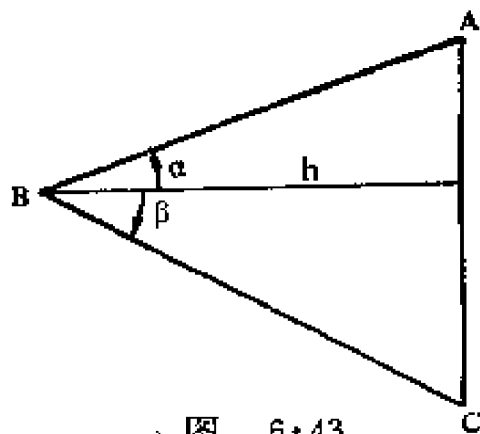


图 6.43

$$V = \frac{1}{3} \pi h^3 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

在条件 $\frac{h}{\cos \alpha} + \frac{h}{\cos \beta} + h(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = 2p$ 下的极值. 为

计算简单起见, 略去常数 $\frac{1}{3} \pi$. 设 $F = h^3 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - \lambda \left(\frac{h}{\cos \alpha} + \frac{h}{\cos \beta} + h \operatorname{tg} \alpha + h \operatorname{tg} \beta - 2p \right)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h} = 3h^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - \lambda \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \right) = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{h^3}{\cos^2 \alpha} - \lambda h \left(\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{h^3}{\cos^2 \beta} - \lambda h \left(\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \right) = 0, & (3) \\ h \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \right) = 2p. & (4) \end{cases}$$

由 (2) 及 (3) 得 $\alpha = \beta$ 及 $\lambda = \frac{h^2}{1 + \sin \alpha} = \frac{h^2}{1 + \sin \beta}$.

代入 (1) 式, 得 $\sin \alpha = \sin \beta = \frac{1}{3}$. 于是, $h \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{3 \cos \alpha}$, 代入 (4) 式, 即得 $\frac{h}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} p$. 从而, 得三边分别为

$$AB = BC = \frac{3}{4} p, \quad AC = 2h \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2}.$$

讨论边界情况. 当 $h \rightarrow +0$ 或 $h \rightarrow p$ 时, 显然有

$V \rightarrow 0$, 对于二角 α 及 β 必有大小限制: $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$,
 $-\alpha \leq \beta \leq \alpha$ (注意 α, β 的方向规定不同), 当 $\alpha \rightarrow +0$
 或 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 或 $\beta \rightarrow -\alpha$ 时, 同样均有 $V \rightarrow 0$. 于是,
 当三角形的三边长分别为 $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ 及 $\frac{3p}{4}$, 并绕长为 $\frac{p}{2}$
 的边旋转时, 所得的体积最大.

3694. 在半径为 R 的半球内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 不妨设此长方体的一个底面与半球所在的底面重合, 另外四个顶点在半球球面上, 且半球面在直角坐标系下的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0.$$

又设长方体的长、宽、高分别为 $2x$ 、 $2y$ 及 z ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). 考虑函数 $V = 4xyz$ 在上述条件下的极值. 设 $F = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz - 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy - 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

可得 $x = y = z = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

由于在边界上(即 $x \rightarrow +0$ 或 $y \rightarrow +0$ 或 $z \rightarrow +0$ 时)显然 $V \rightarrow 0$, 故当直角平行六面体的长、宽、高为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ 及 $\frac{R}{\sqrt{3}}$ 时, 其体积最大.

3695. 在已知的直圆锥内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 不妨设直圆锥的底面半径为 R , 高为 H , 且长方体的一个面与直圆锥的底面重合, 两个边长为 $2x$ 和 $2y$, 四个顶点在直圆锥面上, 高为 z . 过直圆锥的高和长方体底面的对角

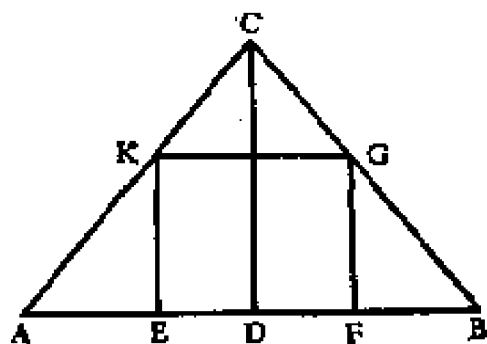


图 6.44

线作一截面, 如图6.44所示, 则 $CD = H$, $EK = FG = z$, $AD = R$, $DE = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(H - z)R = H \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ (R, H 为常数). 考虑函数 $V = 4xyz$ 在上述条件下的极值 ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). 为计算简单计, 略去常数4. 设

$$F = xyz - \lambda[H\sqrt{x^2 + y^2} - (H - z)R].$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz - \frac{\lambda H x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = xz - \frac{\lambda H y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = xy - \lambda R = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (H - z)R = H\sqrt{x^2 + y^2}. & (4) \end{cases}$$

由(1)、(2)得 $x=y$ ，代入(3)，得 $x=y=\sqrt{\lambda R}$ 。

又由(1)可得 $z = \frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}}$ 。将 x, y, z 代入(4)得

$$H - \frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}} = \frac{H}{R} \sqrt{2\lambda R},$$

解之得 $\lambda = \frac{2}{9}R$ ，从而有

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{3}R, z = \frac{1}{3}H, V = \frac{\sqrt{2}}{36} R^2 H.$$

显然，在所论区域的边界上（即 $x \rightarrow +0$ 或 $y \rightarrow +0$ 或 $z \rightarrow +0$ 时），有 $V \rightarrow 0$ ，故当直角平行六面体的高等于 $\frac{1}{3}$ 圆锥的高时，其体积最大。

3696. 在椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

内嵌入有最大体积的直角平行六面体。

解 此直角平行六面体的对称中心为原点，设其一个顶点为 (x, y, z) ，则按题意，我们应考虑函数 $V =$

$8xyz$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($x > 0, y > 0,$

$z > 0$) 下的极值。为计算简单计，略去常数 8。设 F

$= xyz - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$ ，解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz - 2\lambda \cdot \frac{x}{a^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2\lambda \cdot \frac{y}{b^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy - 2\lambda \cdot \frac{z}{c^2} = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

得 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$, 这时 $V = \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot abc > 0$.

现在讨论边界情况. 当 $x \rightarrow a = 0$, $y \rightarrow b = 0$, $z \rightarrow c = 0$ 中有任一个成立时, 则另两个变量必皆趋于零; 又若 x, y, z 中有一个趋于零时, 则体积 V 趋于零. 总之, 在边界上, 恒有 $V \rightarrow 0$. 于是, 具有最大体积的直角平行六面体的长、宽、高分别为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$.

3697. 直圆锥的母线 l 与底平面成倾角 α . 试在此直圆锥中嵌入具最大全表面积的直角平行六面体.

解 设圆锥的底半径为 R , 高为 H , 则有 $R = l \cos \alpha$, $H = l \sin \alpha$, $\frac{H}{R} = \operatorname{tg} \alpha$. 内接长方体的放置方法与 3695 题相同. 设底面的两边分别为 $2d \cos \theta$ 和 $2d \sin \theta$, 高为 h , 则 $0 < d < R$, $0 < h < H$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 且 h ,

d 由条件 $\frac{H-h}{H} = \frac{d}{R}$ 约束, 此条件可改写为

$$d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h = H = l \sin \alpha.$$

所求的全表面积为

$$S = 4(d^2 \sin 2\theta + dh \sin \theta + dh \cos \theta).$$

(i) 固定 d 和 h , 考虑 $S = S(\theta)$ 的变化情况. 由一元函数极值求法, 不难断定, 仅有 $S'(\frac{\pi}{4}) = 0$.

$S(\theta)$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 处达到最大值 $S = 4(d^2 + \sqrt{2}dh)$, 即底面为正方形时, S 才取得最大值. 因此, 原问题可化为在条件 $d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h = l \sin \alpha$ ($d > 0, h > 0$) 下, 求函数 $S = 4(d^2 + \sqrt{2}dh)$ 的极值.

(ii) 此问题的边界值: 当 $d \rightarrow +0$ (此时 $h \rightarrow H - 0$) 时, 显然 $S \rightarrow 0$; 而当 $h \rightarrow +0$ (这时 $d \rightarrow R - 0$) 时, $S \rightarrow 4R^2$. 在后一种情况下, 全表面积退化为上、下两个正方形面积之和.

(iii) 在区域内部, 设

$$F = 4(d^2 + \sqrt{2}dh) - \lambda(d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h - l \sin \alpha).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial d} = 8d + 4\sqrt{2}h - \lambda \operatorname{tg} \alpha = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h} = 4\sqrt{2}d - \lambda = 0, & (2) \end{cases}$$

$$d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h = l \sin \alpha. \quad (3)$$

由 (2) 得 $\lambda = 4\sqrt{2}d$, 代入 (1), 得

$$h = (\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2})d. \quad (4)$$

由 $h > 0$ 及 $d > 0$ 知, 当 $\operatorname{tg} \alpha \leq \sqrt{2}$ 时, 方程组在所研究的区域内无解. 此时, S 的最大值必在边界上达到, 即在 $h \rightarrow +0$ 时达到 $4R^2$. 当 $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{2}$ 时, 将 (4) 式代入 (3) 式, 可得

$$d = \frac{l \sin \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}, \quad h = l \sin \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}{2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}.$$

此时

$$S = 4(d^2 + \sqrt{2}dh) = \frac{2l^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1} = \frac{2R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1}.$$

由于 $(\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2})^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha - 2(\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1) > 0$, 故 $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1} > 2$. 从而, $S > 4R^2$, 即在该点的值大于边界上的值. 因此, 它为最大值. 于是, 当 $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{2}$, 长方体底面为正方形, 边长为 $2d \sin \frac{\pi}{4} = \frac{l \sin \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1}$, 高 $h = l \sin \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}{2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}$ 时, 全表面积为最大.

3698. 在椭圆抛物面 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z = c$ 的一段中嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 设长方体的长、宽、高为 $2x$, $2y$ 及 $h = c - z$, 则按题设考虑函数 $V = 4xyh = 4xy(c - z)$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ ($x > 0$, $y > 0$, $0 < z < c$) 下的极值. 为计算简单起见, 作 F 时略去常数 4. 令 $F = xy(c - z) - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} \right)$.

解方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = y(c-z) - 2\lambda \cdot \frac{x}{a^2} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial y} = x(c-z) - 2\lambda \cdot \frac{y}{b^2} = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial z} = -xy + \frac{\lambda}{c} = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}. \end{array} \right. \quad (4)$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x 、 y 、 $(c-z)$,

比较即得 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{c-z}{2c}$. 代入(4)式, 可得

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{c}{2}, \quad h = c - z = \frac{c}{2}.$$

由于边界上 V 趋于零, 故长方体的最大值必在区域内达到. 于是, 当平行六面体的尺寸为 a 、 b 及 $\frac{c}{2}$ 时, 其体积最大.

3699. 求点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的最短距离.

解 按题设, 我们应求函数

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

在条件 $Ax + By + Cz + D = 0$ 下的极值. 设

$$F(x, y, z) = r^2 + \lambda(Ax + By + Cz + D).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - x_0) + \lambda A = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - y_0) + \lambda B = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - z_0) + \lambda C = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0. & (4) \end{cases}$$

由 (1), (2), (3) 可得

$$x = x_0 - \frac{1}{2}\lambda A, \quad y = y_0 - \frac{1}{2}\lambda B, \quad z = z_0 - \frac{1}{2}\lambda C. \quad (5)$$

代入 (4), 得

$$\lambda = \frac{2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad (6)$$

将 (5), (6) 代入 $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ 中, 得

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

当 x, y, z 中有任一个趋于无穷时, r 趋于无穷. 因此, 在区域内 r 必取最小值.

于是, 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的最短距离为

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3700. 求空间二直线

$$\text{和} \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

之间的最短距离.

解 显然, 当两直线不平行时, 直线上一点趋于无穷远处时, 与另一直线上各点的距离, 都趋于无穷. 因此, 不平行两直线的最短距离必在有限处达到.

为了书写简洁, 我们采用向量的表达形式. 用

$$\vec{r}_1(t) = \vec{l}_1 t + \vec{r}_{10} \text{ 表示直线 } \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, (1)$$

$$\vec{r}_2(s) = \vec{l}_2 s + \vec{r}_{20} \text{ 表示直线 } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, (2)$$

其中 t, s 为参数, $\vec{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$, $\vec{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$,

$\vec{r}_{10} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{r}_{20} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

又记

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{10} - \vec{r}_{20} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}.$$

始端在直线 (2) 上, 终端在直线 (1) 上的向量为:

$$\begin{aligned} \vec{u}(t, s) &= (\vec{l}_1 t + \vec{r}_{10}) - (\vec{l}_2 s + \vec{r}_{20}) \\ &= \vec{l}_1 t - \vec{l}_2 s + \vec{r}_0. \end{aligned} \quad (3)$$

本题即求 $|\vec{u}(t, s)|$ 的最小值, 它必在有限的 t, s 上取得. 令

$$\begin{aligned} w &= |\vec{u}(t, s)|^2 = |\vec{l}_1 t - \vec{l}_2 s + \vec{r}_0|^2 \\ &= l_1^2 t^2 + l_2^2 s^2 + r_0^2 - 2(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)st + 2(\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0)t \\ &\quad - 2(\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0)s, \end{aligned}$$

其中 $l_1^2 = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_1$, $l_2^2 = \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_2$, $r_0^2 = \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0$.

w 取得极值的必要条件为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2(l_1^2 t - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)s + (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0)) = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2(l_2^2 s - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)t - (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0)) = 0.$$

由此可解得唯一的静止点 (t_0, s_0) :

$$t_0 = -\frac{l_2^2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0) - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)(\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0)}{l_1^2 l_2^2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)^2},$$

$$s_0 = \frac{l_1^2 (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0) - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)(\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0)}{l_1^2 l_2^2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)^2}.$$

于是 $|\vec{u}(t_0, s_0)|$ 即为所求的最短距离. 下面计算 $|\vec{u}(t_0,$

$s_0)|$. 令 $\Delta = \sqrt{l_1^2 l_2^2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)^2}$, 显然有

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= |\vec{l}_1|^2 \cdot |\vec{l}_2|^2 - [|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2| \cos(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2})]^2 \\ &= |\vec{l}_1|^2 \cdot |\vec{l}_2|^2 \sin^2(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2}) = |\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|^2, \end{aligned}$$

即

$$\Delta = |\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|.$$

将 t_0 及 s_0 代入 (3) 式, 得

$$\begin{aligned} \vec{u}(t_0, s_0) &= -\frac{1}{\Delta^2} (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0) [l_2^2 \vec{l}_1 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) \vec{l}_2] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta^2} (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0) [l_1^2 \vec{l}_2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) \vec{l}_1] + \vec{r}_0. \end{aligned}$$

通过计算, 不难得出

$$\begin{aligned} \vec{u}(t_0, s_0) \cdot \vec{l}_1 &= -\frac{1}{\Delta^2} (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0) [l_2^2 l_1^2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)^2] - \frac{1}{\Delta^2} \\ &\quad \cdot (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0) [l_1^2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) l_1^2] + (\vec{r}_0 \cdot \vec{l}_1) = 0, \end{aligned}$$

$$\vec{u}(t_0, s_0) \cdot \vec{l}_2 = 0.$$

因此, 得知

$$\vec{u}(t_0, s_0) \parallel \vec{l}_1 \times \vec{l}_2.$$

$$\text{令 } \vec{n}_0 = \frac{\vec{l}_1 \times \vec{l}_2}{\Delta}, \text{ 则 } |\vec{n}_0| = 1,$$

$$\begin{aligned} |\vec{u}(t_0, s_0)| &= |\vec{u}(t_0, s_0) \cdot \vec{n}_0| = \frac{|\vec{r}_2 \cdot (\vec{l}_1 \times \vec{l}_2)|}{\Delta} \\ &= \pm \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2},$$

且正负号的选取保证所得结果为正值.

2701. 求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离.

解 设 (x_1, y_1) 为抛物线 $y = x^2$ 上任一点, (x_2, y_2) 为直线 $x - y - 2 = 0$ 上的任一点. 按题意, 我们应求函数

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

在条件 $y_1 - x_1^2 = 0$ 及 $x_2 - y_2 - 2 = 0$ 下的极值. 显然, 由几何知, 当两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 至少有一伸向无穷时, r 也必趋于无穷大. 故 r 的最小值必在有限处达到.

设 $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = r^2 + \lambda_1(y_1 - x_1^2) + \lambda_2(x_2 - y_2 - 2)$

- 2).

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = -2(x_2 - x_1) - 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2(x_2 - x_1) + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y_1} = -2(y_2 - y_1) + \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} = 2(y_2 - y_1) - \lambda_2 = 0, \\ y_1 = x_1^2, \\ x_2 - y_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

得唯一的一组解 $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{11}{8}$, $y_2 = -\frac{5}{8}$.

于是, 所求的最短距离为

$$r_0 = \sqrt{\left(\frac{11}{8} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

3702. 求有心二次曲线

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

的半轴.

解 设 (x_0, y_0) 为二次曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 上的点, 则 $(-x_0, -y_0)$ 也为该曲线上的点. 因此, 原点 $(0, 0)$ 即为曲线的中心. 按题意, 应求函数 $u = x^2 + y^2$ 在条件 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 下的极值. 设 $F = x^2 + y^2 - \lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1)$.

解方程组

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = (\lambda A - 1)x + \lambda B y = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda B x + (\lambda C - 1)y = 0, \\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1. \end{cases}$$

要方程组有非零解, λ 必须满足二次方程

$$\begin{vmatrix} \lambda A - 1 & \lambda B \\ \lambda B & \lambda C - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

由题设知二次曲线为有心的, 因此 $AC^2 - B^2 \neq 0$.

由方程 (1) 可求得两根 λ_1 和 λ_2 ($\lambda_1 \geq \lambda_2$). 将 λ 的值代入方程组, 求得对应于 λ_1 的解 (x_1, y_1) 及对应于 λ_2 的解 (x_2, y_2) . 相应地, 有

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) &= x_1^2 + y_1^2 = x_1 [\lambda_1 (Ax_1 + By_1)] \\ &\quad + y_1 [\lambda_1 (Bx_1 + Cy_1)] \\ &= \lambda_1 (Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2) = \lambda_1, \end{aligned}$$

同理 $u(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 = \lambda_2$.

(i) 当 $AC - B^2 > 0$ 且 $A + C > 0$ (或 $A > 0$) 时, 由 (1) 解得

$$\lambda_i = \frac{(A + C) \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4(AC - B^2)}}{2(AC - B^2)} > 0,$$

即有 $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$. 显然 u 的最大值及最小值必在区域内达到. 因此, λ_1 及 λ_2 分别为 u 的最大值及最小值. 此时, 所对应的曲线为椭圆, 长、短半轴的平方分别为 λ_1 及 λ_2 . 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ ($A = C, B = 0$) 时为圆.

当 $A+C \leq 0$ (或 $A \leq 0$) 时, 两根 λ_i 均为负, 相应曲线无轨迹.

(ii) 当 $AC-B^2 \leq 0$ 时, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \leq 0$. 此时只有一个极值 λ_1 . 对应的曲线为双曲线, λ_1 为实半轴的平方 (λ_2 表面上无意义, 但实质上为虚半轴的平方), 其中特别是 $B=0$ 时, 曲线退化为一对相交直线.

3703. 求有心二次曲面

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1$$

的半轴.

解 同上题可知, 曲面的中心为 $(0, 0, 0)$. 按题意, 达到曲面半轴的点 (x, y, z) 一定是函数 $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1$$

下的静止点 (但不一定是极值点. 例如, 椭球面的中间轴所在的点). 设

$$F = u - \lambda(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz - 1).$$

解方程组

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = (\lambda A - 1)x + \lambda D y + \lambda F z = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda D x + (\lambda B - 1)y + \lambda E z = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = \lambda F x + \lambda E y + (\lambda C - 1)z = 0, \\ Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1. \end{cases}$$

上述方程组要有非零解, λ 必须满足三次方程

$$\begin{vmatrix} \lambda A - 1 & \lambda D & \lambda F \\ \lambda D & \lambda B - 1 & \lambda E \\ \lambda F & \lambda E & \lambda C - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

设三根为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. 对应于此三根可求出满足方程组的静止点. 与3702题相同, 可证明在这些静止点处 $u(x, y, z)$ 的值恰为 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$, 即 λ_i 为曲面半轴的平方 (严格地说, 当 $\lambda_i < 0$ 时不能认为它是半轴的平方).

与二次曲线的情况类似, 根据 λ_i 的正负可讨论曲面半轴的虚、实等问题, 这对熟悉二次曲面分类的读者无实质性的困难, 因此省略掉这些烦琐的讨论.

3704. 求用平面

$$Ax + By + Cz = 0$$

与圆柱

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

相交所成椭圆的面积.

解 我们只要确定所得椭圆的长短半轴 \bar{a} 及 \bar{b} , 即可按公式 $S = \pi \bar{a} \bar{b}$ 求得椭圆的面积.

注意到原点 $(0, 0, 0)$ 在原椭圆柱面的中心轴上, 且截平面 $Ax + By + Cz = 0$ 又通过它. 因此, 原点是截线椭圆的中心, 从而长短半轴 \bar{a} 及 \bar{b} 的平方 \bar{a}^2 及 \bar{b}^2 , 分别为函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $Ax + By + Cz = 0$ 及 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 下的最大值和最小值. 设

$$F = u + 2\lambda(Ax + By + Cz) - \mu\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

于是,达到最大值、最小值的点的坐标必须满足方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = \left(1 - \frac{\mu}{a^2}\right)x + \lambda A = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \left(1 - \frac{\mu}{b^2}\right)y + \lambda B = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = z + \lambda C = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. & (5) \end{cases}$$

将 (1)、(2)、(3) 三式分别乘以 x 、 y 、 z 后,然后相加,得 $x^2 + y^2 + z^2 = \mu$, 即从方程组可解得

$u(x, y, z) = \mu$. 由 (1)、(2)、(3)、(4) 知,若要 x, y, z 及 λ 不全为零, μ 必须满足下列方程 (同时 μ 只要满足下列方程,静止点 (x, y, z) 也一定有解):

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\mu}{a^2} & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 - \frac{\mu}{b^2} & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开后,得

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{a^2 b^2} \mu^2 - \left(\frac{B^2}{a^2} + \frac{A^2}{b^2} + \frac{C^2}{a^2} + \frac{C^2}{b^2} \right) \mu \\ + (A^2 + B^2 + C^2) = 0. \end{aligned}$$

此方程有两正根. 显然即为最大值及最小值 \bar{a}^2, \bar{b}^2 . 由韦达定理知

$$\frac{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}{\bar{a}^2 \bar{b}^2} = \frac{a^2 b^2 (A^2 + B^2 + C^2)}{C^2},$$

$$\text{故椭圆面积 } \pi \bar{a} \bar{b} = \frac{\pi ab \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|} \quad (C \neq 0).$$

当 $C=0$ 时, 平面 $Ax+By=0$ 过 Oz 轴, 显然得不到椭圆截面.

3705. 求用平面

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

(其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$) 与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相截所成截面的面积.

解 截面为一椭圆. 与3704题一样, 我们只要先考虑函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0 \text{ 及 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

下的极值 ($a > 0, b > 0, c > 0$). 设

$$F = u + 2\lambda_1(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) - \lambda_2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$$

解方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = \left(1 - \frac{\lambda_2}{a^2}\right)x + \lambda_1 \cos \alpha = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \left(1 - \frac{\lambda_2}{b^2}\right)y + \lambda_1 \cos \beta = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = \left(1 - \frac{\lambda_2}{c^2}\right)z + \lambda_1 \cos \gamma = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{array} \right. \quad (5)$$

将(1), (2), (3)三式分别乘以 x, y, z , 然后相加, 即得

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = \lambda_2.$$

由(1)、(2)、(3)、(4)知, 若要 x, y, z 及 λ_1 不全为零, λ_2 必须满足下列方程

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda_2}{a^2} & 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 1 - \frac{\lambda_2}{b^2} & 0 & \cos \beta \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\lambda_2}{c^2} & \cos \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开整理得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{c^2 a^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2 b^2} \right) \lambda_2^2 - \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{c^2} \right. \\ & \left. + \frac{\cos^2 \beta}{c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{b^2} \right) \lambda_2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

此方程有两正根，显然即为椭圆的长短半轴的平方 \bar{a}^2 、 \bar{b}^2 ，由韦达定理知

$$\frac{\bar{a}^2 \bar{b}^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}.$$

于是，所求椭圆的面积为

$$S = \pi \bar{a} \bar{b} = \frac{\pi abc}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}}.$$

3706. 根据费耳马原则，从 A 点射出而达于 B 点的光线，沿着需要最短时间的曲线传播。

假定点 A 和点 B 位于以平面所分开的不同的光介质中，并且光传播的速度在第一介质中等于 v_1 ，而在第二介质中等于 v_2 ，推出光的折射定律。

解 如图6.45所示，光线从 A 点射出，沿着折线 AMB 到达 B 点。由 A 、 B 作垂直于 l 的直线 AC 及 BD ，并与直线 l 交于 C 点及 D 点。设 $AC = a$ ， $BD = b$ ， $CD = d$ 。选择角度 α, β 为变量，则

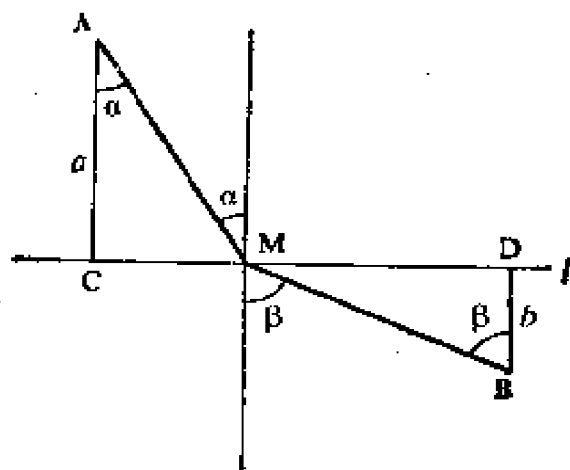


图 6.45

$$AM = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad BM = \frac{b}{\cos \beta},$$

$$CM = a \tan \alpha, \quad MD = b \tan \beta.$$

于是，我们的问题就是求函数

$$f(\alpha, \beta) = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta}$$

在条件 $a \tan \alpha + b \tan \beta = d$ 下的最小值, 其中 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ (当 M 在 C 与 D 之间时, $\alpha > 0$, $\beta > 0$; 当 M 在 C 点的左边时, $\alpha < 0$, $\beta > 0$; 当 M 在点 D 的右边时, $\alpha > 0$, $\beta < 0$). 显然 $f(\alpha, \beta)$ 是连续函数; 又当 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 时 (这时点 M 从右边伸向无穷远, $\beta \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0$), 显然 $f(\alpha, \beta) \rightarrow +\infty$; 当 $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0$ 时 (这时点 M 从左边伸向无穷远, $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$), 显然也有 $f(\alpha, \beta) \rightarrow +\infty$. 由此可知 $f(\alpha, \beta)$ 在有限处达到最小值, 此处必为静止点. 设

$$F = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta} - \lambda(a \tan \alpha + b \tan \beta - d).$$

注意到由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{a \sin \alpha}{v_1 \cos^2 \alpha} - \frac{\lambda a}{\cos^2 \alpha} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{b \sin \beta}{v_2 \cos^2 \beta} - \frac{\lambda b}{\cos^2 \beta} = 0, \end{cases}$$

即得

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \lambda, \quad \frac{\sin \beta}{v_2} = \lambda.$$

于是, 在静止点必满足

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

由此可知，光的传播路径必满足上面的关系。这就是著名的光线折射定律。此时，由点 A 到点 B 的光线传播所需要的时间最短。

3707. 当投射角怎样时，光线的折射（即投射线与出射线之间的角）为最小？

（此光线经过棱镜的折射角为 α ，折射系数为 n ）。求出此最小的折射。

解 如图 6.46 所示， ABC 为棱镜， $\angle BAC = \alpha$ 为棱镜顶角（即

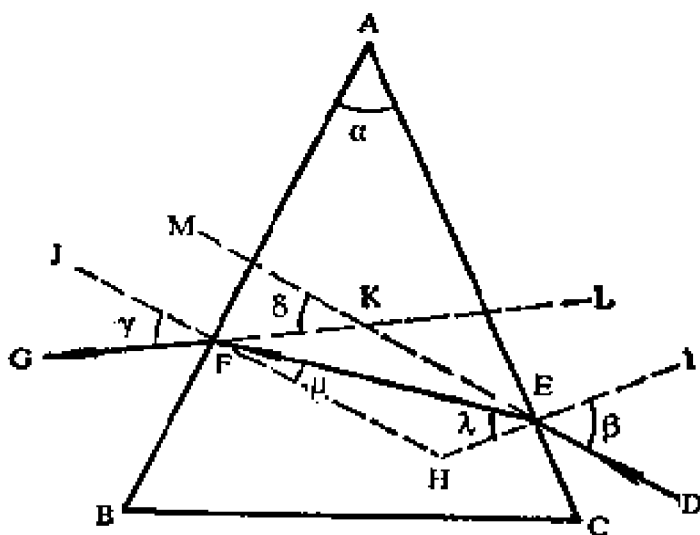


图 6.46

棱镜的折射角)， DE 为入射光线，折射后从 F 点折射出棱镜，射出线为 FG 。 IH 和 JH 分别为入射点和射出点的法线，它们相交于 H ($IH \perp AC$, $JH \perp AB$)。入射线 DE 的延长线 DM 与射出线的反向延长线 FL 交于 K 。令 $\angle DEI = \beta$, $\angle GFJ = \gamma$, $\angle GKM = \delta$, $\angle HEF = \lambda$, $\angle EFH = \mu$ 。

按题意即问：当 β 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之间的一定范围内变化时， δ 何时达到极小值。这本是一元函数的极值问题，然因牵涉的变量关系太多，因此把它看作多元函数的条件极值问题。

由折射定律（3706题）可知：

$$\sin\beta = n\sin\lambda, \quad (1)$$

$$\sin\gamma = n\sin\mu. \quad (2)$$

由几何关系不难求出 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ 及 μ 之间的关系:

$$\lambda + \mu = \alpha, \quad (3)$$

$$\delta = \beta + \gamma - \alpha. \quad (4)$$

由于 α 为常数, 故从 (1)、(2)、(3)、(4) 四式中消去 λ, μ 及 γ 就得到 δ 作为 β 的函数. 令

$$F(\beta, \gamma, \lambda, \mu) = \beta + \gamma - \alpha + k_1(\sin\beta - n\sin\lambda) \\ + k_2(n\sin\mu - \sin\gamma) + k_3(\lambda + \mu - \alpha).$$

静止点适合下列方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \beta} = 1 + k_1 \cos\beta = 0, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 1 - k_2 \cos\gamma = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -k_1 n \cos\lambda + k_3 = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \mu} = k_2 n \cos\mu + k_3 = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

由 (7)、(8) 消去 k_3 , 得 $k_1 \cos\lambda = -k_2 \cos\mu$. (9)

由 (5)、(6) 得 $k_1 = -\frac{1}{\cos\beta}$, $k_2 = \frac{1}{\cos\gamma}$. 代入 (9),

两边平方, 即得

$$\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\beta} = \frac{\cos^2\mu}{\cos^2\gamma} \text{ 或 } \frac{1 - \sin^2\lambda}{1 - \sin^2\beta} = \frac{1 - \sin^2\mu}{1 - \sin^2\gamma}. \quad (10)$$

将 (1)、(2) 代入 (10), 得

$$\frac{1 - \sin^2\lambda}{1 - n^2 \sin^2\lambda} = \frac{1 - \sin^2\mu}{1 - n^2 \sin^2\mu},$$

整理后得

$$(n^2 - 1)(\sin^2 \lambda - \sin^2 \mu) = 0.$$

由于 $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$, $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$, 故 $\sin \lambda = \sin \mu$ 或 $\lambda = \mu$.

代入(3), 得 $\lambda = \mu = \frac{\alpha}{2}$. 从而 $\beta = \gamma = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right)$.

于是,

$$\delta = \beta + \gamma - \alpha = 2 \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha.$$

所求得的 β 即为唯一的静止点.

根据物理知识, 作为本题所讨论的对象: 顶角较小的分光棱镜, 在区域内确实存在着最小的折射. 于是, 当入射角

$$\beta = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

时, 则

$$\delta = 2 \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha$$

应为最小折射. 至于作其它用途的各种棱镜, 光线的折射路径不仅与顶角有关, 而且大都与整个棱镜的构造有关, 这已不属于本题所考虑的对象, 因而也不再对它们进行讨论.

3708. 变量 x 和 y 满足线性方程式

$$y = ax + b,$$

它的系数需要确定. 由于一系列的等精确测定的结果, 对于量 x 和 y 得到值 x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

利用最小二乘方的方法, 求系数 a 和 b 的最可靠数值.

解 根据最小二乘方的方法, 系数 a 和 b 的最可靠数

值是这样的：对于它们，误差的平方和

$$M = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

为最小。因此，上述问题可以通过求方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

的解来解决。记

$$[x, y] = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad [x, x] = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$[x, 1] = \sum_{i=1}^n x_i, \quad [y, 1] = \sum_{i=1}^n y_i,$$

则上述方程组化为

$$\begin{cases} a[x, x] + b[x, 1] = [x, y], \\ a[x, 1] + bn = [y, 1]. \end{cases}$$

系数行列式

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} [x, x] & [x, 1] \\ [x, 1] & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2. \end{aligned}$$

当 $\Delta \neq 0$ 时，方程组有唯一的一组解，且

$$a = \frac{\begin{vmatrix} [x, y] & [x, 1] \\ [y, 1] & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [x, x] & [x, 1] \\ [x, 1] & n \end{vmatrix}} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} [x, x] & [x, y] \\ [x, 1] & [y, 1] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [x, x] & [x, 1] \\ [x, 1] & n \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

显然, 此时 M 为最小. 因此, 上述 a 和 b 即为所求.

3709. 在平面上已知 n 个点 $M_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$).

直线 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ 在怎样的位置时, 已知点与此直线的偏差的平方和为最小?

解 已知点与直线的偏差平方和

$$M(\alpha, p) = \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p)^2.$$

记

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

则所求直线的参数 α 和 p 应满足方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p) (y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n [x_i y_i \cos 2\alpha + (y_i^2 - x_i^2) \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ &\quad - y_i p \cos \alpha + x_i p \sin \alpha] \\ &= n [2 \overline{xy} \cos 2\alpha + (\overline{y^2} - \overline{x^2}) \sin 2\alpha - 2p (\bar{y} \cos \alpha \\ &\quad - \bar{x} \sin \alpha)] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial p} &= -2 \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p) \\ &= -2n(\bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha - p) = 0.\end{aligned}\quad (2)$$

由(2)式, 解得

$$p = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式, 即可解出

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(\bar{x} \cdot \bar{y} - \overline{xy})}{[\bar{x}^2 - (\bar{x})^2][\bar{y}^2 - (\bar{y})^2]} \quad (4)$$

在 $(0, 2\pi)$ 范围内, (4)式的解 α 共有四个:

$$\alpha_0; \alpha_0 + \frac{\pi}{2}; \alpha_0 + \pi; \alpha_0 + \frac{3\pi}{2};$$

其中 $0 \leq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. 将这四个解代入(3)式可以求出 p .

根据习惯, 取 $p \geq 0$, 故上述四个 α 只有两个满足 $p \geq 0$ 的要求^{**}). 记为 $\alpha_1, p_1; \alpha_2, p_2$. 这样就得到两条互相垂直的直线:

$$\begin{cases} x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0. & (6) \end{cases}$$

显然, $M(\alpha, p)$ 一定在 p 为有限值的点上取得最小值. 因此, 只要比较 $M(\alpha_1, p_1)$ 和 $M(\alpha_2, p_2)$ 的值, M 较小的那条直线即为所求^{***}).

*) 当(4)式分母为零而分子不为零时, 解为 $2\alpha =$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \text{当分子分母同时为零时, 有无穷}$$

多个解, 即任意一条过 n 个点的重心的直线均使 $M(\alpha,$

p)为最小, 具体的讨论不进行了.

**) 也可能同时有一对或两对 α 使 $p=0$, 但此时代表的直线仍只有互相垂直的两条, 只是直线方程(5)或(6)有两种不同的表示法而已.

***) 特殊情况下也可能有 $M(\alpha_1, p_1) = M(\alpha_2, p_2)$, 此时使 M 取得最小值的直线有两条.

3710. 在区间(1,3)内用线性函数 $ax+b$, 来近似地代替函数 x^2 , 使得绝对偏差

$$\Delta = \sup |x^2 - (ax+b)| \quad (1 \leq x \leq 3)$$

为最小,

解 考虑函数

$$u(a, b) = \Delta^2 = \sup_{1 \leq x \leq 3} [x^2 - (ax+b)]^2,$$

$$f(x, a, b) = x^2 - (ax+b).$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - a$, 故当固定 a, b 时, $f(x, a, b)$ 只在

$x = \frac{a}{2}$ 处达到极值 $f(\frac{a}{2}, a, b)$. 当限制 $1 \leq x \leq 3$ 时,

只有当 $2 \leq a \leq 6$ 时, $f(x, a, b)$ 才可能在 $1 \leq x \leq 3$ 内部达到极值. 于是,

$$u(a, b) = \begin{cases} \max\{f^2(1, a, b), f^2(3, a, b), \\ f^2(\frac{a}{2}, a, b)\}, & 2 \leq a \leq 6; \\ \max\{f^2(1, a, b), f^2(3, a, b)\}, & a \leq 2 \text{ 或 } a \geq 6. \end{cases}$$

从上式得知, 对一切 (a, b) 均有 $u(a, b) \geq 0$.

设从上式已解出平面区域 Ω_1, Ω_2 及 Ω_3 , 使得

$$u(a, b) = \begin{cases} f^2(1, a, b) = (1 - a - b)^2, (a, b) \in \Omega_1; \\ f^2(3, a, b) = (9 - 3a - b)^2, (a, b) \in \Omega_2; \\ f^2\left(\frac{a}{2}, a, b\right) = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)^2, (a, b) \in \Omega_3, \\ 2 \leq a \leq 6. \end{cases}$$

由于 $u(a, b) \geq 0$ ，不难看出 $u(a, b)$ 在区域 Ω_i ($i=1, 2, 3$) 内部均无静止点。再看区域边界的状况，以 Ω_1 及 Ω_3 的边界为例，根据 $u(a, b)$ 的连续性，即知在边界上有 $u(a, b) = (1 - a - b)^2$ ，且满足条件

$$(1 - a - b)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)^2.$$

下面我们求满足条件极值的必要条件的点。设

$$F(a, b) = (1 - a - b)^2 + \lambda \left[(1 - a - b)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + b\right)^2 \right],$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = -2(1 + \lambda)(1 - a - b) - \lambda a \left(\frac{a^2}{4} + b\right), \\ \frac{\partial F}{\partial b} = -2(1 + \lambda)(1 - a - b) - 2\lambda \left(\frac{a^2}{4} + b\right). \end{cases}$$

使 $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ ， $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$ 且满足条件 $1 - a - b \neq 0$ ， $\frac{a^2}{4} + b \neq 0$ 的点没有。

同法可证：在 Ω_1, Ω_2 及 Ω_2, Ω_3 的边界上也无静止点。但是， $u(a, b)$ 一定在区域内达到最小值。因此，只能在 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 的边界交点上取得最小值，即在满足方程

$$(1 - a - b)^2 = (9 - 3a - b)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)^2 \quad (1)$$

的点 (a, b) 上取得最小值, 方程(1)可转化为下面四组方程

$$\begin{cases} 1-a-b=9-3a-b=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-a-b=9-3a-b=\frac{a^2}{4}+b, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-a-b=-(9-3a-b)=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-a-b=-(9-3a-b)=\frac{a^2}{4}+b. & (5) \end{cases}$$

方程组(2)无解.

方程组(3)的解为 $a=4, b=-\frac{7}{2}$. 对应的 $\Delta=\frac{1}{2}$.

方程组(4)的解为 $a=2, b=1$. 对应的 $\Delta=2$.

方程组(5)的解为 $a=6, b=-7$. 对应的 $\Delta=2$.

综上所述, 可知: 在区间 $(1, 3)$ 内, 用线性函数 $4x - \frac{7}{2}$ 来近似地代替函数 x^2 , 即可使绝对偏差 Δ 为最小, 且 $\Delta_{\min}=\frac{1}{2}$.

第七章 带参数的积分

§ 1. 带参数的常义积分

1° 积分的连续性 若函数 $f(x, y)$ 于有界的域 R ($a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$) 内有定义并且是连续的, 则

$$F(y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

是在闭区间 $b \leq y \leq B$ 上的连续函数.

2° 积分符号下的微分法 若除在 1° 中所已指明的条件之外, 并且偏导函数 $f'_y(x, y)$ 在区域 R 内连续, 则当 $b < y < B$ 时 莱布尼兹公式

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A f'_y(x, y) dx$$

为真.

在更普遍的情况下, 当积分的限为参数 y 的可微分函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$ 并且当 $b < y < B$ 时 $a \leq \varphi(y) \leq A$, $a \leq \psi(y) \leq A$, 有:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \\ &= f[\psi(y), y] \psi'(y) - f[\varphi(y), y] \varphi'(y) \\ &+ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx \quad (b < y < B) . \end{aligned}$$

3° 积分符号下的积分法 在 1° 的条件下有

$$\int_a^B dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_a^B f(x, y) dy.$$

3711. 证明: 不连续函数 $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ 的积分

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$$

为连续函数. 作出函数 $u = F(y)$ 的图形.

证 当 $-\infty < y < 0$ 时,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^1 1 \cdot dx \\ &= 1; \end{aligned}$$

当 $0 \leq y \leq 1$ 时,

$$F(y) = \int_0^y (-1) dx + \int_y^1 1 \cdot dx = 1 - 2y;$$

当 $1 < y < +\infty$ 时,

$$F(y) = \int_0^1 (-1) dx = -1.$$

由于

$$\lim_{y \rightarrow +0} F(y) = \lim_{y \rightarrow +0} (1 - 2y) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow -0} F(y) = 1$$

且 $F(0) = 1$, 即有

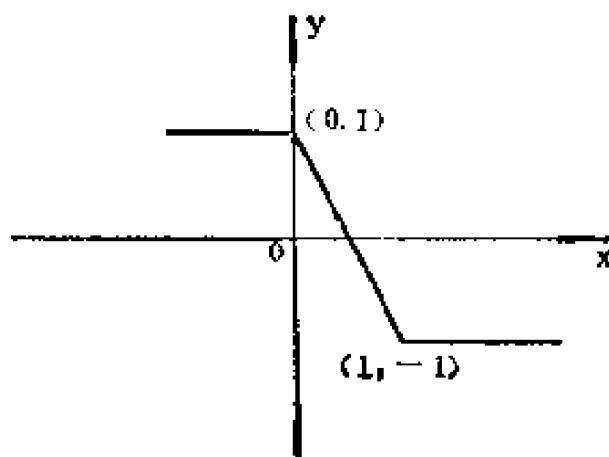


图 7.1

$$F(+0)=F(-0)=F(0),$$

故 $u=F(y)$ 当 $y=0$ 时为连续的.

同法可证 $u=F(y)$ 当 $y=1$ 时为连续的. 当 $y \neq 0, y \neq 1$ 时, $u=F(y)$ 显然连续. 于是, $u=F(y)$ 在整个 Oy 轴上均为连续的. 如图7·1所示.

3712. 研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx$$

的连续性, 其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上是正的连续函数.

解 当 $y \neq 0$ 时, 被积函数是连续的. 因此, $F(y)$ 为连续函数.

当 $y=0$ 时, 显然有 $F(0)=0$.

当 $y>0$ 时, 设 m 为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值, 则 $m>0$. 由于

$$F(y) \geq m \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{y}$$

及

$$\lim_{y \rightarrow +0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2},$$

故有

$$\lim_{y \rightarrow +0} F(y) \geq \frac{m\pi}{2} > 0.$$

于是, $F(y)$ 当 $y=0$ 时不连续.

3713. 求:

$$(a) \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2};$$

$$(6) \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+a^2} dx;$$

$$(B) \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos ax dx;$$

$$(r) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$$

解 (a) 因 $\frac{1}{1+x^2+a^2}$, a , $1+a$ 都是连续函数,

故含参变量 a 的积分 $F(a) = \int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2}$ 是 a 在 $-\infty < a < +\infty$ 上的连续函数, 因此

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^{1+a} \frac{dx}{1+x^2+a^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} F(a) = F(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(6) 同样, $F(a) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+a^2} dx$ 是 $-\infty < a < +\infty$ 上的连续函数, 因此

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+a^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} F(a) = F(0) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2} dx \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^1 x dx = 1.$$

(B) 同样, $F(a) = \int_0^2 x^2 \cos ax dx$ 是 $-\infty < a < +\infty$ 上的连续函数, 故

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos ax dx \\ = \lim_{a \rightarrow 0} F(a) = F(0) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(C) 考虑二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (1 + xy)^{\frac{1}{y}}}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ & 0 < y \leq 1 \text{ 时;} \\ \frac{1}{1 + e^x}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, y = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由 $\lim_{u \rightarrow +0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ 易知 $f(x, y)$ 是 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y$

≤ 1 上的连续函数. 从而积分 $F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ 是 $0 \leq y \leq 1$ 上的连续函数, 因此

$$\lim_{y \rightarrow +0} F(y) = F(0),$$

从而更有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = F(0) = \int_0^1 f(x, 0) dx \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \ln \frac{e^x}{1+e^x} \Big|_0^1 = \ln \frac{2e}{1+e}.
\end{aligned}$$

3714. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, A]$ 上连续. 证明

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a)$$

($a < x < A$).

证 由于 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上连续, 故在 $[a, A]$ 上存在原函数. 于是,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} [F(x+h) - F(a+h) - F(x) + F(a)] \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \\
&= F'(x) - F'(a) = f(x) - f(a).
\end{aligned}$$

3715. 在下式中可否于积分符号下完成极限运算

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx ?$$

解 不能. 事实上,

$$\begin{aligned}
&\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} \Big|_0^1 \right) \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{y^2}} \right) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

而

$$\int_0^1 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} \right) dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0.$$

3716. 当 $y = 0$ 时, 可否根据莱布尼兹法则计算函数

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

的导数?

解 不能. 事实上, 我们有: 当 $y \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx \\ &= x \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &\quad - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx \\ &= \ln \sqrt{1 + y^2} - \int_0^1 \left(1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) dx \\ &= \ln \sqrt{1 + y^2} - 1 + y \operatorname{arctg} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

又有

$$F(0) = \int_0^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx = -1.$$

由此可知

$$F'_+(0) = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{F(y) - F(0)}{y}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow +0} \left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right] \\
&= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'_-(0) &= \lim_{y \rightarrow -0} \frac{F(y) - F(0)}{y} \\
&= \lim_{y \rightarrow -0} \left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right] \\
&= -\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

故 $F'(0)$ 不存在.

另一方面, 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} \\
&= \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0} \equiv 0,
\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx = 0.$$

由此可知, 当 $y = 0$ 时不能在积分号下求导数, 就是求右导数或求左导数也不行, 因为

$$\begin{aligned}
F'_+(0) &= \frac{\pi}{2} \neq 0 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx,
\end{aligned}$$

$$F'_{-}(0) = -\frac{\pi}{2} \neq 0$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx,$$

3717. 若

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy,$$

计算 $F'(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } F'(x) &= \frac{d}{dx} (x^2) \cdot e^{-xy^2} \Big|_{y=x^2} \\ &\quad - \frac{dx}{dx} \cdot e^{-xy^2} \Big|_{y=x} \\ &\quad + \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (e^{-xy^2}) dy \\ &= 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy. \end{aligned}$$

3718. 设:

$$(a) \quad F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(b) \quad F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx;$$

$$(B) \quad F(\alpha) = \int_0^a \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx;$$

$$(r) \quad F(\alpha) = \int_0^a f(x+\alpha, x-\alpha) dx;$$

$$(A) F(a) = \int_0^{a^2} dx \int_{x-a}^{x+a} \sin(x^2 + y^2 - a^2) dy,$$

求 $F'(a)$.

$$\text{解 } (a) F'(a) = -\sin a \cdot e^{a \cdot \sin a} - \cos a \cdot e^{a \cdot \cos a}$$

$$+ \int_{\sin a}^{\cos a} \sqrt{1-x^2} e^{a\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$(6) F'(a) = \frac{\sin a(b+a)}{b+a} - \frac{\sin a(a+a)}{a+a}$$

$$+ \int_{a+a}^{b+a} \cos ax dx$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+a} \right) \sin a(b+a)$$

$$- \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+a} \right) \sin a(a+a).$$

$$(B) F'(a) = \frac{1}{a} \ln(1+a^2) + \int_0^a \frac{1}{1+ax} dx$$

$$= \frac{2}{a} \ln(1+a^2).$$

(r) 设 $u=x+a$, $v=x-a$, 则

$$F(a) = \int_0^a f(u, v) dx.$$

于是,

$$F'(a) = f(2a, 0) + \int_0^a (f'_u(u, v) - f'_v(u, v)) dx$$

$$= f(2a, 0) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx$$

$$= \int_0^a (f'_u(u, v) + f'_v(u, v)) dx$$

$$= f(2a, 0) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx$$

$$= \int_0^a \frac{d}{dx} f(u, v) dx$$

$$= f(2a, 0) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx$$

$$= f(x + a, x - a) \Big|_{x=0}^{x=a}$$

$$= f(2a, 0) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx$$

$$= [f(2a, 0) - f(a, -a)]$$

$$= f(a, -a) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx.$$

$$(B) \quad F'(\alpha) = 2\alpha \int_{\alpha^2 - \alpha}^{\alpha^2 + \alpha} \sin(\alpha^4 + y^2 - \alpha^2) dy$$

$$+ \int_0^{\alpha^2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x - \alpha}^{x + \alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy \right] dx$$

$$= 2\alpha \int_{\alpha^2 - \alpha}^{\alpha^2 + \alpha} \sin(\alpha^4 + y^2 - \alpha^2) dy$$

$$+ \int_0^{\alpha^2} \left\{ \sin[x^2 + (x + \alpha)^2 - \alpha^2] \right.$$

$$\left. - \sin[x^2 + (x - \alpha)^2 - \alpha^2] \right\} \cdot (-1)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x-a}^{x+a} (-2\alpha) \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy \} dx \\
& = 2\alpha \int_{a^2-a}^{a^2+a} \sin(\alpha^4 + y^2 - \alpha^2) dy \\
& + \int_0^{a^2} \{ \sin(2x^2 + 2\alpha x) + \sin(2x^2 - 2\alpha x) \\
& + \int_{x-a}^{x+a} (-2\alpha) \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy \} dx \\
& = 2\alpha \int_{a^2-a}^{a^2+a} \sin(\alpha^4 + y^2 - \alpha^2) dy \\
& + 2 \int_0^{a^2} \sin 2x^2 \cos 2\alpha x dx \\
& - 2\alpha \int_0^{a^2} dx \int_{x-a}^{x+a} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy.
\end{aligned}$$

3719. 若

$$F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

解 $F'(x) = 2x f(x) + \int_0^x f(y)dy,$

$$\begin{aligned}
F''(x) &= 2f(x) + 2x f'(x) + f(x) \\
&= 3f(x) + 2x f'(x).
\end{aligned}$$

3720. 设:

$$F(x) = \int_a^b f(y)|x-y|dy,$$

其中 $a \leq b$ 及 $f(y)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

解 当 $x \in (a, b)$ 时, 由于

$$F(x) = \int_a^x (x-y)f(y)dy + \int_x^b (y-x)f(y)dy,$$

故有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x (x-y)f(y)dy \\ &\quad - \frac{d}{dx} \int_x^b (y-x)f(y)dy \\ &= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} [(x-y)f(y)]dy \\ &\quad - \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} [(y-x)f(y)]dy \\ &= \int_a^x f(y)dy + \int_x^b f(y)dy, \end{aligned}$$

$$F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

当 $x \in (a, b)$ 时, 例如 $x \leq a$, 则

$$F(x) = \int_a^b (y-x)f(y)dy,$$

故有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [(y-x)f(y)]dy \\ &= - \int_a^b f(y)dy, \end{aligned}$$

$$F''(x) = 0;$$

同理, 对于 $x \geq b$ 也可得 $F''(x) = 0$. 总之,

$$F''(x) = \begin{cases} 2f(x), & \text{当 } x \in (a, b); \\ 0, & \text{当 } x \notin (a, b). \end{cases}$$

3721. 设:

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta \quad (h > 0),$$

其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $F''(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } F(x) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u) du. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u) du \right] d\xi \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^h [f(x + \xi + h) - f(x + \xi)] d\xi \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\int_{x+h}^{x+2h} f(u) du - \int_x^{x+h} f(u) du \right], \\ F''(x) &= \frac{1}{h^2} [f(x + 2h) - f(x + h) - f(x + h) \\ &\quad + f(x)] \\ &= \frac{1}{h^2} [f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)]. \end{aligned}$$

3722. 设:

$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt,$$

求 $F^{(n)}(x)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } F'(x) &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} [f(t)(x-t)^{n-1}] dt \\ &= (n-1) \int_0^x f(t)(x-t)^{n-2} dt,\end{aligned}$$

$$F''(x) = (n-1)(n-2) \int_0^x f(t)(x-t)^{n-3} dt,$$

.....

$$F^{(n-1)}(x) = (n-1)! \int_0^x f(t) dt,$$

最后得

$$F^{(n)}(x) = (n-1)! f(x).$$

3723. 在区间 $1 \leq x \leq 3$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似地代替函数 $f(x)=x^2$, 使得

$$\int_1^3 (a+bx-x^2)^2 dx = \min.$$

解 设 $F(a, b) = \int_1^3 (a+bx-x^2)^2 dx$, 则由于 $F(a, b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数, 并且易知当 $r = \sqrt{a^2+b^2} \rightarrow +\infty$ 时, $F(a, b) \rightarrow +\infty$, 故 $F(a, b)$ 必在有限处取得最小值. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 2 \int_1^3 (a+bx-x^2) dx = 4a + 8b - \frac{52}{3} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \int_1^3 x(a+bx-x^2) dx = 8a + \frac{52}{3}b - 40 = 0 \end{cases}$$

得唯一的一组解 $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$.

于是, 当 $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$ 时 $F(a, b)$ 达最小

值, 即所求的线性函数为 $4x - \frac{11}{3}$.

3724. 依条件: 函数 $a+bx$ 及 $\sqrt{1+x^2}$ 在已知区间 $[0, 1]$ 上的平均平方差为最小, 求近似公式

$$\sqrt{1+x^2} \approx a+bx \quad (0 \leq x \leq 1).$$

解 按题设, 即在区间 $0 \leq x \leq 1$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似代替函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, 使得

$$\int_0^1 (a+bx - \sqrt{1+x^2})^2 dx = \min.$$

设 $F(a, b) = \int_0^1 (a+bx - \sqrt{1+x^2})^2 dx$, 则 $F(a, b)$

是 a 和 b 的二元连续函数, 并且易知当 $r = \sqrt{a^2+b^2} \rightarrow +\infty$ 时, $F(a, b) \rightarrow +\infty$, 故 $F(a, b)$ 必在有限处取得最小值. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 2 \int_0^1 (a+bx - \sqrt{1+x^2}) dx \\ \quad = 2a + b - [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \int_0^1 x(a+bx - \sqrt{1+x^2}) dx \\ \quad = a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) = 0 \end{cases}$$

得唯一的一组解 $a \approx 0.934$, $b \approx 0.427$.

于是, 当 $a \approx 0.934$, $b \approx 0.427$ 时, $F(a, b)$ 为最小值, 即所求的近似公式为

$$\sqrt{1+x^2} \approx 0.934 + 0.427 x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

3725. 求完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

及

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

的导函数并以函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 来表示它们,

证明 $E(k)$ 满足微分方程式

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad E'(k) &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k^2 \sin^2 \varphi) - 1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \frac{1}{k} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \\ &= \frac{E(k) - F(k)}{k}. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
F'(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \\
&= -\frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k^2 \sin^2 \varphi) - 1}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \\
&= -\frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\
&\quad + \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

我们易证

$$\begin{aligned}
(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{1-k^2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{k^2}{1-k^2} \frac{d}{d\varphi} [\sin \varphi \cos \varphi (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}],
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi \\
&= \frac{1}{1-k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi.
\end{aligned}$$

于是,

$$F'(k) = -\frac{F(k)}{k} + \frac{E(k)}{k(1-k^2)}. \quad (2)$$

由 (1) 式, 对 k 再求导数, 并注意到 (2) 式, 即

得

$$\begin{aligned}
 E''(k) &= \frac{[E'(k) - F'(k)]k - [E(k) - F(k)]}{k^2} \\
 &= \frac{\left[\frac{E(k) - F(k)}{k} + \frac{F(k)}{k} - \frac{E(k)}{k(1-k^2)} \right]k - kE'(k)}{k^2} \\
 &= -\frac{E(k)}{1-k^2} - \frac{E'(k)}{k},
 \end{aligned}$$

即

$$E''(k) + \frac{F'(k)}{k} + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

3726. 证明: 足指数 n 为整数的贝塞尔函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

满足贝塞尔方程式

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

证 $J_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \cdot \sin(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi,$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cdot \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 &x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(x^2 \sin^2 \varphi + n^2 - x^2) \cos(n\varphi - x \sin \varphi) \\
 &\quad - x \sin \varphi \cdot \sin(n\varphi - x \sin \varphi)] d\varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [(n^2 - x^2 \cos^2 \varphi) \cos(n\varphi - x \sin \varphi) \\
&\quad - x \sin \varphi \cdot \sin(n\varphi - x \sin \varphi)] d\varphi \\
&= -\frac{1}{\pi} (n + x \cos \varphi) \cdot \sin(n\varphi - x \sin \varphi) \Big|_0^{\pi} = 0,
\end{aligned}$$

本题获证。

3727. 设:

$$I(a) = \int_0^a \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{a-x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导函数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0 \leq x \leq a$ 上连续.

证明: 当 $0 < a < a$ 时有

$$I'(a) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{a}} + \int_0^a \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a-x}} dx.$$

证 当 $x=a$ 时, 一般说来被积函数变成无穷, 所以 我们不能直接在积分号下求导数. 设 $x=at$, 则此积分变成以下形式

$$I(a) = \sqrt{a} \int_0^1 \frac{\varphi(at)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[0, 1]$ 上绝对可积, 故可利用积分号下求导数的公式. 于是,

$$I'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^1 \frac{\varphi(at)}{\sqrt{1-t}} dt$$

$$+\sqrt{a} \int_0^1 \frac{t \varphi'(at)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

再將 $x=at$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \frac{1}{2a} \int_0^a \frac{\varphi(x)}{\sqrt{a-x}} dx \\ &\quad + \frac{1}{a} \int_0^a \frac{x \varphi'(x)}{\sqrt{a-x}} dx. \end{aligned} \quad (1)$$

利用分部积分法可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a} \int_0^a \frac{\varphi(x)}{\sqrt{a-x}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}} \varphi(0) + \frac{2}{a} \int_0^a \sqrt{a-x} \varphi'(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

另一方面, 又有

$$\begin{aligned} &\int_0^a \frac{x \varphi'(x)}{\sqrt{a-x}} dx \\ &= - \int_0^a \sqrt{a-x} \varphi'(x) dx \\ &\quad + a \int_0^a \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a-x}} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

將 (2) 式及 (3) 式代入 (1) 式, 最后得

$$I'(a) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{a}} + \int_0^a \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a-x}} dx.$$

3728. 设有函数

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) v(y) dy,$$

其中

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{若 } x \leq y, \\ y(1-x), & \text{若 } x > y, \end{cases}$$

及 $v(y)$ 都是连续的. 证明已知函数满足方程式

$$u''(x) = -v(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

证 由题设得

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x y(1-x)v(y)dy \\ &\quad + \int_x^1 x(1-y)v(y)dy. \end{aligned}$$

于是, 求导数即得

$$\begin{aligned} u'(x) &= x(1-x)v(x) - \int_0^x yv(y)dy \\ &\quad - x(1-x)v(x) + \int_x^1 (1-y)v(y)dy \\ &= - \int_0^x yv(y)dy + \int_x^1 (1-y)v(y)dy, \end{aligned}$$

$$u''(x) = -xv(x) - (1-x)v(x) = -v(x),$$

所以, 函数 $u(x)$ 满足方程

$$u''(x) = -v(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

3729. 设:

$$F(x, y) = \int_{xy}^{xy} (x-yz)f(z)dz,$$

其中 $f(z)$ 为可微分的函数, 求 $F''_{xy}(x, y)$.

解 $F'_x(x, y) = y(x - xy^2)f(xy) + \int_{\frac{x}{y}}^{xy} f(z)dz,$

$$\begin{aligned} F''_{xy}(x, y) &= (x - xy^2)f(xy) \\ &\quad + y \cdot (-2xy)f(xy) \\ &\quad + y(x - xy^2)f'(xy) \cdot x \\ &\quad + xf(xy) + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= x(2 - 3y^2)f(xy) \\ &\quad + x^2y(1 - y^2)f'(xy) \\ &\quad + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

3730. 设 $f(x)$ 为可微分两次的函数及 $F(x)$ 为可微分的函数. 证明: 函数

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z)dz \end{aligned}$$

满足弦振动的方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件: $u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = F(x).$

证 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}[-af'(x - at) + af'(x + at)]$

$$+ \frac{1}{2}F(x + at) + \frac{1}{2}F(x - at),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} [a^2 f''(x-at) + a^2 f''(x+at)] \\ &\quad + \frac{a}{2} F'(x+at) - \frac{a}{2} F'(x-at), \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} [f'(x-at) + f'(x+at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} F(x+at) - \frac{1}{2a} F(x-at),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} [f''(x-at) + f''(x+at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} F'(x+at) - \frac{1}{2a} F'(x-at), \quad (2)\end{aligned}$$

比较 (1) 式及 (2) 式, 即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

此外, 还有

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \frac{1}{2} [f(x-0 \cdot t) + f(x+0 \cdot t)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x-0 \cdot t}^{x+0 \cdot t} F(z) dz = f(x), \\ u'_x(x, 0) &= \frac{1}{2} [-a f'(x) + a f'(x)] \\ &\quad + \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2} F(x) = F(x).\end{aligned}$$

本题获证.

3731. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, l]$ 上连续及当 $0 \leq \xi \leq l$ 时 $(x-\xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, 则函数

$$u(x, y, z) = \int_0^l \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

满足拉普拉斯方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

证 利用积分号下的求导法则, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= - \int_0^l \frac{2(x-\xi)f(\xi)d\xi}{2[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \int_0^l \frac{(x-\xi)f(\xi)d\xi}{[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \int_0^l \frac{f(\xi) \cdot [2(x-\xi)^2 - y^2 - z^2]}{[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi. \quad (1) \end{aligned}$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \int_0^l \frac{f(\xi) \cdot [-(x-\xi)^2 + 2y^2 - z^2]}{[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \int_0^l \frac{f(\xi) \cdot [-(x-\xi)^2 - y^2 + 2z^2]}{[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi. \quad (3)$$

将 (1)、(2)、(3) 三式相加, 即证得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

应用对参数的微分法，计算下列积分：

$$3732. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx.$$

解 将 b 视为常数， a 视为参变量。令

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx.$$

先设 $a > 0$ ， $b > 0$ 。我们有

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx,$$

$$\text{若 } a=b, \text{ 有 } I'(b) = \frac{2}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2b}.$$

若 $a \neq b$ ，则作代换 $t = \operatorname{tg} x$ ，得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1) \left(t^2 + \frac{b^2}{a^2} \right)} \\ &= \frac{2}{a} \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{at}{b} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{a+b}. \end{aligned}$$

因此

$$I'(a) = \frac{\pi}{a+b} \quad (0 < a < +\infty).$$

积分之，得

$$I(a) = \pi \ln(a+b) + C \quad (0 \leq a < +\infty),$$

其中 C 为某常数，令 $a=b$ ，得

$$I(b) = \pi \ln 2b + C,$$

而 $I(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln b^2 dx = \pi \ln b$ ，代入，解之，得

$$C = \pi \ln \frac{1}{2}. \text{ 于是,}$$

$$I(a) = \pi \ln(a+b) + \pi \ln \frac{1}{2}$$

$$= \pi \ln \frac{a+b}{2} \quad (0 \leq a < +\infty).$$

若 $a < 0$ 或 $b < 0$ ，则可化为 $a > 0$ 且 $b > 0$ 的情形，得

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(|a|^2 \sin^2 x + |b|^2 \cos^2 x) dx \\ &= I(|a|) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}. \end{aligned}$$

于是，不论 a, b 是正是负，在任何情形，均有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}.$$

$$3733. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

解 设 $I(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$. 当 $|a| < 1$ 时, 由于 $1 - 2a \cos x + a^2 \geq 1 - 2|a| + a^2 = (1 - |a|)^2 > 0$, 故 $\ln(1 - 2a \cos x + a^2)$ 为连续函数且具有连续导数, 从而可在积分号下求导数. 将 $I(a)$ 对 a 求导数, 得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^\pi \frac{-2 \cos x + 2a}{1 - 2a \cos x + a^2} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\pi \left(1 + \frac{a^2 - 1}{1 - 2a \cos x + a^2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{a} - \frac{1 - a^2}{a} \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + a^2) - 2a \cos x} \\ &= \frac{\pi}{a} - \frac{1 - a^2}{a(1 + a^2)} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \left(\frac{-2a}{1 + a^2} \right) \cos x} \\ &= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \Big|_0^\pi * \\ &= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \cdot \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

于是, 当 $|a| < 1$ 时, $I(a) = C$ (常数). 但是, $I(0) = 0$, 故 $C = 0$. 从而 $I(a) = 0$.

当 $|a| > 1$ 时, 令 $b = \frac{1}{a}$, 则 $|b| < 1$, 并有

$$I(b) = 0.$$

于是, 我们有

$$I(a) = \int_0^\pi \ln \left(\frac{b^2 - 2b \cos x + 1}{b^2} \right) dx$$

$$= I(b) - 2\pi \ln |b|$$

$$= -2\pi \ln |b| = 2\pi \ln |a|.$$

当 $|a| = 1$ 时,

$$I(1) = \int_0^\pi \ln 2(1 - \cos x) dx$$

$$= \int_0^\pi \left(\ln 4 + 2 \ln \sin \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= 2\pi \ln 2 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$$

$$= 2\pi \ln 2 + 4 \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right)^{**})$$

$$= 0;$$

同法可求得 $I(-1) = 0$.

综上所述, 故知

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{当 } |a| \leq 1; \\ 2\pi \ln |a|, & \text{当 } |a| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

*) 利用2028题(a)的结果.

**) 利用2353题(a)的结果.

$$3734. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

解. 令 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, a) dx$, 其中 $f(x, a) = \frac{\arctg(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$. 本来 $f(x, a)$ 在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 时无定义, 但因 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x, a) = a$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x, a) = 0$,

故若补充定义 $f(0, a) = a, f(\frac{\pi}{2}, a) = 0$, 则 $f(x, a)$ 为 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -\infty < a < +\infty$ 上的连续函数.

又当 $0 < x < \frac{\pi}{2}, -\infty < a < +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} f'_x(x, a) &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x} \\ &= \frac{1}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}. \end{aligned}$$

而按规定 $f(0, a) = a, f(\frac{\pi}{2}, a) = 0$, 故

$$f'_x(0, a) = 1, \quad f'_x(\frac{\pi}{2}, a) = 0.$$

由此可知

$$f'_a(x, a) = \begin{cases} \frac{1}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}, & \text{当 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, -\infty < a < +\infty \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x = \frac{\pi}{2}, -\infty < a < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

显然 $f_2(x, a)$ 在 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < a < +\infty$ 上连续,

在 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $-\infty < a < 0$ 上也连续 (注意, 在点

$x = \frac{\pi}{2}$, $a = 0$ 不连续), 故由积分号下求导数法则知

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

($0 < a < +\infty$ 或 $-\infty < a < 0$).

作代换 $\operatorname{tg} x = t$, 得 (当 $a^2 \neq 1$ 时)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2 t^2)} \\ &= \frac{1}{1-a^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2}{a^2 t^2 + 1} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2(1+|a|)}. \end{aligned}$$

若 $a^2 = 1$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

总之, 有

$$I'(a) = \frac{\pi}{2(1+|a|)}$$

$$(0 < a < +\infty \text{ 或 } -\infty < a < 0),$$

积分之, 得

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C_1 \quad (0 < a < +\infty),$$

$$I(a) = -\frac{\pi}{2} \ln(1-a) + C_2 \quad (-\infty < a < 0),$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 由于上面已述 $f(x, a)$ 在

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -\infty < a < +\infty$ 上连续, 故 $I(a)$ 在 $-\infty <$

$a < +\infty$ 上连续, 因此 $\lim_{a \rightarrow 0+0} I(a) = \lim_{a \rightarrow 0-0} I(a) = I(0)$;

但 $I(0) = 0$, $\lim_{a \rightarrow 0+0} I(a) = C_1$, $\lim_{a \rightarrow 0-0} I(a) = C_2$,

故 $C_1 = C_2 = 0$. 于是, 最后得

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \ln(1+|a|) \quad (-\infty < a < +\infty).$$

$$3735. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1).$$

解 解法一

$$\text{设 } I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}. \text{ 由于}$$

$$\frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} = \frac{1-a^2 \cos^2 x}{1-2a \cos x + a^2 \cos^2 x}$$

$$\geq \frac{1-a^2}{1+2|a|+a^2}$$

$$= \frac{1-a^2}{(1+|a|)^2} > 0,$$

故 $\ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x}$ 为连续函数. 又由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\cos x} \cdot \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+at) - \ln(1-at)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+at} - \frac{-a}{1-at}}{1} = 2a, \end{aligned}$$

今补充被积函数在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的值为 $2a$, 即易知被积函数为连续函数, 且它对 a 有连续导数, 从而可在积分号下求导数, 得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+a \cos x} + \frac{1}{1-a \cos x} \right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \left[\arctg \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \arctg \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2} *} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \end{aligned}$$

从而 $I(a) = \pi \arcsin a + C$ ($|a| < 1$). 又 $I(0) = 0$, 故 $C = 0$.

于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} = \pi \arcsin a \quad (|a| \leq 1).$$

*) 利用2028题(a)的结果.

解法二

把被积函数表成下述积分形式

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} = 2a \int_0^1 \frac{dy}{1-a^2 y^2 \cos^2 x}.$$

注意, 此式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时也成立, 此时左端应理解为其极限值

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\cos x} \cdot \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} = 2a.$$

于是, 当 $a \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \\ &= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^1 \frac{dy}{1-a^2 y^2 \cos^2 x} \\ &= 2a \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2 y^2 \cos^2 x} \\ &= 2a \int_0^1 \frac{\pi}{2 \sqrt{1-a^2 y^2}} dy \quad (**) \\ &= \pi a \cdot \frac{1}{a} \arcsin ay \Big|_0^1 = \pi \arcsin a. \end{aligned}$$

当 $a = 0$ 时, 原积分显然为零. 因此,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} = \pi \operatorname{arcsin} a \quad (|a| < 1).$$

**) 利用 2028 题(a)的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2 y^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+ay \cos x} + \frac{1}{1-ay \cos x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-a^2 y^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-ay}{1+ay}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+ay}{1-ay}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-a^2 y^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \sqrt{1-a^2 y^2}}. \end{aligned}$$

3736. 利用公式

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2},$$

$$\text{计算积分 } \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}. \end{aligned}$$

由于函数 $\frac{1}{1+x^2 y^2}$ 在 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上连

续, 且 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0, 1]$ 上绝对可积, 故上述积分号可交换

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\arctg x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

作代换 $x = \cos t$, 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\cos^2 t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \arctg \left(\frac{\tg t}{\sqrt{1+y^2}} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

于是, 由 (1) 式及 (2) 式即得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\arctg x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{\pi dy}{2\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

3737. 应用积分符号下的积分法, 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解 首先注意, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{x^{-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (bx^b - ax^a) = b - a, \end{aligned}$$

故 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ 不是广义积分, 并且, 如果补充定义被积函数在 $x = 0$ 时的值为 0, 在 $x = 1$ 时的值为 $b - a$, 则可理解为 $[0, 1]$ 上连续函数的积分. 由于

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(注意, $x = 0$ 时左端规定为 0, $x = 1$ 时左端规定为 $b - a$), 而函数 x^y 在 $0 \leq x \leq 1$, $a \leq y \leq b$ 上连续 (不妨设 $a \leq b$), 故有

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx \\ &= \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}. \end{aligned}$$

3738. 计算积分:

$$(a) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx;$$

$$(b) \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解 (a) 不妨设 $a < b$.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx \int_a^b x^y dy \\ &= \int_a^b dy \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx, \end{aligned}$$

这里, 当 $x=0$ 时, $\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$ 理解为零, 从而

$\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$ 在 $0 \leq x \leq 1$, $a \leq y \leq b$ 上连续, 故可

应用积分号下的积分法交换积分次序.

作代换 $x=e^{-t}$, 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t} \sin t dt \\ &= \frac{1}{1+(1+y)^2} [-(y+1)\sin t \\ & \quad - \cos t] e^{-(y+1)t} \Big|_0^{+\infty} *) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+(1+y)^2}.$$

于是, 最后得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_a^b \frac{dy}{1+(1+y)^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1+y) \Big|_a^b \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1+b) - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1+a) \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}. \end{aligned}$$

(6) 同(a)并利用1828题的结果易得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_a^b dy \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx \\ &= \int_a^b \frac{1+y}{1+(1+y)^2} dy = \frac{1}{2} \ln[1+(1+y)^2] \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}. \end{aligned}$$

*) 利用1829题的结果.

3739. 设 $F(k)$ 和 $E(k)$ 为完全椭圆积分 (参阅问题3725). 证明公式

$$(a) \quad \int_0^k F(k) k dk = E(k) - k_1^2 F(k);$$

$$(6) \int_0^k E(k) k dk = \frac{1}{3} [(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)],$$

其中 $k_1^2 = 1 - k^2$.

证 (a) 利用3725题的结果, 可得

$$\begin{aligned} & [E(k) - k_1^2 F(k)]' \\ &= E'(k) + 2k F(k) - (1 - k^2) F'(k) \\ &= \frac{E(k) - F(k)}{k} + 2k F(k) \\ &\quad - (1 - k^2) \left[\frac{E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{F(k)}{k} \right] \\ &= k F(k). \end{aligned}$$

于是,

$$E(k) - k_1^2 F(k) = \int_0^k k F(k) dk + C,$$

其中 C 为常数. 但当 $k=0$ 时, 上式左端为 $E(0) - F(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, 而右端等于 C , 故 $C=0$. 最后证得

$$\int_0^k k F(k) dk = E(k) - k_1^2 F(k).$$

(6) 由于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} [(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)]' \\ &= \frac{1}{3} (2k E(k) + (1+k^2)E'(k) + 2k F(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(1-k^2)F'(k)] \\
& = \frac{1}{3} \left\{ 2k E(k) + (1+k^2) \cdot \frac{E(k)-F(k)}{k} \right. \\
& \quad \left. + 2k F(k) - (1-k^2) \cdot \left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k} \right] \right\} \\
& = k E(k),
\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k^2F(k)] = \int_0^k k E(k)dk + C,$$

以 $k=0$ 代入上式, 得 $C=0$. 于是, 最后证得

$$\int_0^k k E(k)dk = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k^2F(k)].$$

3740. 证明公式

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x),$$

其中 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 为足指数是 0 与 1 的贝塞耳函数 (参阅问题 3726) .

$$\begin{aligned}
\text{证} \quad \int_0^x u J_0(u) du &= \frac{1}{\pi} \int_0^x u du \int_0^\pi \cos(-u \sin \varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x u du \int_0^\pi [\cos(\varphi - u \sin \varphi) \cos \varphi \\
&\quad + \sin(\varphi - u \sin \varphi) \sin \varphi] d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi u \cos(\varphi - u \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi u \sin(\varphi - u \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d(u \sin \varphi) \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x d\varphi \int_0^\pi u \sin(\varphi - u \sin \varphi) d(u \sin \varphi - \varphi) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d(u \sin \varphi - \varphi) \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x d\varphi \int_0^\pi u d \cos(\varphi - u \sin \varphi) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(\varphi - x \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^x d\varphi \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(\varphi - x \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(\varphi - x \sin \varphi) d\varphi = x J_1(x),
\end{aligned}$$

上述各式中的被积函数显然为 u 及 φ 的二元连续函数，因此，交换积分顺序是合理的。本题获证。

§ 2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性

1° 一致收敛性的定义 若对于任何的 $\varepsilon > 0$, 都存在有数 $B = B(\varepsilon)$, 使得在 $b \geq B$ 的条件下有

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2),$$

则称广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (1)$$

(其中函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$ 内是连续的) 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛.

积分 (1) 的一致收敛与形状如下的一切级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y) dx \quad (2)$$

(其中 $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$) 的一致收敛等价.

若积分 (1) 在区间 (y_1, y_2) 中一致收敛, 则在这个区间内它是参数 y 的连续函数.

2° 哥西判别法则 积分 (1) 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛的充分而且必要的条件为, 对于任何的 $\varepsilon > 0$ 便存在有数 $B = B(\varepsilon)$, 使得只要是 $b' \geq B$ 及 $b'' \geq B$ 则

$$\text{当 } y_1 < y < y_2 \text{ 时 } \left| \int_{b'}^{b''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

3° 外尔什特拉斯判别法 对于积分 (1) 一致收敛的

充分条件为, 与参数 y 无关的强函数 $F(x)$ 存在, 使得

$$(1) \text{ 当 } a \leq x < +\infty \text{ 时 } |f(x, y)| \leq F(x)$$

及

$$(2) \int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty.$$

4° 对于不连续函数的广义积分有类似的定理.

求积分的收敛域:

$$3741. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx.$$

解 当 $a \geq 0$ 时,

$$\frac{e^{-ax}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

故原积分收敛.

当 $a < 0$ 时, 原积分显然发散. 于是, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx \text{ 的收敛域为 } a \geq 0 \text{ 的一切 } a \text{ 值.}$$

$$3742. \int_x^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx.$$

解 首先注意

$$\left(\frac{x}{x^p + x^q} \right)' = -\frac{(1-p)x^p + (1-q)x^q}{(x^p + x^q)^2}.$$

若 $\max(p, q) > 1$, 则显然当 x 充分大时, $\left(-\frac{x}{x^p + x^q}\right)' < 0$, 从而当 x 充分大时函数 $\frac{x}{x^p + x^q}$ 是递减的, 并且很明显, 这时

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^p + x^q} = 0.$$

又因 $\left| \int_x^A \cos x \, dx \right| = |\sin A| \leq 1$ (对任何 $A > \pi$),

故知 $\int_x^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} \, dx$ 收敛.

若 $\max(p, q) \leq 1$, 则恒有 $\left(-\frac{x}{x^p + x^q}\right)' \geq 0$,

故函数 $\frac{x}{x^p + x^q}$ 在 $x \geq \pi$ 上是递增的. 于是, 对于任何正整数 n , 有

$$\begin{aligned} & \int_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} \, dx \\ & \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{x}{x^p + x^q} \, dx \\ & \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{\pi^p + \pi^q} \cdot \frac{\pi}{4} \\ & = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{8(\pi^p + \pi^q)} = \text{常数} > 0, \end{aligned}$$

故不满足柯西收敛准则, 因此积分 $\int_x^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} \, dx$

发散.

$$3743. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx.$$

解 若 $q = 0$, 则由于积分 $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 仅当 $p > 1$ 时收敛, 而积分 $\int_0^A \frac{1}{x^p} dx$ 仅当 $p < 1$ 时收敛, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 1}{x^p} dx$ 对于任何的 p 值及 $q = 0$ 发散.

若 $q \neq 0$, 则积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx = \int_0^{+\infty} x^{-p} \sin x^q dx,$$

利用 2380 题的结果即知: 当 $\left| \frac{1-p}{q} \right| < 1$ 时, 原积分收敛.

$$3744. \int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}.$$

解 考虑积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{|\ln x|^p} &= \int_0^1 \frac{dx}{\ln^p\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= \int_0^1 \ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \end{aligned}$$

利用 2362 题的结果即知: 它当 $-p > -1$ 或 $p < 1$ 时收敛.

再考虑积分

$$\int_1^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} = \int_1^2 \frac{dx}{\ln^p x}.$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^p \cdot \frac{1}{\ln^p x} &= \left[\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{\ln x} \right]^p \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^{-1}} \right]^p = 1, \end{aligned}$$

故积分 $\int_1^2 \frac{dx}{\ln^p x}$ 与积分 $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^p}$ 具有相同的敛散性，而后者显然当 $p < 1$ 时收敛， $p \geq 1$ 时发散，从而前者亦然。

于是，仅当 $p < 1$ 时，积分

$$\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$$

收敛。

$$3745. \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx.$$

$$\text{解 } \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x} \cdot \sqrt[n]{1+x}} dx.$$

由于当 $0 \leq x \leq 1$ 时，对于任意的 n ， $\sqrt[n]{1+x}$ 与

$\frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$ 都是单调有界函数，故原积分与积分

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}} dx$$

同敛散. 对此积分作代换 $t = \frac{1}{1-x}$, 则得

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}} dt.$$

易知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ 仅当 $\alpha > 0$ 时收敛. 事实上, 当 $\alpha > 0$ 时它显然收敛. 当 $\alpha = 0$ 时它显然发散. 当 $\alpha < 0$ 时, 令 $\beta = -\alpha$ ($\beta > 0$), 则对于正整数 n 有

$$\begin{aligned} & \int_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} t^\beta \cos t dt \\ & \geq (2n\pi)^\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

故积分 $\int_1^{+\infty} t^\beta \cos t dt$ 发散.

于是, 积分

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx$$

仅当 $2 - \frac{1}{n} > 0$ 时收敛, 即仅当 $n < 0$ 或 $n > \frac{1}{2}$ 时收敛.

$$3746. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx \quad (p > 0).$$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{p-1} + \frac{\sin x}{x}} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{当 } p > 1 \text{ 时;} \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } p = 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } 0 < p < 1 \text{ 时,} \end{cases} \end{aligned}$$

故 $x = 0$ 不是积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$ 的瑕点, 因此,

只要讨论积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$ ($p > 0$) 的敛散性.

由于

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)},$$

而 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 收敛 (当 $p > 0$ 时), 故只要讨论

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)} dx$$

的敛散性. 但当 $p > 0$, $x \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^p(x^p + 1)} - \frac{\cos 2x}{x^p(x^p + 1)} \right] \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + 1)} \leq \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p-1)} \leq \frac{1}{x^p(x^p-1)}.$$

而易知 $\int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)} dx$ 恒收敛 (当 $p > 0$ 时), 积

分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p+1)}$ 当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时发散, 积分

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p-1)}$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 故积分

$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)} dx$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 当 $0 < p$

$\leq \frac{1}{2}$ 时发散. 由此可知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x} dx$

($p > 0$) 仅当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛.

利用与级数比较的方法研究下列积分的收敛性:

$$3747. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx.$$

解 设 $a > 0$. 我们证明: 对任何数列

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots \quad (a_n \rightarrow +\infty),$$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 都收敛. 事实上, 有

$$\begin{aligned} & \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx \\ &= \frac{\sin x}{x+a} \Big|_{a_n}^{a_{n+1}} + \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\sin x}{(x+a)^2} dx, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m}^{m+p-1} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx \\ &= \frac{\sin a_{m+p}}{a_{m+p}+a} - \frac{\sin a_m}{a_m+a} + \int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{\sin x}{(x+a)^2} dx, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=m}^{m+p-1} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx \right| \\ & \leq \frac{1}{a_{m+p}+a} + \frac{1}{a_m+a} + \int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{dx}{(x+a)^2} \\ &= \frac{1}{a_{m+p}+a} + \frac{1}{a_m+a} + \left(\frac{1}{a_m+a} - \frac{1}{a_{m+p}+a} \right) \\ &= \frac{2}{a_m+a}, \end{aligned}$$

由此可知, 满足柯西收敛准则, 从而级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 收敛. 因此, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 收敛.

若 $a=0$, 显然瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$ 发散, 故广

义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ 发散.

下设 $a < 0$. 若 $a = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$),

则

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx \\
&= \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x+a} dx + \int_{(n+1)\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx \\
&= \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x+a} dx + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}} dt.
\end{aligned}$$

由上所证，右端第二个积分收敛；又由于

$$\lim_{x \rightarrow (n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\cos x}{x+a} = (-1)^{n+1},$$

故右端第一个积分收敛（它不是广义积分，补充定义被积函数在 $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ 时的值为 $(-1)^{n+1}$ 后即为

连续函数的积分）；从而，此时积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 收敛。

若 $a < 0$ 但 $a \neq -(n + \frac{1}{2})\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$)，此时 $\cos(-a) \neq 0$ 。由连续性，可取 $\delta > 0$ ，使当 $-a \leq x \leq -a + \delta$ 时 $\cos x$ 保持定号且

$$|\cos x| \geq \frac{1}{2} |\cos(-a)|.$$

于是，

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-a}^{-a+\delta} \frac{\cos x}{x+a} dx \right| \\
& \geq \frac{1}{2} |\cos(-a)| \cdot \int_{-a}^{-a+\delta} \frac{dx}{x+a} = +\infty.
\end{aligned}$$

由此可知,瑕积分 $\int_{-a}^{-a+\delta} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 发散.从而积分

$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 更是发散.

综上所述,积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx$$

仅当 $a > 0$ 及 $a = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 时收敛.

3748. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \quad (n > 0).$

解 由于被积函数非负,故只要考虑化为一种特殊的(正项)级数即可.我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}. \end{aligned}$$

又积分

$$0 \leq \int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}$$

$$\wedge \int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}} \frac{k\pi dx}{1 + [(k-1)\pi]^n \sin^2 x},$$

$$\int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{(k-1)\pi dx}{1 + [(k+1)\pi]^n \sin^2 x}$$

$$\wedge \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 + x^n \sin^2 x}$$

$$\wedge \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{(k+1)\pi dx}{1 + [(k-1)\pi]^n \sin^2 x},$$

И

$$\int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+a^2}} \right) \Big|_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{2}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}},$$

$$\int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{1+a^2} \operatorname{tg} x) \Big|_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{1+a^2}.$$

由于

$$\frac{\pi}{4} < \arctg \sqrt{1+a^2} < \frac{\pi}{2},$$

从而

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}} < \int_{ix-\frac{\pi}{4}}^{ix+\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x} < \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{ix-\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \\ &< \frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}, \\ &\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}} \\ &< \int_{ix-\frac{\pi}{4}}^{ix+\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} < \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}. \end{aligned}$$

由于当 $n > 4$ 时, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 及

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 收敛; 而当 $n \leq 4$ 时, 级数

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}$ 发散, 故级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{(i-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{ix-\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}$$

当 $n > 4$ 时收敛, 而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}$$

仅当 $n \geq 4$ 时收敛.

因此, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}$$

仅当 $n \geq 4$ 时收敛.

3749.
$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[p]{\sin^2 x}}.$$

解 由于被积函数非负, 故只要考虑化为一种特殊的 (正项) 级数即可. 我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[p]{\sin^2 x}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p \sqrt[p]{\sin^2 x}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{dx}{(x+n\pi)^p \sqrt[p]{\sin^2 x}}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[p]{\sin^2 x}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p \pi^p} \\ & \leq \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[p]{\sin^2 x}} \\ & \leq \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[p]{\sin^2 x}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p \pi^p}. \end{aligned}$$

易证积分

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

收敛, 且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散. 因此, 原积分仅当 $p > 1$ 时收敛.

$$3750. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx.$$

解 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx. \end{aligned}$$

易知右端第一个积分($x=0$ 可能是瑕点)当 $n < 2$ 时收敛, 当 $n \geq 2$ 时发散. 下面研究右端第二个积分. 先设 $n > -1$. 对任何数列

$$1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k < \cdots \quad (a_k \rightarrow +\infty),$$

$$\begin{aligned} & \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \\ &= - \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{d[\cos(x+x^2)]}{x^n(1+2x)} \\ &= - \frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)} \Big|_{a_k}^{a_{k+1}} \end{aligned}$$

$$= \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2} dx,$$

故

$$\begin{aligned} & \sum_{k=m}^{m+p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \\ &= - \frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)} \Big|_{a_m}^{a_{m+p}} \\ &= \int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{[2(n+1)x+n]\cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2} dx, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=m}^{m+p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2a_m^{n+1}} + \frac{1}{2a_{m+p}^{n+1}} + \int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2} dx. \end{aligned}$$

易知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2} dx$ 收敛 (因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} \cdot \frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2} = \frac{n+1}{2} > 0,$$

$n+2 > 1$) .

由此可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 必存在 N , 使当 $n > N$ 时, 对 $p = 1, 2, 3, \dots$, 均有

$$\left| \sum_{k=m}^{m+p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \right| < \varepsilon.$$

于是, 根据柯西收敛准则, 级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$$

收敛, 从而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$ 收敛.

再设 $n \leq -1$. 令 ξ_k 和 η_k 分别表方程 $x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ 和 $x^2+x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 的 (唯一) 正根, 其中 $k=1, 2, 3, \dots$; 即令

$$\xi_k = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1),$$

$$\eta_k = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+2\pi}-1).$$

于是 $\eta_k > \xi_k \rightarrow +\infty$ (当 $k \rightarrow \infty$ 时). 我们有 (注意 $-n \geq 1$)

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_k}^{\eta_k} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\xi_k}^{\eta_k} x^{-n} dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\xi_k}^{\eta_k} x dx \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_k (\eta_k - \xi_k) \\ & = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+8k\pi+\pi}-1}{\sqrt{1+8k\pi+2\pi}+\sqrt{1+8k\pi+\pi}} \\ & \rightarrow \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty \text{ 时}). \end{aligned}$$

由此可知, 此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$ 发散.

综上所述，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$$

仅当 $-1 < n < 2$ 时收敛。

3751. 在肯定的意义上表达出来，甚么是积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在已知区间 (y_1, y_2) 内不一致收敛？

解 若对于某个正数 ε_0 ，不论 B 取得多大，恒存在 $b_0 \geq B$ 以及 $y_0 \in (y_1, y_2)$ (b_0 与 y_0 都依赖于 B)，使得

$$\left| \int_{b_0}^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \geq \varepsilon_0,$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在区间 (y_1, y_2) 内不一致收敛。

3752. 证明：若 1) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛，2) 函数 $\varphi(x, y)$ 有界并关于 x 是单调的，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x, y) dx$$

一致收敛（在对应的域内）。

证 设 $|\varphi(x, y)| \leq L$ ，则由题设 1) 知：对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，总存在数 $B = B(\varepsilon)$ ，使当 $A' > A > B$ 时，就

有不等式

$$\left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}. \quad (1)$$

由积分第二中值定理知：存在 $\xi \in [A, A']$ ，使有下述等式

$$\begin{aligned} & \int_A^{A'} f(x) \varphi(x, y) dx \\ &= \varphi(A+0, y) \cdot \int_A^{\xi} f(x) dx \\ & \quad + \varphi(A'-0, y) \cdot \int_{\xi}^{A'} f(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

由 (1) 式，得

$$\left| \int_A^{\xi} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left| \int_{\xi}^{A'} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

于是，由 (2) 式，可得

$$\begin{aligned} & \left| \int_A^{A'} f(x) \varphi(x, y) dx \right| \\ & < L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即积分 $\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x, y) dx$ 在对应的 y 域内一致收敛。

3753. 证明：一致收敛的积分

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y} \right)^2} dx \quad (0 < y < 1)$$

不能以与参数无关的收敛积分为强函数。

证 任给 $\varepsilon > 0$ ，取 $A_0 > 1$ 充分大，使

$$\int_{A_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon.$$

下证：当 $A > A_0$ 时，对一切 $0 < y < 1$ ，均有

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx < \varepsilon.$$

事实上，当 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \leq y < 1$ 时，

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx &< \int_A^{+\infty} e^{-\left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \\ &= \int_{A - \frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-u^2} du \leq \int_{A - \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &< \int_{A_0 - \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon; \end{aligned}$$

当 $0 < y < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ 时，

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx &< \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \\ &= \int_1^{\frac{1}{y}} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \\
& = \int_0^{\frac{1}{y}-1} e^{-\frac{1}{y^2} t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} t^2} dt \\
& < 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}} dt = 2y \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \\
& = 2y \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

由此可知，积分 $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx$ 在 $0 < y < 1$ 上一致收敛。

最后证明，不存在这样的函数 $\varphi(x)$ ($x \geq 1$)，使

$$\begin{aligned}
0 < e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} \leq \varphi(x) \\
(x \geq 1, \quad 0 < y < 1), \quad (1)
\end{aligned}$$

并且 $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ 收敛。用反证法。假定有这样的函数

$\varphi(x)$ 存在，则由 $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ 的收敛性可知，必

存在点 $x_0 > 1$ 使 $\varphi(x_0) < 1$ 。于是，令 $y_0 = \frac{1}{x_0}$ ，

则 $0 < y_0 < 1$ 且

$$e^{-\frac{1}{y_0^2} \left(x_0 - \frac{1}{y_0}\right)^2} = 1 > \varphi(x_0),$$

此显然与 (1) 式矛盾。由此可知，一致收敛的积分

I 的被积函数不能以与参数 y 无关的具收敛积分的函数为强函数. 证毕.

3754. 证明: 积分

$$I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

1) 在任何区间 $0 < a \leq \alpha \leq b$ 内一致收敛; 2) 在区间 $0 \leq \alpha \leq b$ 内非一致收敛.

证 显然, 积分 I 对于每一个定值 $\alpha \geq 0$ 是收敛的.

事实上, 当 $\alpha = 0$ 时, $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = 0$; 当 $\alpha > 0$

时, $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = 1$.

1) 如果 $0 < a \leq \alpha \leq b$, 则由于

$$0 < \int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha A} \leq e^{-aA},$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 可以找到不依赖于 α 的数

$A_0 = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{\varepsilon}$, 使当 $A > A_0$ 时, 就有

$$\int_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \leq e^{-aA_0} = \varepsilon.$$

于是, 在区间 $0 < a \leq \alpha \leq b$ 上积分 I 一致收敛.

2) 如果 $0 \leq \alpha \leq b$, 则不存在这样的数 A_0 . 事实上, 取 $0 < \varepsilon < 1$ 就办不到. 由于当 $\alpha \rightarrow +0$ 时, $e^{-\alpha A} \rightarrow 1$, 故对于足够小的 α 值, $e^{-\alpha A}$ 就比任意一个小于 1 的数 ε 为大. 因此, 在区间 $0 \leq \alpha \leq b$ 上, 积

分 I 对 α 的收敛是不一致的。

3755. 证明迪里黑里积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

1) 在每一个不含数值 $\alpha = 0$ 的闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 2) 在含数值 $\alpha = 0$ 的每一个闭区间 $[a, b]$ 上非一致收敛。

证 不失一般性, 我们只考虑 α 的正值。

1) 由于积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

是收敛的, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 A_0 , 使当 $A > A_0$ 时, 恒有

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz \right| < \varepsilon.$$

当 $\alpha > 0$ 时, 由于

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{A\alpha}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz,$$

故取 $A > \frac{A_0}{\alpha}$, 对于 $\alpha \geq a > 0$, 就有

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| < \varepsilon.$$

于是, 在区间 $0 < a \leq \alpha \leq b$ 上, 积分 I 是一致收敛的。

2) 对于任何的 $A > 0$, 当 $\alpha \rightarrow +0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_A^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx \\ &= \int_{Aa}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

因此, 当 $a > 0$ 且充分小时, 有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx > \frac{\pi}{4}.$$

于是, 在区间 $0 \leq a \leq b$ ($b > 0$) 上, 积分 I 不一致收敛.

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性:

$$3756. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx \quad (0 < a_0 \leq a < +\infty).$$

解 由于当 $0 < a_0 \leq a < +\infty$ 时,

$$|e^{-ax} \sin x| \leq e^{-a_0 x},$$

且积分 $\int_0^{+\infty} e^{-a_0 x} dx = \frac{1}{a_0}$ 收敛, 故积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$$

在区间 $0 < a_0 \leq a < +\infty$ 上一致收敛.

$$3757. \int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx \quad (a \leq a \leq b).$$

解 当 $a \leq a \leq b$ 且 $x \geq 1$ 时,

$$0 < x^a e^{-x} \leq x^b e^{-x}.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot x^b e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{b+2}}{e^x} = 0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ 收敛. 从而积分

$$\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx$$

在区间 $a \leq \alpha \leq b$ 上一致收敛.

$$3758. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty).$$

解 由于 $\left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, 且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ 收敛, 故积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$$

在 $-\infty < \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

$$3759. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^2+1} \quad (0 \leq \alpha < +\infty).$$

解 由于 $0 < \frac{1}{(x+\alpha)^2+1} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad (0 \leq \alpha < +\infty)$,

且积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ 收敛, 故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\alpha)^2+1}$$

在 $0 \leq \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

$$3760. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx \quad (0 \leq a < +\infty).$$

解 首先注意, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} = 1,$$

故 $x=0$ 不是瑕点.

证法一

由于 $\left| \int_0^A \sin x dx \right| = |1 - \cos A| \leq 2$, 而当 $0 \leq a$

$< +\infty$ 时, 函数 $\frac{e^{-ax}}{x}$ 在 $x > 0$ 关于 x 递减, 并且当 $x \rightarrow +\infty$ 时它关于 a ($0 \leq a < +\infty$) 一致趋于零 (因为 $0 \leq a < +\infty$, $x > 0$ 时, $0 < \frac{e^{-ax}}{x} \leq \frac{1}{x}$), 故由

迪里黑里判别法知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$ 在 $0 \leq a < +\infty$ 上一致收敛.

证法二

由积分学第二中值定理知: 当 $A' > A > 0$ 时,

$$\left| \int_A^{A'} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx \right| = \left| \frac{1}{A} \int_A^{\xi} e^{-ax} \sin x dx \right|,$$

其中 $A \leq \xi \leq A'$. 我们知道 $e^{-ax} \sin x$ 的原函数是

$$F_a(x) = -\frac{a \sin x + \cos x}{1 + a^2} e^{-ax},$$

显然, 当 $a \geq 0$, $x > 0$ 时,

$$|F_a(x)| \leq \frac{a+1}{1+a^2} \leq \frac{2a}{1+a^2} + \frac{1}{1+a^2} < 2,$$

故当 $A' > A > 0$, $0 \leq a < +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \int_A^{A'} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{A} (F_a(\xi) - F_a(A)) \right| < \frac{4}{A}. \end{aligned}$$

由此, 利用一致收敛的哥西收敛准则, 即知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

在 $0 \leq a < +\infty$ 上一致收敛. 证毕.

3761. $\int_1^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos x}{x^p} dx$ ($0 \leq a < +\infty$), 其中 $p > 0$ 是常数.

解 由于

$$\left| \int_1^A \cos x dx \right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2,$$

而当 $0 \leq a < +\infty$ 时, 函数 $\frac{e^{-ax}}{x^p}$ 在 $x \geq 1$ 关于 x 递减且当 $x \rightarrow +\infty$ 时关于 a ($0 \leq a < +\infty$) 一致趋于零 (因为 $0 \leq a < +\infty$, $x \geq 1$ 时, $0 < \frac{e^{-ax}}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$),

故由迪里黑里判别法即知 $\int_1^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 在 $0 \leq a < +\infty$ 上一致收敛.

注意, 也可仿3760题证法二, 利用积分学第二中

值定理来证明。

$$3762. \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty).$$

解 此积分是收敛的。事实上，当 $\alpha = 0$ 时，积分为零；当 $\alpha > 0$ 时，设 $\sqrt{\alpha} x = t$ ，则得

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是，此积分却不一致收敛。事实上，对于任何的 $A > 0$ ，由于

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\sqrt{\alpha} A}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned}$$

故对于 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ，必存在 $\alpha_0 > 0$ ，使有

$$\int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha_0} e^{-\alpha_0 x^2} dx > \varepsilon_0,$$

即此积分不是一致收敛的。

$$3763. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx, \quad (a) \quad a < a < b;$$

$$(6) \quad -\infty < a < +\infty.$$

解 显然，对任何固定的 a ，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 都收敛，并且（作代换 $x-a=t$ ）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

(a) 取正数 R 充分大, 使 $-R < a < b < R$. 显然, 当 $|x| \geq R$ 时, 对一切 $a < \alpha < b$, 有

$$0 < e^{-(x-a)^2} < e^{-(|x|-R)^2},$$

显然积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x|-R)^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-(x-R)^2} dx$

收敛, 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 对 $a < \alpha < b$ 一致收敛.

(6) 对任何 $A > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{A-a}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

故当 a 充分大时, $\int_A^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; 由此

可知 $\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $-\infty < a < +\infty$ 上非一致收敛,

当然 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $-\infty < a < +\infty$ 上更非一致收敛.

3764. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy \quad (-\infty < x < +\infty).$

解 此积分对任一固定的 x 值, 显然是收敛的, 且当 $x > 0$ 时,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy = \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是, 它对 $-\infty < x < +\infty$ 却不是一致收敛的, 事实上, 对于任何的 $A > 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_A^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x \, dy \\ &= \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} \cdot \int_{Ax}^{+\infty} e^{-t^2} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (x \rightarrow +0), \end{aligned}$$

由此可知积分不一致收敛.

3765. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p} dx \quad (p \geqslant 0).$

解 由2380题易知积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

收敛, 又 $\frac{1}{1+x^p} \quad (p \geqslant 0)$ 在 $x \geqslant 0$ 上对 x 单调递减且一致有界:

$$0 < \frac{1}{1+x^p} \leqslant 1 \quad (p \geqslant 0, x \geqslant 0),$$

故由亚伯耳判别法知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p} dx$$

对 $p \geqslant 0$ 一致收敛.

3766. $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx, \quad (\alpha) \quad p \geqslant p_0 > 0;$

(6) $p > 0$ ($q > -1$) .

解 首先注意, $x = 0$ 和 $x = 1$ 都可能是瑕点. 作代换 $x = e^{-t}$, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx &= - \int_{+\infty}^0 e^{-(p-1)t} t^q e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^q dt, \end{aligned}$$

右端的积分当 $p > 0$ ($q > -1$) 时是收敛的^{*}), 从而左端的积分此时也收敛. 更由于 ($\varepsilon, \varepsilon' > 0$ 很小)

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon'} x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_{\ln \frac{1}{1-\varepsilon'}}^{\ln \frac{1}{\varepsilon}} e^{-pt} t^q dt,$$

故 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx$ 的一致收敛性等价于 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^q dt$ 的一致收敛性.

(a) 当 $p \geq p_0 > 0$ 时, 由于

$$0 \leq e^{-pt} t^q \leq e^{-p_0 t} t^q \quad (0 \leq t < +\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} t^q dt$ 收敛, 故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^q dt$ 一致收敛 (对于 $p \geq p_0 > 0$). 从而原积分 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx$ 当 $p \geq p_0 > 0$ 时一致收敛.

(6) 对任何 $A > 0$, $p > 0$, 作代换 $pt = s$, 则

$$\int_A^{+\infty} e^{-pt} t^q dt = \frac{1}{p^{q+1}} \int_{pA}^{+\infty} s^q e^{-s} ds,$$

由于 $q > -1$, 故积分 $\int_0^{+\infty} s^q e^{-s} ds$ 收敛, 且显然

$$0 < \int_0^{+\infty} s^2 e^{-s} ds < +\infty,$$

于是, 有

$$\lim_{p \rightarrow +0} \int_A^{+\infty} e^{-pt} t^2 dt = +\infty,$$

由此即知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^2 dt$ 在 $p > 0$ 上非一致收敛.

从而原积分 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 \frac{1}{x} dx$ 当 $p > 0$ 时非一致收敛.

*) 利用2361题的结果 (在其中作代换 $pt=s$).

$$3767. \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (0 \leq n < +\infty).$$

解 注意, $x=1$ 是瑕点. 由于当 $0 \leq x < 1$ 时, 有

$$0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 \leq n < +\infty),$$

而积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ 收敛, 故由

外氏判别法知积分 $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 当 $0 \leq n < +\infty$ 时一致收敛.

$$3768. \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} \quad (0 < n < 2).$$

解 作代换 $\frac{1}{x} = t$, 则

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} = \int_1^{+\infty} t^{n-2} \sin t \, dt,$$

并且, 很明显, $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n}$ 的一致收敛相当于

$\int_1^{+\infty} t^{n-2} \sin t \, dt$ 的一致收敛. 显然, 当 $n < 2$ 时, 积分

$\int_1^{+\infty} t^{n-2} \sin t \, dt$ 是收敛的. 下证: 当 $0 < n < 2$ 时,

它不一致收敛. 事实上, 当 $0 < n < 2$ 时, 对任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned} \int_{2m\pi + \frac{\pi}{4}}^{2m\pi + \frac{\pi}{2}} t^{n-2} \sin t \, dt &> \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{2m\pi + \frac{\pi}{4}}^{2m\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{2-n}} \\ &> \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow 2-0} \frac{1}{\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{2-n}} = 1$, 故当 n 在 $0 < n < 2$

内且与 2 充分接近时, 必有 $\frac{1}{\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{2-n}} > \frac{1}{2}$. 于

是, 这时

$$\int_{2m\pi + \frac{\pi}{4}}^{2m\pi + \frac{\pi}{2}} t^{n-2} \sin t \, dt > \frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \text{常数} > 0,$$

故 $\int_1^{+\infty} t^{n-2} \sin t \, dt$ 在 $0 < n < 2$ 上非一致收敛.

$$3769. \int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right).$$

解 首先注意 $x=1$, $x=2$ 是瑕点; $x=0$ 可能是瑕点. 将积分分成在 $(0, 1)$ 及 $(1, 2)$ 上的两个积分.

当 $0 < x < 1$ 且 $|\alpha| < \frac{1}{2}$ 时,

$$\left| \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \right| < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}},$$

当 $1 < x < 2$ 且 $|\alpha| < \frac{1}{2}$ 时,

$$\left| \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \right| < \frac{\sqrt{2}}{(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}.$$

易知上述两个不等式右端的函数分别在区间 $(0, 1)$ 及 $(1, 2)$ 上的积分收敛, 故由外氏判别法知积分

$$\int_0^2 \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} dx$$

对 $|\alpha| < \frac{1}{2}$ 一致收敛.

$$3770. \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx \\ &= \int_0^\alpha \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha-x}} dx + \int_\alpha^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx. \end{aligned}$$

对于积分 $\int_0^a \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha-x}} dx$, 由于

$$\begin{aligned} \left| \int_{a-\eta}^a \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha-x}} dx \right| &\leq \int_{a-\eta}^a \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}} \\ &= 2\sqrt{\eta}, \end{aligned}$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 只要取 $0 < \eta < \frac{\varepsilon^2}{4}$, 即有

$$\left| \int_{a-\eta}^a \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha-x}} dx \right| < \varepsilon.$$

因此, 对 $0 \leq \alpha \leq 1$ 它是一致收敛的.

对于积分 $\int_a^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx$, 由于

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{a+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx \right| &\leq \int_a^{a+\eta} \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}} \\ &= 2\sqrt{\eta}, \end{aligned}$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 只要取 $0 < \eta < \frac{\varepsilon^2}{4}$, 即有

$$\left| \int_a^{a+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx \right| < \varepsilon.$$

因此, 对 $0 \leq \alpha \leq 1$ 它是一致收敛的.

于是, 积分

$$\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx$$

对 $0 \leq \alpha \leq 1$ 一致收敛.

3771. 若积分在参数的已知值的某邻域内一致收敛, 则称此积分对参数的已知值一致收敛. 证明积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2}$$

在每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛, 而在 $\alpha = 0$ 非一致收敛.

证 设 α_0 为任一不为零的数, 不妨设 $\alpha_0 > 0$. 今取 $\delta > 0$, 使 $\alpha_0 - \delta > 0$. 下面证明积分 I 在 $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ 内一致收敛. 事实上, 当 $\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ 时, 由于

$$0 < \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 x^2} < \frac{\alpha_0 + \delta}{1 + (\alpha_0 - \delta)^2 x^2},$$

且积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha_0 + \delta}{1 + (\alpha_0 - \delta)^2 x^2} dx$$

收敛, 故由外氏判别法知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2}$$

在 $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ 内一致收敛, 从而在 α_0 点一致收敛. 由 α_0 的任意性知积分 I 在每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛.

其次, 我们证明积分 I 在 $\alpha = 0$ 非一致收敛. 事实上, 对原点的任何邻域 $(-\delta, \delta)$ 均有下述结果: 对任何的 $A > 0$, 有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2 x^2} = \int_{\varepsilon A}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \quad (\alpha > 0).$$

由于

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\varepsilon A}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2},$$

故取 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{2}$, 在 $(-\delta, \delta)$ 中必存在某一个 $\alpha_0 > 0$, 使有

$$\left| \int_{\alpha_0 A}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right| > \varepsilon_0,$$

即

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\alpha_0 dx}{1+\alpha_0^2 x^2} \right| > \varepsilon_0.$$

因此, 积分 I 在 $\alpha = 0$ 点的任一邻域 $(-\delta, \delta)$ 内非一致收敛, 从而积分 I 在 $\alpha = 0$ 时非一致收敛.

3772. 在下式中

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

把极限移到积分符号内合理吗?

解 不合理. 事实上, 由3754题2)的结果知, 积分

$\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ 对 $0 \leq \alpha \leq b$ ($b > 0$) 的收敛并非一致,

故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理. 对于本题, 实际上也不能交换, 这是由于

$$\int_0^{+\infty} \left(\lim_{a \rightarrow +0} a e^{-ax} \right) dx = 0,$$

而

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} a e^{-ax} dx = \lim_{a \rightarrow +0} \left(-e^{-ax} \right) \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

故得

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} a e^{-ax} dx \neq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{a \rightarrow +0} a e^{-ax} \right) dx.$$

3773. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内可积分, 证明公式

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

证 容许有有限个瑕点. 为叙述简单起见, 例如, 设只有一个瑕点 $x=0$. 已知积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛且被积函数中不含有 a , 故它关于 a 一致收敛. 又因函数 e^{-ax} 对于固定的 $0 \leq a \leq 1$, 关于 x ($x > 0$) 是递减的, 并且一致有界: $0 < e^{-ax} \leq 1$ ($0 \leq a \leq 1, x > 0$), 故根据亚贝尔判别法知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx$ 在 $0 \leq a \leq 1$ 上一致收敛. 于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 可取 $\eta > 0$, $A_0 > 0$ ($\eta < A_0$), 使

$$\left| \int_0^\eta e^{-ax} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{5},$$

$$\left| \int_{A_0}^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{5} \quad (0 \leq a \leq 1).$$

由于 $f(x)$ 在 $(\eta, A_0]$ 上常义可积, 故有界, 即存在常数

M_0 , 使 $|f(x)| \leq M_0$ ($\eta \leq x \leq A_0$)。再根据二元函数 e^{-ax} 在 $0 \leq a \leq 1$, $\eta \leq x \leq A_0$ 上的一致连续性知, 必存在 $\delta > 0$ ($\delta < 1$), 使当 $0 < a < \delta$ 时, 对一切 $\eta \leq x \leq A_0$, 皆有

$$0 \leq 1 - e^{-ax} < \frac{\varepsilon}{5 A_0 M_0}.$$

于是, 当 $0 < a < \delta$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\eta}^{A_0} (e^{-ax} - 1) f(x) dx + \int_{A_0}^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx \right. \\ & \quad \left. - \int_{A_0}^{+\infty} f(x) dx + \int_0^{\eta} e^{-ax} f(x) dx - \int_0^{\eta} f(x) dx \right| \\ & \leq M_0 A_0 \cdot \frac{\varepsilon}{5 A_0 M_0} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

3774. 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内绝对可积分, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0.$$

证 由 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的绝对可积性可知: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使有

$$\int_A^{+\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \left| \int_0^A f(x) \sin nx \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

先设 $f(x)$ 在 $[0, A)$ 中无瑕点. 我们在 $[0, A)$ 中插入分点 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m = A$, 并设 $f(x)$ 在 $[t_{k-1}, t_k]$ 上的下确界为 m_k , 则有

$$\begin{aligned} \int_0^A f(x) \sin nx \, dx &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(x) - m_k] \sin nx \, dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^m m_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin nx \, dx, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^A f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^m w_k \Delta t_k + \sum_{k=1}^m |m_k| \cdot \frac{|\cos nt_{k-1} - \cos nt_k|}{n} \\ & \leq \sum_{k=1}^m w_k \Delta t_k + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^m |m_k|, \end{aligned}$$

其中 w_k 为 $f(x)$ 在区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 上的振幅, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

由于 $f(x)$ 在 $[0, A)$ 上可积, 故可取某一分法, 使有

$$\left| \sum_{k=1}^n w_k \Delta t_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这样固定的分法, $\sum_{k=1}^m |m_k|$ 为一定值, 因而存在

N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^m |m_k| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 对于上述所选取的 N , 当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \left| \int_0^A f(x) \sin nx \, dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^n w_k \Delta t_k + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^m |m_k| + \int_A^{+\infty} |f(x)| \, dx \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

其次, 设 $f(x)$ 在区间 $[0, A]$ 中有瑕点. 为简便起见, 不妨设只有一个瑕点, 且为 0. 于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使有

$$\int_0^\eta |f(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

但是, $f(x)$ 在 $[\eta, A]$ 上无瑕点, 故应用上述结果可知存在 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \int_{\eta}^A f(x) \sin nx \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \int_0^{\eta} |f(x)| \, dx + \left| \int_{\eta}^A f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \quad + \int_A^{+\infty} |f(x)| \, dx \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

总之, 当 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内绝对可积, 不论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有无瑕点, 均可证得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

3775. 证明: 若 (1) 在每一个有穷区间 (a, b) 内 $f(x, y) \rightarrow f(x, y_0)$; (2) $|f(x, y)| \leq F(x)$, 其中

$$\int_a^{+\infty} F(x) \, dx < +\infty, \text{ 则}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

证 条件 (1) 表示当 $y \rightarrow y_0$ 时, 当 x 在任何有穷区间 (a, b) 上, $f(x, y)$ 都一致趋于 $f(x, y_0)$. 于是, 有

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

(对任何 $b > a$) .

又在不等式 $|f(x, y)| \leq F(x)$ 中令 $y \rightarrow y_0$ (任意固定 x), 得 $|f(x, y_0)| \leq F(x)$, 故 $\int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx$ 收敛.

任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $\int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty$, 故可取

定某 $b > a$, 使 $\int_b^{+\infty} F(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}$. 对此 b , 又可取 $\delta > 0$, 使当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 恒有

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \\ & \leq \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| \\ & \quad + \int_b^{+\infty} |f(x, y)| dx + \int_b^{+\infty} |f(x, y_0)| dx \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^{+\infty} F(x) dx + \int_b^{+\infty} F(x) dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

由此可知

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \\ &= \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

证毕.

注. 本题中应假定: 对任何 $b > a$, $f(x, y)$ 关于 x 在 $[a, b]$ 上可积.

3776. 利用积分符号与极限号互换, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} \right] dx.$$

解 先证积分符号与极限号能互换. 事实上, (1)

函数 $\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n}$ 在 $0 \leq x \leq A$ 上连续 (任何 $A > 0$),

故它在 $(0, A]$ 上可积; (2) 又 $\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n}$ 在 $(0, A]$ 上关于 n 为单调减小的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} = e^{-x^2}$$

为连续函数, 故按狄尼定理, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 函数

$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ 在 $[0, A]$ 上一致趋向于 e^{-x^2} , (3) 由

于 $0 < \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1+x^2}$ ($n = 1, 2, \dots$), 且

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < +\infty, \text{ 故积分 } \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$

关于 n 一致收敛. 因此, 我们可以应用积分符号与极限号的互换定理*), 从而得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} &= \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \\ &= \sqrt{n} I_n, \end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} \Big|_0^{+\infty} + 2(n-1) \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n} dt \\ &= 2(n-1) I_{n-1} - 2(n-1) I_n, \end{aligned}$$

故得

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

又因 $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, 将上式递推即得

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

于是,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi \sqrt{n}}{2}.$$

根据瓦里斯公式, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n-2)!!]^2}{(2n-1)[(2n-3)!!]^2}. \end{aligned}$$

最后得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)!! \sqrt{n}}{(2n-2)!!} \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)!! \sqrt{2n-1}}{(2n-2)!!} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{n}{2n-1}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷 480目定理 I.

3777. 证明: 积分

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$$

是参数 a 的连续函数.

$$\begin{aligned}
 \text{证 } F(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \int_{-a}^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
 &= \int_{-a}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
 &= \int_0^a e^{-x^2} dx + \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
 \end{aligned}$$

由变上限积分的性质可知积分 $\int_0^a e^{-x^2} dx$ 是 a ($-\infty < a < +\infty$) 的连续函数, 故 $F(a)$ 也是 a ($-\infty < a < +\infty$) 的连续函数.

3778. 求函数

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x} dx$$

的不连续点. 作出函数 $y = F(a)$ 的图形.

解 当 $1 - a^2 > 0$ 即 $|a| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 F(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{(1-a^2)x} d[(1-a^2)x] \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

当 $1 - a^2 < 0$ 即 $|a| > 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 F(a) &= - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(a^2-1)x}{(a^2-1)x} d[(a^2-1)x] \\
 &= - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

当 $1-a^2=0$
即 $|a|=1$ 时,

$$F(a)=0.$$

于是, $a=\pm 1$ 为
 $F(a)$ 的不连续
点. 如图 7·2
所示.

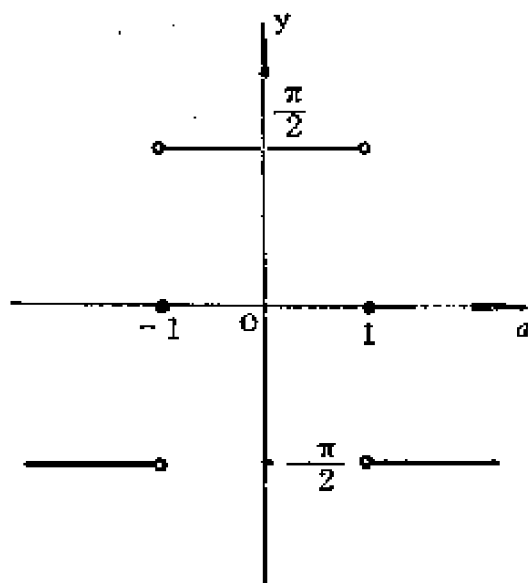


图 7·2

研究下列函数在
所指定区间内的
连续性:

3779. $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^a}$ 当 $a > 2$.

解 对于积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^a}$. 由于当 $x \geq 1$ 时,

$$0 < \frac{x}{2+x^a} < \frac{x}{x^a} \leq \frac{1}{x^{a_0-1}},$$

其中 $a \geq a_0 > 2$, 且积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a_0-1}}$$

收敛, 故积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^a}$$

对 $a \geq a_0$ 一致收敛, 从而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^a}$$

对 $\alpha \geq \alpha_0$ 一致收敛. 因此, $F(\alpha)$ 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时连续.
 由于 $\alpha_0 > 2$ 的任意性, 故知 $F(\alpha)$ 当 $\alpha > 2$ 时连续.

$$3780. \quad F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \text{ 当 } \alpha > 0.$$

解 对于任何 $A > 1$, 均有

$$\left| \int_1^A \cos x \, dx \right| \leq 2.$$

而函数 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $x \geq 1$, $\alpha > 0$ 时关于 x 单调递减, 且由

$$0 < \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}} \quad (x \geq 1, \alpha \geq \alpha_0 > 0)$$

知: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{1}{x^\alpha}$ 在 $\alpha \geq \alpha_0$ 时一致趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

对 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 一致收敛. 于是, 函数 $F(\alpha)$ 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时连续. 由于 $\alpha_0 > 0$ 的任意性, 故知 $F(\alpha)$ 当 $\alpha > 0$ 时连续.

$$3781. \quad F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha} dx \text{ 当 } 0 < \alpha < 2.$$

$$\text{解 } F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha} dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} dx \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} dx \\
& \quad - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(\pi-t)}{(\pi-t)^a t^a} dt \\
& = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} dx.
\end{aligned}$$

由于当 $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 < 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\eta} \frac{|\sin x|}{x^a (\pi-x)^a} dx \\
& \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^a \int_0^{\eta} \frac{dx}{x^{a-1}} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0} \int_0^{\eta} \frac{dx}{x^{\alpha_1-1}} \\
& = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0} \frac{1}{2-\alpha_1} \cdot \eta^{2-\alpha_1},
\end{aligned}$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 当 $0 < \eta < \delta = \min \left\{ 1, \right.$
 $\left. (2-\alpha_1) \frac{1}{2-\alpha_1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\alpha_0}{2-\alpha_1}} \frac{1}{\varepsilon^{2-\alpha_1}} \right\}$ 时, 对一切 $\alpha_0 \leq$
 $\alpha \leq \alpha_1$ 皆有

$$\left| \int_0^{\eta} \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} dx \right| \leq \int_0^{\eta} \frac{|\sin x|}{x^a (\pi-x)^a} dx < \varepsilon.$$

因此, 瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} dx$ 当 $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时

一致收敛. 从而 $F(a)$ 在 $\alpha_0 \leq a \leq \alpha_1$ 上连续. 由 $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 2$ 的任意性即知 $F(a)$ 在 $0 < a < 2$ 上连续.

$$3782. \quad F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^a} dx \quad \text{当 } 0 < a < 1.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad F(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^a} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^a t} dt. \end{aligned}$$

当 $0 < a \leq \alpha_0 < 1$ 时,

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^a t} dt \leq e^{-n\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin^{\alpha_0} t} dt.$$

显然, 积分

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^{\alpha_0} t} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^{\alpha_0} t},$$

且 $\lim_{t \rightarrow +0} t^{\alpha_0} \cdot \frac{1}{\sin^{\alpha_0} t} = 1$, 故它是收敛的. 而级数

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi}$ 为公比等于 $e^{-\pi} < 1$ 的几何级数, 它也收敛.

于是, 由外氏判别法知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^{\alpha_0} t} dt.$$

对 $0 < a \leq \alpha_0$ 一致收敛. 从而, 注意到被积函数是正的, 即知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^a} dx$$

对 $0 < a \leq a_0$ 一致收敛. 因此, $F(a)$ 在 $0 < a \leq a_0$ 上连续. 由 $a_0 < 1$ 的任意性知 $F(a)$ 当 $0 < a < 1$ 时连续.

$$3783. \quad F(a) = \int_0^{+\infty} a e^{-x a^2} dx \quad \text{当 } -\infty < a < +\infty.$$

解 当 $a \neq 0$ 时,

$$F(a) = -\frac{1}{a} e^{-x a^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a},$$

显然它是连续的.

当 $a = 0$ 时,

$$F(0) = \int_0^{+\infty} 0 \cdot e^{-0} dx = 0.$$

于是, 显见 $F(a)$ 当 $a = 0$ 时不连续.

§ 3. 广义积分中的变量代换. 广义积分号下微分法及积分法

1° 对参数的微分法 若 1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$ 内是连续的并对参数 y 可微分;

2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 收敛; 3) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ 于区间 (y_1, y_2) 内一致收敛, 则当 $y_1 < y < y_2$ 时

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

(莱布尼兹法则).

2° 对参数积分的公式 若 1) 函数 $f(x, y)$ 当 $x \geq a$ 及 $y_1 \leq y \leq y_2$ 时是连续的; 2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在有穷的区间 (y_1, y_2) 内一致收敛, 则

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \\ &= \int_a^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy. \end{aligned} \quad (1)$$

若 $f(x, y) \geq 0$, 则公式 (1) 在假定等式 (1) 的一端有意义时, 对于无穷的区间 (y_1, y_2) 也正确.

3784. 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0).$$

计算积分

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x \, dx, \text{ 其中 } m \text{ 为自然数.}$$

解 $\frac{dx^{n-1}}{dn} = x^{n-1} \ln x$ ($n > 0$ 为任意实数). 积分

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln x \, dx \quad (1)$$

对于 $n \geq n_0 > 0$ 为一致收敛. 事实上, 当 $0 < x \leq 1$, $n \geq n_0 > 0$ 时,

$$|x^{n-1} \ln x| \leq -x^{n_0-1} \ln x,$$

而积分 $\int_0^1 x^{n_0-1} \ln x \, dx$ 显然收敛^{*)}. 因此, 由外氏

判别法即知积分 (1) 对 $n \geq n_0 > 0$ 一致收敛。于是, 积分

$$\int_0^1 x^{n-1} dx$$

对参数 $n \geq n_0$ 求导数时, 积分号与导数符号可交换, 即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \int_0^1 x^{n-1} dx &= \int_0^1 \frac{dx^{n-1}}{dn} dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} \ln x dx. \end{aligned}$$

由 $n_0 > 0$ 的任意性知, 上式对任意 $n > 0$ 均成立。

同理对 n 逐次求导数, 也可在积分号下求导数, 即

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dn^2} \int_0^1 x^{n-1} dx &= \int_0^1 \frac{d}{dn} (x^{n-1} \ln x) dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} \ln^2 x dx, \end{aligned}$$

.....

由数学归纳法, 可得

$$\frac{d^m}{dn^m} \int_0^1 x^{n-1} dx = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx.$$

但是, $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0)$, 故有

$$\frac{d^m}{dn^m} \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

从而得

$$\int_0^1 x^{m-1} \ln^n x \, dx = -\frac{(-1)^n n!}{m^{n+1}}.$$

*) 利用2362题的结果.

3785. 利用公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a>0),$$

计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}, \text{ 其中 } n \text{ 为自然数.}$$

解 $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{x^2+a} \right) = -\frac{1}{(x^2+a)^2}$. 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^2} \tag{1}$$

对 $a \geq a_0 > 0$ 一致收敛. 事实上, 当 $x \geq 0, a \geq a_0 > 0$ 时,

$$\frac{1}{(x^2+a)^2} \leq \frac{1}{(x^2+a_0)^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a_0)^2}$ 显然收敛. 因此, 由外氏判别法知积分 (1) 当 $a \geq a_0 > 0$ 时一致收敛. 于是, 利用莱布尼兹法则, 即得

$$\frac{d}{da} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{x^2+a} \right) dx$$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^2}.$$

由 $a_0 \geq 0$ 的任意性知, 上式对一切 $a \geq 0$ 均成立.

同理对积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a}$ 逐次求导数, 得

$$\frac{d^n}{da^n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}.$$

但是,

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} &= \frac{d}{da} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{da^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} &= \frac{d}{da} \left(-\frac{\pi}{2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}} \right) \\ &= \frac{1 \cdot 3\pi}{2^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^5}}, \end{aligned}$$

.....

由数学归纳法, 可得

$$\frac{d^n}{da^n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}} (-1)^n \cdot a^{-(n+\frac{1}{2})},$$

最后得

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-(n+\frac{1}{2})}.$$

3786. 证明迪里黑里积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

当 $\alpha \neq 0$ 时有导函数，但不能利用莱布尼兹法则来求它。

证 当 $\alpha > 0$ 时，令 $\alpha x = y$ ，得

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

当 $\alpha < 0$ 时， $I(\alpha) = -I(-\alpha) = -\frac{\pi}{2}$ ，于是，

当 $\alpha \neq 0$ 时， $I'(\alpha) = 0$ 。

但是，如果利用莱布尼兹法则来求，即得错误的结果。事实上，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \cos \alpha x dx$$

发散，而 $I'(\alpha) = 0$ ($\alpha \neq 0$) 存在，因此，本题不能应用莱布尼兹法则求 $I'(\alpha)$ 。

3787. 证明：函数

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$$

在区域 $-\infty < \alpha < +\infty$ 内连续并且可微分的。

证 设 α_0 为 $(-\infty, +\infty)$ 内任意一点。记 $M = \max(|\alpha_0 - 1|, |\alpha_0 + 1|)$ ，则当 $x > M$ ， $\alpha \in (\alpha_0 - 1, \alpha_0 + 1)$ 时，恒有

$$\left| \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} \right| \leq \frac{1}{1+(x-M)^2},$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} \right] \right| = \left| \frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2} \right|$$

$$\leq \frac{2}{1+(x-M)^2}.$$

由于积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(x-M)^2}$ 收敛, 故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$$

及 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} \right] dx$

在 (α_0-1, α_0+1) 内一致收敛, 从而 $F(\alpha)$ 在 (α_0-1, α_0+1) 内连续且可微分, 且可在积分号下求导数. 由 α_0 的任意性, 即知 $F(\alpha)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且可微分.

3788. 从等式

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$$

出发, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解 不妨设 $a \leq b$. 注意到 e^{-xy} 在域: $x \geq 0, a \leq y \leq b$ 上连续. 又积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 对 $a \leq y \leq b$ 是一致收敛的. 事实上, 当 $x \geq 0, a \leq y \leq b$ 时,

$$0 \leq e^{-xy} \leq e^{-ax}.$$

但积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛. 故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 是一致收敛的. 于是, 利用对参数的积分公式, 即得

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx.$$

上式左端为 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, 右端为 $\int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}$. 从而得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0).$$

3789. 证明傅茹兰公式

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \\ &= f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0), \end{aligned}$$

式中 $f(x)$ 为连续函数及积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 对任何的 $A > 0$ 都有意义.

证 对任何的 $A > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \\ &= \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi) \int_{Aa}^{Ab} \frac{dt}{t} \\
&= f(\xi) \ln \frac{b}{a} \quad (Aa < \xi < Ab) .
\end{aligned}$$

当 $A \rightarrow +0$ 时, $\xi \rightarrow +0$. 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性, 即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} .$$

利用傅茹兰公式, 计算积分,

$$3790. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0) .$$

解 由于 $\cos x$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且对任何 $A > 0$, 积分 $\int_A^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ 存在, 故由傅茹兰公式, 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \\
&= \cos 0 \cdot \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a} .
\end{aligned}$$

$$3791. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0) .$$

解 同3790题, 由于 $\sin 0 = 0$, 故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx = 0 .$$

$$3792. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解 令 $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, 则 $f(x)$ 在 $0 \leq x < +\infty$ 上连续.

由于 $f(x) > 0$ 且 (利用洛比塔法则)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{x^{-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1, \end{aligned}$$

故对任何 $A > 0$, 积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 都收敛. 因此由傅茹兰公式, 有

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} ax\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} bx\right)}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

利用对参数的微分法计算下列积分:

$$3793. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (a > 0, \beta > 0).$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-2\alpha x e^{-\alpha x^2} + 2\beta x e^{-\beta x^2}}{1} = 0, \end{aligned}$$

故 $x=0$ 不是瑕点. 又由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{\alpha x^2}} - \frac{x}{e^{\beta x^2}} \right) = 0, \end{aligned}$$

故对任何 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$ 都收敛. 今将 $\beta > 0$ 固定, 而把所求积分视为含参变量 α ($\alpha > 0$) 的积分, 即令

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0).$$

而

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \right) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx. \end{aligned}$$

下证右端积分在 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 时一致收敛. 事实上, 当

$\alpha \geq \alpha_0$, $0 \leq x < +\infty$ 时, $0 \leq x e^{-\alpha x^2} \leq x e^{-\alpha_0 x^2}$,

而积分 $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha_0 x^2} dx = \frac{1}{2\alpha_0}$ 收敛, 故积分

$\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$ 在 $\alpha \geq \alpha_0$ 时一致收敛. 因此, 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时, 可在积分号下对参数求导数:

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $\alpha > 0$ 皆成立. 积分之, 得

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2} \ln \alpha + C \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

其中 C 为待定的常数. 在此式中令 $\alpha = \beta$, 并注意到

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = 0, \text{ 即得}$$

$$0 = I(\beta) = -\frac{1}{2} \ln \beta + C,$$

由此知 $C = \frac{1}{2} \ln \beta$. 于是,

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2} \ln \alpha + \frac{1}{2} \ln \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

注. 本题中, 实际应考察积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(x, \alpha) dx$,

$$\text{其中 } f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}, & \text{当 } 0 < x < +\infty \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

易知 $f(x, \alpha)$ 是 $0 \leq x < +\infty$, $0 < \alpha < +\infty$ 上的连续函数 ($\beta > 0$ 固定). 我们证明:

$$f'_\alpha(x, \alpha) = -x e^{-\alpha x^2} \quad (0 \leq x < +\infty, 0 < \alpha < +\infty).$$

事实上, 当 $0 < x < +\infty$ 时, 此式显然成立. 由于 $f(0, \alpha) \equiv 0$ ($0 < \alpha < +\infty$), 故 $f'_\alpha(0, \alpha) = 0$

($0 < \alpha < +\infty$). 因此, 上式当 $x = 0$ 时也成立. $f'_\alpha(x, \alpha)$ 显然是 $0 \leq x < +\infty$, $0 < \alpha < +\infty$ 上的连续函数.

在以下许多题中, 我们都应作此理解, 但不必写出 $f(x, \alpha)$. 函数 $\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}$ 就代表 $f(x, \alpha)$

($x = 0$ 时规定其函数值为其极限值 0), 而公式

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \right) = -x e^{-\alpha x^2}$$

当 $x = 0$ 时也成立 (如上述). 这样, 才严格符合莱布尼兹法则 (积分号下求导数) 的条件.

另外, 本题若利用逐次积分来作可更简单一些. 今作如下: 易知 (不妨设 $\alpha < \beta$)

$$\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} = \int_\alpha^\beta x e^{-y x^2} dy,$$

而积分 $\int_0^{+\infty} x e^{-y x^2} dx$ 当 $\alpha \leq y \leq \beta$ 时一致收敛 (因

为 $0 \leq x e^{-y x^2} \leq x e^{-\alpha x^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$ 收敛),

故可交换积分次序, 得

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-yx^2} dy \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_0^{+\infty} x e^{-yx^2} dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{2y} = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}.
\end{aligned}$$

3794. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$

解 由于

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\alpha e^{-\alpha x} + \beta e^{-\beta x}}{1} = \beta - \alpha,
\end{aligned}$$

故 $x=0$ 不是瑕点, 又由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 = 0,$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx$ 收敛 ($\alpha > 0, \beta > 0$).

同样, 将 $\beta > 0$ 固定, 考虑含参变量 α 的积分:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0),$$

由于

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \\
&= -2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx \\
&= -2 \ln \frac{\alpha+\beta}{2\alpha} \quad (a > 0).
\end{aligned}$$

而当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, $1 \leq x < +\infty$ 时,

$$\left| \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} \right| \leq \frac{2e^{-\alpha_0 x}}{x},$$

且 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha_0 x}}{x} dx$ 收敛 (因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\alpha_0 x}}{x} = 0$),

故 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx$ 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时一致收敛,

从而 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx$ 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时一致收敛

(注意, 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} = \beta - \alpha$, 故 $x=0$

不是瑕点). 因此, 根据莱布尼兹法则, 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时

可在积分号下求导数:

$$\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \\
&= -2 \ln \frac{\alpha+\beta}{2\alpha}.
\end{aligned}$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $\alpha > 0$ 皆成立.

积分之，并注意到

$$\int \ln \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} d\alpha = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} + \beta \ln(\alpha + \beta) + C,$$

即得

$$I(\alpha) = -2\alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} - 2\beta \ln(\alpha + \beta) + C_1,$$

其中 C_1 是待定常数。令 $\alpha = \beta$ ，则由于 $I(\beta) = 0$ ，得

$$0 = -2\beta \ln \frac{2\beta}{2\beta} - 2\beta \ln 2\beta + C_1,$$

故 $C_1 = 2\beta \ln 2\beta$ 。于是，得

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \ln \left(\frac{2\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{2\alpha} - 2\beta \ln(\alpha + \beta) + 2\beta \ln 2\beta \\ &= \ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha + \beta)^{2\alpha + 2\beta}}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \\ &= \ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha + \beta)^{2\alpha + 2\beta}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \end{aligned}$$

*) 利用3788题的结果。

$$3795. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

解 当 $m = 0$ 时，

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx = 0,$$

故下设 $m \neq 0$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx = 0,$$

故 $x = 0$ 不是瑕点, 从而被积函数在域: $0 \leq x < +\infty$ 及 $\alpha > 0, \beta > 0$ 内连续 ($x = 0$ 时的函数值理解为极限值). 又由于

$$\left| \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \right| \leq \frac{e^{-\alpha x} + e^{-\beta x}}{x} \quad (x > 0),$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} + e^{-\beta x}}{x} \, dx$ 收敛, 故积分

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx$ 收敛, 从而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx$$

收敛. 当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 时, 积分

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \right) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin mx \, dx \end{aligned}$$

是一致收敛的. 事实上,

$$|e^{-\alpha x} \sin mx| \leq e^{-\alpha_0 x} \quad (x \geq 0),$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} \, dx = \frac{1}{\alpha_0}$ 收敛. 于是, 对于积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx$$

当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时可应用莱布尼兹法则, 得

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin mx \, dx = - \frac{m}{\alpha^2 + m^2} \quad *).$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $\alpha > 0$ 均成立. 从而

$$I(\alpha) = - \int \frac{m}{\alpha^2 + m^2} d\alpha = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{m} + C,$$

其中 C 是待定常数. 令 $\alpha = \beta$, 则得

$$I(\beta) = 0 = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m} + C,$$

故 $C = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m}$. 最后得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{m} \quad (m \neq 0). \end{aligned}$$

*) 利用1829题的结果.

$$3796. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \, dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

解 同3795题, 我们可证明: 当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 时, 对积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \, dx$$

可应用莱布尼兹法则, 得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \right) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos mx \, dx = - \frac{a}{a^2 + m^2} \quad *). \end{aligned}$$

由 $a_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $a > 0$ 均成立. 从而

$$I(a) = - \int \frac{a \, da}{a^2 + m^2} = - \frac{1}{2} \ln(a^2 + m^2) + C,$$

其中 C 是待定常数. 令 $a = \beta$, 则得

$$I(\beta) = 0 = - \frac{1}{2} \ln(\beta^2 + m^2) + C,$$

故 $C = \frac{1}{2} \ln(\beta^2 + m^2)$. 最后得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + m^2}{a^2 + m^2} \quad (a > 0, \beta > 0). \end{aligned}$$

*) 利用1828题的结果.

计算下列积分:

$$3797. \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1).$$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{2a^2x}{1-a^2x^2}}{2x} = -a^2,$$

故 $x=0$ 不是瑕点. 从而被积函数在域: $0 \leq x < 1$ 及 $|a| \leq 1$ 内连续 ($x=0$ 时的函数值理解为极限值). 又由于当 $|a| \leq 1$ 时,

$$\left| \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \right| \leq -\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1),$$

而积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$ 收敛 (因为 $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1+x}} = 0$),

故积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$$

对 $|a| \leq 1$ 一致收敛. 从而为 a 的连续函数 ($-1 \leq a \leq 1$). 另一方面, 易知积分

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\ &= -2a \int_0^1 \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

对 $|a| \leq a_0 < 1$ 一致收敛. 事实上,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \right| \\ & \leq \frac{2}{1-a_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 \leq x < 1), \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ 收敛。于是，对积分

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

当 $|\alpha| \leq \alpha_0$ 时可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha) = -2\alpha \int_0^1 \frac{dx}{(1-\alpha^2 x^2) \sqrt{1-x^2}}.$$

由 $\alpha_0 < 1$ 的任意性知，上式对一切 $|\alpha| < 1$ 均成立。
先求不定积分

$$I_1 = \int \frac{dx}{(1-\alpha^2 x^2) \sqrt{1-x^2}}.$$

作代换 $x = \sin t$ ，易得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dt}{1-\alpha^2 \sin^2 t} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{1-\alpha \sin t} + \int \frac{dt}{1+\alpha \sin t} \right). \end{aligned}$$

再对右端两个积分作代换 $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ ，可得

$$\begin{aligned} &\int \frac{dt}{1-\alpha \sin t} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} - \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) + C_1, \\ &\int \frac{dt}{1+\alpha \sin t} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) + C_2.$$

从而

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= 2\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\alpha \sin t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+\alpha \sin t} \right) dt \\ &= -\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\arctan \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} - \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \arctan \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (|\alpha| < 1). \end{aligned}$$

两端积分, 得

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -\pi \int \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \\ &= \pi \sqrt{1-\alpha^2} + C \quad (|\alpha| < 1), \end{aligned}$$

其中 C 是待定常数. 令 $\alpha = 0$, 得

$$I(0) = 0 = \pi + C,$$

故 $C = -\pi$, 从而

$$I(\alpha) = -\pi(1 - \sqrt{1-\alpha^2}) \quad (|\alpha| < 1).$$

在此式两端令 $\alpha \rightarrow 1 - 0$ 及 $\alpha \rightarrow -1 + 0$ 取极限, 并注意到 $I(\alpha)$ 在 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 上的连续性, 即得

$$I(1)=I(-1)=-\pi.$$

于是, 当 $|a| \leq 1$ 时,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx = -\pi(1-\sqrt{1-a^2}).$$

$$3798. \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (|a| \leq 1).$$

解 同3797题, 我们可以证明:

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

当 $-1 \leq a \leq 1$ 时连续, 且当 $|a| \leq a_0 < 1$ 时可应用莱布尼兹法则. 于是,

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{-2ax^2}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^1 \frac{(1-a^2x^2)-1}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\quad - \frac{2}{a} \int_0^1 \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2}{a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{a} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{a\sqrt{1-a^2}} \quad (|a| \leq a_0, a \neq 0). \end{aligned}$$

由 $\alpha_0 < 1$ 的任意性知, 上式对一切 $0 < |\alpha| < 1$ 均成立. 积分得

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int \left(\frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha \sqrt{1-\alpha^2}} \right) d\alpha \\ &= \pi \ln |\alpha| + \pi \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right| + C \\ &= \pi \ln (1+\sqrt{1-\alpha^2}) + C, \end{aligned}$$

其中 $|\alpha| < 1$, $\alpha \neq 0$, C 为待定常数. 令 $\alpha \rightarrow 0$, 并注意到 $I(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 的连续性, 即得

$$I(0) = 0 = \pi \ln 2 + C,$$

故 $C = -\pi \ln 2$, 从而得

$$I(\alpha) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2} \quad (|\alpha| < 1).$$

在上式中令 $\alpha \rightarrow 1-0$ 及 $\alpha \rightarrow -1+0$, 并注意到 $I(\alpha)$ 在 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 上的连续性, 即知上式当 $\alpha = \pm 1$ 时也成立, 即

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2} \quad (|\alpha| \leq 1). \end{aligned}$$

3799. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx.$

解 设 $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\arctg \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$. 显然有 $I(0) = 0$.

当 $\alpha > 0$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \frac{\arctg \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}$, 故

$I(\alpha)$ 收敛. 其次, 易知积分

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\arctg \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \right) dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + \alpha^2)} \end{aligned}$$

对 $\alpha \geq 0$ 一致收敛. 事实上, 当 $\alpha \geq 0$, $0 \leq t < 1$ 时, 有

$$\left| \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + \alpha^2)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}},$$

且 $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ 收敛. 于是, 可应用莱布尼兹法则, 得

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_1^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\arctg \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + \alpha^2)} \\ &= \int_0^1 \frac{(t^2 + \alpha^2) - \alpha^2}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + \alpha^2)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)} \\
&= \frac{\pi}{2} - \alpha^2 \cdot \frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (\alpha \geq 0).
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \frac{\pi}{2} \alpha - \frac{\pi}{2} \int \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\
&= \frac{\pi}{2} \alpha - \frac{\pi}{2} \sqrt{1+\alpha^2} + C \quad (\alpha \geq 0),
\end{aligned}$$

其中 C 为待定常数. 令 $\alpha = 0$, 得

$$I(0) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C,$$

故 $C = \frac{\pi}{2}$. 于是, 当 $\alpha \geq 0$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx = \frac{\pi}{2} (1+\alpha - \sqrt{1+\alpha^2}).$$

当 $\alpha < 0$ 时,

$$\begin{aligned}
& \int_1^{+\infty} \frac{\arctg \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \\
&= - \int_1^{+\infty} \frac{\arctg(-\alpha)x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \\
&= -\frac{\pi}{2} (1-\alpha - \sqrt{1+\alpha^2}).
\end{aligned}$$

于是, 当 $-\infty < \alpha < +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx \\ &= \frac{\pi}{2} (1 + |\alpha| - \sqrt{1 + \alpha^2}) \operatorname{sgn} \alpha. \end{aligned}$$

3800. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx.$

解 我们首先计算积分

$$I_\beta(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$$

($\alpha \geq 0$ 是参数, $\beta > 0$ 固定).

首先注意, 此积分当 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ ($\alpha_1 > 0$ 为任何有限数) 时一致收敛. 事实上, 当 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} \\ &\leq \frac{\ln(1 + \alpha_1^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} \quad (0 \leq x < +\infty), \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha_1^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$ 收敛 (因为易知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\ln(1 + \alpha_1^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} = 0).$$

于是, $I_\beta(\alpha)$ 是 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 上的连续函数. 由 $\alpha_1 > 0$ 的任意性知, $I_\beta(\alpha)$ 当 $0 \leq \alpha < +\infty$ 时连续.

其次, 易证积分

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} \right] dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha x^2}{(\beta^2 + x^2)(1+\alpha^2 x^2)} dx = \frac{\pi}{\alpha\beta + 1} \end{aligned}$$

当 $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时是一致收敛的. 事实上, 此时

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{2\alpha x^2}{(\beta^2 + x^2)(1+\alpha^2 x^2)} \\ &\leq \frac{2\alpha_1 x^2}{(\beta^2 + x^2)(1+\alpha_0^2 x^2)} \quad (0 \leq x < +\infty), \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2\alpha_1 x^2}{(\beta^2 + x^2)(1+\alpha_0^2 x^2)} dx$ 收敛. 于是,

根据莱布尼兹法则, 当 $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时, 可在积分号下求导数, 得

$$I'_\beta(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha\beta + 1}.$$

由 α_1 与 α_0 的任意性知, 上式对一切 $0 < \alpha < +\infty$ 均成立. 两端积分, 得

$$I_\beta(\alpha) = \frac{\pi}{\beta} \ln(1+\alpha\beta) + C \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

其中 C 是某常数. 在此式中令 $\alpha \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到 $I_\beta(\alpha)$ 在 $0 \leq \alpha < +\infty$ 上连续, 得

$$0 = I_\beta(0) = 0 + C,$$

故 $C = 0$. 因此

$$I_\beta(\alpha) = \frac{\pi}{\beta} \ln(1+\alpha\beta) \quad (0 \leq \alpha < +\infty).$$

对于所求积分，只要作适当变形即得。当 $\alpha > 0$ ， $\beta > 0$ 时，有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln \alpha + \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha^2} x^2\right)}{\beta^2 + x^2} dx \\ &= 2 \ln \alpha \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\beta^2 + x^2} \\ & \quad + \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\alpha^2} x^2\right)}{\beta^2 + x^2} dx \\ &= \frac{\pi \ln \alpha}{\beta} + \frac{\pi}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{\beta} \ln(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

此式当 $\alpha = 0$ 时也成立，只要在两端令 $\alpha \rightarrow +0$ 取极限即可，这是因为积分 $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$

($\beta > 0$ 固定) 当 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时一致收敛 (易知

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$ 与 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$ 当 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时都一致收敛，事实上，

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} \right| \\ & \leq -\frac{2 \ln x}{\beta^2 + x^2} \quad \left(0 < x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2} dx$ 收敛,

$$0 \leq \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{4} + x^2\right)}{\beta^2 + x^2} \quad \left(\frac{1}{2} \leq x < +\infty, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\right),$$

而 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{4} + x^2\right)}{\beta^2 + x^2} dx$ 收敛, 故 $J(\alpha)$ 在点 $\alpha=0$ (右) 连续.

对于任意的 α 与 β ($\beta \neq 0$), 有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|\alpha|^2 + x^2)}{|\beta|^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|). \end{aligned}$$

注意, 当 $\beta=0$ 时上式不成立, 右端无意义, 左端的积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{x^2} dx$ 易知是发散的.

3801. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx,$

解 先设 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. 显然 $x=0$ 不是瑕点, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} = \alpha \beta.$$

由于当 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 时,

$$\left| \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} \right|$$

$$< \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{x^2} \quad (1 \leq x < +\infty),$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, 故积分

$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} dx$ 在 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 时一

致收敛, 从而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} dx$ 也

在 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 时一致收敛. 因此, 函数

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} dx$$

是 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 上的二元连续函数. 再考察两个积分

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx,$$

$$K(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \right] dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)}.$$

由于当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0, \beta \geq 0$ 时 $\left| \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \right| < \frac{\pi}{2}$

• $\frac{1}{x(1+\alpha_0^2 x^2)}$ ($1 \leq x < +\infty$), 而积分

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\alpha_0^2 x^2)}$ 收敛, 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx$

当 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq 0$ 时一致收敛, 从而积分

$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx$ 当 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq 0$ 时也一致收敛

(因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arctg \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} = \beta$, 故 $x=0$ 不是瑕点).

因此, $J(\alpha, \beta)$ 当 $\alpha \geq \alpha_0$, $\beta \geq 0$ 时连续, 并且此时 $J(\alpha, \beta)$ 可在积分号下对 α 求导数, 得

$$J'_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx = J(\alpha, \beta). \quad (1)$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知, (1) 式对一切 $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ 成立; 并且 $J(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ 上的二元连续函数.

其次, 由于当 $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\alpha > 0$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} \\ &\leq \frac{1}{1+\beta_0^2 x^2} \quad (0 \leq x < +\infty). \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\beta_0^2 x^2}$ 收敛, 故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)}$$

当 $\beta \geq \beta_0$, $\alpha > 0$ 时一致收敛. 因此, $K(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha > 0$, $\beta \geq \beta_0$ 上的连续函数, 并且 (1) 式中的积分 当 $\beta \geq \beta_0$ ($\alpha > 0$) 时可在积分号下对 β 求导数, 得

$$\begin{aligned} I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) &= J'_\beta(\alpha, \beta) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} \\ &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\alpha^2 x^2} \\ &\quad - \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\beta^2 x^2} \\ &= \frac{\alpha\pi}{2(\alpha^2 - \beta^2)} - \frac{\beta\pi}{2(\alpha^2 - \beta^2)} \\ &= \frac{\pi}{2(\alpha + \beta)}, \end{aligned}$$

由 $\beta_0 > 0$ 的任意性知, 对任何 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 均有

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = J'_\beta(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2(\alpha + \beta)}. \quad (2)$$

(注意, 在推导此式时应设 $\alpha \neq \beta$, 因为推导过程中分母内有 $\alpha^2 - \beta^2$. 但由于 $K(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 上的连续函数, 故通过取极限即知 (2) 式当 $\alpha = \beta$ 时也成立). 在 (2) 式中固定 $\alpha > 0$, 对 β 积分, 得

$$\begin{aligned} I'_\alpha(\alpha, \beta) &= J(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\pi}{2} \ln(\alpha + \beta) + C(\alpha) \quad (0 < \beta < +\infty), \end{aligned}$$

其中 $C(\alpha)$ 是依赖于 α 的常数. 在此式中令 $\beta \rightarrow +0$, 并注意到 $J(\alpha, \beta)$ 在 $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ 上连续, 得

$$0 = J(\alpha, 0) = \lim_{\beta \rightarrow +0} J(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \ln \alpha + C(\alpha),$$

故

$$C(\alpha) = -\frac{\pi}{2} \ln \alpha.$$

因此,

$$I'_\alpha(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0).$$

再固定 $\beta \geq 0$, 对 α 积分 (右端利用分部积分法), 得

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &= \frac{\pi}{2} \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \beta \ln(\alpha + \beta) + C^*(\beta), \end{aligned}$$

其中 $C^*(\beta)$ 是依赖于 β 的常数. 在此式中令 $\alpha \rightarrow +0$, 并注意到 $I(\alpha, \beta)$ 在 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 上连续, 得

$$\begin{aligned} 0 = I(0, \beta) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\pi}{2} \beta \ln \beta + C^*(\beta), \end{aligned}$$

故

$$C^*(\beta) = -\frac{\pi}{2} \beta \ln \beta.$$

于是,

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0).$$

显然, 对于任何 α 与 β , 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg \alpha x \cdot \arctg \beta x}{x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\alpha\beta) \cdot \frac{\pi}{2} \ln \frac{(|\alpha| + |\beta|)^{| \alpha | + | \beta |}}{|\alpha|^{|\alpha|} \cdot |\beta|^{|\beta|}}, & \text{当 } \alpha\beta \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } \alpha\beta = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

3802. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx.$

解 先设 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. 首先, 注意, $x=0$ 不是瑕点, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} = \alpha^2 \beta^2.$$

由于当 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_1$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} \\ &\leq \frac{\ln(1 + \alpha_1^2 x^2) \ln(1 + \beta_1^2 x^2)}{x^4}, \end{aligned}$$

而 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha_1^2 x^2) \ln(1 + \beta_1^2 x^2)}{x^4} dx$ 收敛 (因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{\ln(1 + \alpha_1^2 x^2) \ln(1 + \beta_1^2 x^2)}{x^4} = 0),$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx$ 当 $0 \leq \alpha$

$\leq \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_1$ 时一致收敛. 因此, 函数

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx \quad (1)$$

是 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta \leq \beta_1$ 上的二元连续函数. 由 $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ 的任意性知, $I(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ 上的二元连续函数. 再考察两个积分

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} \right] dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha^2 x^2)} dx, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{2\alpha \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha^2 x^2)} \right] dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{4\alpha\beta}{(1 + \alpha^2 x^2)(1 + \beta^2 x^2)} dx \\ &= \frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha + \beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \end{aligned} \quad (3)$$

由于当 $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta \leq \beta_1$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{2\alpha \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha^2 x^2)} \\ &\leq \frac{2\alpha_1 \ln(1 + \beta_1^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha_0^2 x^2)} \quad (0 < x < +\infty), \end{aligned}$$

而易知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2\alpha_1 \ln(1 + \beta_1^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha_0^2 x^2)} dx$ 收敛, 故 (2)

式中的积分在 $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta \leq \beta_1$ 上一致收敛. 由此可知 $J(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta \leq \beta_1$ 上的连续函数, 并且在其上 (1) 中的积分可在积分号

下对 α 求导数, 得

$$\begin{aligned} I'_\alpha(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^2(1+\alpha^2 x^2)} dx \\ &= J(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4)$$

由 $\alpha_1 > \alpha_0 > 0$ 及 $\beta_1 > 0$ 的任意性知, $J(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha > 0, \beta \geq 0$ 上的连续函数, 并且 (4) 式对一切 $\alpha > 0, \beta \geq 0$ 都成立.

其次, 当 $0 < \alpha \leq \alpha_1, 0 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} \\ &\leq \frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2 x^2} \quad (0 < x < +\infty), \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2 x^2} dx$ 收敛, 故 (3) 式中的积

分在 $0 < \alpha \leq \alpha_1, 0 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$ 上一致收敛. 于是, 在其上 (2) 式中的积分可在积分号下对 β 求导数, 得

$$\begin{aligned} I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) &= J'_\beta(\alpha, \beta) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} dx \\ &= \frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

由 $\alpha_1 > 0, \beta_1 > \beta_0 > 0$ 的任意性知, (5) 式对一切 $\alpha > 0, \beta > 0$ 都成立. (5) 式两端对 β 积分之 ($\alpha > 0$ 固定), 得

$$\begin{aligned}
 I_0(\alpha, \beta) &= J(\alpha, \beta) \\
 &= 2\pi\alpha\beta - 2\pi\alpha^2 \ln(\alpha + \beta) + C(\alpha) \\
 &\quad (0 \leq \beta < +\infty),
 \end{aligned}$$

其中 $C(\alpha)$ 是依赖于 α 的常数. 在此式中令 $\beta \rightarrow +0$, 取极限, 并注意到 $J(\alpha, \beta)$ 在 $\alpha > 0, \beta \geq 0$ 上连续, 得

$$\begin{aligned}
 0 &= J(\alpha, 0) = \lim_{\beta \rightarrow +0} J(\alpha, \beta) \\
 &= -2\pi\alpha^2 \ln \alpha + C(\alpha),
 \end{aligned}$$

故

$$C(\alpha) = 2\pi\alpha^2 \ln \alpha.$$

因此,

$$\begin{aligned}
 I_0(\alpha, \beta) &= 2\pi\alpha\beta - 2\pi\alpha^2 \ln(\alpha + \beta) + 2\pi\alpha^2 \ln \alpha \\
 &\quad (\alpha > 0, \beta \geq 0).
 \end{aligned}$$

两端再对 α 积分 ($\beta > 0$ 固定), 得

$$\begin{aligned}
 I(\alpha, \beta) &= \pi\alpha^2\beta - \frac{2}{3}\pi\alpha^3 \ln(\alpha + \beta) \\
 &\quad + \frac{2}{9}\pi(\alpha + \beta)^3 - \pi\alpha^2\beta \\
 &\quad - \frac{2}{3}\pi\beta^3 \ln(\alpha + \beta) + \frac{2}{3}\pi\alpha^3 \ln \alpha \\
 &\quad - \frac{2}{9}\pi\alpha^3 + C^*(\beta) \quad (0 \leq \alpha < +\infty),
 \end{aligned}$$

其中 $C^*(\beta)$ 是依赖于 β 的常数. 在此式两端令 $\alpha \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到 $I(\alpha, \beta)$ 在 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 上连续, 得

$$\begin{aligned}
0 &= I(0, \beta) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) \\
&= \frac{2\pi}{9} \beta^3 - \frac{2}{3} \pi \beta^3 \ln \beta + C^*(\beta),
\end{aligned}$$

故

$$C^*(\beta) = -\frac{2}{9} \pi \beta^3 + \frac{2}{3} \pi \beta^3 \ln \beta.$$

于是

$$\begin{aligned}
I(\alpha, \beta) &= -\frac{2}{3} \pi (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta) \\
&\quad + \frac{2\pi}{9} (\alpha + \beta)^3 - \frac{2\pi}{9} \alpha^3 \\
&\quad - \frac{2}{9} \pi \beta^3 + \frac{2}{3} \pi (\alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta) \\
&= \frac{2\pi}{3} [-\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta \\
&\quad - (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta)] \quad (\alpha > 0, \beta > 0).
\end{aligned}$$

因此, 对任意的 α, β 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{3} [-|\alpha\beta|(|\alpha| + |\beta|) + |\alpha|^3 \ln|\alpha| \\ \quad + |\beta|^3 \ln|\beta| - (|\alpha|^3 + |\beta|^3) \ln(|\alpha| \\ \quad + |\beta|)], & \text{当 } \alpha\beta \neq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \alpha\beta = 0 \text{ 时.} \end{cases}
\end{aligned}$$

3803. 从公式

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy$$

出发, 计算尤拉-普阿桑积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

解 在积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

中令 $x=ut$, 其中 u 为任意正数, 即得

$$I = u \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

在上式两端乘以 $e^{-u^2} du$, 再对 u 从 0 到 $+\infty$ 积分, 得

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \int_0^{+\infty} u e^{-u^2 t^2} dt. \quad (1)$$

由于被积函数 $u e^{-(1+t^2)u^2}$ 是非负的连续函数, 并且积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2(1+t^2)}$$

及

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u dt = e^{-u^2} \cdot I$$

分别对于 t 及 u 是连续的, 积分互换后的逐次积分显然存在. 于是, (1) 式中的积分顺序可以互换^{*}), 并且

有

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

由于 $I \geq 0$, 故

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷 483目定理 V 的系理.

利用尤拉-普阿桑积分, 求下列积分之值:

$$3804. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0)^{*}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]} dx \\ &= e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2} dx \\ &= e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}.$$

*) 只要假定 $a > 0$, 条件 $ac - b^2 > 0$ 可去掉.

3805. $\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx$
 $(a > 0, ac - b^2 > 0) \quad *).$

解 设 $\frac{1}{\sqrt{a}}(ax + b) = t$, 则 $x = \frac{\sqrt{a}t - b}{a}$. 代入得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_1}{a} t^2 + \frac{2(ab_1 - a_1 b)}{a\sqrt{a}} t \right. \\ \left. + \frac{a_1 b^2 - 2abb_1}{a^2} + c_1 \right] e^{-t^2} dt.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t d(e^{-t^2})$$

$$= -\frac{1}{2} t e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = 0$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

故得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}} \left[\frac{a_1}{a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{a_1 b^2 - 2abb_1}{a^2} + c_1 \right) \sqrt{\pi} \right] \\ &= \frac{(a + 2b^2)a_1 - 4abb_1 + 2a^2 c_1}{2a^2} \\ & \quad \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}. \end{aligned}$$

*) 只要假定 $a > 0$, 条件 $ac - b^2 > 0$ 可去掉.

3806. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx \quad (a > 0).$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} (e^{bx} + e^{-bx}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 - bx)} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + bx)} dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} *) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

*) 利用3804题的结果.

$$3807. \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx \quad (a > 0).$$

解 由于积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故利用2355题的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx \\ &= e^{2a} \int_0^{+\infty} e^{-\left(x + \frac{a}{x}\right)^2} dx \\ &= e^{2a} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + 4a)} dx \\ &= e^{-2a} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}. \end{aligned}$$

$$3808. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

解 由分部积分法知

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \\ &= - \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}) d\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad - 2 \int_0^{+\infty} (\alpha e^{-ax^2} - \beta e^{-\beta x^2}) dx \\
&= -2 \int_0^{+\infty} \sqrt{a} e^{-(\sqrt{a}x)^2} d(\sqrt{a}x) \\
&\quad + 2 \int_0^{+\infty} \sqrt{\beta} e^{-(\sqrt{\beta}x)^2} d(\sqrt{\beta}x) \\
&= -2\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 2\sqrt{\beta} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{a}).
\end{aligned}$$

3809. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \quad (a > 0).$

解 令 $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx$. 由于 $e^{-ax^2} \cos bx$

与 $\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2} \cos bx) = -x e^{-ax^2} \sin bx$ 都是 $x \geq 0$,

$-\infty < b < +\infty$ 上的连续函数, 并且此时

$$|e^{-ax^2} \cos bx| \leq e^{-ax^2},$$

$$|x e^{-ax^2} \sin bx| \leq x e^{-ax^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} dx$ 都收敛, 故积

分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx$ 都在

$-\infty < b < +\infty$ 上一致收敛, 从而可在积分号下求导

数, 得

$$I'(b) = - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx \\ (-\infty < b < +\infty).$$

利用分部积分法, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx \\ &= -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \Big|_0^{+\infty} \\ & \quad + \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \\ &= \frac{b}{2a} I(b), \end{aligned}$$

$$\text{故 } I'(b) = -\frac{b}{2a} I(b) \quad (-\infty < b < +\infty).$$

于是,

$$\int \frac{I'(b)}{I(b)} db = -\frac{1}{2a} \int b \, db,$$

即

$$\ln I(b) = -\frac{b^2}{4a} + C \quad (-\infty < b < +\infty),$$

其中 C 是待定常数, 也即

$$I(b) = C_1 e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (-\infty < b < +\infty),$$

其中 C_1 也是待定常数. 但

$$\begin{aligned}
 I(0) &= \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}},
 \end{aligned}$$

代入, 得 $C_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 于是, 最后得

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \\
 &= I(b) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (-\infty < b < +\infty).
 \end{aligned}$$

3810. $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx \quad (a > 0).$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad &\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx \\
 &= -\frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \sin bx \, d(e^{-ax^2}) \\
 &= -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \Big|_0^{+\infty} \\
 &\quad + \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \\
 &= \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \\
 &= \frac{b}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad *)
 \end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果.

$$3811. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx \quad (n \text{ 为自然数}).$$

解 由3809题得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{积分} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial b^k} (e^{-x^2} \cos 2bx) \, dx \\ &= 2^k \int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} \cos \left(2bx + \frac{k\pi}{2} \right) \, dx, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{而} \left| x^k e^{-x^2} \cos \left(2bx + \frac{k\pi}{2} \right) \right| \leq x^k e^{-x^2} \quad (x \geq 0).$$

但是积分 $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} \, dx$ 对于任意的自然数 k 均收敛, 故积分 (2) 当 $-\infty < b < +\infty$ 时一致收敛. 因此, (1) 式的左端可在积分号下求任意次导数, 从而可得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial^{2n}}{\partial b^{2n}} (e^{-x^2} \cos 2bx) \, dx \\ &= \int_0^{+\infty} 2^{2n} x^{2n} e^{-x^2} \cos(2bx + n\pi) \, dx \\ &= 2^{2n} (-1)^n \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{d^{2n}}{db^{2n}} (e^{-b^2}), \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx \\ = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{d^{2n}}{db^{2n}} (e^{-b^2}).$$

3812. 从积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

出发, 计算迪里黑里积分

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

解 先设 $\beta > 0$, 将 β 固定, α 视为参变量. 仿 3760 题的证法, 可知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ 当 $\alpha \geq 0$ 时一致收敛, 从而 $I(\alpha)$ 是 $\alpha \geq 0$ 上的连续函数 (注意, 上述积分中 $x=0$ 不是瑕点, 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} = \beta$), 由于

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \right) dx \\ = - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx = - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

易知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx$ 当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 时一致收

敛 (因为此时 $|e^{-\alpha x} \sin \beta x| \leq e^{-\alpha_0 x}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} dx$

收敛)，故知当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ 可在积分号下求导数，得

$$I'(\alpha) = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知，上式对一切 $0 < \alpha < +\infty$ 皆成立。两端对 α 积分，得

$$I(\alpha) = -\arctan \frac{\alpha}{\beta} + C \quad (0 < \alpha < +\infty), \quad (1)$$

其中 C 是某常数。由 $|\sin u| \leq |u|$ 知

$$|I(\alpha)| \leq \beta \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{\beta}{\alpha} \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

由此可知 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = 0$ 。在 (1) 式两端令 $\alpha \rightarrow +\infty$

取极限，得 $0 = -\frac{\pi}{2} + C$ ，故 $C = \frac{\pi}{2}$ 。于是，

$$I(\alpha) = -\arctan \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\pi}{2} \quad (0 < \alpha < +\infty). \quad (2)$$

在 (2) 式两端令 $\alpha \rightarrow +0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$ 当 $\alpha \geq 0$ 时连续，即得

$$D(\beta) = I(0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

当 $\beta < 0$ 时， $D(\beta) = -D(-\beta) = -\frac{\pi}{2}$ 。又显然有

$D(0) = 0$ 。综上所述，有

$$D(\beta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta.$$

利用迪里黑里和傅茹兰积分，求下列积分之值：

$$3813. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx \quad (\alpha > 0).$$

解 令 $I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$. 首先注意到 $x=0$ 不是瑕点，因为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-2\alpha x e^{-\alpha x^2} + \beta \sin \beta x}{2x} = \frac{\beta^2}{2} - \alpha. \end{aligned}$$

由于

$$\left| \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2} \quad (x > 0),$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$ 在 $-\infty < \beta < +\infty$ 上一致收敛，从而 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$ 也在 $-\infty < \beta < +\infty$ 上一致收敛。于是， $I(\beta)$ 是 $-\infty < \beta < +\infty$ 上的连续函数。下设 $\beta > 0$ 。由于

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ 在 $\beta \geq \beta_0 > 0$ 上一致收敛

(因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 单调递减趋于零, 而

$$\left| \int_0^A \sin \beta x dx \right| = \left| \frac{1 - \cos \beta A}{\beta} \right| \leq \frac{2}{\beta_0}, \text{ 故由迪里}$$

黑里判别法知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ 当 $\beta \geq \beta_0$ 时一致收敛). 于是, 当 $\beta \geq \beta_0$ 时, 可在积分号下求导数, 得

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (*) \quad (1)$$

由 $\beta_0 > 0$ 的任意性知, (1) 式对一切 $\beta > 0$ 皆成立. 于是

$$I(\beta) = \frac{\pi}{2} \beta + C \quad (0 < \beta < +\infty), \quad (2)$$

其中 C 是某常数. 在 (2) 式两端令 $\beta \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到 $I(\beta)$ 在 $-\infty < \beta < +\infty$ 上的连续性, 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - 1}{x^2} dx = I(0) = \lim_{\beta \rightarrow +0} I(\beta) = C. \quad (3)$$

根据3808题结果知

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{a}) \quad (a > 0, \beta > 0). \end{aligned} \quad (4)$$

令 $I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (a > 0)$, 仿上

面之证，易知 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$ 当 $\beta \geq 0$ 时一

致收敛，故 $J(\beta)$ 是 $\beta \geq 0$ 上的连续函数。于是，在
(4) 式两端令 $\beta \rightarrow +0$ 取极限，得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - 1}{x^2} dx &= J(0) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +0} J(\beta) = -\sqrt{\pi \alpha} \quad (\alpha > 0), \end{aligned}$$

以此代入 (3) 式，得 $C = -\sqrt{\pi \alpha}$ 。于是，

$$I(\beta) = \frac{\pi}{2} \beta - \sqrt{\pi \alpha} \quad (0 \leq \beta < +\infty).$$

当 $\beta < 0$ 时， $I(\beta) = I(-\beta) = \frac{\pi}{2} (-\beta) - \sqrt{\pi \alpha}$ 。

总之，得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx \\ = \frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi \alpha} \quad (\alpha > 0). \end{aligned}$$

*) 利用 3812 题的结果。

$$3814. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x}{x} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right| \quad *)$$

*) 利用3790题的结果.

$$3815. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x - \sin(\beta - \alpha)x}{x} dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{若 } |\alpha| < |\beta| \quad *), \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha, & \text{若 } |\alpha| = |\beta| \quad **), \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha, & \text{若 } |\alpha| > |\beta| \quad ***). \end{cases} \end{aligned}$$

*) 利用3791题的结果.

) 及 *) 利用3812题的结果.

$$3816. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$$

解 由于 $\sin 3\alpha x = 3 \sin \alpha x - 4 \sin^3 \alpha x$, 故

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{3 \sin \alpha x - \sin 3\alpha x}{4x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) \quad *) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha. \end{aligned}$$

*) 利用3812题的结果.

$$3817. \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx.$$

解 令 $I(a) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx$. 先设 $a \geq 0$.

显然 $x=0$ 不是瑕点, 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 = a^2$.

而由于 $\left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 \leq \frac{1}{x^2}$, 又 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, 故

$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx$ 在 $a \geq 0$ 上一致收敛, 从而

$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx$ 在 $a \geq 0$ 时一致收敛. 因此, $I(a)$

是 $a \geq 0$ 上的连续函数.

又因

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x} dx$ 当 $a \geq a_0 > 0$ 时一致收敛

(参看3813题的解题过程), 故当 $a \geq a_0$ 时可在积分号下求导数, 得

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知, (1) 式对一切 $\alpha > 0$ 皆成立, 两端积分, 得

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \alpha + C \quad (0 \leq \alpha < +\infty),$$

其中 C 是某常数. 在上式两端令 $\alpha \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到 $I(\alpha)$ 在 $\alpha \geq 0$ 时的连续性知

$$0 = I(0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha) = C,$$

于是 $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \alpha \quad (0 \leq \alpha < +\infty)$. 当 $\alpha < 0$ 时, 显

然, $I(\alpha) = I(-\alpha) = \frac{\pi}{2}(-\alpha)$, 故对于任何 α , 有

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^2 dx = I(\alpha) = \frac{\pi}{2} |\alpha|.$$

3818. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 dx.$

解 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 dx$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin^3 \alpha x \, d\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \sin^3 \alpha x \Big|_0^{+\infty}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{3\alpha \sin^2 \alpha x \cos \alpha x}{x^2} dx$$

$$= \frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x \cos \alpha x}{x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \sin^2 \alpha x \cos \alpha x d\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{3\alpha}{2x} \sin^2 \alpha x \cos \alpha x \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad + \frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha \sin \alpha x \cos^2 \alpha x - \alpha \sin^3 \alpha x}{x} dx \\
&= \frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha \sin \alpha x}{x} dx \\
&\quad - \frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{3\alpha \sin^3 \alpha x}{x} dx \\
&= 3\alpha^2 \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha - \frac{9}{2} \alpha^2 \cdot \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha \quad *) \\
&= \frac{3\pi}{8} \alpha^2 \operatorname{sgn} \alpha = \frac{3\pi}{8} \alpha |\alpha|.
\end{aligned}$$

*) 利用3816题的结果.

3819. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx \\
&= -\frac{1}{x} \sin^4 x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{4 \sin^3 x \cos x}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(3 \sin x - \sin 3x) \cos x}{x} dx \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx \\
& = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

3820. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx.$

解 由于 $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$, 故

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx \\
& = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 4 \alpha x - \cos 4 \beta x}{x} dx \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2 \alpha x - \cos 2 \beta x}{x} dx \\
& = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \\
& = -\frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0).
\end{aligned}$$

注 若 $\alpha = \beta = 0$, 显然积分为零; 若 $\alpha = 0 (\beta \neq 0)$ 或 $\beta = 0 (\alpha \neq 0)$, 易知积分发散.

3821. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx.$

解 作代换 $x = \sqrt{t}$, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$3822. \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax \sin \beta x}{x^2} dx \quad (k \geq 0, a > 0, \beta > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax \sin \beta x}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} e^{-kx} \sin ax \sin \beta x \Big|_0^{+\infty} \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \{ -k e^{-kx} \sin ax \sin \beta x \\ &+ e^{-kx} (a \sin \beta x \cos ax + \beta \sin ax \cos \beta x) \} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{a \sin \beta x \cos ax + \beta \sin ax \cos \beta x}{x} dx \\ &- k \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax \sin \beta x}{x} dx. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{a \sin \beta x \cos ax}{x} dx \\ &= \frac{a}{2} \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin(a+\beta)x - \sin(a-\beta)x}{x} dx \\ &= \frac{a}{2} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{a+\beta}{k} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a-\beta}{k} \right)^{*}), \\ & \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\beta \sin ax \cos \beta x}{x} dx \\ &= \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{a+\beta}{k} + \operatorname{arc\,tg} \frac{a-\beta}{k} \right), \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{[(e^{-kx}-1)+1] \cdot [\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x]}{2x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-kx} - 1) \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{x} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-kx} - 1) \frac{\cos(\alpha+\beta)x}{x} dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x}{x} dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2 + k^2} \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2 + k^2}^{**}) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \right| \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{(\alpha+\beta)^2 + k^2}{(\alpha-\beta)^2 + k^2},
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx \\
&= \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{k} - \frac{\alpha-\beta}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{k} \\
&\quad + \frac{k}{4} \ln \frac{(\alpha-\beta)^2 + k^2}{(\alpha+\beta)^2 + k^2}.
\end{aligned}$$

*) 利用3812题的结果.

**) 易知3796题的结果当 $\alpha > 0$, $\beta = 0$ 时也成立.

3823. 对于不同的 x 值, 求 迪里黑里间断乘数

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda},$$

作出函数 $y = D(x)$ 的图形.

解 $D(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+x)\lambda + \sin(1-x)\lambda}{\lambda} d\lambda.$

当 $|x| < 1$ 时, $1+x > 0$ 及 $1-x > 0$, 利用3812题的

结果, 即得 $D(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1;$

当 $|x| = 1$ 时, $1+x$ 及 $1-x$ 中总有一个为零, 一个

为正值, 即得 $D(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2};$

当 $|x| > 1$ 时, $(1+x)(1-x) < 0$, 即得 $D(x) = 0.$

如图7·3所示.

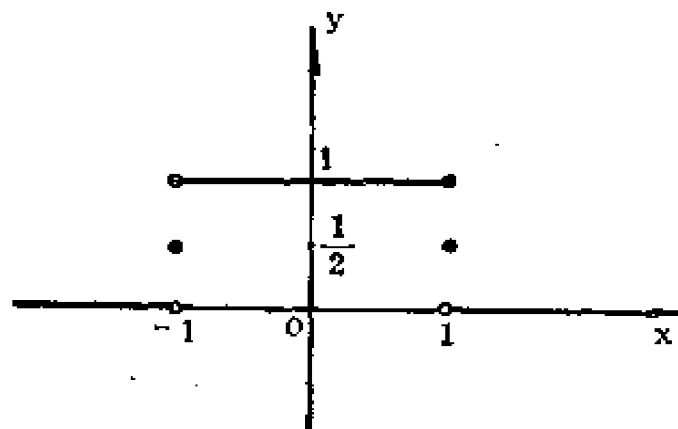


图 7·3

3824. 计算积分:

(a) $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx;$

$$(6) \quad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (a) \quad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx \\ &= V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a(t-b)}{t} dt \\ &= V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at \cos ab}{t} dt \\ &\quad - V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at \sin ab}{t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} \cos ab \, dt = \pi \operatorname{sgn} a \cos ab. \end{aligned}$$

类似地，可求得

$$(6) \quad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx = \pi \operatorname{sgn} a \sin ab.$$

3825. 利用公式

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy,$$

计算拉普拉斯积分

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx.$$

解 $L = \int_0^{+\infty} \cos ax \, dx \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$ ，由于被积函数 $\cos ax e^{-y(1+x^2)}$ 是 $0 \leq x < +\infty$ ， $0 \leq y < +\infty$ 上的连续函数，并且绝对值的积分

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} |e^{-y(1+x^2)} \cos ax| dx \\
& \leq \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} dx \\
& = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\
& = \frac{\pi}{2} < +\infty,
\end{aligned}$$

故原逐次积分可交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} \cos ax dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-y} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{a^2}{4y}} dy \quad *) \\
&= \int_0^{+\infty} \sqrt{\pi} e^{-\left[t^2 + \frac{1}{t^2} \left(\frac{|a|}{2}\right)^2\right]} dt \\
&= \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2 \cdot \frac{|a|}{2}} \quad **) = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.
\end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果.

**) 利用3807题的结果.

3826. 计算积分

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

解 由于 $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\cos ax}{1+x^2} \right) = -\frac{x \sin ax}{1+x^2}$, 故我们

考虑积分 $L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$. 由于 $\left| \frac{\cos ax}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 收敛, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$ 当 $-\infty < a < +\infty$ 时一致收敛. 又由于当 $a \geq a_0 > 0$ 时,

$$\left| \int_0^A \sin ax \, dx \right| = \left| \frac{1 - \cos aA}{a} \right| \leq \frac{2}{a_0},$$

而 $\frac{x}{1+x^2}$ 当 $x > 1$ 时递减, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于零;

于是, 由迪里黑里判别法知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx$ 当 $a \geq a_0$ 时一致收敛. 因此, 当 $a \geq a_0$ 时可在积分号下求导数, 得

$$\frac{dL}{da} = -L_1. \quad (1)$$

由 $a_0 > 0$ 的任意性知, (1) 式对一切 $a > 0$ 成立.

由3825题知 当 $a > 0$ 时 $L = \frac{\pi}{2} e^{-a}$. 于是, 由 (1) 式知

$$L_1 = -\frac{dL}{da} = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad (a > 0).$$

显然, 当 $a < 0$ 时,

$$L_1 = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(-a)x}{1+x^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^a;$$

而当 $\alpha = 0$ 时, $L_1 = 0$. 综上所述, 有

$$L_1 = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot e^{-|\alpha|}.$$

计算积分:

$$3827. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-2} \quad *) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

*) 利用3825题的结果.

$$3828. \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x \cos \alpha x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cos \alpha x}{1+x^2} \Big|_0^{+\infty} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \alpha x \sin \alpha x}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} e^{-|a|} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx \\
&\quad + \frac{a}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-|a|} - \frac{\pi}{4} e^{-|a|} + \frac{a}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \cdot e^{-|a|} \quad *) \\
&= \frac{\pi}{4} (1 + |a|) e^{-|a|}.
\end{aligned}$$

*) 利用3825题与3826题的结果.

3828. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{ax^2 + 2bx + c} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$

解 $ax^2 + 2bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} \right].$ 令

$$m = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}, \quad t = \frac{1}{m} \left(x + \frac{b}{a} \right) \quad (m > 0),$$

则 $ax^2 + 2bx + c = am^2(t^2 + 1),$

$$\cos ax = \cos a \left(mt - \frac{b}{a} \right)$$

$$= \cos a \, m t \cos \frac{ba}{a} + \sin a \, m t \sin \frac{ba}{a}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{ax^2 + 2bx + c} dx \\
&= \frac{1}{am} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos a \, m t \cos \frac{ba}{a}}{1 + t^2} dt
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{am}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin amt\sin\frac{ba}{a}}{1+t^2}dt.$$

由于 $\left|\frac{\cos amt}{1+t^2}\right|\leq\frac{1}{1+t^2}$, 而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\pi$ 收

敛, 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos amt}{1+t^2}dt$ 收敛. 同理, 积分

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin amt}{1+t^2}dt$ 收敛. 又由于 $\frac{\cos amt}{1+t^2}$ 为偶函

数, $\frac{\sin amt}{1+t^2}$ 为奇函数, 故

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos amt}{1+t^2}dt \\&=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos amt}{1+t^2}dt=\pi e^{-m|a|} \quad *)\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin amt}{1+t^2}dt=0.$$

从而得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{ax^2+2bx+c}dx &= \frac{1}{am}\cos\frac{ba}{a}\cdot\pi e^{-m|a|} \\&= \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{ba}{a}e^{-\frac{|a|\sqrt{ac-b^2}}{a}}.\end{aligned}$$

*) 利用3825题的结果.

3830. 利用公式

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy \quad (x>0),$$

计算傅伦涅耳积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

及

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

解 在积分

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy$$

的两端乘以 $\sin x$, 再在 $0 \leq x_0 \leq x \leq x_1$ 上积分, 则得

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy^2} dy. \end{aligned}$$

由于 $|\sin x \cdot e^{-xy^2}| \leq e^{-x_0 y^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-x_0 y^2} dy$ 收

敛, 故积分 $\int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy^2} dy$ 对 $x_0 \leq x \leq x_1$ 一致收

敛, 从而可进行积分顺序的互换, 得

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dy \int_{x_0}^{x_1} \sin x \cdot e^{-xy^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-x_0 y^2} (y^2 \sin x + \cos x)}{1+y^4} \right] \Big|_{x_0}^{x_1} dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_0 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_0 y^2}}{1+y^4} dy \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_0 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_0 y^2}}{1+y^4} dy \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_1 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy.
\end{aligned}$$

上述等式右端的诸积分分别对 $0 \leq x_0 < +\infty$, $0 \leq x_1 < +\infty$ 都是一致收敛的 (事实上, $e^{-x_0 y^2} \leq 1$, $e^{-x_1 y^2} \leq 1$, 且积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy$ 及 $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4}$ 均收敛). 于是, 它们分别都是 x_0, x_1 ($0 \leq x_0 < +\infty, 0 \leq x_1 < +\infty$) 的连续函数. 从而让 $x_0 \rightarrow +0$, 可在积分号下取极限, 得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_1 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy.
\end{aligned}$$

由于上式右端的后两个积分均不超过积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x_1 y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x_1}},$$

且 $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{x_1}} = 0$, 故令 $x_1 \rightarrow +\infty$, 即得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

最后得

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

同法可得

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

求下列积分之值:

3831. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \quad (a \neq 0).$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin a \left[\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \left(at^2 + \frac{ac - b^2}{a} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{ac-b^2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin at^2 dt \\
&\quad + \sin \frac{ac-b^2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos at^2 dt \\
&= \operatorname{sgn} a \cdot \cos \frac{ac-b^2}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y^2 dy \\
&\quad + \sin \frac{ac-b^2}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 dy \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2|a|}} \left(\operatorname{sgn} a \cdot \cos \frac{ac-b^2}{a} \right. \\
&\quad \left. + \sin \frac{ac-b^2}{a} \right)^{*}) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin \left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a \right).
\end{aligned}$$

*.) 利用3830题的结果.

3832. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx,$

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\sin(x^2 + 2ax) + \sin(x^2 - 2ax)] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a^2 \right) + \sqrt{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a^2 \right) \right]^{*}) \\
&= \sqrt{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a^2 \right) = \sqrt{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{4} + a^2 \right).
\end{aligned}$$

*) 利用3831题的结果.

$$3833. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax \, dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(x^2 + 2ax) + \cos(x^2 - 2ax)] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sin\left(x^2 + 2ax + \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(x^2 - 2ax + \frac{\pi}{2}\right) \right] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} - a^2 + \frac{\pi}{4}\right) \quad *) \\ &= \sqrt{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a^2\right). \end{aligned}$$

*) 利用3831题的结果.

3834. 证明公式:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2 - x^2} \, dx = -\frac{\pi}{2a} \sin aa \quad (a \geq 0),$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{a^2 - x^2} \, dx = -\frac{\pi}{2} \cos aa \quad (a > 0),$$

这里 $a \neq 0$, 积分应了解为在哥西意义上的主值.

$$\text{证} \quad 1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2 - x^2} \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_0^{a-\eta} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{a+\eta}^A \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx \right] \\
&= \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_0^{a-\eta} \frac{\cos \alpha x}{a-x} dx \right. \\
&\quad + \int_0^{a-\eta} \frac{\cos \alpha x}{a+x} dx + \int_{a+\eta}^A \frac{\cos \alpha x}{a-x} dx \\
&\quad \left. + \int_{a+\eta}^A \frac{\cos \alpha x}{a+x} dx \right] \\
&= \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[- \int_a^\eta \frac{\cos \alpha(a-t)}{t} dt \right. \\
&\quad + \int_a^{2a-\eta} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \\
&\quad - \int_\eta^{A-a} \frac{\cos \alpha(t+a)}{t} dt \\
&\quad \left. + \int_{2a+\eta}^{A+a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right] \\
&= \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_\eta^{A-a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right. \\
&\quad + \int_{A-a}^{A+a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \\
&\quad \left. + \int_{2a+\eta}^{2a-\eta} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\eta}^{A-a} \frac{\cos \alpha(t+a)}{t} dt \Big] \\
& = \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_{\eta}^{A-a} \frac{\cos \alpha(t-a) - \cos \alpha(t+a)}{t} dt \right. \\
& \quad + \int_{A-a}^{A+a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \\
& \quad \left. - \int_{2a-\eta}^{2a+\eta} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right] \\
& = \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{\eta}^{A-a} \frac{2 \sin \alpha t \sin \alpha a}{t} dt \\
& \quad + \frac{1}{2a} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{A-a}^{A+a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \\
& \quad - \frac{1}{2a} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{2a-\eta}^{2a+\eta} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \\
& = \frac{\sin \alpha a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \frac{\pi}{2a} \sin \alpha a \quad *)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} dx \\
& = \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_0^{a-\eta} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} dx \right. \\
& \quad \left. + \int_{a+\eta}^A \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} dx \right] \\
& = -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_0^{a-\eta} \frac{\sin \alpha x}{x-a} dx \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{a-\eta} \frac{\sin \alpha x}{x+a} dx + \int_{a+\eta}^A \frac{\sin \alpha x}{x-a} dx \\
& + \int_{a+\eta}^A \frac{\sin \alpha x}{x+a} dx \Big] \\
= & -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \Big[\int_{-a}^{-\eta} \frac{\sin \alpha(t+a)}{t} dt \\
& + \int_a^{2a-\eta} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \\
& + \int_{\eta}^{A-a} \frac{\sin \alpha(t+a)}{t} dt \\
& + \int_{2a+\eta}^{A+a} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \Big] \\
= & -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \Big[\int_{\eta}^a \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \\
& + \int_a^{2a-\eta} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \\
& + \int_{\eta}^{A-a} \frac{\sin \alpha(t+a)}{t} dt \\
& + \int_{2a+\eta}^{A+a} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \Big] \\
= & -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \Big[\int_{\eta}^{A-a} \frac{\sin \alpha(t-a) + \sin \alpha(t+a)}{t} dt \\
& + \int_{A-a}^{A+a} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{2a+\eta}^{2a-\eta} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \Big] \\
& = -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{A-a}^{A+a} \frac{2 \sin \alpha t \cos \alpha a}{t} dt \\
& \quad - \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{A-a}^{A+a} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \\
& \quad + \frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{2a-\eta}^{2a+\eta} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \\
& = -\cos \alpha a \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt \\
& = -\frac{\pi}{2} \cos \alpha a \quad *) .
\end{aligned}$$

*) 利用3812题的结果.

编者注: 原题 1) 应加上条件 $\alpha \geqslant 0$, 当 $\alpha < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx \\
& = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(-\alpha)x}{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \sin \alpha(-\alpha) \\
& = -\frac{\pi}{2a} \sin \alpha a .
\end{aligned}$$

原题 2) 应加上条件 $\alpha > 0$, 当 $\alpha = 0$ 时等式显然不成立(左端等于 0, 右端等于 $-\frac{\pi}{2}$); 当 $\alpha < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{a^2 - x^2} dx \\
&= - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(-a)x}{a^2 - x^2} dx \\
&= - \left[-\frac{\pi}{2} \cos a(-a) \right] = \frac{\pi}{2} \cos aa.
\end{aligned}$$

3835. 对于函数 $f(t)$ ，求拉普拉斯变换

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (p > 0).$$

设：

(a) $f(t) = t^n$ (n 为自然数); (б) $f(t) = \sqrt{t}$;

(B) $f(t) = e^{xt}$; (Г) $f(t) = t e^{-at}$;

(Д) $f(t) = \cos t$; (e) $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$;

(ж) $f(t) = \sin a \sqrt{t}$.

解 (a) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{p} e^{-pt} t^n \Big|_0^{+\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt \\
&= \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt \\
&\quad \underbrace{\quad}_{n-1 \text{ 次}} \dots = \frac{n!}{p^n} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{n!}{p^{n+1}}.
\end{aligned}$$

(б) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sqrt{t} dt$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{p} e^{-pt} \sqrt{t} \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad + \frac{1}{2p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2 p \sqrt{p}}.
\end{aligned}$$

$$(R) \quad F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt.$$

当 $p > \alpha$ 时, $F(p) = \frac{1}{p-\alpha}$; 当 $p \leq \alpha$ 时, 积分发散.

$$\begin{aligned}
(R) \quad F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} t e^{-(p+\alpha)t} dt \\
&= \frac{1}{(p+\alpha)^2} \quad (p+\alpha > 0) \quad *).
\end{aligned}$$

*) 利用本题 (a) 的结果: $n=1$.

$$\begin{aligned}
(R) \quad F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t dt \\
&= \frac{-p \cos t + \sin t}{p^2 + 1} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{p}{p^2 + 1}.
\end{aligned}$$

$$(R) \quad F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{1-e^{-t}}{t} dt.$$

由于 $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} = 0$, 故函数

$\frac{1-e^{-t}}{t}$ 有界:

$$0 < \frac{1-e^{-t}}{t} \leq M = \text{常数} \quad (0 < t < +\infty).$$

由此可知, 当 $p > 0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ 收敛, 并且

$$\begin{aligned} 0 < F(p) &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\ &= \frac{M}{p} \quad (0 < p < +\infty). \end{aligned} \quad (1)$$

再考虑积分

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p} \left(e^{-pt} \frac{1-e^{-t}}{t} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} (e^{-t} - 1) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \quad (p > 0), \end{aligned}$$

它对 $p \geq p_0 > 0$ 是一致收敛的. 因此, 当 $p \geq p_0$ 时, 可对函数 $F(p)$ 应用莱布尼兹法则, 得

$$F'(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \quad (\text{当 } p \geq p_0 \text{ 时}).$$

由 $p_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $p > 0$ 均成立. 两端积分, 得

$$F(p) = \ln \frac{p+1}{p} + C \quad (0 < p < +\infty), \quad (2)$$

其中 C 是某常数. 由 (1) 式知

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

于是, 在 (2) 式两端令 $p \rightarrow +\infty$, 取极限, 得 $C = 0$. 由此可知

$$F(p) = \ln \frac{p+1}{p} = \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

$$\begin{aligned} (\text{K}) \quad F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin a \sqrt{t} \, dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} u e^{-pu^2} \sin au \, du \\ &= \frac{a\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{-\frac{a^2}{4p}} \quad *). \end{aligned}$$

*) 利用 3810 题的结果.

3836. 证明公式 (李普希兹积分)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) \, dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (a > 0),$$

其中 $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) \, d\varphi$ 为足指数是 0 的贝塞耳函数 (参阅 3726 题).

证 $\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) \, dt$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-at} dt \int_0^\pi \cos(bt \sin \varphi) d\varphi. \text{ 由于积分} \\
&\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt \sin \varphi) dt \text{ 对 } 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ 是一致收敛的,} \\
&\text{故可交换积分顺序, 得} \\
&\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt \sin \varphi) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{-a \cos(bt \cos \varphi) + b \sin \varphi \cdot \sin(bt \sin \varphi)}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} e^{-at} \right) \Big|_0^{+\infty} d\varphi \\
&= \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{tg} \varphi)}{(a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2} \\
&= \frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2)t^2 + a^2} \\
&= \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{1}{a \sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} t}{a} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.
\end{aligned}$$

3837. 求外耳什特拉斯变换

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy.$$

设:

$$(a) f(y) = 1;$$

$$(b) f(y) = y^2;$$

$$(B) f(y) = e^{2ay},$$

$$(r) f(y) = \cos ay.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} y^2 dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} (x+u)^2 du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u^2 du \\ &\quad + \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u du \\ &\quad + \frac{x^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u^2 du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u d(e^{-u^2}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{1}{2},$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u \, du = 0,$$

故得

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = x^2 + \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} e^{2ay} \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2 + 2ay} \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2 + 2ax} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x-a)^2} \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2 + 2ax} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= e^{a^2 + 2ax}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(r)} \quad F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} \cos ay \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos a(x+u) \, du \\ &= \frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos au \, du \\ &\quad - \frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin au \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}} = 0 \\
 &= e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax.
 \end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果:

3838. 契贝协夫—厄耳米特多项式由公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

而定义, 证明

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{若 } m = n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

证 由1231题的结果知, $H_n(x)$ 为一个 n 次多项式, 且 x^n 的系数为 2^n . 不妨设 $m \leq n$, 则

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx \\
 &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) d \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right] \\
 &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) dx \\
 &= \dots = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(m)}(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x^2}) dx
 \end{aligned}$$

$$= \dots = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(n)}(x) e^{-x^2} dx.$$

当 $m < n$ 时, $H_m^{(n)}(x) = 0$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0,$$

当 $m = n$ 时, $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$, 故

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

3839. 计算在概率论中有重要意义的积分

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}} d\xi \\ & \quad (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0). \end{aligned}$$

解 注意到

$$\begin{aligned} & \frac{\xi^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2} \\ &= \frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\xi^2 - 2\sigma_1^2 x\xi + \sigma_1^2 x^2], \end{aligned}$$

并令

$$a = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}, \quad b = -\frac{\sigma_1^2 x}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

$$c = \frac{\sigma_1^2 x^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

即得

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a\xi^2+2b\xi+c)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}} \quad *).\end{aligned}$$

将 a, b, c 的表达式代入上式, 并令 $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, 化简整理得

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

*) 利用3804题的结果.

3840. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且绝对可积分*). 证明: 积分

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$$

满足热传导方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x).$$

证 当 $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\begin{aligned}& \left| f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \right| \leq |f(\xi)|, \text{ 而 } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi \\ & < +\infty, \text{ 故积分 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \text{ 在 } t > 0,\end{aligned}$$

$-\infty < x < +\infty$ 上一致收敛, 从而 $u(x, t)$ 是 $t \geq 0$,

$-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数. 考虑积分

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} d\xi, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{\xi-x}{2a^2t} d\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \left[-\frac{1}{2a^2t} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\xi-x)^2}{4a^4t^2} \right] d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

先考察 (1) 式中的积分:

由于对 $|x| \leq x_0$, $0 < t_0 \leq t \leq t_1$ (x_0, t_0, t_1 任意固定), 当 $|\xi| > x_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} \right| \\ & \leq |f(\xi)| \cdot e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}} \cdot \frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2}, \end{aligned}$$

而

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}} \cdot \frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2} = 0,$$

故当 $|\xi| > x_0$ 时, 有

$$\left| f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} \right| \leq M |f(\xi)|,$$

其中 M 是某常数. 于是, 根据 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi < +\infty$,

由外氏判别法知, (1) 式中的积分在 $|x| \leq x_0$, $0 < t_0 \leq t \leq t_1$ 上一致收敛.

同理可证, (2) 式中的积分和 (3) 式中的积分都在 $|x| \leq x_0$, $0 < t_0 \leq t \leq t_1$ 上一致收敛. 于是, 在其上可应用莱布尼兹法则在积分号下求导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4at\sqrt{\pi t}} \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t} - 1 \right] d\xi, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{\xi-x}{2a^2t} d\xi, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t} - 1 \right] d\xi. \quad (6) \end{aligned}$$

由 x_0, t_0, t_1 的任意性知, (4)、(5)、(6) 三式对一切 $-\infty < x < +\infty, t > 0$ 都成立. 根据 (4) 式及 (6) 式, 即得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0).$$

下面证明

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (7)$$

任意固定 x , 易知 ($t > 0$, 作变量代换 $u = -\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi \\ &= 2a\sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 2a\sqrt{\pi t}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & u(x, t) - f(x) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\xi) - f(x)] e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$. 根据 $f(x)$ 在点 x 的连续性, 可取某 $\delta > 0$, 使当 $|\xi - x| \leq \delta$ 时, 恒有 $|f(\xi) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

我们有

$$\begin{aligned} & u(x, t) - f(x) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{+\infty} \right) [f(\xi) - f(x)] e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned}$$

$$+ \int_{x+\delta}^{+\infty}) [f(\xi) - f(x)] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \\ = I_1 + I_2 + I_3.$$

下面分别估计 I_1 , I_2 与 I_3 . 我们有

$$|I_2| = \left| \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} [f(\xi) - f(x)] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \right| \\ \leq \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \right) \\ \leq \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \right) = \frac{\varepsilon}{3}.$$

又有

$$|I_3| = \left| \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x+\delta}^{+\infty} [f(\xi) - f(x)] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \right| \\ \leq \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}} \int_{x+\delta}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi \\ + \frac{|f(x)|}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x+\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \\ \leq \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi$$

$$+ \frac{|f(x)|}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-u^2} du,$$

由此可知 $\lim_{t \rightarrow +0} I_3 = 0$. 同理可证 $\lim_{t \rightarrow +0} I_1 = 0$. 于是,

存在 $\eta > 0$, 使当 $0 < t < \eta$ 时, 恒有

$$|I_3| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由此, 当 $0 < t < \eta$ 时, 恒有

$$|u(x, t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

故 (7) 式成立. 证毕.

*) 编者注: 本题原书把 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 误写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

另外, 原书只假定 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 这是不够的. 应加上假定 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 否则, 结论

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$$

就可能不成立了. 例如, 令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

则显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 绝对可积. 这时

$$u(x, t) \equiv 0 \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty),$$

故 $\lim_{t \rightarrow +0} u(0, t) = 0 \neq 1 = f(0)$.

原
书
缺
页

709-740

$$= \frac{1}{4^2} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

$$3874. \prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

证 利用3873题证明过程的一个结果, 即得

$$\begin{aligned} & \prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx \\ &= \prod_{m=1}^n \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \prod_{m=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{m}{n}\right). \end{aligned}$$

令

$$E = \prod_{m=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{m=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right),$$

则

$$\begin{aligned} E^2 &= \prod_{m=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right) \\ &= \prod_{m=1}^{n-1} \frac{\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{m=1}^{n-1} \sin \frac{m\pi}{n}}. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{m=1}^{n-1} \left(z - \cos \frac{2m\pi}{n} - i \sin \frac{2m\pi}{n} \right),$$

其中 $i = \sqrt{-1}$. 让 $z \rightarrow 1$, 取极限即得

$$n = \prod_{m=1}^{n-1} \left| 1 - \cos \frac{2m\pi}{n} - i \sin \frac{2m\pi}{n} \right|$$

$$= 2^{n-1} \prod_{m=1}^{n-1} \sin \frac{m\pi}{n},$$

故有

$$\prod_{m=1}^{n-1} \sin \frac{m\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

从而得

$$\begin{aligned} & \prod_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x^n} dx \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^n E = \frac{1}{n^n} \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

3875. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1.$

解 $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$ 由

3841题知 $\Gamma(x)$ 当 $x > 0$ 时是连续函数, 故得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \Gamma(1) = 1. \end{aligned}$$

利用等式 $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt \quad (x > 0)$, 求积分:

$$3876. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx \quad (0 < m < 1).$$

解 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} \cos ax \, dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} \, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} \, dt \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos ax \, dx \quad *) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} \frac{t}{a^2 + t^2} \, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \operatorname{tg} u)^m \cdot \frac{1}{a^2 \sec^2 u} \cdot a \sec^2 u \, du \\ &= \frac{a^{m-1}}{\Gamma(m)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^m u \, du \\ &= \frac{\pi a^{m-1}}{2 \Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2}} \quad **) \quad (a > 0). \end{aligned}$$

*) 交换积分顺序的合理性证明如下: 令

$$f(x, t) = \cos ax \cdot t^{m-1} e^{-xt} \quad (0 < m < 1, a > 0).$$

对任何 $A > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^A dx \int_0^{+\infty} |f(x, t)| \, dt \\ & \leq \int_0^A dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} \, dt = \Gamma(m) \int_0^A \frac{dx}{x^m} < +\infty, \end{aligned}$$

故对于 $\int_0^A dx \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ 可交换积分顺序, 得

$$\int_0^A dx \int_0^{+\infty} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^A f(x, t) dx. \quad (1)$$

但

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} dt \int_0^A f(x, t) dx \\ &= \int_0^{+\infty} t^{m-1} dt \int_0^A e^{-xt} \cos ax dx \\ &= \int_0^{+\infty} t^{m-1} \left[\frac{e^{-At}(a \sin aA - t \cos aA)}{a^2 + t^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{t}{a^2 + t^2} \right] dt, \end{aligned} \quad (2)$$

而

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a \sin aA - t \cos aA}{a^2 + t^2} \right| \\ & \leq \frac{a+t}{a^2 + t^2} \leq M \quad (0 \leq t < +\infty), \end{aligned}$$

其中 M 是某常数, 故

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left| t^{m-1} \cdot \frac{e^{-At}(a \sin aA - t \cos aA)}{a^2 + t^2} \right| dt \\ & \leq M \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-At} dt \\ & = \frac{M}{A^m} \int_0^{+\infty} y^{m-1} e^{-y} dy = \frac{M \cdot \Gamma(m)}{A^m}. \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} t^{m-1} \cdot \frac{e^{-At}(a \sin aA - t \cos aA)}{a^2 + t^2} dt = 0.$$

再注意到积分 $\int_0^{+\infty} t^{m-1} \cdot \frac{t}{a^2 + t^2} dt$ 收敛, 在 (2)

式两端令 $A \rightarrow +\infty$ 取极限, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dt \int_0^A f(x, t) dx \\ &= \int_0^{+\infty} t^{m-1} \cdot \frac{t}{a^2 + t^2} dt, \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} t^{m-1} \cdot \frac{t}{a^2 + t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{m-1} dt \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos ax dx \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} f(x, t) dx. \end{aligned}$$

于是, 在 (1) 式两端令 $A \rightarrow +\infty$ 取极限 (由于右端极限存在, 故左端极限也存在), 得

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} f(x, t) dx.$$

**) 利用3857题的结果.

$$3877. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m} dx \quad (0 < m < 2).$$

解 我们有

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m} dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} \sin ax \, dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} dt \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin ax \, dx \quad *) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} \cdot \frac{a}{a^2 + t^2} dt \\
 &= \frac{a^{m-1}}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} u \, du \\
 &= \frac{\pi a^{m-1}}{2 \Gamma(m) \cos \frac{m-1}{2} \pi} \\
 &= \frac{\pi a^{m-1}}{2 \Gamma(m) \sin \frac{m\pi}{2}} \quad (a > 0).
 \end{aligned}$$

*) 交换积分顺序的合理性可仿3876题证明之, 只要注意到 $|\sin ax| \leq ax$ ($a > 0, x > 0$). 于是, 当 $0 < m < 2$ 时, 对任何 $A > 0$, 有

$$\begin{aligned}
 & \int_0^A dx \int_0^{+\infty} |\sin ax \cdot t^{m-1} e^{-xt}| dt \\
 & \leq \int_0^A dx \int_0^{+\infty} ax \cdot t^{m-1} e^{-xt} dt \\
 & = a \Gamma(m) \int_0^A \frac{dx}{x^{m-1}} < +\infty.
 \end{aligned}$$

3878. 证明尤拉公式:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt \\ &= \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt \\ &= \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x \quad \left(\lambda > 0, x > 0, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

证 由于当 $0 < t < +\infty$ 时,

$$|t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha)| \leq t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha},$$

而 (作代换 $\lambda t \cos \alpha = u$)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} dt &= \frac{1}{(\lambda \cos \alpha)^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\Gamma(x)}{(\lambda \cos \alpha)^x} < +\infty, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt$ 收敛. 同理可

证积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt$ 也收敛. 令

(固定 $\lambda > 0, x > 0$)

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt \\ &\quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

$$I_1(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

我们有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} [t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha)] \\ &= \lambda t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} [\sin \alpha \cos(\lambda t \sin \alpha) \\ & \quad - \cos \alpha \sin(\lambda t \sin \alpha)], \end{aligned}$$

故当 $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} & |t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} [\sin \alpha \cos(\lambda t \sin \alpha) \\ & \quad - \cos \alpha \sin(\lambda t \sin \alpha)]| \\ & \leq 2 t^x e^{-\lambda t \sin \varepsilon}, \end{aligned}$$

而

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \sin \varepsilon} dt = \frac{\Gamma(x+1)}{(\lambda \sin \varepsilon)^{x+1}} < +\infty,$$

故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} [t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha)] dt$$

在 $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ 上一致收敛. 于是, 可在积分

号下求导数, 得 (当 $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ 时)

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} [t^{x-1} e^{-\lambda t \cos a} \cos(\lambda t \sin a)] dt \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda t^x e^{-\lambda t \cos a} [\sin a \cos(\lambda t \sin a) \\
&\quad - \cos a \sin(\lambda t \sin a)] dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \cos a} d[\sin(\lambda t \sin a)] \\
&\quad + \int_0^{+\infty} t^x \sin(\lambda t \sin a) d[e^{-\lambda t \cos a}] \\
&= t^x e^{-\lambda t \cos a} \sin(\lambda t \sin a) \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \sin(\lambda t \sin a) d[t^x e^{-\lambda t \cos a}] \\
&\quad + t^x e^{-\lambda t \cos a} \sin(\lambda t \sin a) \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t \cos a} d[t^x \sin(\lambda t \sin a)] \\
&= - \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-\lambda t \cos a} \sin(\lambda t \sin a) dt \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \lambda t^x e^{-\lambda t \cos a} \cos a \sin(\lambda t \sin a) dt \\
&\quad - \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-\lambda t \cos a} \sin(\lambda t \sin a) dt \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \lambda t^x e^{-\lambda t \cos a} \sin a \cos(\lambda t \sin a) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \lambda t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} [\sin \alpha \cos(\lambda t \sin \alpha) \\
&\quad - \cos \alpha \sin(\lambda t \sin \alpha)] dt \\
&= -2x I_1(\alpha) - I'(\alpha),
\end{aligned}$$

故 (当 $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ 时)

$$I'(\alpha) = -x I_1(\alpha). \quad (1)$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知, (1) 式对一切 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 皆成立.

同理可证

$$I_1'(\alpha) = x I(\alpha) \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right). \quad (2)$$

由 (1) 式与 (2) 式, 得

$$I''(\alpha) + x^2 I(\alpha) = 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

解此微分方程, 得

$$I(\alpha) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \quad (3)$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 在 (3) 式中令 $\alpha = 0$, 得

$$C_1 = I(0) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}.$$

又在 (1) 式中令 $\alpha = 0$, 得

$$I'(0) = -x I_1(0). \quad (4)$$

但是, 根据 (3) 式,

$$\begin{aligned} I'(0) &= I'(\alpha) \big|_{\alpha=0} \\ &= (-C_1 x \sin \alpha x + C_2 x \cos \alpha x) \big|_{\alpha=0} \\ &= C_2 x, \end{aligned}$$

又显然知 $I_1(0) = 0$, 故由 (4) 式得 $C_2 = 0$. 于是, 最后得

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \\ I_1(\alpha) &= -\frac{1}{x} I'(\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

证毕.

3879. 求曲线

$$r^n = a^n \cos n\varphi \quad (a > 0, n \text{ 为自然数})$$

的弧长.

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= 2n \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \\ &= 2na \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos^{\frac{1}{n}-1} n\varphi d\varphi \\ &= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{n}-1} t dt = a B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)^{*). \end{aligned}$$

*) 利用3856题的结果.

3880. 求由曲线

$$|x|^n + |y|^n = a^n \quad (n > 0, a > 0)$$

所界的面积.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a (a^n - x^n)^{\frac{1}{n}} dx \\ &= \frac{4 a^2}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}} dt \\ &= \frac{4 a^2}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 1\right) \\ &= \frac{4 a^2}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n} + 1\right)} \\ &= \frac{2 a^2}{n} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}. \end{aligned}$$

§ 5. 福里叶积分公式

1° 用福里叶积分表示函数 如果: 1) 函数 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内有定义; 2) 在每一个有穷的区间内此函数和它的导函数 $f'(x)$ 皆是逐段连续; 3) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积分, 则在函数连续的一切点, 可把函数表成福里叶积分的形状

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (1)$$

式中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi$$

及
$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

在函数 $f(x)$ 不连续的各点, 公式 (1) 的左端应用 $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ 代换.

对于偶函数 $f(x)$ 关于不连续的点应加以同样的附注, 公式 (1) 给出:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad (2)$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi.$$

同样对于奇函数 $f(x)$ 可得:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (3)$$

其中

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

2° 在区间 $(0, +\infty)$ 内用福里叶积分表示函数 已知函数 $f(x)$ 于区间 $(0, +\infty)$ 内绝对可积分并有性质 (2),

则在已知区间内可按我们的愿望用公式(2)(偶式展拓的时候), 或用公式(3)(奇式展拓的时候)来表示出函数 $f(x)$.

用福里叶积分表示下列函数:

$$3881. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

解 由于函数 $f(x)$ 在 $|x| \neq 1$ 上有定义, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在任何有穷区间上皆逐段连续, 特别是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对可积:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

故可将 $f(x)$ 表成福里叶积分的形式(以下各题如不加说明, 均满足福里叶积分展式成立的条件). 又由于 $f(x)$ 为偶函数, 故 $b(\lambda) = 0$, 且

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \lambda \xi d\xi = \frac{2 \sin \lambda}{\pi \lambda}. \end{aligned}$$

于是, 当 $|x| \neq 1$ 时 ($|x| \neq 1$ 为 $f(x)$ 的连续点), 有

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda,$$

而当 $|x| = 1$ 时为不连续点, 由于 $\frac{f(1+0) + f(1-0)}{2}$

$$= \frac{1}{2}, \quad \frac{f(-1+0) + f(-1-0)}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{故有}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda d\lambda = \frac{1}{2}^{*}).$$

*.) 此结果由3812题的结果也容易获得. 事实上,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$3882. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{若 } |x| < 1, \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

解 由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $a(\lambda) = 0$, 且

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \lambda \xi d\xi = \frac{2(1 - \cos \lambda)}{\pi \lambda}. \end{aligned}$$

于是, 当 $0 < |x| \neq 1$ 时为连续点, 故有

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda,$$

当 $x=0$ 时, 虽为不连续点, 但由于 $\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2}$

$= 0$, $f(0) = 0$, 且右端积分显然为零, 故上式仍成立. 而当 $|x| = 1$ 时为不连续点, 由于

$$\frac{f(-1+0) + f(-1-0)}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2} = \frac{1}{2},$$

故有

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda \cdot \operatorname{sgn} x \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x^{*)}. \end{aligned}$$

*) 此结果由3812题的结果也容易获得。事实上,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn} x \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda \, d\lambda \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn} x \cdot \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \, d\lambda - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\lambda}{\lambda} \, d\lambda \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x. \end{aligned}$$

3883. $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b)$ ($b > a$).

$$\text{解 } a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi \, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_a^b 2 \cos \lambda \xi \, d\xi$$

$$= \frac{2(\sin b\lambda - \sin a\lambda)}{\pi \lambda},$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi \, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_a^b 2 \sin \lambda \xi \, d\xi$$

$$= \frac{2(\cos a\lambda - \cos b\lambda)}{\pi \lambda}.$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(x-a) - \sin \lambda(x-b)}{\lambda} d\lambda, \end{aligned}$$

当 $x=a$ 或 b 时, $f(x)=1$, 而 $\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}$
 $=1$ 及 $\frac{f(b+0)+f(b-0)}{2}=1$, 故上式对于不连续
 点 a 和 b 也成立.

$$3884. \quad f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & \text{若 } |x| \leq a, \\ 0, & \text{若 } |x| > a. \end{cases}$$

解 由于 $f(x)$ 为偶函数, 故

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2h}{\pi} \int_0^a \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \cos \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2h(1 - \cos a\lambda)}{\pi a \lambda^2}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2h}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos a\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda \\ & \quad (-\infty < x < +\infty), \end{aligned}$$

$f(x)$ 处处连续, 故不再讨论点 $x = \pm a$, 以下各题类似, 不再一一加以说明.

$$3885. \quad f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数, 且绝对可积,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{a} < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi \, d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda \xi}{a^2 + \xi^2} \, d\xi \\ &= \frac{2}{a\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda ax}{1 + x^2} \, dx \\ &= \frac{2}{a\pi} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \quad *) = \frac{1}{a} e^{-a|\lambda|}. \end{aligned}$$

于是,

$$f(x) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda$$

或

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda \\ &\quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

*) 利用3825题的结果.

$$3886. \quad f(x) = -\frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

解 $f(x)$ 是连续的奇函数, 故

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\xi \sin \lambda \xi}{a^2 + \xi^2} d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin a\lambda x}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-a\lambda} \quad (*) = e^{-a\lambda}. \end{aligned}$$

但我们不能根据福里叶积分的理论来断定展式

$$\begin{aligned} \frac{x}{a^2 + x^2} &= \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \sin \lambda x d\lambda \\ &\quad (-\infty < x < +\infty) \end{aligned} \quad (1)$$

成立, 这是因为函数 $f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}$ 不是绝对可积的:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x}{a^2 + x^2} \right| dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \ln(a^2 + x^2) \Big|_0^{+\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

不过, 我们可以直接验证展式 (1) 是成立的, 事实上, 我们有

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \sin \lambda x d\lambda$$

$$= \frac{e^{-a\lambda} (-a \sin \lambda x - x \cos \lambda x)}{a^2 + x^2} \bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=+\infty}$$

$$= \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

故展式 (1) 成立.

*) 利用 3826 题的结果.

$$3887. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{若 } |x| \leq \pi; \\ 0, & \text{若 } |x| > \pi. \end{cases}$$

解 由于 $f(x)$ 为连续的奇函数, 故

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi \, d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \xi \sin \lambda \xi \, d\xi$$

$$= \frac{2 \sin \lambda \pi}{\pi (1 - \lambda^2)}.$$

于是,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \pi}{1 - \lambda^2} \sin \lambda x \, d\lambda$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

$$3888. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{若 } |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{若 } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数, 故

$$\begin{aligned}
 a(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \xi \cos \lambda \xi d\xi \\
 &= \frac{2 \cos \frac{\lambda \pi}{2}}{\pi(1-\lambda^2)}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\lambda \pi}{2}}{1-\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda \\
 &\quad (-\infty < x < +\infty).
 \end{aligned}$$

$$3889. \quad f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t, & \text{若 } |t| \leq \frac{2\pi n}{\omega}; \\ 0, & \text{若 } |t| > \frac{2\pi n}{\omega} \end{cases} \quad (n \text{ 为自然数}).$$

解 由于 $f(t)$ 为连续的奇函数, 故

$$\begin{aligned}
 b(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \\
 &= \frac{2A}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi n}{\omega}} \sin \omega \xi \sin \lambda \xi d\xi \\
 &= \frac{2A\omega \sin \frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\pi(\lambda^2 - \omega^2)}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$f(t) = \frac{2A\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \lambda t d\lambda$$

$$(-\infty < t < +\infty).$$

3890. $f(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0).$

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数, 且绝对可积:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} dx < +\infty,$$

故

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a\xi} \cos \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2a}{\pi(\lambda^2 + a^2)}. \end{aligned}$$

于是,

$$f(x) = e^{-a|x|} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + a^2} d\lambda$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

3891. $f(x) = e^{-a|x|} \cos \beta x \quad (a > 0).$

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数, 且绝对可积,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} |\cos \beta x| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} dx < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 a(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a\xi} \cos \beta \xi \cos \lambda \xi d\xi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [\cos(\lambda + \beta)\xi + \cos(\lambda - \beta)\xi] e^{-a\xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{a}{(\lambda + \beta)^2 + a^2} + \frac{a}{(\lambda - \beta)^2 + a^2} \right].
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 e^{-a|x|} \cos \beta x &= \frac{a}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(\lambda + \beta)^2 + a^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(\lambda - \beta)^2 + a^2} \right] \cos \lambda x d\lambda \\
 &\quad (-\infty < x < +\infty).
 \end{aligned}$$

3892. $f(x) = e^{-a|x|} \sin \beta x \quad (a > 0).$

解 由于 $f(x)$ 为连续的奇函数, 且绝对可积:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} |\sin \beta x| dx \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} dx < +\infty,
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 b(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a\xi} \sin \beta \xi \sin \lambda \xi d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [\cos(\lambda - \beta)\xi - \cos(\lambda + \beta)\xi] e^{-a\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{a}{(\lambda - \beta)^2 + a^2} - \frac{a}{(\lambda + \beta)^2 + a^2} \right] \\
&= -\frac{4\lambda a \beta}{\pi [(\lambda - \beta)^2 + a^2][(\lambda + \beta)^2 + a^2]}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&e^{-a|x|} \sin \beta x \\
&= \frac{4a\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{[(\lambda - \beta)^2 + a^2][(\lambda + \beta)^2 + a^2]} d\lambda \\
&\quad (-\infty < x < +\infty).
\end{aligned}$$

3893. $f(x) = e^{-x^2}$.

解 由于 $f(x)$ 为连续的偶函数, 且绝对可积:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} < +\infty,$$

故

$$\begin{aligned}
a(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \cos \lambda \xi d\xi \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \quad (*) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
e^{-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cos \lambda x d\lambda \\
&\quad (-\infty < x < +\infty).
\end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果.

$$3894. f(x) = xe^{-x^2}.$$

解 由于 $f(x)$ 为连续的奇函数, 且绝对可积,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xe^{-x^2}| dx = 2 \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx < +\infty,$$

故

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \xi e^{-\xi^2} \sin \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \xi d(-e^{-\xi^2}) \\ &= -\frac{1}{\pi} e^{-\xi^2} \sin \lambda \xi \Big|_0^{+\infty} \\ &\quad + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \cos \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} \cos \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \quad *) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} xe^{-x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \sin \lambda x d\lambda \\ &\quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果.

3895. 用福里叶积分来表示函数

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x < +\infty),$$

(a) 用偶式延拓; (6) 用奇式延拓.

解 首先, 我们注意到函数 e^{-x} 在 $[0, +\infty)$ 内连续且绝对可积:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 < +\infty,$$

故对于

(a) 若用偶式延拓, 则有

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \cos \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}. \end{aligned}$$

于是,

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+\lambda^2} d\lambda \quad (0 \leq x < +\infty).$$

由于按偶式延拓的函数在点 $x=0$ 连续, 故上式当 $x=0$ 时也成立, 即上式成立的范围是 $0 \leq x < +\infty$.

(6) 若用奇式延拓, 则有

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \sin \lambda \xi d\xi \end{aligned}$$

$$= -\frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

于是,

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1+\lambda^2} d\lambda \quad (0 < x < +\infty).$$

但当 $x=0$ 时上式不成立. 事实上, 左端的值为 1, 而右端的值为零.

对于函数 $f(t)$, 求出福里叶变换

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt,$$

若:

3896. $f(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0).$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-itx} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} (\cos tx - i \sin tx) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cos tx dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos tx dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}. \end{aligned}$$

3897. $f(x) = xe^{-a|x|} \quad (a > 0).$

$$\text{解} \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-a|t|} e^{-itx} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-a|t|} (\cos tx - i \sin tx) dt \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} i \cdot \int_0^{+\infty} t e^{-at} \sin tx dt.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} t e^{-at} \sin tx dt \\
&= -\frac{1}{a} e^{-at} t \sin tx \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-at} (\sin tx + tx \cos tx) dt \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin tx dt + \frac{x}{a} \int_0^{+\infty} t e^{-at} \cos tx dt \\
&= \frac{x}{a(a^2+x^2)} - \frac{x}{a^2} e^{-at} t \cos tx \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad + \frac{x}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-at} (\cos tx - tx \sin tx) dt \\
&= \frac{x}{a(a^2+x^2)} + \frac{x}{a^2} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos tx dt \\
&\quad - \frac{x^2}{a^2} \int_0^{+\infty} t e^{-at} \sin tx dt \\
&= \frac{x}{a(a^2+x^2)} + \frac{x a}{a^2(a^2+x^2)} - \frac{x^2}{a^2} I,
\end{aligned}$$

故有

$$\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) I = \frac{2x}{a(a^2+x^2)}$$

或
$$I = \frac{2ax}{(a^2 + x^2)^2}.$$

于是,

$$F(x) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{ax}{(a^2 + x^2)^2}.$$

3898. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$

$$\begin{aligned} \text{解 } F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} (\cos tx - i \sin tx) dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos tx dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad *) = e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果.

3899. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos ax.$

$$\begin{aligned} \text{解 } F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos at \cdot e^{-itx} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos at \\ &\quad \cdot (\cos tx - i \sin tx) dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos at \cos tx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} [\cos(\alpha+x)t + \cos(\alpha-x)t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(\alpha+x)t dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(\alpha-x)t dt \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{2}} \right] * \\
&= e^{-\frac{\alpha^2+x^2}{2}} \cdot \frac{e^{-\alpha x} + e^{\alpha x}}{2} \\
&= e^{-\frac{\alpha^2+x^2}{2}} \operatorname{ch} \alpha x.
\end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果.

3900. 求函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$, 设:

$$(a) \int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy dy = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(b) \int_0^{+\infty} \psi(y) \sin xy dy = e^{-x} \quad (x > 0).$$

解 (a) 令 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$

上连续且绝对可积, 故按偶函数延拓, 有展式

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy \, dy \quad (x \geq 0),$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \varphi(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\lambda) \cos \lambda y \, d\lambda \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda y}{1 + \lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-y} = e^{-y}. \end{aligned}$$

由此可知, 函数 $\varphi(y) = e^{-y}$ ($y \geq 0$) 即满足

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy \, dy \quad (x \geq 0),$$

显然 $x < 0$ 时此式也成立, 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1+(-x)^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos(-x)y \, dy \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy \, dy. \end{aligned}$$

(6) 同样, 令 $g(x) = e^{-x}$ ($x > 0$), 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续且绝对可积, 故按奇函数延拓, 有展式

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \psi(y) \sin xy \, dy \quad (x > 0),$$

$$\text{其中 } \psi(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} g(\lambda) \sin \lambda y \, d\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \sin \lambda y d\lambda$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y}{1+y^2} \quad (y \geqslant 0).$$

由此可知, 函数 $\phi(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y}{1+y^2} \quad (y \geqslant 0)$ 即满足

$$e^{-x} = \int_0^{+\infty} \phi(y) \sin xy dy \quad (x > 0).$$

•) 利用3825题的结果.

В. И. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

曹定西 冯学才 编所
郭大猷 邵靖彦 主审

由科学技术出版社

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

(六)

费定晖	周学圣	编演
郭大钧	邵品琮	主审

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

目 录

第八章 重积分和曲线积分	1
§1. 二重积分	1
§2. 面积的计算法	67
§3. 体积的计算法	92
§4. 曲面面积计算法	115
§5. 二重积分在力学上的应用	130
§6. 三重积分	158
§7. 利用三重积分计算体积法	185
§8. 三重积分在力学上的应用	208
§9. 二重和三重广义积分	244
§10. 多重积分	307
§11. 曲线积分	341
§12. 格林公式	403
§13. 曲线积分的物理应用	435
§14. 曲面积分	460
§15. 斯托克斯公式	493
§16. 奥斯特洛格拉德斯基公式	506
§17. 场论初步	546

第八章 重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1° 二重积分的直接计算法 所谓连续函数 $f(x, y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的 二重积分 乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max |\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, 而其和为对所有 i, j 使 $(x_i, y_j) \in \Omega$ 的那些值来求的。

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2° 二重积分中的变量代换 若可微分的连续函数

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

把平面 Oxy 上的有限闭域 Ω 单值唯一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω' 及雅哥比式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0,$$

则下之公式正确:

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \iint_{\sigma'} f[x(u, v), y(u, v)] |I| du dv.$$

特别是, 根据公式 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 的情形有

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \iint_{\sigma'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

3901. 把积分 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$, 当作积分和的极限, 用直线

$$x = \frac{i}{n}, \quad y = \frac{j}{n} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

把积分域分为许多正方形, 并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值, 计算所论积分的值.

解 由于

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty),$$

其中

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2},$$

故

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy = \frac{1}{4}.$$

3902. 用直线

$$x = 1 + \frac{i}{n}, \quad y = 1 + \frac{2j}{n} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

把域 $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 3$ 分为许多矩形. 作出函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在此域内的积分下和 \underline{S} 与积分上和 \bar{S} . 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上和与下和的极限等于什么?

解 下和

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n}\right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \\ &= \frac{2n}{n^2} \left[n + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n + \frac{4}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \right] \\ &= \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \\ \sum_{j=0}^{n-1} j^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6};\end{aligned}$$

而上和

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n}\right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \\ &= \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.\end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, \underline{S} 与 \bar{S} 的极限均等于 $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

3903. 用一系列内接正方形作为积分域的近似域, 这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点, 并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值, 近似地计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比较.

解 由题意知, 应取的正方形顶点为(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), 故利用对称性知

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} &= \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{34}} \\ &+ \frac{2}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{2}{\sqrt{37}} + \frac{2}{\sqrt{44}} + \frac{1}{\sqrt{42}} + \frac{2}{\sqrt{49}} \\ &= 0.196 + 0.371 + 0.343 + 0.312 + 0.177 \\ &+ 0.329 + 0.302 + 0.154 + 0.285 \\ &= 2.470, \end{aligned}$$

即

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = 9.880.$$

下面计算积分的精确值:

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \\ &= 4 \int_0^5 \ln(y + \sqrt{24+x^2+y^2}) \Big|_0^{\sqrt{25-x^2}} dx \\ &= 4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx - 2 \int_0^5 \ln(24+x^2) dx. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\int \ln(24+x^2) dx &= x \ln(24+x^2) - \int \frac{2x^2}{24+x^2} dx \\ &= x \ln(24+x^2) - 2x + \frac{24}{\sqrt{6}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{24}} + C,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}2 \int_0^5 \ln(24+x^2) dx &= \left[2x \ln(24+x^2) - 4x + \frac{48}{\sqrt{6}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{24}} \right]_0^5 \\ &= 20 \ln 7 - 20 + 8 \sqrt{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{5}{\sqrt{24}};\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7) dx &= 4 \left[x \ln(\sqrt{25-x^2}+7) \right]_0^5 \\ &\quad + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}} \\ &= 20 \ln 7 + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}},\end{aligned}$$

再令 $x=5\sin t$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{25 \cos^2 t + 25}{5 \cos t + 7} dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \cos t - 7) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24}{5 \cos t + 7} dt \\ &= (7t - 5 \sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24 \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{7\pi}{2} - 5 - 4\sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而

$$\begin{aligned} 4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx \\ = 20 \ln 7 + 14\pi - 20 - 16\sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{24}}. \end{aligned}$$

注意到

$$2 \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{24}} + \operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{\pi}{2},$$

最后便得到

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \\ = 14\pi - 4\sqrt{24} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{24}} + \operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{24}} \right) \\ = 2\pi(7 - \sqrt{24}) \doteq 13.201. \end{aligned}$$

将精确值与近似值作比较, 显见误差较大, 其原因在于有不少不是正方形的域都被忽略, 因而产生较大的绝对误差 3.321 及较大的相对误差 $\frac{3.321}{13.201} \doteq 25.16\%$.

注意, 求 $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$ 的精确值若采用

极坐标则较为简单:

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 \frac{r dr}{\sqrt{24+r^2}} \\ &= 2\pi(7 - \sqrt{24}). \end{aligned}$$

但按原习题集的安排, 似应在 3937 题以后才开始使用

极坐标, 故本题仍用直角坐标进行计算.

3904. 用直线 $x = \text{常数}$, $y = \text{常数}$, $x + y = \text{常数}$ 把域 S 分为四个相等的三角形, 并取被积函数在每个三角形的中线交点之值, 近似地计算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y} dS,$$

其中 S 表由直线 $x = 0$, $y = 0$ 及 $x + y = 1$ 所围成的三角形.

解 我们只须以 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ 及 $x + y = \frac{1}{2}$ 分域 S , 即

得四个相等的三角形, 它们的面积均为 $\frac{1}{8}$, 重心为 $(\frac{1}{6},$

$\frac{1}{6})$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ 及 $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$. 于是, 得此积分的近似值为

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{x+y} dS &\doteq \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} \right) \\ &\doteq \frac{1}{8} (0.577 + 0.816 + 1.826) \doteq 0.402, \end{aligned}$$

其精确值为

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{x+y} dS &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{2}{5} = 0.4. \end{aligned}$$

3905. 把域 $S \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子域 $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$, 对于什么样的值 δ 能保证不等式:

$$\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0.001$$

成立? 其中 $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i , 则

$$\begin{aligned} & \left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} [\sin(x+y) - \sin(x_i + y_i)] dS \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} |\sin(x+y) - \sin(x_i + y_i)| dS \\ &\leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} \omega_i dS = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i. \end{aligned}$$

由于域 $S\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的面积等于 π , 故只要

$$\omega_i < \frac{0.001}{\pi},$$

便能满足原不等式的要求. 但因为

$$\begin{aligned} \omega_i &= \sup_{\substack{(x, y) \in \Delta S_i \\ (x', y') \in \Delta S_i}} |\sin(x' + y') - \sin(x + y)| \\ &\leq \sup_{\substack{(x, y) \in \Delta S_i \\ (x', y') \in \Delta S_i}} |(x' + y') - (x + y)| \\ &\leq \sup_{\substack{(x, y) \in \Delta S_i \\ (x', y') \in \Delta S_i}} [|x' - x| + |y' - y|] \\ &\leq \sup_{\substack{(x, y) \in \Delta S_i \\ (x', y') \in \Delta S_i}} \sqrt{2[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]}^{*)} \\ &= \sqrt{2} \delta_i, \end{aligned}$$

故只要取

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \times 0.001 = 0.00023,$$

则有

$$\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0.001.$$

*) 对于任意非负实数 a, b 有

$$2ab \leq a^2 + b^2 \text{ 或 } (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

从而

$$a+b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

计算积分:

$$3906. \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 1.$$

$$3907. \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right) dx = \frac{1}{40}.$$

$$3908. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr &= \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^3}{3} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

3909. 设 R 为矩形

$$a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B,$$

证明等式

$$\iint_R X(x)Y(y) dx dy = \int_a^A X(x) dx \int_b^B Y(y) dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法,不妨先对 y 后对 x 积分,即得

$$\begin{aligned} \iint_R X(x)Y(y) dx dy &= \int_a^A dx \int_b^B X(x)Y(y) dy \\ &= \int_a^A X(x) dx \int_b^B Y(y) dy. \end{aligned}$$

3910. 设:

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y),$$

计算

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

解 不妨按先对 y 后对 x 积分的顺序计算,即得

$$\begin{aligned} I &= \int_a^A [F'_x(x, B) - F'_x(x, b)] dx \\ &= F(x, B) \Big|_a^A - F(x, b) \Big|_a^A \\ &= F(A, B) - F(a, B) - F(A, b) + F(a, b). \end{aligned}$$

3911. 设 $f(x)$ 为在闭区间 $a \leq x \leq b$ 内的连续函数,证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

此处仅当 $f(x) = \text{常数}$ 时等号成立.

证 因为

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy \\
&= (b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \\
&\quad + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy,
\end{aligned}$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

当 $f(x) = \text{常数}$ 时, 显然上式中等号成立. 反之, 设上式中等号成立, 则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

由于函数 $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ 是 $a \leq x \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $F(x) \equiv 0$ ($a \leq x \leq b$). 特别 $F(a) = 0$, 即 $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 dy = 0$. 又由于函数

$$G(y) = [f(a) - f(y)]^2$$

是 $a \leq y \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $G(y) \equiv 0$ ($a \leq y \leq b$). 因此, $f(y) \equiv f(a)$ ($a \leq y \leq b$), 即 $f(x) = \text{常数}$. 证毕.

3912. 下列积分有什么样的符号:

$$(a) \iint_{|x|+|y| \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy;$$

$$(b) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy;$$

$$(B) \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy?$$

解 (a) 由于 $0 \leq x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq 1$ 及 $\ln(x^2 + y^2) \leq \ln 1 = 0$, 且当 $|x| + |y| < 1$ 时 $\ln(x^2 + y^2) < 0$, 故

$$\iint_{|x| + |y| < 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy < 0.$$

(6) 我们有

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy = I_1 - I_2 - I_3,$$

其中

$$I_1 = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy,$$

$$I_2 = \iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 2} \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1} dx dy,$$

$$I_3 = \iint_{2 \leq x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt[3]{x^2 + y^2 - 1} dx dy.$$

显然

$$0 < I_1 < \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy = \pi,$$

$$I_2 > 0,$$

$$I_3 > \iint_{2 \leq x^2 + y^2 \leq 4} dx dy = 4\pi - 2\pi = 2\pi,$$

故

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy < 0.$$

(B) 我们有

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0}} \arcsin(x+y) dx dy \\ &+ \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy. \end{aligned}$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零，第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数，因而积分值是正的。于是，原积分是正的。

3913. 求函数

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

在正方形： $0 \leq x \leq \pi$ ， $0 \leq y \leq \pi$ 内的平均值。

解 平均值

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} \sin^2 x \sin^2 y dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left[\int_0^\pi \sin^2 x dx \right]^2 = \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi \right]^2 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

3914. 利用中值定理，估计积分

$$I = \iint_{|x|+|y|\leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

之值.

解 由于积分域的面积为200,故由积分中值定理知

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta} \cdot 200 \\ &= \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 (ξ, η) 为域 $|x| + |y| \leq 10$ 中的某点.

显然

$$0 \leq \cos^2 \xi + \cos^2 \eta \leq 2,$$

我们证明必有

$$0 < \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2. \quad (2)$$

由于函数 $\cos^2 x + \cos^2 y$ 在有界闭域 $|x| + |y| \leq 10$ 上的最大值为2, 最小值为0. 从而连续函数

$\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ 在有界闭域 $|x| + |y| \leq 10$ 上的

最小值为 $\frac{1}{102}$, 最大值为 $\frac{1}{100}$. 如果 $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta = 2$,

则由(1)式知

$$\begin{aligned} &\iint_{|x|+|y|\leq 10} \left(\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102} \right) dx dy \\ &= I - I = 0. \end{aligned}$$

但 $f(x, y) = \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102}$ 是非负连续函

数, 从而必有 $f(x, y) \equiv 0$ (在域 $|x| + |y| \leq 10$ 上),

即 $\cos^2 x + \cos^2 y \equiv 2$ (在域 $|x| + |y| \leq 10$ 上). 这显然

是错误的. 由此可知, $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta \leq 2$. 同理可证 $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta \geq 0$. 于是, (2) 式成立. 从而, 得

$$\frac{200}{102} < I < \frac{200}{100}, \text{ 即 } 1.96 < I < 2.$$

3915. 求圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ 上的点到原点的距离之平方的平均值.

解 平均值

$$I_0 = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) dx dy.$$

由于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} y^2 dx dy \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_{a-R}^{a+R} dx \int_{b-\sqrt{R^2-(x-a)^2}}^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}} y^2 dy \\ &= \frac{1}{3\pi R^2} \left\{ 6b^2 \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2-(x-a)^2} dx \right. \\ & \quad \left. + 2 \int_{a-R}^{a+R} [R^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}} dx \right\} \\ &= \frac{2b^2}{\pi R^2} \left[\frac{x-a}{2} \sqrt{R^2-(x-a)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{R} \right] \Big|_{a-R}^{a+R} \\ & \quad + \frac{2}{3\pi R^2} \left\{ \frac{x-a}{8} [5R^2-2(x-a)^2] \sqrt{R^2-(x-a)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3R^4}{8} \arcsin \frac{x-a}{R} \right\} \Big|_{a-R}^{a+R} \end{aligned}$$

$$= \frac{2b^2}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^2}{2} + \frac{2}{3\pi R^2} \cdot \frac{3\pi R^4}{8} = b^2 + \frac{R^2}{4},$$

同理, 有

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} x^2 dx dy = a^2 + \frac{R^2}{4}.$$

于是,

$$I_0 = a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}.$$

在问题3916—3922中对二重积分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 内按所指示的区域 Ω 依两个不同的顺序安置积分的上下限.

3916. Ω —以 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ 为顶点的三角形.

解 为方便起见, 将二重积分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 记以 I .

于是,

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$$

3917. Ω —以 $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$ 为顶点的三角形.

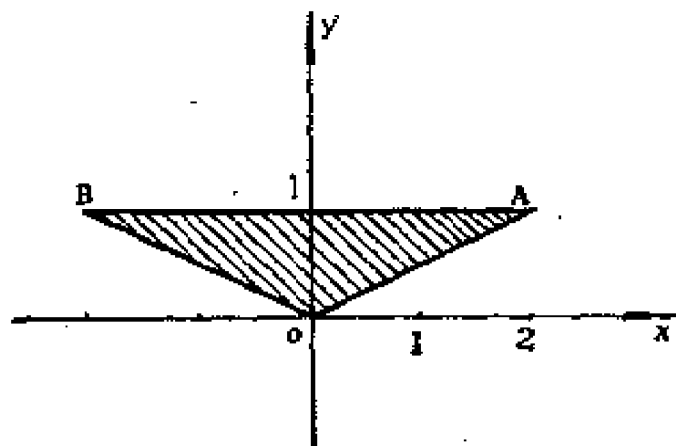


图 8.1

解 如图8.1所示

$$OA \text{ 的方程为 } y = \frac{1}{2}x,$$

$$OB \text{ 的方程为 } y = -\frac{1}{2}x,$$

$$AB \text{ 的方程为 } y = 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx = \int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x, y) dy \\ &+ \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x, y) dy \\ &= \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x, y) dy. \end{aligned}$$

3918. Ω —以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$ 为顶点的梯形.

解 如图8.2所示, BC 的方程为 $y-1=x$.

于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1+x} f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

3919. Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\text{解 } I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

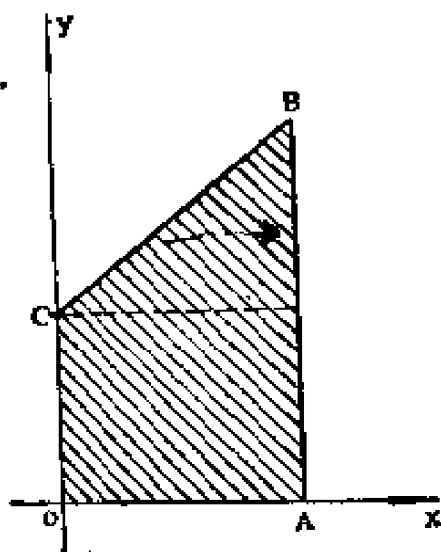


图 8.2

$$= \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

3920. Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq y$.

解 如图8.3所示. 积分域的围线 $x^2 + y^2 = y$ 即为

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

于是,

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} f(x, y) dy$$

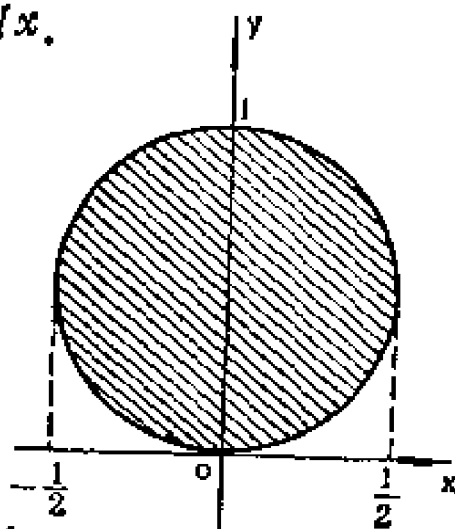


图 8.3

$$= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx.$$

3921. Ω —由曲线 $y = x^2$ 及 $y = 1$ 所包围的抛物线的一节.

解 曲线 $y = x^2$ 及 $y = 1$ 的交点为 $(-1, 1)$, $(1, 1)$.

于是,

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

3922. Ω —圆环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

解 如图8.4所示. 若先对 y 后对 x 积分, 则

$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right\}$$

$$+ \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

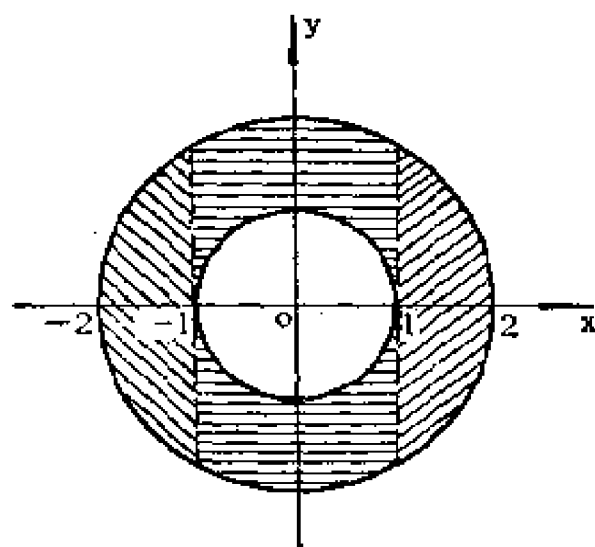


图 8.4

若先对 x 后对 y 积分, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \\ &+ \int_{-1}^1 dy \left\{ \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right\} \\ &+ \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

3923. 证明迪里黑里公式

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx \quad (a > 0).$$

证 公式左端的逐次积分, 等于积分 $\int_0^a \int_y^a f(x, y) dx dy$,

其中 Ω 为三角形域 OAB (图 8.5): $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(a, a)$. 对于该积分, 若化为先对 x 后对 y 的逐次积分, 即为公式的右端. 于是本题获证.

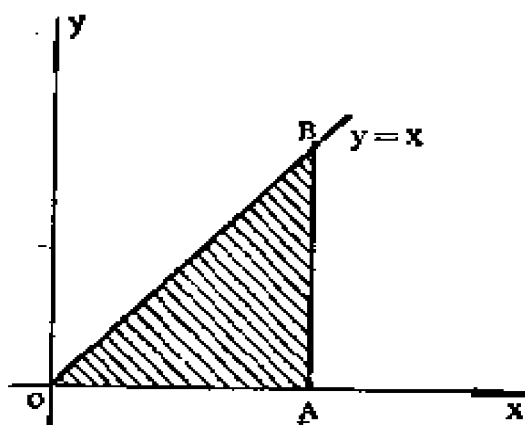


图 8.5

在下列积分中改变积分的顺序:

3924. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$

解 积分域的围线为: $y=x$, $y=2x$ 及 $x=2$, 如图 8.6 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy \\ &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx \\ & \quad + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

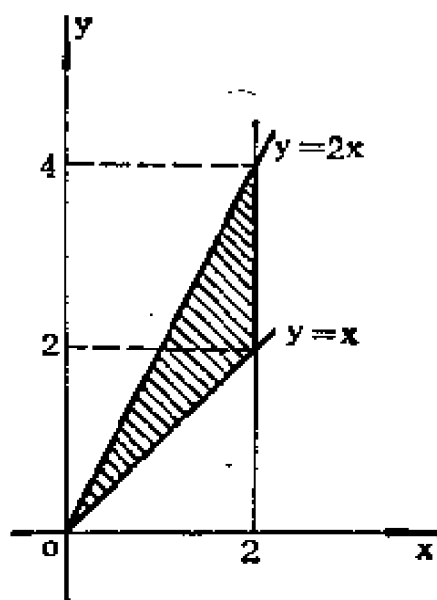


图 8.6

3925. $\int_{-8}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$

解 积分域的围线为: $y=2-x$ 及 $y+1=\frac{x}{4}$, 其交点

为 $(2,0)$, $(-6,8)$,

如图8.7所示,改变积分的顺序,即得

$$\begin{aligned} & \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y) dy \\ &= \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y) dx \\ &+ \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y) dx. \end{aligned}$$

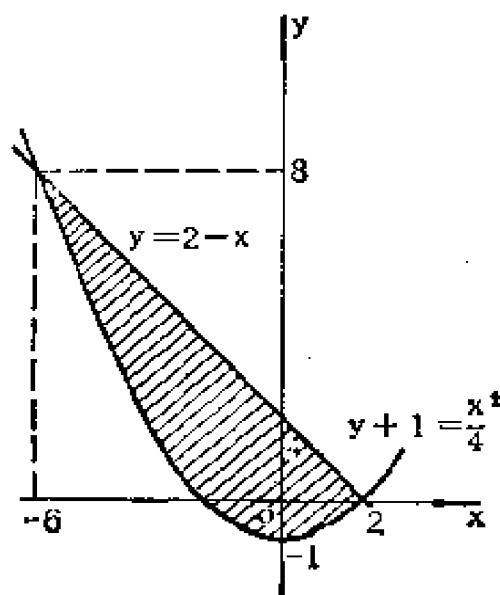


图 8.7

3926. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y) dy.$

解 积分域的围线为: $y=x^2$ 及 $y=x^3$,
其交点为 $(0,0)$, $(1,1)$, 如图8.8所示.改变积分的顺序,即得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y) dy \\ &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx. \end{aligned}$$

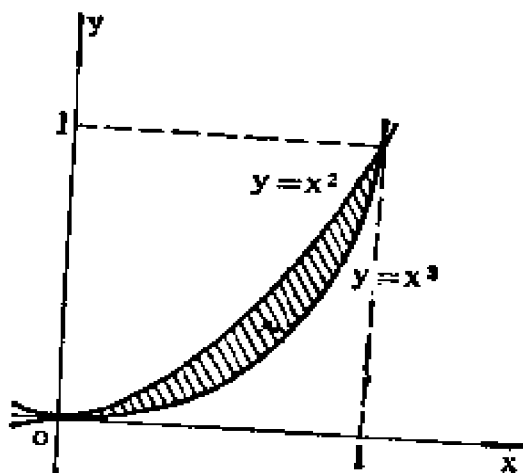


图 8.8

3927. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y) dy.$

解 积分域的围线为圆 $x^2+y^2=1$ 的下半部分及抛物线 $y=1-x^2$, 如图8.9所示.改变积分的顺序,即得

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy \\
&= \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \\
&+ \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.
\end{aligned}$$

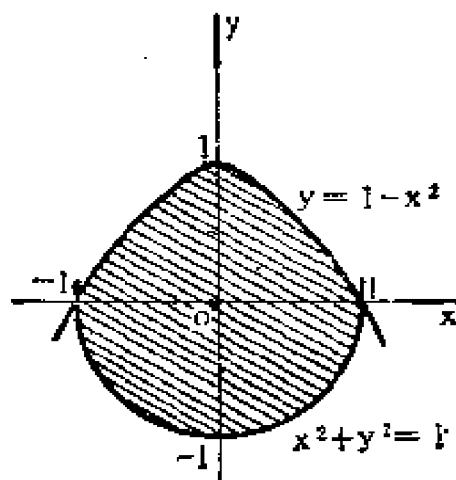


图 8.9

3928. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$

解 积分域的围线为圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 或 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 2 - x$, 其交点为 $(2, 0)$, $(1, 1)$, 如图 8.10 中阴影部分所示. 改变积分的顺序, 即得

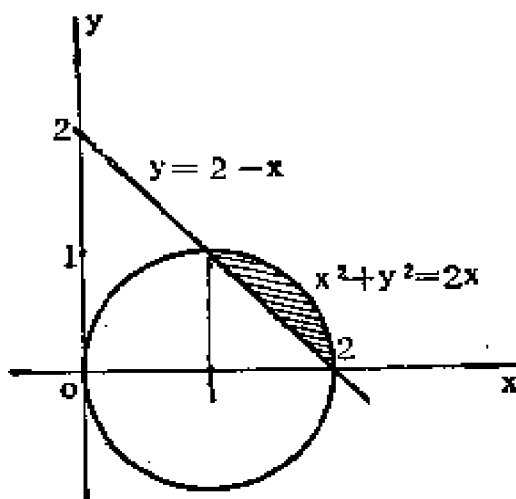


图 8.10

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \\
&= \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.
\end{aligned}$$

3929. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0).$

解 积分域由围线 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ($y \geq 0$), $y^2 = 2ax$ ($y \geq 0$) 及 $x = 2a$ 组成. 如图 8.11 中阴影部分所示, 改变积分的顺序, 即得

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy$$

$$= \int_0^a dy \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx \right.$$

$$+ \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} f(x, y) dx \Big\}$$

$$+ \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx.$$

3930. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$

解 积分域如图 8.12 中阴影部分所示. 改变积分顺序, 即得

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{e^{-y}}^e f(x, y) dx.$$

3931. $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$

解 积分域如图 8.13 中阴影部分所示. 由于 $y = \sin x$ 的反函数, 当 y 从 0 变到 1 时为 $x = \arcsin y$, 当 y 从 1

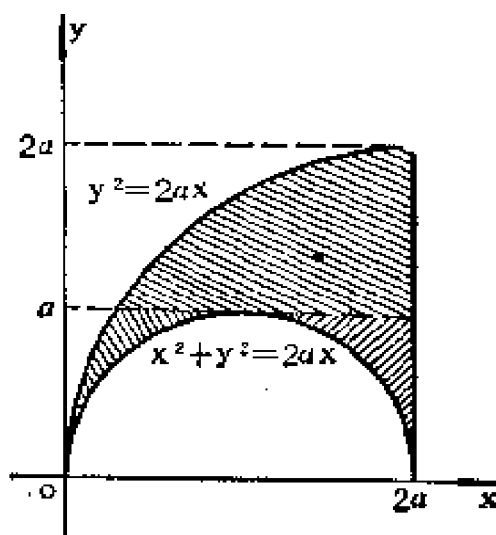


图 8.11

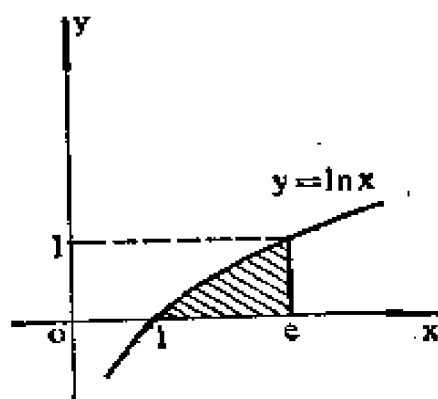


图 8.12

变到 -1 时 $x=\pi$
 $-\arcsin y$, 当 y
 从 -1 变到 0 时为
 $x=2\pi+\arcsin y$,
 故改变积分的顺
 序, 即得

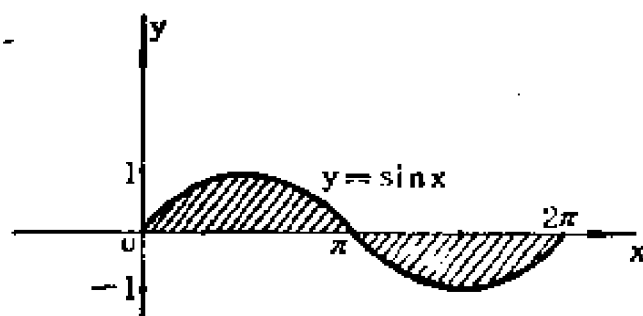


图 8.13

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$$

计算下列积分:

3932. $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, 设 Ω 是由抛
 物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=$
 $\frac{p}{2}$ ($p>0$)所界的区域.

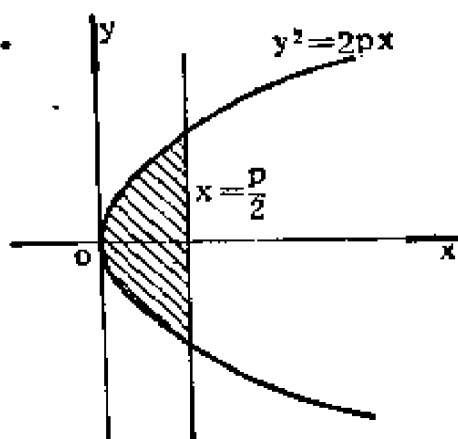


图 8.14

解 积分域如图8.14所
 示. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} xy^2 dx dy &= \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2 dy \\ &= \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{2}{3} x \sqrt{(2px)^3} dx = \frac{p^5}{21}. \end{aligned}$$

3933. $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$ ($a>0$), 设 Ω 是由圆心在点 (a, a) 半径
 为 a 且与坐标轴相切的圆周的较短弧和坐标轴所围成
 的区域.

解 如图8.15所示: 当 x 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 x , y 从 0 变到 $a - \sqrt{2ax - x^2}$. 于是,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}} \\ &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a-x}} \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} dy \\ &= \int_0^a \frac{a dx}{\sqrt{2a-x}} - \int_0^a \sqrt{x} dx \\ &= \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3} \right) a\sqrt{a}. \end{aligned}$$

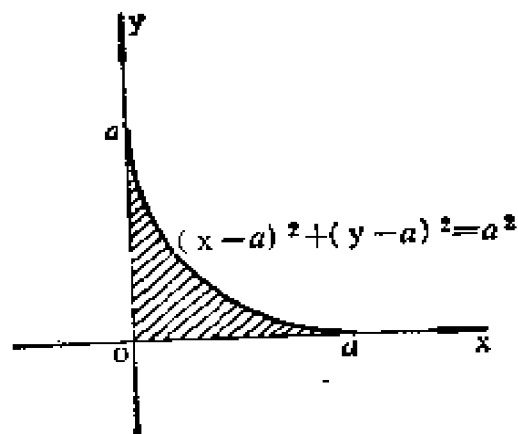


图 8.15

3934. $\iint_{\Omega} |xy| dx dy$, 设 Ω 是以 a 为半径, 坐标原点为圆心的圆.

$$\begin{aligned} \text{解 } \iint_{\Omega} |xy| dx dy &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} |xy| dy \\ &= \int_{-a}^a (a^2 - x^2) |x| dx \\ &= 2 \int_0^a (a^2 - x^2) x dx = \frac{a^4}{2}. \end{aligned}$$

3935. $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, 设 Ω 是以 $y=x$, $y=x+a$, $y=a$ 和 $y=3a$ ($a>0$) 为边的平行四边形.

解 如图8.16所示.
当 y 从 a 变到 $3a$ 时, 对于每一固定的 y , x 从 $y-a$ 变到 y . 于是,

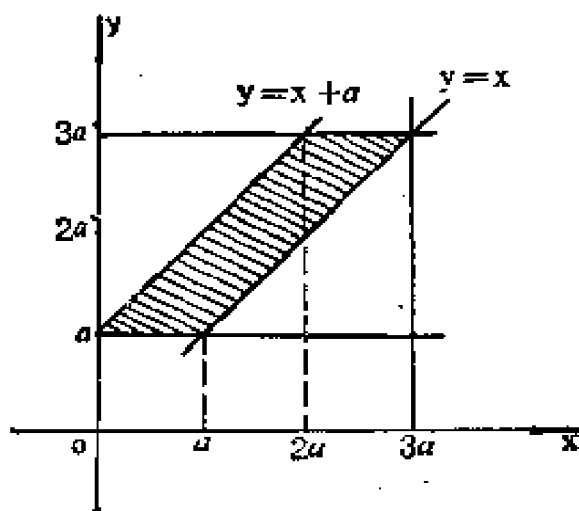


图 8.16

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx \end{aligned}$$

$$= \int_a^{3a} \left[\frac{y^3}{3} + ay^2 - \frac{(y-a)^3}{3} \right] dy$$

$$= \frac{168a^4}{12} = 14a^4.$$

3936. $\iint_{\Omega} y^2 dx dy$, 设 Ω 是由横轴和摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的第一拱所界的区域.

$$\text{解 } \iint_{\Omega} y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} dt \int_0^x y^2 dx$$

$$= \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4 dt$$

$$= \frac{2^4 a^4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{t}{2} dt = \frac{2^6 a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u du$$

$$= \frac{2^6 a^4}{3} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^8 u du \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^5 a^4}{3} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 u du \right\} \\
&= \frac{2^5 a^4}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du^{*)} \\
&= \frac{2^5 a^4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{2}^{**)} = \frac{35}{12} \pi a^4.
\end{aligned}$$

*) 参看2282题的结果,

**) 参看2281题的结果,

在二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

中, 假定 $x = r \cos \varphi$ 和 $y = r \sin \varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ , 并配置积分的限, 设:

3937. Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq a^2$.

解 雅哥比式 $I = r$, 以下各题不再写出.

φ 从 0 变到 2π , r 从 0 变到 a . 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

3938. Ω —圆 $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$).

解 圆 $x^2 + y^2 = ax$ 即 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, 极坐标

方程为 $r = a \cos \varphi$. 当 φ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 对于每一固

定的 φ , r 从 0 变到 $a \cos \varphi$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

3939. Ω —环 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$.

解 φ 从 0 变到 2π , r 从 $|a|$ 变到 $|b|$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{|a|}^{|b|} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

3940. Ω —三角形 $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1-x$.

解 由于直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为

$$r = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right),$$

因而当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变

到 $\frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

3941. Ω —抛物线节 $-a \leq x \leq a$, $\frac{x^2}{a} \leq y \leq a$.

解 如图 8.17 所示.

区域 Ω 可分为三部分:

(1) 当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固

定的 φ , r 从 0 变到

$$\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \text{ 其中}$$

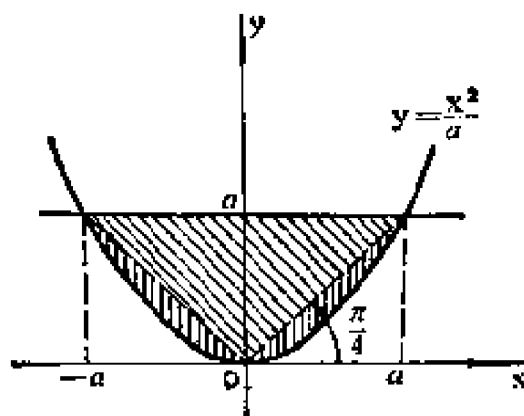


图 8.17

$r = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ 为抛物线 $y = \frac{x^2}{a}$ 的极坐标方程,

(2) 当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{3\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ , r

从 0 变到 $\frac{a}{\sin \varphi}$,

(3) 当 φ 从 $\frac{3\pi}{4}$ 变到 π 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$.

于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \\ &+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \\ &+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \end{aligned}$$

3942. 在怎样的情况下, 当变换为极坐标之后, 积分的限是常数?

解 若变换为极坐标, 积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr,$$

其中 α 、 β 、 a 、 b 均为常数, 则表明积分域 Ω 为 $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. 它表示圆环面 $a \leq r \leq b$ 被射线 $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ 截出的部分, 且只有积分域是这种情况, 变换为极

坐标后积分的限才是常数。如3937题及3939题即为其特例。

在下列积分中，假定 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$ ，变换为极坐标 r 和 φ ，并依两种不同的顺序配置积分的限：

3943. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

解 如图8.18所示。
若先对 r 积分，则当 φ 从0变到 $\frac{\pi}{4}$ 时，对于每一固定的 φ ， r 从0变到 $\sec\varphi$ ；当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，对于每一

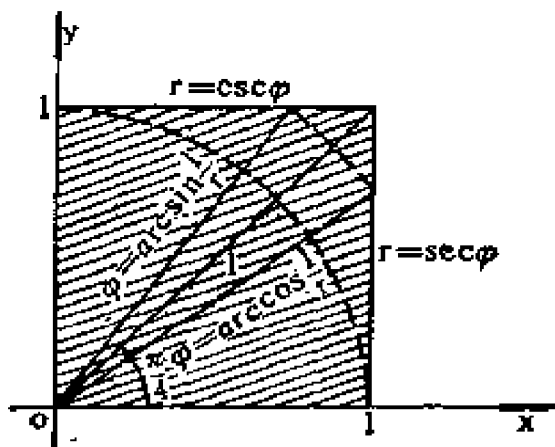


图 8.18

固定的 φ ， r 从0变到 $\csc\varphi$ 。

若先对 φ 积分，则当 r 从0变到1时， φ 从0变到 $\frac{\pi}{2}$ ；当 r 从1变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一固定的 r ， φ 从 $\arccos\frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin\frac{1}{r}$ 。于是，

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sec\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \\ & \quad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\csc\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

3944. $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

解 如图8.19所示. 若先对 r 积分, 则当 φ 从0变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})$ 变到1.

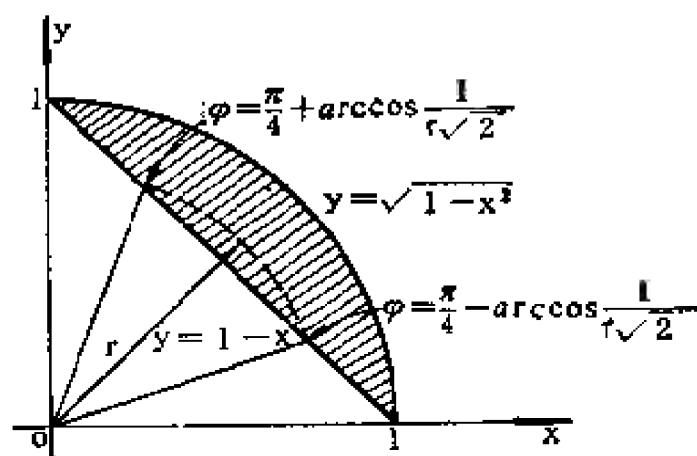


图 8.19

若先对 φ 积分, 则当 r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 变到1时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$ 变到 $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$,

其中直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为 $r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $\cos(\frac{\pi}{4} - \varphi) = \frac{1}{r\sqrt{2}}$ 或 $\frac{\pi}{4} - \varphi =$

$\pm \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\cos(\varphi+\frac{\pi}{4})}}^1 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

3945. $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy.$

解 如图8.20所示.
若先对 r 积分, 则当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $\frac{2}{\cos\varphi}$.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 $2\sqrt{2}$ 时, φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$;

当 r 从 $2\sqrt{2}$ 变到 4 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos\frac{2}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$. 于是,

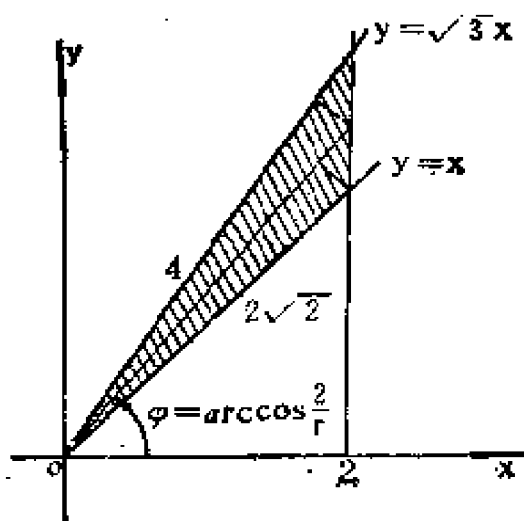


图 8.20

$$\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} r f(r) dr$$

$$= \frac{\pi}{12} \int_0^{2\sqrt{2}} r f(r) dr + \int_{2\sqrt{2}}^4 \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{r} \right) r f(r) dr.$$

3946⁺* $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$

解 如图8.21所示.
若先对 r 积分, 则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 $\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ 变到 $\frac{1}{\cos \varphi}$,

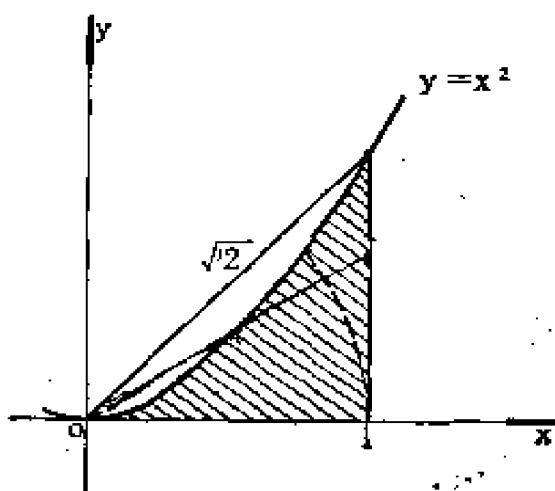


图 8.21

其中 $r = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ 为抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 1 时, 对于每一固定的 r , φ 从 0 变到 $\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$ (由 $r = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ 解出 φ); 当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. 于是,

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}}^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 r dr \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \\
&+ \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}}^{\arccos \frac{1}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.
\end{aligned}$$

3947. $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, 其中 Ω 是由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0$) 所界的域.

解 令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 则曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0$) 的极坐标方程为 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, 其图象是双纽线的右半部分, 如图 8.22 所示.

若先对 r 积分, 则当 φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 a 时, 对于每一固

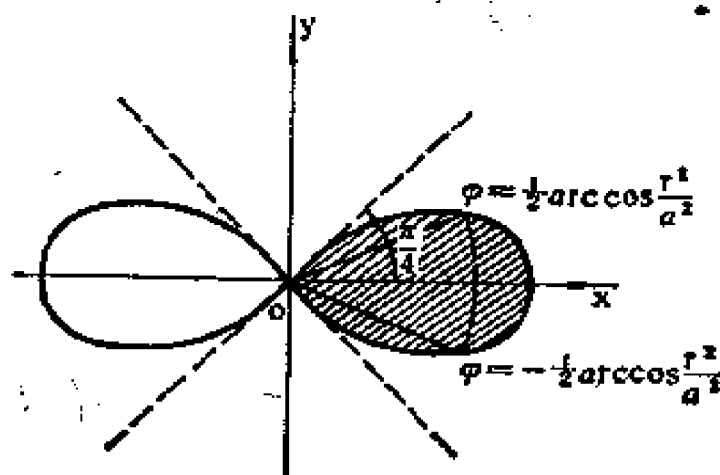


图 8.22

定的 r , φ 从 $-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^a r dr \int_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr. \end{aligned}$$

假定 r 和 φ 为极坐标, 在下列积分中变更积分的顺序:

3948. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r) dr \quad (x \geq 0).$

解 积分域为由圆 $r = a\cos\varphi$ 或 $(x - \frac{a}{2})^2$

$+ y^2 = (\frac{a}{2})^2$ 所围成的圆域.

若先对 φ 积分, 则当 r 从0变到 a 时, 对于每一固定的 r ,

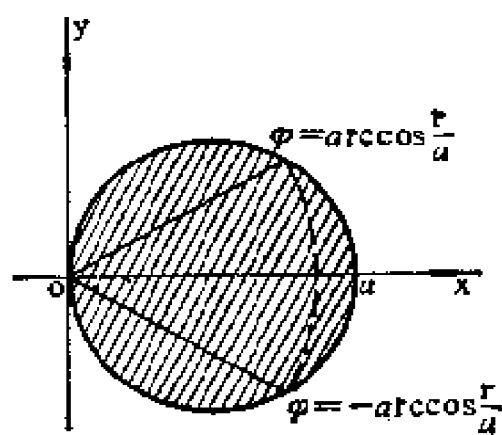


图 8.23

φ 从 $-\arccos\frac{r}{a}$ 变到 $\arccos\frac{r}{a}$ (图8.23). 于是,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r) dr = \int_0^a dr \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi.$$

3949. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$

解 积分域由双纽线 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ 的右上部分围成 (图 8.24).

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 r ,

φ 从 $\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}$ 变到

$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}$. 于

是,

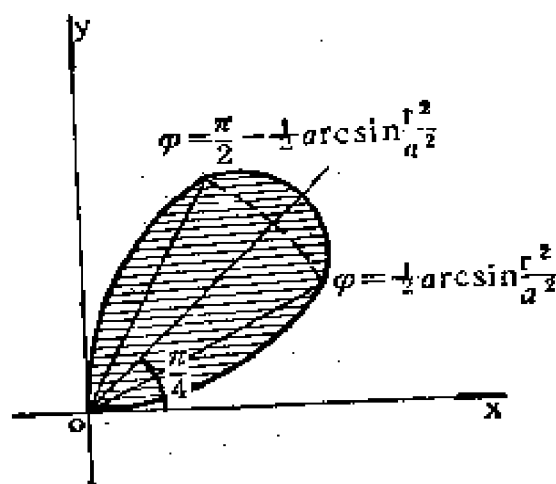


图 8.24

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr = \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi.$$

3950. $\int_0^a d\varphi \int_0^\varphi f(\varphi, r) dr$

$(0 \leq a \leq 2\pi).$

解 积分域由曲线 $r = \varphi$ (阿基米德螺线) 与射线 $\varphi = a$ 围成 (图 8.25).

改变积分顺序, 即得

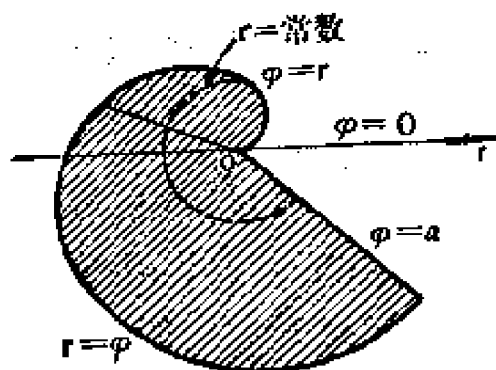


图 8.25

$$\int_0^a d\varphi \int_0^\varphi f(\varphi, r) dr = \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi.$$

变换成极坐标, 以一重积分来代替二重积分:

$$3951. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f(r) r dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r f(r) dr. \end{aligned}$$

$$3952. \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy, \text{ 其中 } \Omega = \{|y| \leq |x|; |x| \leq 1\}.$$

解 域 Ω 如图8.26所示. 先对 φ 积分, 则当 r 从0变到1时, φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$; 当 r 从1变到 $\sqrt{2}$ 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$. 于是,

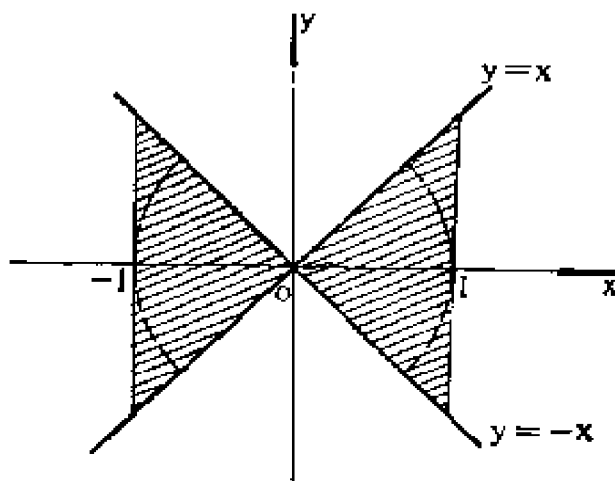


图 8.26

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy &= 2 \int_0^1 r f(r) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \\ &\quad + 4 \int_1^{\sqrt{2}} r f(r) \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \\ &= \pi \int_0^1 r f(r) dr + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4 \arccos \frac{1}{r} \right) r f(r) dr. \end{aligned}$$

$$3953. \iint_{x^2+y^2 \leq \pi} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \iint_{x^2+y^2 \leq \pi} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\pi \cos \varphi}} f(\operatorname{tg} \varphi) r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg} \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

变换成极坐标, 以计算下列二重积分:

$$3954. \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$$

$$\text{解} \quad \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \cdot r dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

$$3955. \iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$$

$$\text{解} \quad \iint_{\pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr$$

$$= 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr = -6\pi^2.$$

3956. 利用函数组

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

把矩形 $S\{a < x < a+h, b < y < b+h\}$ ($a > 0, b > 0$)

变换为域 S' . 求域 S' 的面积与 S 的面积之比.

当 $h \rightarrow 0$ 时, 此比值的极限等于什么?

解 正方形的角点 $A(a, b)$, $B(a+h, b)$, $C(a+h, b+h)$, $D(a, b+h)$ 对应于 Ouv 平面上的点 $A'(\frac{b^2}{a}, \sqrt{ab})$,

$$B'(\frac{b^2}{(a+h)^2}, \sqrt{(a+h)b}), C'(\frac{(b+h)^2}{a+h},$$

$$\sqrt{(a+h)(b+h)}), D'(\frac{(b+h)^2}{a}, \sqrt{a(b+h)}).$$
 正方形的

的四边 $y=b$, $x=a+h$, $y=b+h$, $x=a$ 对应于 Ouv 平面上的四条曲线, 即

$$A'B': u = \frac{b^3}{v^2}; \quad B'C': u = \frac{v^4}{(a+h)^3};$$

$$C'D': u = \frac{(b+h)^3}{v^2}; \quad D'A': u = \frac{v^4}{a^3}.$$

由这四条曲线围成的域即为 S' (图 8.27) .

于是, 域 S' 的面积

$$S' = \iint_{S'} du \, dv = \int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{a(b+h)}} \frac{v^4}{a^3} dv$$

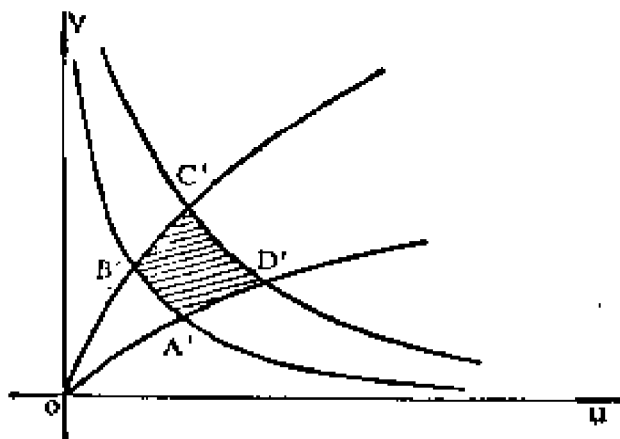


图 8.27

$$\begin{aligned}
& + \int_{\sqrt{a(b+h)}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \frac{(b+h)^3}{v^2} dv - \int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{(a+h)b}} \frac{b^3}{v^2} dv \\
& - \int_{\sqrt{(a+h)b}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \frac{v^4}{(a+h)^3} dv \\
& = \frac{1}{5a^3} \left[\sqrt{a^5(b+h)^5} - \sqrt{a^5b^5} \right] \\
& + (b+h)^3 \left[\frac{1}{\sqrt{a(b+h)}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \right] \\
& - b^3 \left[\frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)b}} \right] \\
& - \frac{1}{5(a+h)^3} \left[\sqrt{(a+h)^5(b+h)^5} - \sqrt{(a+h)^5b^5} \right] \\
& = \frac{6}{5} \left[\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right].
\end{aligned}$$

从而，域 S' 的面积与 S 的面积之比

$$\begin{aligned}
\frac{S'}{S} &= \frac{6}{5h^2} \left[\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right] \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{[\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] (\sqrt{a+h} - \sqrt{a})}{h^2 \sqrt{a(a+h)}} \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{\sqrt{a(a+h)} (\sqrt{a+h} + \sqrt{a}) (\sqrt{b+h} + \sqrt{b}) (\sqrt{b+h} - \sqrt{b})} \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{b^2 + b(b+h) + (b+h)^2 + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)} (\sqrt{a+h} + \sqrt{a}) (\sqrt{b+h} + \sqrt{b})}.
\end{aligned}$$

上述比式是 h 的函数，并且在 $h=0$ 点连续。于是，

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5b^2}{4\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b}} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

事实上, 应用洛比塔法则求此极限更简单些, 这是因为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{2} \sqrt{(b+h)^3} = \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}}.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (a+h)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}}.$$

于是,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

注意, 若利用二重积分的变量代换, 则计算 S' 较为简单. 容易算得 $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = -\frac{3}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{3}{2}}$, 故

$$\begin{aligned} S' &= \iint_{S'} du dv = \iint_S \left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| dx dy \\ &= \frac{3}{2} \int_a^{a+h} x^{-\frac{3}{2}} dx \int_b^{b+h} y^{\frac{3}{2}} dy \\ &= \frac{6}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right) (\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}) \end{aligned}$$

与上述结果一致. 但是, 从原习题集题目的安排来看, 似乎应从3966题以后才开始用一般的变量代换来计算二重积分.

引入新的变量 u, v 来代替 x, y , 并确定下列二重积分中的积分限:

3957. $\int_a^b dx \int_{ax}^{\beta x} f(x, y) dy$ ($0 < a < b$; $0 < \alpha < \beta$), 若 $u = x$,

$$v = \frac{y}{x}.$$

解 在变换 $u = x, v = \frac{y}{x}$ 下, 区域 $\Omega = \{a \leq x \leq b, \alpha x \leq y \leq \beta x\}$ 变为 $\Omega' = \{a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta\}$. 变换的雅哥比式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u > 0.$$

于是

$$\int_a^b dx \int_{ax}^{\beta x} f(x, y) dy = \int_a^b u du \int_{\alpha}^{\beta} f(u, uv) dv.$$

3958. $\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy$, 若 $u = x + y, v = x - y$.

解 在变换 $u = x + y, v = x - y$ 下, 区域 $\Omega = \{0 \leq x \leq 2, 1 - x \leq y \leq 2 - x\}$ 变为 $\Omega' = \{1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq 4 - u\}$. 事实上, $u + v = 2x, u - v = 2y$, 故 $0 \leq u + v \leq 4$, 即 $-u \leq v \leq 4 - u$. 变换的雅哥比式 $I = -\frac{1}{2}$, 从而 $|I| = \frac{1}{2}$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv. \end{aligned}$$

3959. $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, 其中 Ω 是由曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$,

$x=0, y=0 (a>0)$ 所界的区域, 若

$$x=u\cos^4 v, \quad y=u\sin^4 v.$$

解 Ω 的界线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x=a\cos^4 v, \quad y=a\sin^4 v \quad \left(0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

对于变换 $x=u\cos^4 v, y=u\sin^4 v$, 有 $|I|=4|u\cos^3 v \cdot \sin^3 v|$, 且区域 Ω 变为 $\Omega=\{0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$.

于是,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \\ &= 4 \int_0^a u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v f(u\cos^4 v, u\sin^4 v) dv \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v dv \int_0^a u f(u\cos^4 v, u\sin^4 v) du. \end{aligned}$$

3960. 证明: 变数代换

$$x+y=\xi, \quad y=\xi\eta$$

把三角形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$ 变为单位正方形 $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$.

证 由 $0 \leq y \leq 1-x$ 及 $0 \leq x \leq 1$ 得 $0 \leq x+y \leq 1$, 即 $0 \leq \xi \leq 1$.

又 $\eta = \frac{y}{\xi} \leq \frac{y}{0+y} = 1$, 且 $\eta \geq 0$, 故 $0 \leq \eta \leq 1$.

反之, 从 $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$ 得 $0 \leq x+y \leq 1$, $y=\xi\eta, x=\xi(1-\eta)$, 故 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$. 因此, 三角形域 $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$ 变为正方形域 $\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$.

3961. 在什么样的变数代换下, 由曲线 $xy=1$, $xy=2$, $x-y+1=0$, $x-y-1=0$ ($x>0, y>0$) 所界的曲线四边形变换成矩形, 其边平行于坐标轴?

解 原四条曲线为 $xy=1$, $xy=2$, $x-y=-1$, $x-y=1$ ($x>0, y>0$), 故显然应作变换 $xy=u$, $x-y=v$. 这时 u 从 1 变到 2, v 从 -1 变到 1, 故原积分域变为域: $1 \leq u \leq 2, -1 \leq v \leq 1$.

进行适当的变数代换, 化二重积分为一重的:

3962.
$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy.$$

解 作变换 $x+y=u, x-y=v$ 或 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$,

则有 $|I| = \frac{1}{2}$, 且 u 从 -1 变到 1, v 从 -1 变到 1. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 f(u) du \\ &= \int_{-1}^1 f(u) du. \end{aligned}$$

3963.
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy \quad (a^2+b^2 \neq 0).$$

解 作变换 $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}=u, \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=v$, 则有 $x = \frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $x^2+y^2=u^2+v^2 \leq 1$,

故域 $x^2+y^2 \leq 1$ 变为 $u^2+v^2 \leq 1$, 且有 $|I|=1$. 于是,

$$\begin{aligned}
& \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy \\
&= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du dv \\
&= \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) dv \\
&= \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dv \\
&= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du.
\end{aligned}$$

3964. $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, 其中 Ω 为由曲线 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ ($x>0$, $y>0$) 所界的域.

解 作变换 $xy=u$, $\frac{y}{x}=v$, 则域 Ω 变为域 Ω'

$=\{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$, 且 $|I| = \frac{1}{2v}$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_1^4 \frac{dv}{2v} \int_1^2 f(u) du = \ln 2 \cdot \int_1^2 f(u) du.$$

3965. $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, 其中 Ω 是由曲线 $x^2+y^2=x+y$ 所包围的域.

解 域 Ω 即圆 $(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$. 作变

换: $x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi$, $y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi$, 则域 Ω 变为

域 $\Omega = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$, 且 $|I| = r$. 于是,

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} [r + r^2(\sin\varphi + \cos\varphi)] dr = \frac{\pi}{2}.$$

计算下列二重积分:

3966. $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) dx dy.$

解 $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) dx dy$
 $= 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y) dy = \frac{4}{3}.$

3967. $\iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, 其积分域 Ω 是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所界的域.

解 作变换: $x = a r \cos\varphi$, $y = b r \sin\varphi$, 则域 Ω 变为域 $\Omega' = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, 且 $|I| = abr$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= 2\pi ab \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{2\pi ab}{3}. \end{aligned}$$

3968. $\iint_{x^4+y^4\leq 1} (x^2+y^2) dx dy.$

解 作变换: $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, 并利用对称性, 则有

$$\iint_{x^4+y^4\leq 1} (x^2+y^2) dx dy = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\left(\frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}\right)^{\frac{1}{4}}} r^3 dr$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \varphi d \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^4 \varphi} = 2 \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4} dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} \Big|_0^{1*}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

*) 利用1712题的结果.

3969. $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, 其积分域 Ω 是由曲线 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 所界的域.

解 由解方程组

$$\begin{cases} x+y=4, \\ y^2=2x \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x+y=12, \\ y^2=2x \end{cases}$$

求得两条直线与抛物线的交点为 $A(2, 2)$, $B(8, 4)$, $C(18, -6)$, $D(8, -4)$ (图8.28). 于是,

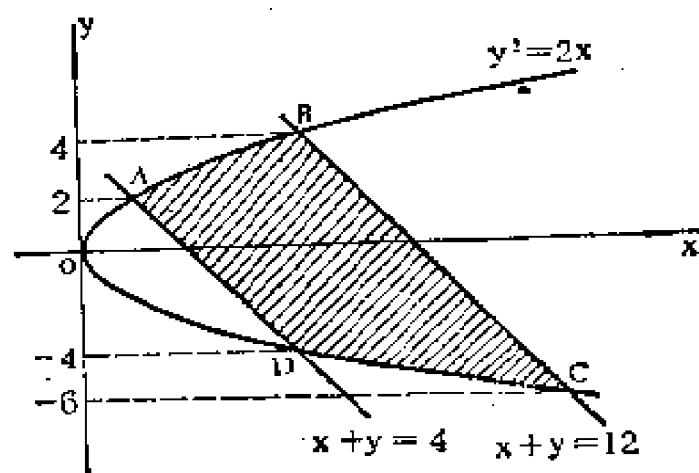


图 8.28

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_{-6}^{-4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-4}^2 dy \int_{4-y}^{12-y} (x+y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx \\
& = 79\frac{13}{15} + 384 + 79\frac{13}{15} = 543\frac{11}{15}.
\end{aligned}$$

3970. $\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$, 其中 Ω 是由曲线 $xy=1$, $x+y=\frac{5}{2}$ 所界的域.

解 曲线 $xy=1$ 与直线 $x+y=\frac{5}{2}$ 的交点为 $(\frac{1}{2}, 2)$,

$(2, \frac{1}{2})$. 于是,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy &= \int_{\frac{1}{2}}^2 x \, dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} y \, dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{25}{4}x - 5x^2 + x^3 - \frac{1}{x} \right) dx \\
&= 1\frac{37}{128} - \ln 2.
\end{aligned}$$

3971. $\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| \, dx \, dy.$

解 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| \, dx \, dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| \, dy$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| \, dy \\
&+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| \, dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy - \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \right] dx \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[- \int_0^{\frac{3\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \right] dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin x \right) - \left[\sin(x+\pi) - \sin \frac{\pi}{2} \right] \right\} dx \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ - \left(\sin \frac{3\pi}{2} - \sin x \right) + \left[\sin(x+\pi) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin \frac{3\pi}{2} \right] \right\} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 dx = 2\pi.
\end{aligned}$$

3972.
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy.$$

解 积分域如图8.29所示, 由 Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 和 Ω_4 所组成, 其中 Ω_1 为由圆 $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$

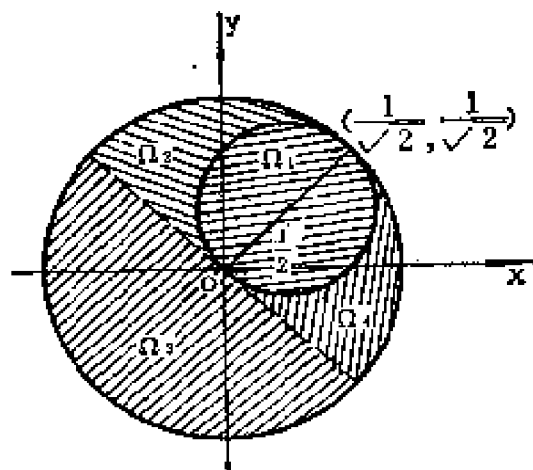


图 8.29

$-x^2 - y^2 = 0$, 即圆 $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$

围成的区域, 该圆的极坐标方程为

$$r = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right),$$

而圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的极坐标方程为 $r = 1$. 于是, 各区

域为 $\Omega_1: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right);$

$\Omega_2: \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq r \leq 1;$

$\Omega_3: \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1;$

$\Omega_4: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq r \leq 1.$

当点在 Ω_1 中时, 由于 $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ 即 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} - (x^2 + y^2) \geq 0$, 故 $\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right|$

$= \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 = r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - r^2$; 当点在 Ω_2 ,

Ω_3 和 Ω_4 中时, $\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| = x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$= r^2 - r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$. 于是, 注意到利用对称性便得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx dy$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})} [r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - r^2] r dr$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}^1 \left[r^2 - r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] r dr \\
& + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 \left[r^2 - r \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] r dr \\
& = \frac{1}{6} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right. \\
& \quad \left. \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{6} \sin^4\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] d\varphi \\
& + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] d\varphi \\
& = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du \right) \\
& + \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\
& = \frac{\pi}{32}^{*)} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{32} \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9\pi}{16}.
\end{aligned}$$

*) 利用2281题的结果.

3973[†] $\iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy.$

解 $\iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy = \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2}} \sqrt{x^2-y} dx dy$

$$+ \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 2}} \sqrt{y-x^2} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy \\
&= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx + \frac{4}{3} \int_0^1 (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 \theta d\theta \\
&= \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \left(\frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} \right)^{*)} = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

*) 参看1750题的结果.

计算不连续函数的积分:

3974. $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy.$

解 当 $y^2 - x^2 < 2$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = 1;$$

当 $y^2 - x^2 > 2$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)$$

$$= -1;$$

当 $y^2 - x^2 = 2$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)$$

$$= 0.$$

现将域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 分成 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 和 Ω_5 五部分, 其界线分

别为 $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 - x^2 = 2$, $x = \pm 1$ (图8.30). 当点在 Ω_1 和 Ω_5 中时, $y^2 - x^2 > 2$, 故 $\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = -1$; 当点在 Ω_2, Ω_3 和 Ω_4 中时, $y^2 - x^2 < 2$, 故

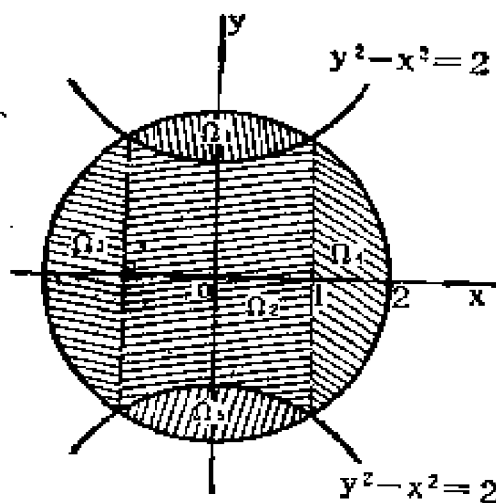


图 8.30

$\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = 1$. 于是,

$$\begin{aligned}
 & \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy \\
 &= - \iint_{\Omega_1} dx dy - \iint_{\Omega_5} dx dy + \iint_{\Omega_2} dx dy + \iint_{\Omega_3} dx dy \\
 & \quad + \iint_{\Omega_4} dx dy \\
 &= -4 \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy + 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2+x^2}} dy \\
 & \quad + 4 \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \\
 &= 8 \int_0^1 \sqrt{2+x^2} dx + 4 \left(\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx \right) \\
 &= \frac{4\pi}{3} + 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

3975. $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] dx dy.$

解 当 $0 \leq x+y < 1$
 时, $[x+y] = 0$;
 当 $1 \leq x+y < 2$
 时, $[x+y] = 1$;
 当 $2 \leq x+y < 3$
 时, $[x+y] = 2$;
 当 $3 \leq x+y < 4$

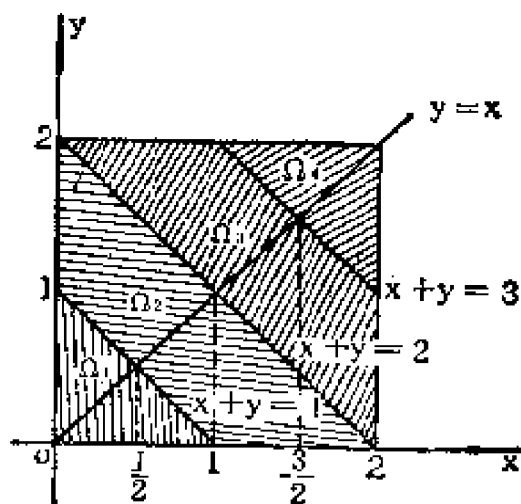


图 8.31

时, $[x+y]=3$;

当 $x+y=4$ 时, $[x+y]=4$.

如图 8.31 所示, 域 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ 可分为下列四部分:

$\Omega_1: x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$;

$\Omega_2: 1 \leq x+y \leq 2, x=0, y=0$;

$\Omega_3: 2 \leq x+y \leq 3, x=2, y=2$;

$\Omega_4: x+y \geq 3, x \leq 2, y \leq 2$.

当点属于 Ω_1 的内部时, $[x+y]=0$; 当点属于 Ω_2 的内部时, $[x+y]=1$; 当点属于 Ω_3 的内部时, $[x+y]=2$; 当点属于 Ω_4 的内部时, $[x+y]=3$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] dx dy &= \iint_{\Omega_2} dx dy + 2 \iint_{\Omega_3} dx dy \\ &\quad + 3 \iint_{\Omega_4} dx dy \\ &= 2 \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \right] + 4 \left[\int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_{2-x}^x dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_{2-x}^{3-x} dy \right] + 6 \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_{3-x}^x dy \\ &= 2 \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) dx + \int_1^2 (2-x) dx \right] + 4 \left[\int_1^{\frac{3}{2}} (2x-2) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \right] + 6 \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x-3) dx = 6. \end{aligned}$$

3976. $\iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{y-x^2} dx dy.$

解 如图8.32所示.

当 $x^2 \leq y < x^2 + 1$ 时,

$[y - x^2] = 0$;

当 $1 + x^2 \leq y < x^2 + 2$

时, $[y - x^2] = 1$;

当 $2 + x^2 \leq y < x^2 + 3$

时, $[y - x^2] = 2$;

当 $3 + x^2 \leq y < 4$ 时,

$[y - x^2] = 3$.

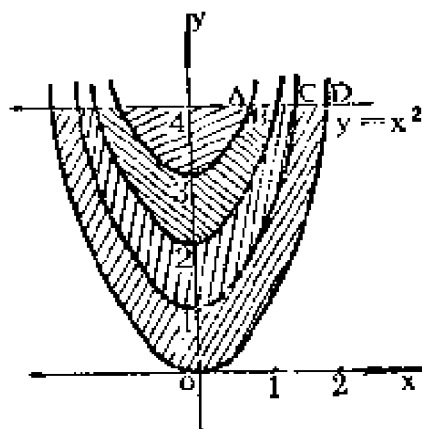


图 8.32

抛物线 $y = x^2 + 3$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 + 1$ 及 $y = x^2$ 与直线 $y = 4$ 在第一象限内的交点为 $A(1, 4)$, $B(\sqrt{2}, 4)$, $C(\sqrt{3}, 4)$ 及 $D(2, 4)$, 与 Oy 轴对称的位置还有四个交点. 于是,

$$\begin{aligned}
 & \iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{[y - x^2]} dx dy \\
 &= 2 \left[\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+1}^{x^2+2} dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2+1}^4 dy \right] \\
 & \quad + 2 \sqrt{2} \left[\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{x^2+3} dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+2}^4 dy \right] \\
 & \quad + 2 \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_{x^2+3}^4 dy \\
 &= 2 \left[\sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx \right] + 2 \sqrt{2} \\
 & \quad \cdot \left[1 + \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx \right] + 2 \sqrt{3} \int_0^1 (1 - x^2) dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}(4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}).$$

977. 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数, 证明

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

证 作变换: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 则得

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy &= \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a}} r^{m+n+1} \cos^m \varphi \sin^n \varphi dr d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin^n \varphi d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi = \pi + t$, 即得

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi &= (-1)^m \cdot (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \\ &\quad \cdot \sin^n t dt. \end{aligned} \quad (2)$$

当 m 及 n 中有且仅有一个为奇数时, $(-1)^m \cdot (-1)^n = -1$, 因而 (1) 式为零. 当 m 和 n 均为奇数时, $(-1)^m \cdot (-1)^n = 1$, 因而 (1) 式等于

$$\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi.$$

但此被积函数在对称区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为奇函数, 故积分仍然为零.

总之, 当 m 和 n 中至少有一个为奇数时,

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

3978. 求:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy,$$

其中 $f(x, y)$ 为连续函数.

解 利用积分中值定理, 即得

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy \\ &= f(\xi, \eta) \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} dx dy = \pi \rho^2 \cdot f(\xi, \eta), \end{aligned}$$

其中点 (ξ, η) 为圆域 $x^2+y^2 \leq \rho^2$ 内的一点. 显然, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 点 $(\xi, \eta) \rightarrow O(0, 0)$. 于是, 根据函数 $f(x, y)$ 的连续性知:

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\xi, \eta) = f(0, 0). \end{aligned}$$

3979. 设

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} e^{\frac{tx}{y^2}} dx dy,$$

求 $F(t)$.

解 令 $x=ut$, $y=vt$, 则

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{tx}{y^2}} dx dy = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} t^2 e^{\frac{u}{v^2}} du dv. \quad (1)$$

于是, 似乎应该有

$$\begin{aligned} F'(t) &= \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} 2te^{\frac{u}{v^2}} du dv \\ &= \frac{2}{t} \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} t^2 e^{\frac{u}{v^2}} du dv = \frac{2}{t} F(t) \quad (t > 0). \end{aligned}$$

但这是错误的. 实际上本题有问题, 因为(1)式中的二重积分都是广义二重积分. 当 $t > 0$ 时, 在 $x > 0$, $y = 0$ 上 (即 $u > 0$, $v = 0$ 上) 被积函数成为无穷, 而且这个广义二重积分是发散的. 这是因为, 根据被积函数的非负性, 有 (参看 §9)

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{\frac{u}{v^2}} du dv &= \int_0^1 dv \int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}} du \\ &= \int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv. \end{aligned} \quad (2)$$

对此积分, $v = 0$ 是瑕点, 由于被积函数 $v^2(e^{\frac{1}{v^2}} - 1)$ 在 $0 \leq v \leq 1$ 上非负, 且 (令 $\frac{1}{v^2} = t$)

$$\lim_{t \rightarrow +0} v^2 \left(v^2 \left(e^{\frac{1}{v^2}} - 1 \right) \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t - 1}{t^2} = +\infty,$$

故瑕积分 $\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv$ 发散, 且

$$\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv = +\infty.$$

由此, 再根据(1)式与(2)式, 得

$$F(t) \equiv +\infty \quad (\text{当 } t > 0 \text{ 时}).$$

因此, 提出求 $F'(t)$ 的问题是无意义的.

注意, 若本题换为: 设

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{-\frac{tx}{y^2}} dx dy,$$

求 $F'(t)$. 这时得 (作代换 $x=ut$, $y=vt$)

$$F(t) = t^2 \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{u}{v^2}} du dv,$$

从而右端积分是收敛的 (实际上可视为常义积分).

于是,

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2t \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{u}{v^2}} du dv \\ &= \frac{2}{t} \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} t^2 e^{-\frac{u}{v^2}} du dv = \frac{2}{t} F(t) \quad (t > 0). \end{aligned}$$

3980† 设

$$F(t) = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

求 $F'(t)$.

解 作变量代换 $x = u + t$, $y = v + t$ (t 固定), 则

$$F(t) = \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2} du dv. \quad (1)$$

今在积分号下求导数^{*}, 得

$$\begin{aligned} F'(t) &= \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2}} du dv \\ &= \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &\quad (-\infty < t < +\infty). \end{aligned}$$

*) 积分号下求导数的合理性, 证明如下: 令

$$f(u, v, t) = \sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2},$$

则

$$f_t(u, v, t) = \frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2}}$$

$$((u, v) \neq (-t, -t)).$$

当 $(u, v) = (-t, -t)$ 时, 易知 $f_t(u, v, t)$ 不存在, 但右导数存在且等于 $\sqrt{2}$, 左导数也存在且等于 $-\sqrt{2}$.

由于对任何数 a, b , 有 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 故 $2(a^2 + b^2)$

$\geq (a+b)^2$, 从而 $\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \sqrt{2}$. 于是,

$$|f_t(u, v, t)| \leq \sqrt{2} \quad ((u, v) \neq (-t, -t)). \quad (2)$$

如果 $|t| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, 这时 $f(u, v, t)$, $f'_i(u, v, t)$ (t 固定) 都是域 $u^2 + v^2 \leq 1$ 上的连续函数, 当然可在积分号下求导数, 得

$$F'(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_i(u, v, t) du dv. \quad (3)$$

但如果 $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则 (3) 式右端积分的被积函数 $f'_i(u, v, t)$ 在积分域 $u^2 + v^2 \leq 1$ 中的点 $(u, v) = (-t, -t)$ 不连续. 因此, 不能立即断定 (3) 式的正确性. 下面不论 t 为何值 ($-\infty < t < +\infty$), 直接证明 (3) 式成立. 令

$$g(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_i(u, v, t) du dv \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (4)$$

由 (2) 式知, $f'_i(u, v, t)$ 是有界的, 且在域 $u^2 + v^2 \leq 1$ 上至多有一个不连续点 (t 固定), 故 (4) 式右端的积分存在. 实际上, 利用 (2) 式以及 $f'_i(u, v, t)$ 当 $(u, v) \neq (-t, -t)$ 时的连续性, 用 (必要时, 即 $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时) 挖掉以点 $(-t, -t)$ 为中心的小圆域的方法, 不难证明 $g(t)$ 是 $-\infty < t < +\infty$ 上的连续函数 (详细证明留给读者). 令

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds \quad (-\infty < t < +\infty),$$

则

$$G'(t) = g(t) \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (5)$$

但

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \int_0^t ds \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f_i(u, v, s) du dv \\
 &= \iiint_{\substack{u^2+v^2 \leq 1 \\ 0 \leq s \leq t}} f_i(u, v, s) du dv ds \\
 &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} du dv \int_0^t f_i(u, v, s) ds. \quad (6)
 \end{aligned}$$

注意, (6) 式中的运算是合理的, 因为三维域 $u^2 + v^2 \leq 1, 0 \leq s \leq t$ (t 固定) 中, 三元函数 $f_i(u, v, s)$ 有界且只在直线 $u=v=-s$ 的一段上不连续, 从而 (6) 式中的三重积分及两个累次积分都存在, 故它们相等.

下证恒有

$$\int_0^t f_i(u, v, s) ds = f(u, v, t) - f(u, v, 0). \quad (7)$$

事实上, 若 $(u, v) \neq (-t_1, -t_1)$ ($t_1 \in [0, t]$), 则 $f_i(u, v, t)$ 是 $0 \leq s \leq t$ 上的连续函数 (u, v 固定), 从而 (7) 式成立; 若 $(u, v) = (-t_1, -t_1)$ (t_1 是属于 $[0, t]$ 的某数), 则由 $f(u, v, s)$ 对任何 u, v, s 的连续性, 有

$$\begin{aligned}
 \int_0^t f_i(u, v, s) ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{t_1-\varepsilon} f_i(u, v, s) ds \\
 &+ \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{t_1+\varepsilon'}^t f_i(u, v, s) ds \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [f(u, v, t_1-\varepsilon) - f(u, v, 0)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(u, v, t) - f(u, v, t_1 + \varepsilon)] \\
& = f(u, v, t_1) - f(u, v, 0) + f(u, v, t) - f(u, v, t_1) \\
& = f(u, v, t) - f(u, v, 0),
\end{aligned}$$

故 (7) 式恒成立. 代入 (6) 式, 得

$$\begin{aligned}
G(t) &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} [f(u, v, t) - f(u, v, 0)] du dv \\
&= F(t) - F(0) \quad (-\infty < t < +\infty).
\end{aligned}$$

由此, 再注意到 (5) 式, 即知 $F'(t)$ 存在, 且

$$\begin{aligned}
F'(t) &= G'(t) = g(t) \\
&= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_t(u, v, t) du dv \quad (-\infty < t < +\infty),
\end{aligned}$$

即 (3) 式成立.

3981. 设

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy \quad (t \geq 0),$$

求 $F'(t)$.

解 令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 则

$$F'(t) = \int_0^t dr \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi,$$

故得

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) t d\varphi.$$

注意, 此题中应假定 $f(x, y)$ 是连续函数.

3982. 设 $f(x, y)$ 是连续的, 求证函数

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

满足方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

证 利用含参变量的常义积分求导数的公式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - (-1)f(\xi, \xi-x+y)] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x-x+y}^{x+y-x} f(x, \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) + f(\xi, \xi-x+y)] d\xi, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f'_x(\xi, x+y-\xi) - f'_x(\xi, \xi-x+y)] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} [f(x, x+y-x) + f(x, x-x+y)] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x [f'_x(\xi, x+y-\xi) - f'_x(\xi, \xi-x+y)] d\xi \\ &\quad + f(x, y), \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - f(\xi, \xi-x+y)] d\xi, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi. \end{aligned}$$

于是, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

证毕.

注意, 显然本题还应假定 $f'_x(x, y)$ 存在且连续.

3983. 设函数 $f(x, y)$ 的等位线是简单封闭曲线, $S(v_1, v_2)$ 是由曲线 $f(x, y) = v_1$ 及 $f(x, y) = v_2$ 所围成的域. 证明

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv,$$

其中 $F(v)$ 为由曲线 $f(x, y) = v_1$ 与 $f(x, y) = v_2$ 所包围的面积.

证 作 $[v_1, v_2]$ 的任一分划 T :

$$v_1 = v'_0 < v'_1 < \cdots < v'_i < \cdots < v'_n = v_2.$$

$$\text{令 } d(T) = \max_{1 \leq i \leq n}$$

Δv_i , 这里 $\Delta v_i =$

$$v'_i - v'_{i-1} \quad (i=1,$$

$2, \cdots, n)$. 于是,

由积分中值定理

(这里假定了

$f(x, y)$ 在 $S(v_1,$

$v_2)$ 上连续) 知

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy$$

$$= \sum_{i=1}^n \iint_{S(v'_{i-1}, v'_i)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta S_i,$$

其中 ΔS_i 表小环形域 $S(v'_{i-1}, v'_i)$ (如图 8.33 阴影部分所示) 的面积, $\bar{P}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S(v'_{i-1}, v'_i)$.

令 $v_i^* = f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, 则 $v'_{i-1} \leq v_i^* \leq v'_i$. 又显然 (利用微分中值定理) 有

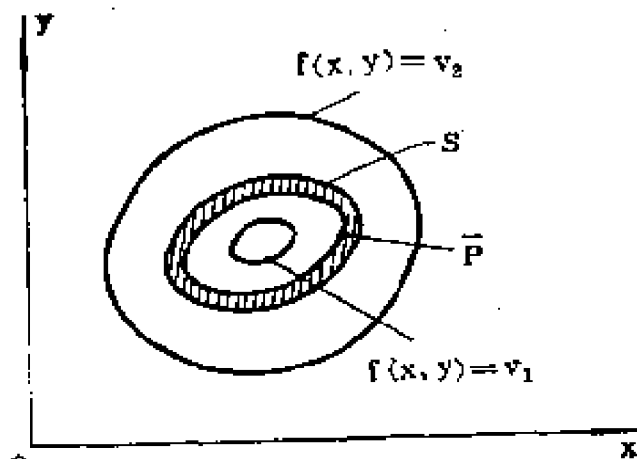


图 8.33

$$\begin{aligned}\Delta S_i &= F(v'_i) - F(v'_{i-1}) = F'(\bar{v}_i)(v'_i - v'_{i-1}) \\ &= F'(\bar{v}_i)\Delta v_i \quad (i=1, 2, \dots, n),\end{aligned}$$

其中 $v'_{i-1} \leq \bar{v}_i \leq v'_i$. 这里我们假定了 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上存在且可积, 于是它有界, 即

$$|F'(v)| \leq M = \text{常数} \quad (v_1 \leq v \leq v_2). \quad (1)$$

我们有

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n v_i^* F'(\bar{v}_i) \Delta v_i = I_1 + I_2, \quad (2)$$

其中

$$I_1 = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i F'(\bar{v}_i) \Delta v_i, \quad I_2 = \sum_{i=1}^n (v_i^* - \bar{v}_i) F'(\bar{v}_i) \Delta v_i.$$

由于 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上可积, 故 $vF'(v)$ 也在 $[v_1, v_2]$ 上可积. 因此,

$$\begin{aligned}\lim_{d(T) \rightarrow 0} I_1 &= \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{v}_i F'(\bar{v}_i) \Delta v_i \\ &= \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.\end{aligned} \quad (3)$$

另一方面, 由 (1) 式知

$$|I_2| \leq M d(T) \sum_{i=1}^n \Delta v_i = M(v_2 - v_1) d(T),$$

故

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} I_2 = 0. \quad (4)$$

现在 (2) 式两端令 $d(T) \rightarrow 0$ 取极限 (注意, (2) 式左端是常数), 并注意到 (3) 式与 (4) 式, 即得

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.$$

证毕.

应当指出, 正如上面所说的, 本题应假定 $f(x, y)$ 在 $S(v_1, v_2)$ 上连续, 而 $F(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上存在并且可积.

§2. 面积的计算法

Oxy 平面上域 S 的面积由公式

$$S = \iint_S dx dy$$

所给出.

求下列曲线所界的面积:

$$\begin{aligned} 3334. \quad & xy = a^2, \quad x + y \\ & = \frac{5a}{2} \quad (a > 0). \end{aligned}$$

解 两曲线的交

点为 $A\left(\frac{a}{2}, 2a\right)$

和 $B\left(2a, \frac{a}{2}\right)$ (图

8.34), 故所求面积为

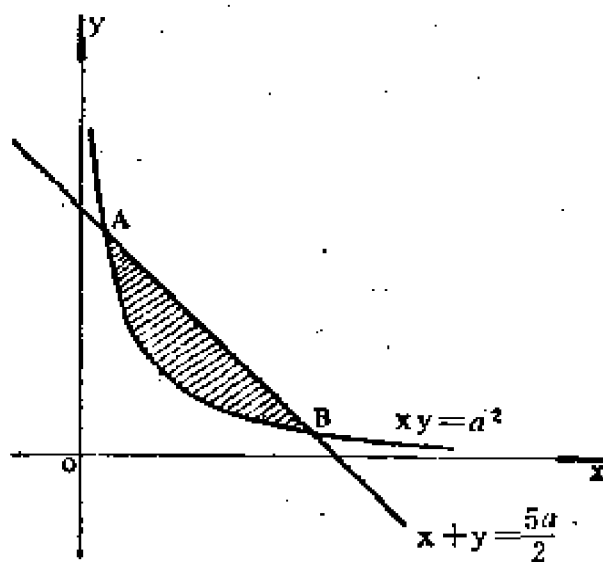


图 8.34

$$S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5a}{2} - x} dy = \frac{15}{8}a^2 - 2a^2 \ln 2.$$

3985. $y^2 = 2px + p^2$, $y^2 = -2qx + q^2$ ($p > 0, q > 0$).

解 两曲线的交点为 A

$(\frac{q-p}{2}, \sqrt{pq})$ 和 B

$(\frac{q-p}{2}, -\sqrt{pq})$ (图 8.35),

故所求面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\sqrt{pq}} dy \int_{\frac{y^2 - p^2}{2p}}^{\frac{q^2 - y^2}{2q}} dx \\ &= \frac{2}{3} (p+q) \sqrt{pq}. \end{aligned}$$

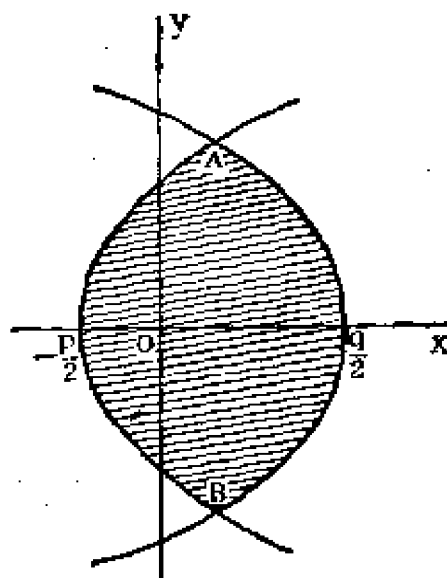


图 8.35

3986. $(x-y)^2 + x^2 = a^2$

($a > 0$).

解 如图 8.36 所示.

所求面积的域为:

$-a \leq x \leq a$,

$x - \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq x + \sqrt{a^2 - x^2}$

$+ \sqrt{a^2 - x^2}$. 于是,

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^a dx \int_{x - \sqrt{a^2 - x^2}}^{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dy \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt \end{aligned}$$

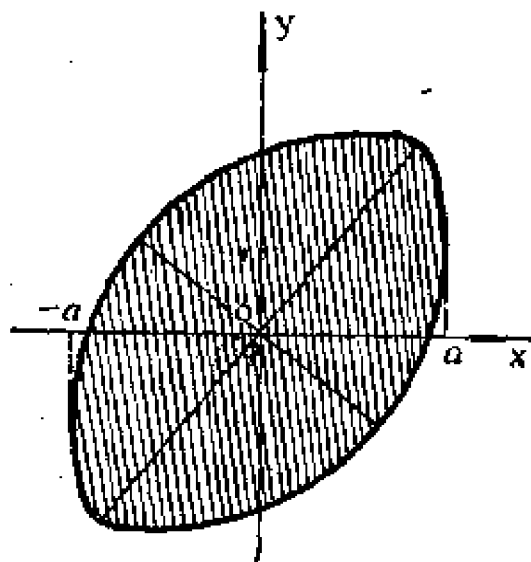


图 8.36

$$= 4 \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^2.$$

变换为极坐标，以计算由下列曲线所界的面积：

3987. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); x^2 + y^2 \geq a^2$.

解 曲线的极坐

标方程为

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi \text{ 及}$$

$$r \geq a.$$

它们的交点（在

第一象限内）为

$(a, \frac{\pi}{6})$ ，如图

8.37所示。利用

对称性，得所求

面积为

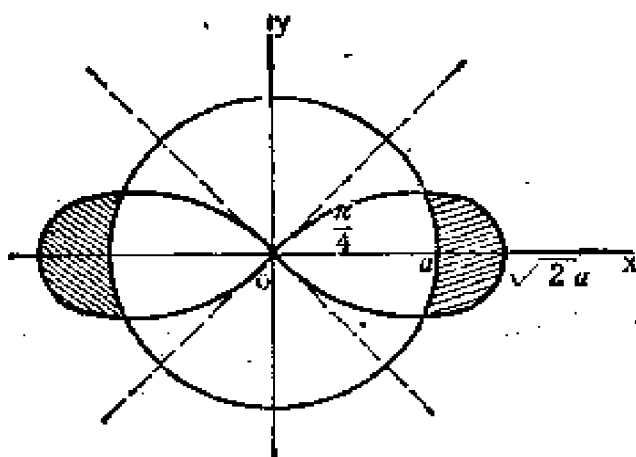


图 8.37

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{\sqrt{2a^2 \cos 2\varphi}} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2a^2 \cos 2\varphi - a^2) d\varphi \\ &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2. \end{aligned}$$

3988. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2; x \geq 0, y \geq 0$.

解 将方程化为极坐标方程，得

$$(r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta)^2 = r^2,$$

即

$$r^2 = \frac{1}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}).$$

曲线所界的面积为

$$S = \iint_S r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}.$$

由于

$$\frac{1}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} \right),$$

又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta + \frac{\pi}{4}}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \ln \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \right)$$

$$= \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}),$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} d\theta &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right)}{2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right)^2 + \frac{1}{2}} \quad *) \\ &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sin \theta - \cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

*) 利用2053题的结果, 其中

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}, A = 2, B = 0.$$

3980. $(x^2 + y^2)^2 = c(x^3 - 3xy^2)$ ($c > 0$).

解 显然曲线关于 Ox 轴对称, 故只要求出 $y \geq 0$ 的部分. 化为极坐标, 方程为

$$r = c \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3).$$

由于必须 $x^3 - 3xy^2 \geq 0$, 故 $\cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3) \geq 0$. 因

此, $\cos \theta > 0$ 且 $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos \theta \leq 0$ 且 $\cos \theta$

$\geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\pi}{6}$, $-\pi$

$+\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$.

于是, 在 Ox 轴的上方部分 ($y \geq 0$) 为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ 和 } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\pi}{6}.$$

由此可知

$$\begin{aligned} S &= \iint_S r dr d\theta = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{\pi}{6}} r^2 d\theta \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta. \end{aligned}$$

在上式右端第二个积分中作代换 $\theta = \pi - \varphi$, 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta,$$

故

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 \cos^6 \theta - 24 \cos^4 \theta + 9 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= a^2 \left(16 \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} - 24 \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

3990. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy$; $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq a^2 (a > 0)$.

解 将方程化为极坐标方程, 得 (双纽线)

$$r^4 = 8a^2 r^2 \cos \theta \sin \theta,$$

即

$$r = 2a \sqrt{\sin 2\theta};$$

与圆周

$$(r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta - a)^2 = a^2,$$

即

$$r = a(\cos \theta + \sin \theta) \pm a \sqrt{\sin 2\theta}.$$

显然, 两条曲线关于射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 是对称的. 令

$$2a \sqrt{\sin 2\theta} = a(\cos \theta + \sin \theta) - a \sqrt{\sin 2\theta},$$

解得交点的极角

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_S r dr d\theta \\
 &= \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \{ (2a\sqrt{\sin 2\theta})^2 - [a(\cos\theta + \sin\theta) - a\sqrt{\sin 2\theta}]^2 \} d\theta \\
 &= \int_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} [2a^2\sin 2\theta + 2a^2(\sin\theta + \cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta} - a^2] d\theta.
 \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 &\int (\sin\theta + \cos\theta) \sqrt{\sin 2\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2}(\sin\theta - \cos\theta) \sqrt{\sin 2\theta} \\
 &+ \frac{1}{2}\arcsin(\sin\theta - \cos\theta) + C^*.
 \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned}
 S &= a^2 \left[-\cos 2\theta + (\sin\theta - \cos\theta) \sqrt{\sin 2\theta} \right. \\
 &\quad \left. + \arcsin(\sin\theta - \cos\theta) - \theta \right] \Big|_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= a^2 \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{8} + \frac{\sqrt{14}}{4} \sqrt{\frac{1}{8}} \right. \\
 &\quad \left. + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \right] \\
 &= a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right)
 \end{aligned}$$

$$=a^2\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)^{**})$$

*) 利用三角恒等式

$$\sqrt{\sin 2x} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) \sqrt{\operatorname{tg} x},$$

$$\sqrt{\sin 2x} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) \sqrt{\operatorname{ctg} x}$$

化为二项型微分的积分. 参看 A. Ф. Тихофеев 《ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ》第五章 §15.

**) 容易证明:

$$\arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} & \sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{14}}{32} + \frac{5\sqrt{14}}{32} = \frac{\sqrt{14}}{4}. \end{aligned}$$

根据公式

$$x = a \cos^a \varphi, \quad y = b r \sin^a \varphi \quad (r \geq 0)$$

引入普遍的极坐标 (其中 a, b 和 a 为以适当的方法选出的常数, 且 $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = a a b r \cos^{a-1} \varphi \sin^{a-1} \varphi$), 以求

由下列曲线所界的面积 (假定参数是正的):

$$3991. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$$

解 不失一般性, 设 $h > 0, k > 0$. 令

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi,$$

则方程化为

$$r = \frac{a}{h} \cos \varphi + \frac{b}{k} \sin \varphi.$$

由于 $r \geq 0$, 故有

$$\frac{a}{h} \cos \varphi + \frac{b}{k} \sin \varphi \geq 0,$$

因此, 首先必须 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$. 同时, 应有 $\cos \varphi \geq 0$ 且

$$\operatorname{tg} \varphi \geq -\frac{ak}{bh} \text{ 或者 } \cos \varphi < 0 \text{ 且 } \operatorname{tg} \varphi \leq -\frac{ak}{bh}.$$

从而, 极角 φ 应满足不等式

$$-\arctg \frac{ak}{bh} \leq \varphi \leq \pi - \arctg \frac{ak}{bh}.$$

于是, 曲线所界的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_S ab r dr d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \int_{-\arctg \frac{ak}{bh}}^{\pi - \arctg \frac{ak}{bh}} \left(\frac{a}{h} \cos \varphi + \frac{b}{k} \sin \varphi \right)^2 d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \int_{-\arctg \frac{ak}{bh}}^{\pi - \arctg \frac{ak}{bh}} \sin^2(\varphi + \alpha_0) d\varphi, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_0 = \arctg \frac{ak}{bh}$. 从而, 我们有

$$S = \frac{ab}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \left[\frac{\varphi + \alpha_0}{2} - \frac{1}{4} \sin 2(\varphi + \alpha_0) \right] \Bigg|_{-\arctg \frac{ak}{bh}}^{\pi - \arctg \frac{ak}{bh}}$$

$$= -\frac{ab}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right).$$

$$3992. \quad \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; \quad x=0, \quad y=0.$$

解 令

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

则方程化为

$$r = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.$$

于是, 曲线所界的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_S ab r dr d\theta = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cos^4 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^4 \sin^4 \varphi + 2\left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

根据H.M.雷日克、H.C.格拉德什坦编著的《函数表与积分表》2.125、2.126知:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^4 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} &= \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} + \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\operatorname{tg} \varphi + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + 1} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] + C. \end{aligned}$$

从而

$$\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cos^4 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^4 \left\{ \frac{\operatorname{tg} \varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3 \varphi)} + \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\operatorname{tg} \varphi + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + 1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\
&= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{a}{h}\right)^4;
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} = \int \frac{\operatorname{tg}^4 \varphi}{(1+\operatorname{tg}^3 \varphi)^2} d(\operatorname{tg} \varphi) \\
&= \frac{\operatorname{tg}^5 \varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3 \varphi)} - \frac{2}{3} \int \frac{\operatorname{tg}^4 \varphi}{1+\operatorname{tg}^3 \varphi} d(\operatorname{tg} \varphi) \\
&= \frac{\operatorname{tg}^5 \varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3 \varphi)} - \frac{2}{3} \left\{ \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\operatorname{tg} \varphi + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + 1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} + C,
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{b}{h}\right)^4 \sin^4 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi \\
&= \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{h}\right)^4 \left\{ \frac{\operatorname{tg}^5 \varphi}{3(1+\operatorname{tg}^3 \varphi)} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\operatorname{tg} \varphi + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + 1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0}
\end{aligned}$$

$$= \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{b}{k}\right)^4;$$

此外, 还有

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= -\frac{1}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} + C, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \left(\frac{c}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi \\ &= ab \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[-\frac{1}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\ &= \frac{ab}{3} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2. \end{aligned}$$

于是, 曲线所界的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{c}{h}\right)^4 + \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{b}{k}\right)^4 + \frac{a^2}{3} \left(\frac{c}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{3} \left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{c^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) + \frac{c^2 b^2}{h^2 k^2} \right]. \end{aligned}$$

2993. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0).$

解 方法一

令

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi,$$

则方程化为

$$r^2 = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

于是，曲线所界的面积为

$$S = \iint_S ab r dr d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi.$$

注意到

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi &= \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^4} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= -\frac{1}{3(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^4} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= \int \frac{(\operatorname{tg} \varphi - 1)(\operatorname{tg} \varphi + 1) + 1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^4} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^2} d(\operatorname{tg} \varphi) - 2 \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &\quad + \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^4} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} + C, \end{aligned}$$

于是，所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[-\frac{1}{3(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\ &\quad + \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[-\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^2} \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$=\frac{ab}{6}\left(-\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right).$$

方法二

令

$$x=hr\cos\varphi, \quad y=kr\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2=\frac{1}{\left(\frac{h}{a}\cos\varphi+\frac{k}{b}\sin\varphi\right)^2}$$

$$=\left[\frac{a^2b^2}{(hb)^2+(ka)^2}\right]^2\frac{1}{\sin^4(\varphi+\alpha)}\left(0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{hb}{ka}$. 于是, 曲线所界的面积为

$$S=\iint_S hkrdrd\varphi=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi+\alpha)}$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\left[-\frac{1}{6}\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin^3(\varphi+\alpha)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\frac{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)}\right]\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}*})$$

$$=\frac{hka^4b^4}{[(hb)^2+(ka)^2]^2}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3}(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) \Big] \\
& = \frac{hka^4b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \cdot \frac{1}{6} \frac{[(hb)^2 + (ka)^2]^{3**})}{(hbka)^3} \\
& = \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right).
\end{aligned}$$

*) 参看2012题的结果.

**) 由 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{hb}{ka}$ 知:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{ka}{hb}, \quad \sin \alpha = \frac{hb}{\sqrt{(hb)^2 + (ka)^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{ka}{\sqrt{(hb)^2 + (ka)^2}}.$$

$$3994. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0).$$

解 令

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi,$$

则方程化为

$$r^2 = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi - \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4}.$$

由于

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi - \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi \geqslant 0,$$

$$\left(\frac{ak}{bh}\right)^2 \geqslant \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

注意到 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 可知极角的变化区间为

$$0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}.$$

于是, 注意利用上题中两个不定积分, 便得到曲线所界的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_S ab r dr d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} r^2 d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} \frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi \\ &\quad - \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{h}\right)^2 \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[-\frac{1}{3(1+\operatorname{tg} \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} \\ &\quad - \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left[-\frac{3\operatorname{tg}^2 \varphi + 3\operatorname{tg} \varphi + 1}{(1+\operatorname{tg} \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} \\ &= \frac{ab}{6} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[\frac{-1}{\left(1 + \frac{ak}{bh}\right)^3} + 1 \right] \\ &\quad + \frac{ab}{6} \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left[\frac{3\left(\frac{ak}{bh}\right)^2 + 3\left(\frac{ak}{bh}\right) + 1}{\left(1 + \frac{ak}{bh}\right)^3} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ab}{6} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{(ak)^3 + 3(ak)^2bh + 3ak(bh)^2}{(ak+bh)^3} \\
&\quad + \frac{ab}{6} \left(\frac{b}{k} \right)^2 \frac{-(ck)^3}{(ak+bh)^3} \\
&= \frac{a^4bk}{6h^2(ak+bh)^3} (c^2k^2 + 3ackbh + 2b^2h^2) \\
&= \frac{a^4bk(ak+2bh)}{6h^2(ak+bh)^2}.
\end{aligned}$$

3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1, \quad x=0, \quad y=0.$

解 令

$$x = ar \cos^8 \varphi, \quad y = br \sin^8 \varphi,$$

则方程化为

$$r = 1 \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

于是, 曲线所界的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \iint_S 8abr \cos^7 \varphi \sin^7 \varphi d\varphi \\
&= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \varphi \sin^7 \varphi d\varphi \\
&= 4ab \int_0^1 u^7 (1-u^2)^3 du \\
&= 4ab \int_0^1 (u^7 - 3u^9 + 3u^{11} - u^{13}) du \\
&= 4ab \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{14} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{ab}{70}.$$

进行适当的变量代换, 求由下列曲线所界的面积:

3996. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$
 $(0 < a < b, 0 < \alpha < \beta).$

解 作变换: $x+y=u$, $\frac{y}{x}=v$, 则 $a \leq u \leq b$, $\alpha \leq v \leq \beta$, 且有

$$|I| = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \int_a^b u du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

3997. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ ($x>0$; $y>0$).

解 作变换: $xy=u$, $\frac{y}{x}=v$, 则 $a^2 \leq u \leq 2a^2$, $1 \leq v \leq 2$, 且有

$$|I| = \frac{1}{2v}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{2a^2} du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} a^2 \ln 2.$$

3998. $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ ($0 < p < q$;
 $0 < r < s$).

解 作变换: $\frac{y^2}{x}=u$, $\frac{x^2}{y}=v$, 则 $2p \leq u \leq 2q$,
 $2r \leq v \leq 2s$, 且有

$$|I| = \frac{1}{3}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \frac{1}{3} \int_{2r}^{2s} du \int_{2r}^{2s} dv = \frac{4}{3} (q-p)(s-r).$$

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{4x}{a} = \frac{y}{b}$
 $(a > 0, b > 0).$

解 作变换: $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = u, \frac{x}{a} = v$, 即

$$x = \frac{u^2 v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2}, \quad y = \frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则 $1 \leq u \leq 2, \frac{a}{4b} \leq v \leq \frac{a}{b}$, 且有

$$|I| = \frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 2u^3 du \int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}} \frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4} \\ &= \frac{15}{2} \cdot \int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \frac{2atdt}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4} \quad *) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 15a \int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \left(-\frac{1}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3} - \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{b}} + t\right)^4} \right) dt \\
&= 15a \cdot \left(\frac{7b}{72} - \frac{37b}{648} \right) = \frac{65ab}{108}.
\end{aligned}$$

*) 作代换 $v = at^2$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$, 其中 λ 取下列各值: $\frac{1}{3}c^2, \frac{2}{3}c^2, \frac{4}{3}c^2, \frac{5}{3}c^2$ ($x > 0, y > 0$).

解 方程 $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$ 可变为

$$\lambda^2 - (x^2 + y^2 + c^2)\lambda + c^2x^2 = 0.$$

将 λ 作为未知量解方程, 不妨记方程的两个解为 λ 及 μ , 则

$$\lambda = \frac{x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}}{2},$$

$$\mu = \frac{x^2 + y^2 + c^2 - \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}}{2},$$

今设按上式作变量代换, 将 (x, y) 变为 (λ, μ) . 易知

$$\begin{aligned}
\left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)} \right| &= \frac{4c^2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}} \\
&= \frac{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}}{\lambda - \mu},
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} &= -\frac{1}{\frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)}} \\ &= -\frac{\lambda - \mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}}.\end{aligned}$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned}S &= \iint_D dx dy = \iint \frac{\lambda - \mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}} d\lambda d\mu \\ &\quad \frac{\frac{4c^2}{3} \leq \lambda \leq \frac{5c^2}{3}}{\frac{c^2}{3} \leq \mu \leq \frac{2c^2}{3}} \\ &= \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{u - v}{\sqrt{uv(1-v)(u-1)}} du dv \\ &= \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u} du}{\sqrt{u-1}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} \\ &\quad - \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u-1)}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{1-v}}.\end{aligned}$$

由于

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u-1}} du = \frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u-1)}} = 2 \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} dv = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}},$$

故最后得

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^2}{4} \left[\left(\frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \cdot \left(2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \\ &\quad \left. - \frac{c^2}{4} \left[\left(2\lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] \right] \\ &= \frac{c^2}{6} (\sqrt{10} - 2) \arcsin \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4001. 求由椭圆

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$$

(其中 $\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$) 所界的面积,

解 作变换: $a_1x + b_1y + c_1 = u$, $a_2x + b_2y + c_2 = v$,
则椭圆所围成的域变为 $u^2 + v^2 \leq 1$, 且有

$$|I| = \frac{1}{|\delta|}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \frac{1}{|\delta|} \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} du dv = \frac{\pi}{|\delta|}.$$

4002. 求由椭圆

$$\frac{x^2}{ch^2 u} + \frac{y^2}{sh^2 u} = c^2 \quad (u=u_1, u_2)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2 \quad (v=v_1, v_2)$$

$$(0 < u_1 < u_2; 0 < v_1 < v_2; x > 0, y > 0)$$

所界的面积.

解 作变换: $x = c \operatorname{ch} u \cos v$, $y = c \operatorname{sh} u \sin v$,

则有

$$|I| = |c^2 \operatorname{ch}^2 u - c^2 \cos^2 v|.$$

因为 $\operatorname{ch}^2 u \geq 1 \geq \cos^2 v$, 故所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= c^2 \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) du dv \\ &= c^2 \left[(v_2 - v_1) \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \operatorname{ch} 2u}{2} du - (u_2 - u_1) \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_{v_1}^{v_2} \cos^2 v dv \right] \\ &= \frac{c^2}{4} \left[(v_2 - v_1) (\operatorname{sh} 2u_2 - \operatorname{sh} 2u_1) - (u_2 - u_1) \right. \\ &\quad \left. \cdot (\sin 2v_2 - \sin 2v_1) \right]. \end{aligned}$$

4003. 求用平面 $x + y + z = b$ 与曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$ 相截所得截断面之面积.

解 为简化平面和曲面的方程, 作变量代换:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} z',$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z,$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z,$$

这是一个正交变换, 故 $Ox'y'z'$ 成为一新的直角坐标系. 在新的坐标系下, 平面方程为

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z) = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

由于

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$y = -\frac{\sqrt{6}}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

故有

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz &= \frac{1}{2}[(x-y)^2 \\ &\quad + (y-z)^2 + (z-x)^2] \\ &= \frac{3}{2}(x'^2 + y'^2). \end{aligned}$$

从而, 曲面方程变为

$$x'^2 + y'^2 = \frac{2}{3}a^2.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \iint_{x'^2 + y'^2 \leq \frac{2}{3}a^2} dx' dy' = \frac{2}{3}\pi a^2.$$

4004. 求用平面 $z=1-2(x+y)$ 与曲面 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ 相截所得截断面之面积.

解 平面被曲面所截部分记为 S , 它在 Oxy 平面上的投影记为 D . 由于平面 $z=1-2(x+y)$ 的法线之方向余弦为 $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$, 故 $D = S \cos\gamma$

$= \frac{1}{3}S$, 从而 $S = 3D$, 显然 D 为 Oxy 平面上由曲线 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$+\frac{1}{1-2(x+y)}=0$ (也即 $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y$

$= 0$) 所界的区域. 作变量代换

$$x = u + v + \frac{1}{7}, \quad y = u - v + \frac{1}{7}.$$

于是, $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -2$, 且曲线 $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y$

$-y = 0$ 变为 $7u^2 + v^2 - \frac{1}{7} = 0$, 这是一个椭圆 (在 uv

平面上). 从而, 即得

$$D = \iint_D dx dy = 2 \iint_{49u^2 + 7v^2 \leq 1} du dv$$

$$= 2 \cdot \pi \left(\frac{1}{7} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = \frac{2\pi}{7\sqrt{7}}.$$

由此, 最后得

$$S = 3D = \frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$$

§3. 体积的计算法

设柱体上顶是连续的曲面 $z=f(x, y)$, 下底是平面 $z=0$, 侧面为从平面 Oxy 中的可求面积的区域 Ω (图8.38) 竖起的垂直柱面所界定.

柱体的体积等于

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

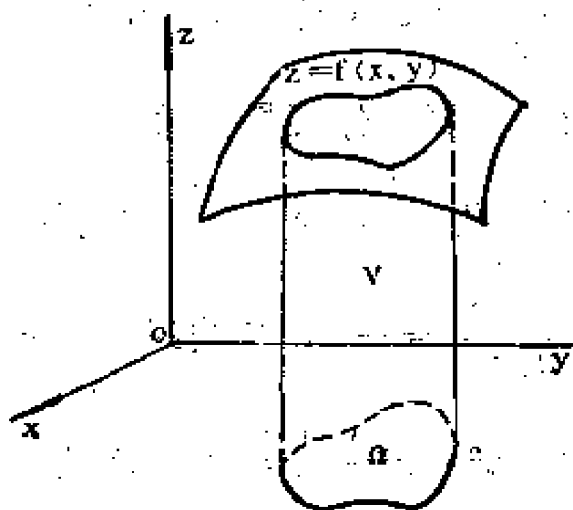


图 8.38

4005. 试绘出一物体, 其体积等于积分

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy.$$

解 积分域为三角形

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x.$$

柱体上顶为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$. 物体的形状如图8.39所示.

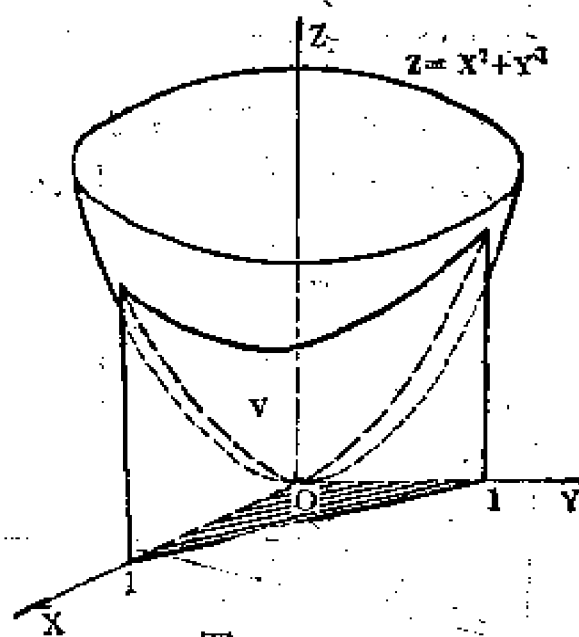


图 8.39

4006. 描出下列二重积分所表示的体积:

(a) $\iint_{\substack{0 < x+y < 1 \\ x > 0, y > 0}} (x+y) dx dy;$

(b) $\iint_{\substack{x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy;$

(B) $\iint_{|x| + |y| \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy;$

(T) $\iint_{x^2 + y^2 \leq x} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy;$

(A) $\iint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} \sqrt{xy} dx dy;$

(e) $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sin \pi \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$

解 (a) 积分域为三角形

$$0 \leq x+y \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

柱体的上顶为平面 $z=x+y$ (图 8.40) .

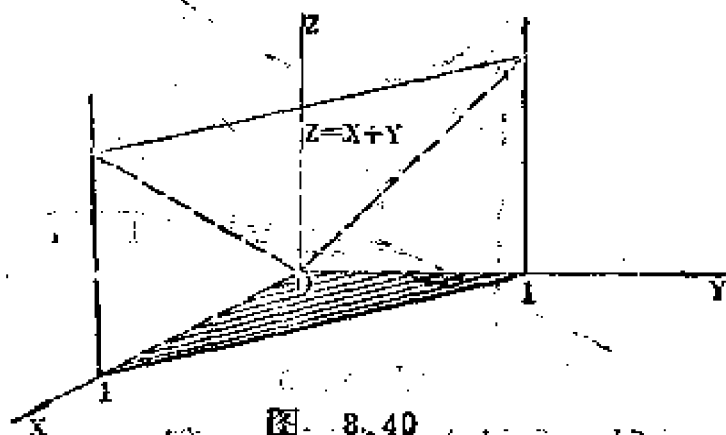


图 8.40

(b) 积分域为椭圆

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,$$

即立体的底面, 顶面为椭球面 $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$ (图 8.41) .

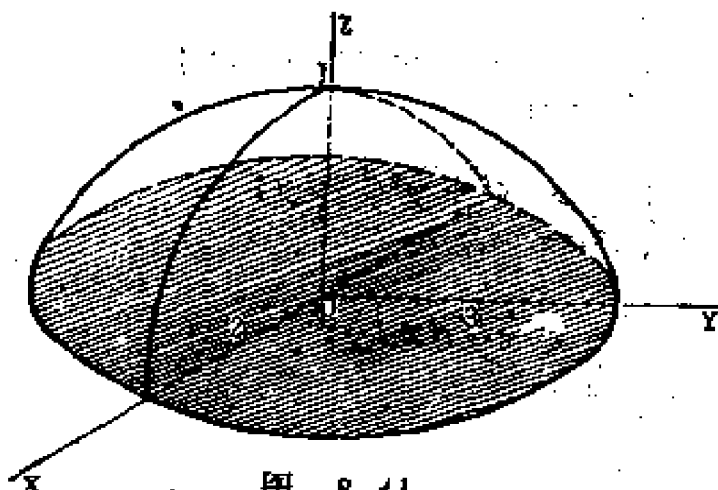


图 8.41

(c) 积分域为由直线

$$x+y=1, \quad x+y=-1, \quad x-y=1, \quad y-x=1$$

围成的正方形。柱体的顶面为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 。

图8.42中仅画了第一卦限部分的体积。

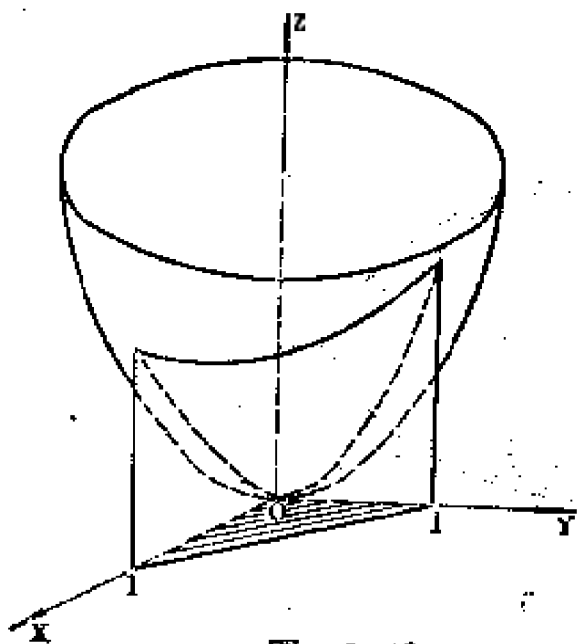


图 8.42

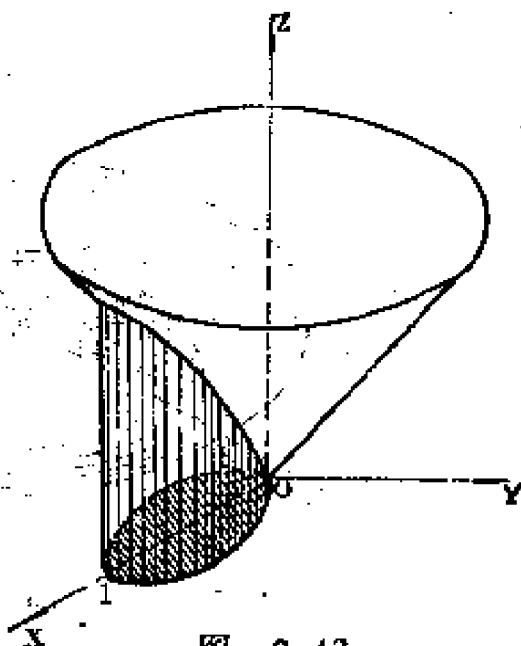


图 8.43

(V) 积分域为圆

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}.$$

柱体的顶面为圆

$$\text{锥面 } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(图8.43)。

(VI) 积分域为梯形

$$1 \leq x \leq 2,$$

$$x \leq y \leq 2x.$$

柱体的顶面为

双曲抛物面

$$z = \sqrt{xy} \quad (\text{图8.44}).$$

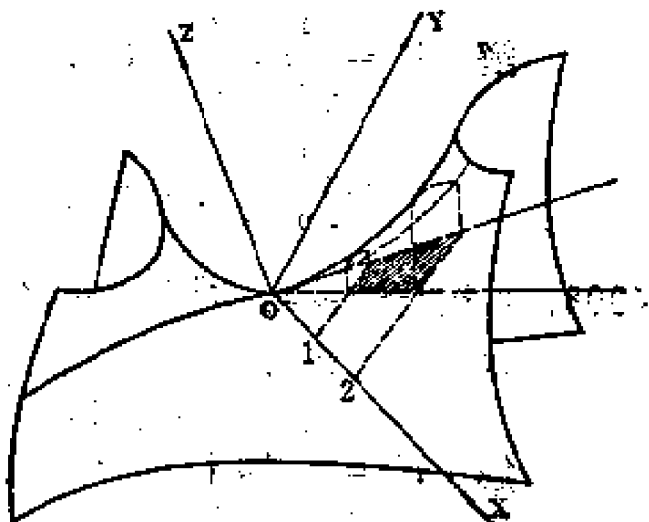


图 8.44

(e) 积分域为圆

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

即立体的底面, 顶面是由正弦曲线 $z = \sin \pi x$ 绕 Oz 轴旋转一周而得的旋转曲面 (图 8.45).

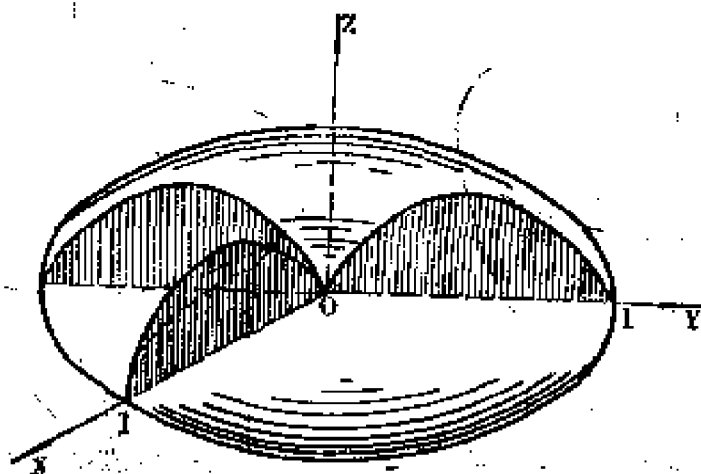


图 8.45

求由下列曲面所界的体积:

4007. $z = 1 + x + y$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

解
$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 + x + y) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{5}{6}.$$

4008. $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
($a \geq R\sqrt{2}$).

解
$$V = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} (a - x - y) dy$$

$$= \int_0^R \left[(a - x) \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{R^2 - x^2}{2} \right] dx$$

$$= \int_0^R a \sqrt{R^2 - x^2} dx - \int_0^R \left(x \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2 - x^2}{2} \right) dx = \frac{\pi a R^2}{4} - \frac{2R^3}{3}.$$

4009. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

解 $V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \frac{88}{105}.$

4010. $z = \cos x \cos y$, $z = 0$, $|x + y| \leq \frac{\pi}{2}$, $|x - y| \leq \frac{\pi}{2}$.

解 因函数 $z = \cos x \cdot \cos y$ 的图形关于 Oyz 平面对称, 而积分域 (图8.46). 关于 Oy 轴对称, 故所求的体积为

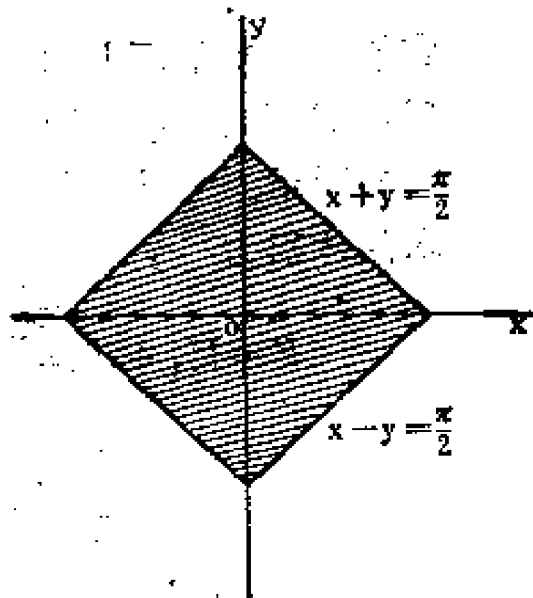


图 8.46

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \cos x \cdot \cos y dy$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

$$= 4 \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

4011. $z = \sin \frac{\pi y}{2x}$, $z = 0$, $y = x$, $y = 0$, $x = \pi$.

解 $V = \int_0^{\pi} dx \int_0^x \sin \frac{\pi y}{2x} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$

4012. $z = xy, x + y + z = 1, z = 0$.

解 体积 V 由两部分组成:

$$V_1: 0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x},$$

$$z = xy.$$

$$V_2: 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1-x,$$

$$z = 1 - x - y.$$

它们在 Oxy 平面上的射影域 Ω_1 及 Ω_2 如图

8.47 所示. 于是, 所求的体积为

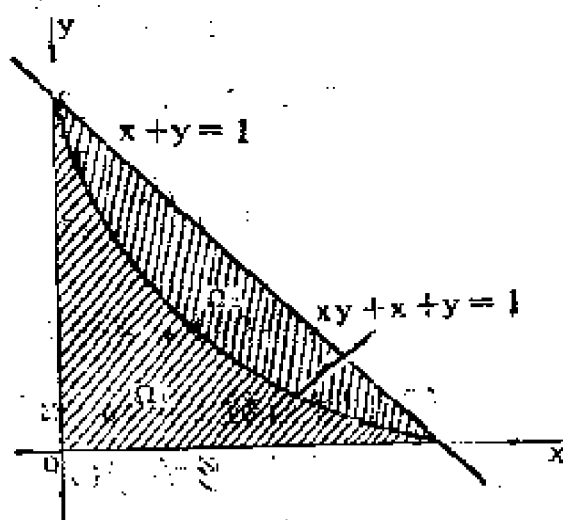


图 8.47

$$V = V_1 + V_2 = \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y dy$$

$$+ \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y) dy$$

$$= \left(-\frac{11}{4} + 4 \ln 2 \right) + \left(\frac{25}{6} - 6 \ln 2 \right) = \frac{17}{12} - 2 \ln 2.$$

变换成极坐标, 以求由下列曲面所界的体积:

4013. $z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2$.

解 因为 $z = \sqrt{xy}$, 故所求的体积为

$$V = 4 \iint \sqrt{xy} dx dy$$

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \varphi \sin \varphi} \cdot r^2 d\varphi \\
&= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}} \varphi \sin^{\frac{1}{2}} \varphi d\varphi \\
&= \frac{4}{3} a^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)^{*)} = \frac{2}{3} a^3 \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{2}{3} a^3 \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

*) 利用3856题的结果.

4014. $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $z = 0$ ($x > 0$, $y > 0$).

解 令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 则方程

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy \text{ 及 } z = x + y$$

变为

$$r^2 = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi \text{ 及 } z = r(\cos \varphi + \sin \varphi).$$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x + y) dx dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) dr \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{\frac{5}{2}} \varphi \cos^{\frac{3}{2}} \varphi + \cos^{\frac{5}{2}} \varphi \sin^{\frac{3}{2}} \varphi) d\varphi \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{2} \cdot B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right)^{*)} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{3}{4})}{2!}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

*) 利用3856题的结果.

4015. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0.$

解 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则方程

$$x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x \text{ 及 } z = x^2 + y^2$$

变为

$$r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi \text{ 及 } z = r^2.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} r^3 dr$$

$$= \frac{2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 \cos^4 \varphi - \cos^4 \varphi) d\varphi$$

$$= \frac{15}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{45}{32} \pi.$$

4076. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \geq a|x| \ (a > 0).$

解 只须计算由下列曲面所围成的体积:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leq a|x|.$$

若引用极坐标, 则

$$r^2 + z^2 = a^2, r^2 \leq a|r \cos \varphi|,$$

其体积为

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 8 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq ax \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dx dy \\
 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r \cdot \sqrt{a^2 - r^2} dr \\
 &= -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a \cos \varphi} d\varphi \\
 &= -\frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9}.
 \end{aligned}$$

于是, 所求的体积为

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} - \left(\frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9} \right) = \frac{16a^3}{9}.$$

4017. $x^2 + y^2 - az = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$
($a > 0$).

解 若引用极坐标, 则有

$$z = \frac{r^2}{a}, \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad (a > 0).$$

于是, 利用对称性知, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_D \frac{1}{a} (x^2 + y^2) dx dy \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a \sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{r^2}{a} \cdot r dr
 \end{aligned}$$

$$= c^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi c^3}{8}.$$

4018. $z = e^{-(x^2+y^2)}, z=0, x^2+y^2=R^2.$

解 利用对称性, 得所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq R^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

4019. $z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2+y^2}}{2a}, x^2+y^2 \leq a^2, y = x \operatorname{tg} \alpha, y = x \operatorname{tg} \beta$

($a > 0, c > 0, 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$).

解 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2+y^2}}{2a} dx dy \\ &= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^a cr \cos \frac{\pi r}{2a} dr \\ &= c(\beta - \alpha) \left[\frac{2ar}{\pi} \sin \frac{\pi r}{2a} + \frac{4a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi r}{2a} \right] \Big|_0^a \\ &= 2a^2 c (\beta - \alpha) \left(\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \right) = \frac{2a^2 c (\beta - \alpha) (\pi - 2)}{\pi^2}. \end{aligned}$$

4020. $z = x^2 + y^2, z = x + y.$

解 立体的射影域的围线为 $x^2 + y^2 = x + y$ 或

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \text{ 若引用代换 } x = \frac{1}{2}$$

+r\cos\varphi, y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi, 则有

$$z=r^2+\frac{1}{2}+r(\cos\varphi+\sin\varphi), z=1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

$$(0\leq\varphi\leq 2\pi, 0\leq r\leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{2}} [(x+y)-(x^2+y^2)]dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ [1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)] \right. \\ &\quad \left. - \left[r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos\varphi+\sin\varphi) \right] \right\} r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) r dr = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

求由下列曲面所界的体积 (假定参数是正的):

$$4021. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (z>0).$$

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的射影为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$=\frac{1}{2}$. 令 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$, 则方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2} \text{ 及 } z=cr \quad (0\leq\varphi\leq 2\pi, 0\leq r\leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_0 \left[c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} - c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right] dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} ab r (c \sqrt{1 - r^2} - cr) dr \\
&= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (r \sqrt{1 - r^2} - r^2) dr \\
&= -\frac{1}{3} abc \int_0^{2\pi} \left[r^3 - (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\varphi \\
&= \frac{1}{3} \pi abc (2 - \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

4022. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

解 若令 $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, 则曲面方程化为

$$z = \pm c \sqrt{1 + r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} 2c \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2abc r \sqrt{1 + r^2} dr \\
&= 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 + r^2} dr \\
&= \frac{4\pi}{3} abc (2\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

$$4023. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad z=0.$$

解 立体在 Oxy 平面上的射影域的界线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$$= \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \text{ 即 } \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ 若令}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} + r \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{2} + r \sin \varphi, \text{ 则曲面方程化为}$$

$$z = c \left[\frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) + r^2 \right]$$

$$\left(0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$V = \iint_{\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}} c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$$

$$= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r \left[\frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) + r^2 \right] dr$$

$$= abc \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{16} \right] d\varphi$$

$$= abc \cdot \frac{3 \cdot 2\pi}{16} = \frac{3}{8} \pi abc.$$

$$4024. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z}{c} = 1, \quad z=0.$$

解 若令 $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c(1-r^4) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} c \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abc r (1-r^4) dr = \frac{2}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

4025. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, x=0, y=0, z=0.$

解 下面计算位于第一卦限部分的体积.

令 $x = ar \cos^2 \varphi, y = br \sin^2 \varphi$, 则方程化为

$$z = c \sqrt{1-r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abc \sin 2\varphi \cdot \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \right) \left(\int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr \right) \\ &= \frac{abc}{3}. \end{aligned}$$

4026. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$

解 令

$$x = ar \cos \varphi, y = br \sin \varphi,$$

则方程化为

$$z = \pm c\sqrt{1-r^2},$$

$$r^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$= \cos 2\varphi \quad (\text{因 } r^2 = \cos 2\varphi \geq 0,$$

$$\text{故 } -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}).$$

于是, 利用对称性知, 曲面所界的体积为

$$V = 8c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

$$= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1-r^2} r dr d\varphi$$

$$= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} (1 - \sqrt{8} \sin^3 \varphi) d\varphi$$

$$= \frac{8abc}{3} \left(\varphi + \sqrt{8} \cos \varphi - \frac{\sqrt{8}}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8abc}{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$= \frac{8abc}{9} (3\pi + 20 - 16\sqrt{2}).$$

4027. $z^2 = xy$, $x+y=a$, $x+y=b$, $(0 < a < b)$.

解 由于 $z = \pm \sqrt{xy}$, 又所界立体在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由直线 $x+y=a$, $x+y=b$, $x=0$ 及 $y=0$ 围成. 于是, 利用对称性知, 曲面所界的体积为

$$V = 2 \iint_{\Omega} \sqrt{xy} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\int_0^a dx \int_{a-x}^{b-x} \sqrt{xy} dy + \int_a^b dx \int_0^{b-x} \sqrt{xy} dy \right) \\
&= \frac{4}{3} \int_0^a [\sqrt{x(b-x)^3} - \sqrt{x(a-x)^3}] dx \\
&\quad + \frac{4}{3} \int_a^b \sqrt{x(b-x)^3} dx \\
&= \frac{4}{3} \int_0^b (b-x) \sqrt{x(b-x)} dx \\
&\quad - \frac{4}{3} \int_0^a (a-x) \sqrt{x(a-x)} dx.
\end{aligned}$$

令 $x = b \sin^2 t$, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^b (b-x) \sqrt{x(b-x)} dx \\
&= 2b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt \\
&= 2b^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt \right) \\
&= 2b^3 \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{16} \pi b^3;
\end{aligned}$$

同理, 有

$$\int_0^a (a-x) \sqrt{x(a-x)} dx = \frac{1}{16} \pi a^3.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi b^3}{16} - \frac{\pi a^3}{16} \right) = \frac{\pi}{12} (b^3 - a^3).$$

4028. $z = x^2 + y^2$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = \frac{x}{2}$,

$$y=2x, z=0.$$

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由曲线 $xy=a^2$ 、 $xy=2a^2$ 和直线 $y=\frac{x}{2}$ 、 $y=2x$ 围成, 利用对称性, 曲面所界体积可表示为

$$V=2\iint_{\Omega} z \, dx \, dy = 2\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

作变量代换

$$xy=ua^2, y=vx,$$

则积分域 Ω 变为长方形域

$$1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 2,$$

$$\text{且 } |I| = \frac{a^2}{2v}, \quad z = x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{u}{v} + uv \right).$$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2} \leq v \leq 2} \int_{1 \leq u \leq 2} a^2 \left(\frac{u}{v} + uv \right) \frac{a^2}{2v} \, du \, dv \\ &= a^4 \int_1^2 u \, du \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) \, dv = \frac{9}{2} a^4. \end{aligned}$$

4029. $z=xy, x^2=y, x^2=2y, y^2=x, y^2=2x, z=0.$

解 曲面所界立体 V 在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由曲线 $x^2=y$ 、 $x^2=2y$ 、 $y^2=x$ 及 $y^2=2x$ 围成.

我们有

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = \iint_{\Omega} xy dx dy.$$

作变量代换

$$x = uy^2, \quad y = vx^2,$$

或

$$x = u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}}, \quad y = u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}},$$

则积分域 Ω 变为正方形域

$$\frac{1}{2} \leq u \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 1,$$

且 $|I| = \frac{1}{3} u^{-2} v^{-2}$. 于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} xy dx dy = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3} v^{-3} du dv \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3} du \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

4030. $z = c \sin \frac{\pi xy}{a^2}$, $z = 0$, $xy = a^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$, $x > 0$).

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy = a^2$ 和直线 $y = \alpha x$, $y = \beta x$ ($x > 0$) 围成. 于是, 曲面所界的体积为

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = c \iint_{\Omega} \sin \frac{\pi xy}{a^2} dx dy.$$

作变量代换 $x = ar \cos \varphi$, $y = ar \sin \varphi$, 则 $|I| = a^2 r$.
于是,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} z dx dy = c \iint_{\Omega} \sin \frac{\pi xy}{a^2} dx dy \\ &= a^2 c \int_{\arctan \frac{\alpha}{\beta}}^{\arctan \frac{\beta}{\alpha}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi}}} \sin(\pi r^2 \sin \varphi \cos \varphi) r dr d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{\pi} \int_{\arctan \frac{\alpha}{\beta}}^{\arctan \frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{\pi} \ln \operatorname{tg} \varphi \Big|_{\arctan \frac{\alpha}{\beta}}^{\arctan \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{a^2 c}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

4031. $z = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 围成. 于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} z dx dy = \iint_{\Omega} (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}}(1-x) + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right] dx \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{35} (1-x)^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{8}{35}. \end{aligned}$$

4032. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, $z = 0$.

解 令

$$x = ar \cos^3 \varphi, \quad y = br \sin^3 \varphi,$$

则方程化为

$$z = c[1 - r^2(\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi)],$$

$$r = 1 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

于是, 利用对称性知, 曲面所界的体积为

$$V = 4 \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy$$

$$= 12abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [1 - r^2(\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi)]$$

$$\cdot r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi$$

$$= 12abc \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \right]$$

$$= 6abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \right)$$

$$= 6abc \left[\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{10} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{3\pi abc}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{105}{1920} \right) = \frac{75}{256} \pi abc.$$

4033. $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$(y \geq 0).$

解 令

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

则方程化为

$$z = c\varphi,$$

$$r = a\varphi \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D z dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\varphi} c\varphi r dr d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3 d\varphi = \frac{a^2 c}{8} \varphi^4 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^4 a^2 c}{128}. \end{aligned}$$

4034. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ ($n>0$).

解 曲面方程可表示为

$$z = c \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)}.$$

若令

$$x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, \quad y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

则曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= c \iint_D \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)} dx dy \\ &= \frac{2abc}{n} \int_0^1 \sqrt[n]{1-r^n} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}} \varphi \sin^{\frac{2-n}{n}} \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

若令 $r^n = t$ 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr &= \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{2}{n}-1} dt \\
&= B\left(\frac{1}{n}+1, \frac{2}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{3}{n}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};
\end{aligned}$$

令 $\sin^2 \varphi = t$ 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}} \varphi \sin^{\frac{2-n}{n}} \varphi d\varphi &= \frac{1}{2n} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{1}{n}-1} dt \\
&= \frac{1}{2n} \cdot B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \frac{abc}{n^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} \\
&= \frac{abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

4035. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$
 $(n > 0, \quad m > 0).$

解 令

$$x = ar \cos^2 \varphi, \quad y = br \sin^2 \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

则曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= c \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^n} dx dy \\ &= 2abc \int_0^1 \sqrt[n]{1 - r^n} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= abc \int_0^1 \sqrt[n]{1 - r^n} r dr \\ &= \frac{abc}{n} \int_0^1 (1 - t)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{2-n}{n}} dt \\ &= \frac{abc}{n} \cdot B\left(\frac{1}{n} + 1, \frac{2}{n}\right) \\ &= \frac{abc}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + 1\right)} \\ &= \frac{abc}{n + 2m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)}. \end{aligned}$$

§4. 曲面面积计算法

1° 曲面由显函数给出的情形 平滑曲面 $z = z(x, y)$ 的面积由积分

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

(其中 Ω 为已知曲面在 Oxy 平面上的射影)所表出.

2° 曲面由参数方程给出的情形 若曲面的方程是用参数给出

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

其中 $(u, v) \in \Omega$, Ω 为封闭可求积的有界区域, 假定函数 x, y 和 z 为在域 Ω 内连续可微分的函数, 则对于曲面的面积有公式

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

其中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. 求曲面 $az = xy$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 内那部分的面积.

解 所求的面积为

$$S = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} dx dy$$

$$= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{\frac{a^2 + (x^2 + y^2)}{a^2}} dx dy$$

$$= \frac{1}{a} \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)} dx dy$$

$$= \frac{4}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 + r^2} dr$$

$$= \frac{2\pi a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

4037. 求由曲面 $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ 所界物体的面积.

解 如图8.48所示. 两曲面的交线在 Oyz 平面上的射影为圆

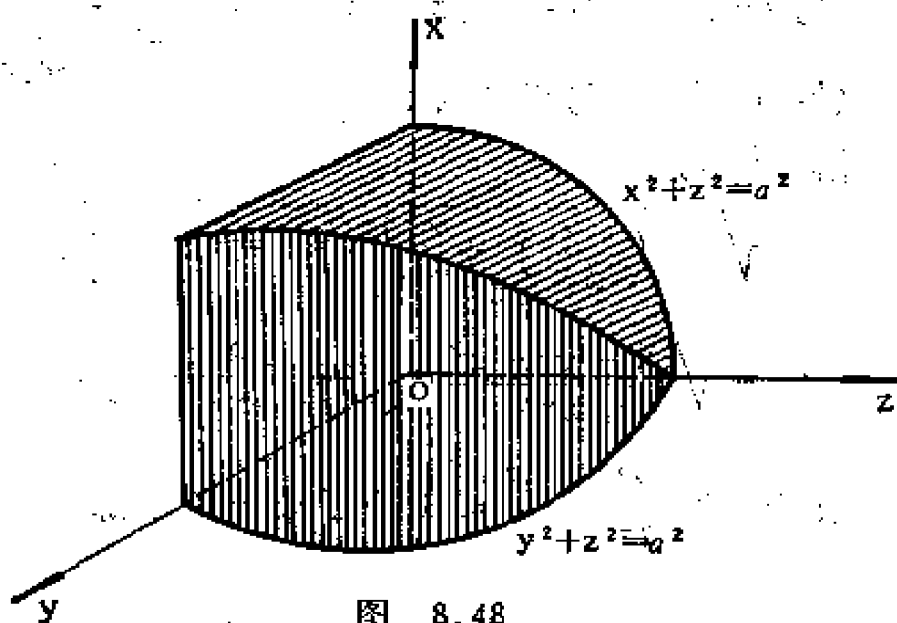


图 8.48

$$y^2 + z^2 = a^2, \quad x = 0.$$

于是, 利用对称性知, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 4 \iint_{y^2 + z^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz \\ &= 4 \cdot 4 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqrt{1 + 0^2 + \left(-\frac{z}{x}\right)^2} dy \\ &= 16 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{x^2}} dy \end{aligned}$$

$$= 16a \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

$$= 16a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} \cdot \sqrt{a^2 - z^2} dz = 16a^2.$$

4038. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($b \leq a$) 内那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \end{aligned}$$

又积分域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 位于第一象限部分为

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是, 利用对称性知, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy \\ &= 8a \int_0^a \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

4039. 求曲面 $z^2 = 2xy$ 被平面 $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 所截下那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2}} \\
&= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x+y}{\sqrt{xy}},
\end{aligned}$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{x+y}{\sqrt{xy}} dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left[2\sqrt{x(1-x)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3\sqrt{x}}(1+x)\sqrt{1-x} \right] dx \\
&= \sqrt{2} \int_0^1 \frac{2\sqrt{1-x}(1+2x)}{3\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{1-x}(1+2x) d(\sqrt{x}) \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{1-t^2}(1+2t^2) dt \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

4040. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在圆柱 $x^2 + y^2 = \pm ax$ 外那部分的面积 (维维安尼问题)。

解 只须求出球面被圆柱面割出部分的面积。因为

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\end{aligned}$$

于是, 利用对称性知, 割出部分的面积为

$$\begin{aligned}S &= 8 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}} dr = 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).\end{aligned}$$

因而, 所求的面积为

$$A = 4\pi a^2 - S = 4\pi a^2 - 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 8a^2.$$

4041. 求曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = 2x$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{2},\end{aligned}$$

又积分域为: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 2\cos\varphi$, 于是,

所求的面积为

$$\begin{aligned}S &= \iint_D \sqrt{2} dx dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{2} r dr\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \sqrt{2}\pi.$$

4042. 求曲面 $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \end{aligned}$$

又积分域由双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ 所围成, 于是, 利用对称性知, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{2}r \cdot \frac{r \cos \varphi}{r\sqrt{\cos 2\varphi}} dr \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - 2\sin^2 \varphi} d(\sqrt{2} \sin \varphi) \\ &= 2a^2 \left[\frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{2} \sqrt{1 - 2\sin^2 \varphi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{2} \sin \varphi) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

4043. 求曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ 被平面 $x - y = \pm 1, x + y = \pm 1$ 所截那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2},$$

故所求的面积为

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy,$$

其中 Ω 为由直线 $x - y = \pm 1, x + y = \pm 1$ 围成的正方形域. 为便于计算, 作变换

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

从面积分域变为由方程 $u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, v = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 围成的正方形, 且 $J = 1$. 于是, 注意利用对称性, 即得所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du \int_{-u}^u \sqrt{1 + u^2 + v^2} dv \\ &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left\{ u \sqrt{1 + 2u^2} + \frac{1 + u^2}{2} [\ln(\sqrt{1 + 2u^2} + u) \right. \\ &\quad \left. - \ln(\sqrt{1 + 2u^2} - u)] \right\} du \\ &= \frac{2}{3} (1 + 2u^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [\ln(\sqrt{1 + 2u^2} + u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\ln(\sqrt{1+2u^2}-u)] d\left(u+\frac{u^3}{3}\right) \\
& = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 4\left(u+\frac{u^3}{3}\right) \\
& \quad \cdot \frac{du}{\sqrt{1+2u^2}(1+u^2)} \\
& = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1+\frac{u^2}{3}}{1+u^2} \\
& \quad \cdot \frac{d(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}} \\
& = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \frac{2}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2+5}{t^2+1} dt^{*}) \\
& = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \frac{2}{3} (\sqrt{2}-1) \\
& \quad - \frac{8}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+1} \\
& = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4} \ln 3\right) + \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2} \\
& = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7 \ln 3}{4}\right) + \frac{8}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

*) 作代换 $1+2u^2=t^2$.

4044. 求曲面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)},$$

又积分域由双纽线 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ 围成, 于是, 利用对称性, 即得所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)} \, dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + r^2} r dr \\ &= \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^3 (1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} - a^3] d\varphi \\ &= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi - \frac{\pi a^2}{3}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 + \cos 2(\frac{\pi}{4} - \varphi)]^{\frac{3}{2}} d\varphi \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(\frac{\pi}{4} - \varphi) d\varphi \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t dt = 2\sqrt{2} \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

故最后得

$$S = \frac{4a^2}{3} \cdot \frac{5}{3} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi).$$

4045. 求曲面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被平面 $x + z = 0$, $x - z = 0$ ($x > 0$, $y > 0$) 所截那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},\end{aligned}$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned}S &= \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx dz \\ &= \int_0^a dx \int_{-x}^x \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dz \\ &= \int_0^a \frac{2ax}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2a^2.\end{aligned}$$

4046. 求由曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$, $x+y+z=2a$ ($a>0$) 所界物体的表面积和体积.

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的射影为

$$3x^2+3y^2=(2a-x-y)^2,$$

即

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2.$$

令

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},$$

则方程变为

$$\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{\frac{3}{2}}a)^2}+\frac{y'^2}{(2a)^2}=1.$$

由此可见, 曲面所界的物体在 Oxy 平面上的射影

域为以 $2a$ 为短半轴、 $2\sqrt{3}a$ 为长半轴的椭圆。

物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成。

对于 $z=2a-x-y$, $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ 分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=2.$$

于是, 物体的表面积

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{3} dx dy + \iint_D 2 dx dy \\ &= (\sqrt{3} + 2) \cdot \pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}a \\ &= 4\pi(3 + 2\sqrt{3})a^2. \end{aligned}$$

又所截圆锥之高为

$$H = \left| \frac{-2a}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \right| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

(即坐标原点到平面 $x+y+z=2a$ 的距离)。于是, 物体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中 A 为截圆锥的底面积,

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \cdot \pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}a \\ &= 12\pi a^2. \end{aligned}$$

因此, 所求物体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12\pi a^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3.$$

4047. 求球壳被包含在两条纬线和两条经线间那部分的面积.

解 球壳的参数方程为

$$x = R \cos \varphi \cos \psi, \quad y = R \sin \varphi \cos \psi, \quad z = R \sin \psi,$$

其中 R 为球的半径. 因为

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 \\ &= R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi = R^2 \cos^2 \psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2 \\ &= R^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + R^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + R^2 \cos^2 \psi \\ &= R^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi} \\ &= R^2 \sin \varphi \cos \psi \cos \varphi \sin \psi - R^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \cos \psi \\ &\quad + 0 = 0, \end{aligned}$$

故

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos \psi.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} R^2 \cos \psi d\psi \\ &= (\varphi_2 - \varphi_1) (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) R^2, \end{aligned}$$

其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度, ψ_1 及 ψ_2 为纬线的纬度.

4048. 求螺旋面

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h\varphi,$$

其中 $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$ 那部分的面积.

解 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 + h^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

故

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2 + h^2} dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r}{2} \sqrt{r^2 + h^2} + \frac{h^2}{2} \ln(r + \sqrt{r^2 + h^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi a \sqrt{a^2 + h^2} + \pi h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}. \end{aligned}$$

4049. 求环面

$$x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi,$$

$$z = a \sin \psi \quad (a < a \leq b)$$

被两条经线 $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ 和两条纬线 $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$ 所界那部分的面积. 整个环的表面积等于什么?

解 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = (b + a \cos \psi)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = a^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0,$$

故

$$\sqrt{EG - F^2} = a(b + a \cos \psi).$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} a(b + a \cos \psi) d\psi \\ &= a(\varphi_2 - \varphi_1) [b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)]. \end{aligned}$$

整个环的表面积

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} a(b + a \cos \psi) d\psi = 4\pi^2 ab.$$

4050. 求立体角 ω , 在这个角里从坐标原点看得见矩形

$$x = a > 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c.$$

若 a 很大, 对于 ω 推出近似公式.

解 以原点为球心作单位球, 则 ω 即为该球面含于四面体 $O-ABCD$ 内的面积, 其中 $ABCD$ 是以 b 、 c 为边长的矩形 (图8.49).

取球坐标系, 由4047题知:

$$\sqrt{EG - F^2} = \cos \psi$$

又 φ 和 ψ 的变化域为

$$0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

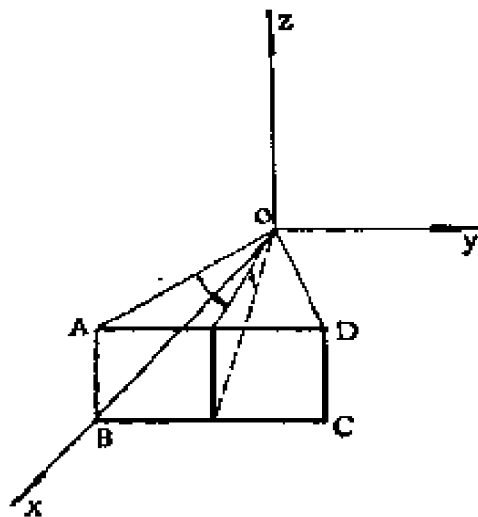


图 8.49

$$0 \leq \psi \leq \arcsin \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}}.$$

于是, 立体角

$$\begin{aligned} \omega &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} d\varphi \int_0^{\arcsin \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}}} \cos \psi d\psi \\ &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \frac{d\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin \varphi\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin \varphi\right)^2}} \\ &= \arcsin \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \sin \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ &= \arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)}}. \end{aligned}$$

当 a 很大时, 有

$$\frac{bc}{\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)}} = \frac{bc}{a^2 \sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}} = \frac{bc}{a^2},$$

于是, 得 ω 的近似公式

$$\omega \approx \frac{bc}{a^2}.$$

§5. 二重积分在力学上的应用

1°重心 若 x_0 和 y_0 为平面 Oxy 内薄板 Ω 的重心坐标,

$\rho = \rho(x, y)$ 为薄板的密度, 则

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho x dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho y dx dy, \quad (1)$$

其中 $M = \iint_{\Omega} \rho dx dy$ 为薄板的质量.

若薄板是均匀的, 则于公式 (1) 中应令 $\rho = 1$.

2° 转动惯量 I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对于坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量——用公式来表示

$$I_x = \iint_{\Omega} \rho y^2 dx dy, \quad I_y = \iint_{\Omega} \rho x^2 dx dy, \quad (2)$$

其中 $\rho = \rho(x, y)$ 为薄板的密度.

于公式 (2) 中假定 $\rho = 1$, 我们得到平面图形的几何转动惯量.

4051. 求边长为 a 的正方形薄板的质量, 设薄板上每一点的密度与该点距正方形顶点之一的距离成比例且在正方形的中点等于 ρ_0 .

解 取坐标系如图 3.50 所示, 则密度

$$\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{由于 } \rho_0 = k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

$$\text{故 } k = \frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}, \text{ 从而}$$

$$\rho = \frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

若引用极坐标, 即得质量

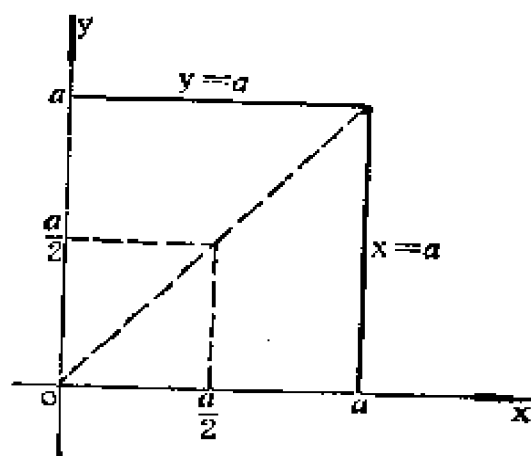


图 8.50

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D \frac{\rho_0 \sqrt{2}}{a} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
&= \frac{\rho_0}{a} \sqrt{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos \varphi}} r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi}} r^2 dr \right] \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} \sqrt{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} \right] \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2 \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2 \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} d(\operatorname{tg} \varphi) \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2 \sqrt{2} \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} [2 + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})].
\end{aligned}$$

求由下列曲线所界均匀薄板的重心坐标:

4052. $ay = x^2$, $x + y = 2a$
($a > 0$).

解 密度 ρ 为常数.
积分域如图 8.51 所示. 质量

$$M = \rho \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy$$

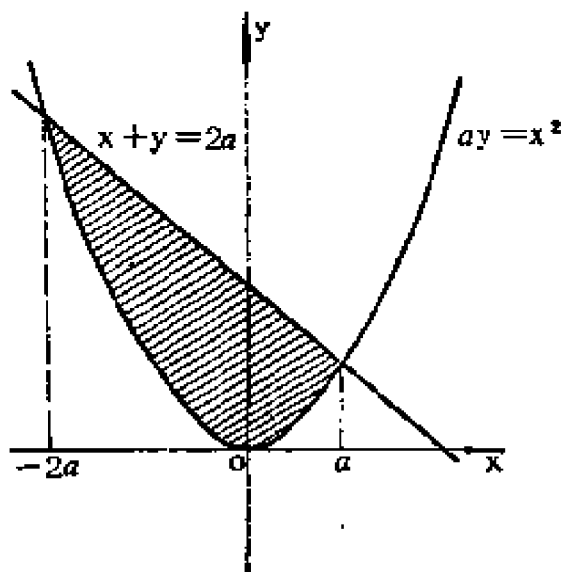


图 8.51

$$= \frac{9}{2} \rho a^2.$$

对于坐标轴的一次矩为

$$M_y = \rho \int_{-2a}^a x dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{a-x} dy = -\frac{9}{4} \rho a^3,$$

$$M_x = \rho \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y dy = \frac{36}{5} \rho a^3.$$

于是, 重心 (x_0, y_0) 为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = -\frac{a}{2}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{8}{5}a.$$

4053. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$.

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^a dx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{1}{6} \rho a^2,$$

$$M_y = \rho \int_0^a x dx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{1}{30} \rho a^3.$$

于是, 重心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{a}{5}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知

$$x_0 = y_0 = \frac{a}{5}.$$

4054. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($x>0$, $y>0$).

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^a dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy = \rho \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= 3a^2 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt (*)$$

$$= 3a^2 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt$$

$$= 3a^2 \rho \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2 \rho}{32},$$

$$M_x = \rho \int_0^a x dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy = \rho \int_0^a x (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= 3a^3 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^5 t dt = \frac{8a^3 \rho}{105}.$$

于是, 重心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知

$$x_0 = y_0 = \frac{256a}{315\pi}.$$

*) 作代换 $x = a \cos^3 t$.

4055. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (线圈).

解 此曲线在第一象限部分是一封闭曲线, 围成一图形 Ω . 作变量代换

$$\begin{aligned}x &= \frac{a^2b}{c^2} r \cos^4\theta \sin^2\theta, \\y &= \frac{ab^2}{c^2} r \cos^2\theta \sin^4\theta, \end{aligned} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

则原曲线方程变为 $r=1$. 又容易算得

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{2a^3b^3}{c^4} r (\sin^5\theta \cos^7\theta + \sin^7\theta \cos^5\theta),$$

故 (利用 3856 题的结果)

$$\begin{aligned}M &= \iint_D \rho dx dy \\&= \frac{2a^3b^3}{c^4} \rho \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5\theta \cos^7\theta \\&\quad + \sin^7\theta \cos^5\theta) d\theta \\&= \frac{a^3b^3}{c^4} \rho \left[\frac{1}{2} B(3, 4) + \frac{1}{2} B(4, 3) \right] \\&= \frac{a^3b^3}{c^4} \rho B(3, 4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_x &= \iint_D \rho x dx dy \\&= \frac{2a^5b^4}{c^6} \rho \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin^2\theta (\sin^5\theta \cos^7\theta \\&\quad + \sin^7\theta \cos^5\theta) d\theta \\&= \frac{2}{3} \frac{a^5b^4}{c^6} \rho \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta \cos^{11}\theta d\theta \right. \\&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9\theta \cos^9\theta d\theta \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^5 b^4}{c^6} \rho [B(4, 6) + B(5, 5)].$$

于是,

$$x_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{a^2 b}{3c^2} \cdot \frac{B(4, 6) + B(5, 5)}{B(3, 4)}.$$

由于,

$$B(4, 6) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)} = \frac{3!5!}{9!},$$

$$B(5, 5) = \frac{[\Gamma(5)]^2}{\Gamma(10)} = \frac{(4!)^2}{9!},$$

$$B(3, 4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{2!3!}{6!},$$

代入, 化简得

$$x_0 = \frac{a^2 b}{3c^2} \cdot \frac{6! [3!5! + (4!)^2]}{2!3!9!} = \frac{a^2 b}{14c^2}.$$

同理, 可求得重心的纵坐标为

$$y_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D \rho y dx dy}{\iint_D \rho dx dy} = \frac{ab^2}{14c^2}.$$

4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ ($x > 0, y > 0$).

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2 \sin 2\varphi.$$

质量和对 Oy 轴的一次矩为

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \rho dx dy \\ &= \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\rho a^2}{2},$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D \rho x dx dy \\ &= \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r \cdot r \cos \varphi dr \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^{\frac{3}{2}} 2\varphi d\varphi \\ &= \frac{2\sqrt{2}\rho a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{5}{2}} \varphi \sin^{\frac{3}{2}} \varphi d\varphi \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)^{*)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma(3)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \cdot \frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \rho a^3 \cdot \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} \pi \rho a^3. \end{aligned}$$

于是，重心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\pi a}{8}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知

$$x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8}.$$

* 利用3856题的结果.

4057. $r=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi=0$.

解 质量和一次矩分别为

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r dr \\ &= \frac{1}{2} \rho a^2 \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{4} \pi \rho a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z &= \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r \cdot r \cos\varphi dr \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 \cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \left[\int_0^\pi (1+\cos\varphi)^4 d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 d\varphi \right] \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \left[32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt - 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \right] \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \left[32 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right. \\ &\quad \left. - 16 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{5\pi\rho a^3}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r \cdot r \sin\varphi dr \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$= -\frac{\rho a^3}{3} \cdot \frac{(1 + \cos \varphi)^4}{4} \Big|_0^\pi = \frac{4\rho a^3}{3}.$$

于是, 重心的坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{5}{6}a, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{16}{9\pi}a.$$

4058. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$.

解 质量和对 Ox 轴的一次矩为

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y dy = \rho \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt \\ &= 3\pi \rho a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y y dy = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} y^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5}{2} \pi \rho a^3. \end{aligned}$$

于是,

$$y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{5}{6}a.$$

由对称性知: $x_0 = \pi a$.

4059. 求圆形薄板 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 的重心坐标, 设它在点 $M(x, y)$ 的密度与 M 点到 $A(a, 0)$ 点的距离成比例.

解 按题设, 密度

$$\rho = k\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad (k \text{ 为常数}).$$

于是, 质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} k\sqrt{(x-a)^2 + y^2} dy \\ &= k \int_{-a}^a [y\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x-a)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \ln(y + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}) \Big|_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\
&= k \int_{-a}^a \sqrt{2a}(a-x)\sqrt{a+x} dx \\
&\quad - k \int_{-a}^a \left[\frac{1}{2} \ln(a-x) \right] (a-x)^2 dx \\
&\quad + k \int_{-a}^a (a-x)^2 \ln(\sqrt{a+x} + \sqrt{2a}) dx \\
&= I_1 - I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
I_1 &= k \int_{-a}^a \sqrt{2a} \left[-(a+x)^{\frac{3}{2}} + 2a(x+a)^{\frac{1}{2}} \right] dx \\
&= \sqrt{2a}k \cdot \left[-\frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}} + \frac{4a}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_{-a}^a \\
&= \frac{32}{15}ka^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{k}{2} \int_0^{2a} t^2 \ln t dt = \frac{k}{6} t^3 \ln t \Big|_0^{2a} - \frac{k}{6} \int_0^{2a} t^3 \cdot \frac{1}{t} dt \\
&= \frac{4}{3}ka^3 \cdot \ln 2a - \frac{4}{9}ka^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= k \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2a}} t(2a-t^2)^2 \ln(t + \sqrt{2a}) dt \\
&= 8a^2k \int_0^{\sqrt{2a}} t \ln(t + \sqrt{2a}) dt \\
&\quad - 8ka \int_0^{\sqrt{2a}} t^3 \ln(t + \sqrt{2a}) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2k \int_0^{\sqrt{2a}} t^5 \ln(t + \sqrt{2a}) dt \\
& = 8ka^2 \left(\frac{a}{2} + a \ln \sqrt{2a} \right) - 8ka \left(\frac{7}{12} a^2 + a^2 \ln \sqrt{2a} \right) \\
& \quad + 2k \left(\frac{37}{45} a^3 + \frac{4}{3} a^3 \ln \sqrt{2a} \right) \\
& = \frac{44}{45} ka^3 + \frac{8}{3} ka^3 \ln \sqrt{2a} = \frac{44}{45} ka^3 + \frac{4}{3} ka^3 \ln 2a.
\end{aligned}$$

因而最后得

$$\begin{aligned}
M &= \frac{32}{15} ka^3 - \left(\frac{4}{3} ka^3 \ln 2a - \frac{4}{9} ka^3 \right) \\
& \quad + \left(\frac{44}{45} ka^3 + \frac{4}{3} ka^3 \ln 2a \right) \\
&= \frac{32}{9} ka^3.
\end{aligned}$$

仿照上述方法可求得一次矩

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} kx \sqrt{(x-a)^2 + y^2} dy \\
&= -\frac{32}{45} ka^4.
\end{aligned}$$

而由对称性知: $M_x = 0$.

于是, 重心的坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = -\frac{a}{5}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = 0.$$

4060. 求由变动的面积的重心所描写出来的曲线, 所指的变动面积是被曲线

$$y = \sqrt{2px}, \quad y = 0, \quad x = X$$

所界的。

解 变动面积的质量

$$M = \rho \int_0^X dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \rho \frac{2\sqrt{2p}}{3} X^{\frac{3}{2}},$$

而一次矩

$$M_y = \rho \int_0^X x dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \rho \frac{2\sqrt{2p}}{5} X^{\frac{5}{2}},$$

$$M_x = \rho \int_0^X dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \rho \frac{1}{2} p X^2.$$

于是, 变动面积的重心为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{5} X, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}}.$$

因此, 重心的轨迹方程为

$$y_0 = \frac{3}{4\sqrt{2}} \sqrt{p \cdot \frac{5}{3} x_0} = \frac{1}{8} \sqrt{30px_0},$$

此即所求的曲线方程, 其图形是抛物线的一半。

求由下列曲线所界的面积 ($\rho=1$) 对于坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y :

$$4061: \frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \quad \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, \quad y = 0 \quad (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0).$$

解 若设 $b_2 > b_1$, 则

$$I_x = \int_0^h y^2 dy \int_{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_1}^{\left(1-\frac{y}{h}\right)b_2} dx = (b_2 - b_1)$$

$$\int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{(b_2 - b_1)h^3}{12},$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^h dy \int_{\left(1 - \frac{y}{h}\right)b_1}^{\left(1 - \frac{y}{h}\right)b_2} x^2 dx = \frac{b_2^3 - b_1^3}{3} \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^3 dy \\ &= \frac{h(b_2^3 - b_1^3)}{12}, \end{aligned}$$

若设 $b_1 \geq b_2$, 则

$$I_x = \frac{(b_1 - b_2)h^3}{12}, \quad I_y = \frac{h(b_1^3 - b_2^3)}{12}.$$

4062. $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x=0$, $y=0$ ($0 \leq x \leq a$).

$$\begin{aligned} \text{解 } I_x &= \int_0^a dx \int_0^{a - \sqrt{2ax - x^2}} y^2 dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^a [a^3 - 3a^2 \sqrt{2ax - x^2} + 3a(2ax - x^2) \\ &\quad - (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}] dx \\ &= \frac{1}{3} \left[a^3 x - 3a^2 \left(\frac{x-a}{2} \sqrt{2ax - x^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{2} \right) + 3a^2 x^2 - ax^3 \right] \Big|_0^a \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_0^a (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= a^4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^4 \cos^4 t dt * \\ &= a^4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^4 t dt \end{aligned}$$

$$= a^4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{a^4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi).$$

利用图形的对称性, 即得 $I_y = I_x = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi)$.

*) 作代换 $x - a = a \sin t$.

4063. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

解 曲线所界的平面域可表示为

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi).$$

于是,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} a^4 (1 + \cos \varphi)^4 \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} a^4 \int_0^{\pi} (1 + 4\cos \varphi + 6\cos^2 \varphi + 4\cos^3 \varphi \\ &\quad + \cos^4 \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \pi a^4 \cdot \frac{21}{16} = \frac{21}{32} \pi a^4, *) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \cos^2 \varphi \cdot r dr d\varphi \\ &= \frac{1}{2} a^4 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^4 \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{2} a^4 \int_0^{\pi} (\cos^2 \varphi + 4\cos^3 \varphi + 6\cos^4 \varphi \\ &\quad + 4\cos^5 \varphi + \cos^6 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{49}{32} \pi a^4. \end{aligned}$$

*) 对于任意自然数 n , 有

$$\int_0^\pi \cos^n \varphi d\varphi = \begin{cases} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi, & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

为算出 I_x, I_y 的值, 也可变换被积函数的形式, 直接用换元法计算, 这样较简单.

事实上, 我们有

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^4 \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= 2^6 a^4 \int_0^\pi \cos^{10} \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2^6 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x (1 - \cos^2 x) dx \\ &= 2^6 a^4 \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \left(1 - \frac{11}{12}\right) \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{21}{32} \pi a^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^4 \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^4 d\varphi - \frac{21}{32} \pi a^4 \\ &= 2^4 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx - \frac{21}{32} \pi a^4 \\ &= \frac{70}{32} \pi a^4 - \frac{21}{32} \pi a^4 \end{aligned}$$

$$= \frac{49}{32} \pi a^4.$$

4064. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2).$

解 曲线的图形关于两坐标轴和直线 $y=x$ 是对称的, 参看1542题的图形. 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

根据对称性, 只要算出从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 部分面积的转动惯量再八倍起来即得结果, 并且显然有 $I_x = I_y$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= 4 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}}} r^3 dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)^2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(1 - 2\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)^2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\varphi\right)^2} \\ &= 16a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{(3 + \cos 4\varphi)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4a^4}{9} \int_0^x \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{3} \cos x\right)^2} \quad *) \\
&= \frac{4a^4}{9} \left[-\frac{\frac{1}{3} \sin x}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{3} \cos x\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right] \Big|_0^{\pi} \quad **) \\
&= \frac{4a^4}{9} \cdot 2 \left(\frac{9}{8} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

*) 作代换 $x = 4\varphi$.

**) 利用2063题的结果.

4065. $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$ ($x > 0, y > 0$).

解 作代换 $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$, 则 $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$

且雅哥比式的绝对值 $|I| = \frac{1}{2v}$, 曲线所界的面积即积分域变为

$$a^2 \leq u \leq 2a^2, \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 2.$$

于是,

$$I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{uv}{2v} du = \frac{9a^4}{8},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{u}{2v^2} du = \frac{9a^4}{8}.$$

4066. 求面积 S 的极转动惯量

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy,$$

面积 S 是由曲线

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

所界的.

解 引用极坐标, 则面积 S 的界线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

这是双纽线. 利用对称性, 得

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^4 \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^4}{8}. \end{aligned}$$

4067. 证明公式

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2,$$

其中 I_l , I_{l_0} 是面积 S 对于二平行轴 l 和 l_0 的转动惯量, 其中 l_0 是通过面积的重心, 而 d 为两轴间的距离.

证 取 l_0 轴为 Ox 轴, 面积的重心为坐标原点, 则

$$\begin{aligned} I_l &= \iint_S (y-d)^2 dx dy = \iint_S y^2 dx dy \\ &\quad - 2d \iint_S y dx dy + d^2 \iint_S dx dy. \end{aligned}$$

因为 l_0 通过面积 S 的重心, 故

$$y_0 = \frac{1}{S} \iint_S y dx dy = 0, \text{ 即 } \iint_S y dx dy = 0.$$

又

$$\iint_S y^2 dx dy = I_{l_0}, \quad \iint_S dx dy = S,$$

于是,

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2.$$

4068. 证明面积 S 对于通过重心 $O(0,0)$ 并与 Ox 轴组成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为面积 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及 I_{xy} 为离心惯量:

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy dx dy.$$

证 今取直角坐标系 $Ox'y'$, 使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α , 则有

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

这就是旋转变换, 雅哥比式的绝对值

$$|I| = \left| \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \right| = 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S y'^2 \rho dx' dy' = \iint_S (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 \rho dx dy \\ &= \cos^2 \alpha \iint_S y^2 \rho dx dy - 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad \cdot \iint_S \rho xy dx dy + \sin^2 \alpha \iint_S \rho x^2 dx dy \\ &= I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

4069. 求以 a 为边的正三角形的面积对于通过三角形重心并与它的高成 α 角的直线的转动惯量。

解 利用上题的结果。取重心为坐标原点。不妨取 Ox 轴平行于三角形的一条边，则过重心与高成 α 角的直线，即为过坐标原点与 Ox 轴成 α 角的直线。于是，要求的转动惯量为

$$I_{\alpha} = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha.$$

由于三角形三边所在的直线方程为

$$y = -\frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad y = -\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$y = \sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}},$$

所以，根据对称性知：

$$\begin{aligned} I_x &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}}} y^2 dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{3} \left[\left(-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^3 - \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^3 \right] dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3}ax^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}a^2x + \frac{\sqrt{3}}{24}a^3 \right) dx \\ &= 2\sqrt{3}a^4 \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{64} \right) = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

$$I_{xy} = \iint_S xy dx dy = 0;$$

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}}} x^2 dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 \left[\left(-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}} \right) + \frac{a}{2\sqrt{3}} \right] dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\sqrt{3}x^3 + \frac{\sqrt{3}a}{2}x^2 \right) dx \\ &= \sqrt{3}a^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32} \right) = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

于是,

$$I_x = \frac{a^4}{32\sqrt{3}} \cos^2 \alpha + \frac{a^4}{32\sqrt{3}} \sin^2 \alpha = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

4070. 设有水平面为 $z=h$ 的圆柱形容器 $x^2 + y^2 = a^2$, $z=0$, 求它侧壁上 ($x \geq 0$) 水的压力.

解 用 X 与 Y 分别表示压力在 Ox 轴与 Oy 轴上的投影. 由对称性, 显然有 $Y=0$. 下面求 X . 由于 $dS = a d\theta dz$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), 而在面元 dS 上的压力在 Ox 轴上的投影 dX 为 $(zdS) \cos \theta$. 于是,

$$\begin{aligned} X &= \iint_S z \cos \theta dS = \iint_S a z \cos \theta d\theta dz \\ &= a \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right) \cdot \left(\int_0^h z dz \right) = ah^2. \end{aligned}$$

4071. 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中的深度为 h (由球心量起), 这里 $h \geq a$. 求在球表面的上部和下部的液体压力.

解 设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 则在球面上的点 (x, y, z) 处沉入液体的深度 d 为

$$d = h - z \quad (-a \leq z \leq h).$$

于是, 上半球面 S_1 的点和下半球面 S_2 的点的深度分别为:

$$d = h - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)},$$

$$d = h + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}.$$

根据对称性知, 压力在 Ox 轴上和 Oy 轴的射影均为零, 故只要计算压力在 Oz 轴上的射影. 液体作用于球面上部和下部的压力分别记以 p_1 和 p_2 , 并设 γ 为球上各点处压力的方向 (即内法线方向) 与 Oz 轴正向的夹角, 则

$$\begin{aligned} p_1 &= \iint_{S_1} d\delta \cos \gamma ds \\ &= - \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \delta [h - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}] dx dy \\ &= -h\pi a^2 \delta + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= -h\pi a^2 \delta + \left[\frac{-2\pi\delta}{3} \sqrt{(a^2 - r^2)^3} \right] \Big|_0^a \\ &= -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{2a}{3} \right) \quad (p_1 < 0 \text{ 表示压力向下}). \end{aligned}$$

同理, 我们有

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \iint_{S_2} d\delta \cos \gamma dS = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \delta [h + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}] dx dy \\
 &= \pi a^2 \delta \left(h + \frac{2a}{3} \right) \quad (p_2 > 0 \text{ 表示压力向上}) .
 \end{aligned}$$

4072. 底半径为 a 高为 b 的直圆柱完全沉入密度为 δ 的液体中, 其中心在液面下的深度为 h , 而圆柱的轴与铅垂线成 α 角, 求在圆柱上底和下底的液体压力.

解 取圆柱的中心为坐标原点, 取 Oxy 平面是水平的, 再取圆柱的轴 (朝上的方向) 在 Oxy 平面上的投影所在的方向为 Ox 轴, 取 Oz 轴垂直朝上, 最后取 Oy 轴使 Ox 轴 Oy 轴和 Oz 轴构成右手系.

于是, 液面方程为 $z=h$. 设圆柱上底为 S_1 , 下底为 S_2 , 则 S_1 所在平面的方程为

$$x \sin \alpha + z \cos \alpha = \frac{b}{2}, \quad (1)$$

S_2 所在平面的方程为

$$x \sin \alpha + z \cos \alpha = -\frac{b}{2}. \quad (2)$$

在点 (x, y, z) 处 ($z \leq h$) 液体的深度为 $h-z$. 用 X_1 , Y_1 和 Z_1 分别表示液体在圆柱上底 S_1 上压力在 Ox 轴, Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 同样, 用 X_2 , Y_2 和 Z_2 分别表示在 S_2 上压力在 Ox 轴, Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 显然, $Y_1 = Y_2 = 0$. 我们有

$$\begin{aligned}
 X_1 &= - \iint_{S_1} \delta (h-z) \sin \alpha dS = - \delta \sin \alpha \iint_{S_1} (h-z) dS, \\
 &\hspace{25em} (3)
 \end{aligned}$$

$$Z_1 = - \iint_{S_1} \delta(h-z) \cos \alpha dS = - \delta \cos \alpha \iint_{S_1} (h-z) dS, \quad (4)$$

由(1)式知, 在 S_1 上有

$$z = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{b}{2} - x \sin \alpha \right).$$

于是, 注意到 S_1 的面积为 πa^2 , 可知

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (h-z) dS &= \iint_{S_1} \left[h - \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{b}{2} - x \sin \alpha \right) \right] dS \\ &= \left(h - \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \right) \iint_{S_1} dS + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \iint_{S_1} x dS \\ &= \left(h - \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \right) \pi a^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \iint_{S_1} x dS. \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{\pi a^2} \iint_{S_1} x dS$ 是 S_1 的重心的 x 坐标, 也即 $\frac{b}{2} \sin \alpha$,

故 $\iint_{S_1} x dS = \frac{1}{2} \pi a^2 b \sin \alpha$. 代入即得

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (h-z) dS &= \left(h - \frac{b}{2 \cos \alpha} \right) \pi a^2 + \frac{1}{2} \pi a^2 b \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \pi a^2. \end{aligned}$$

以此代入(3)式与(4)式, 得

$$X_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha,$$

$$Z_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha.$$

同理，我们有

$$X_2 = \iint_{S_2} \delta(h-z) \sin \alpha dS = \delta \sin \alpha \iint_{S_2} (h-z) dS,$$

$$Z_2 = \iint_{S_2} \delta(h-z) \cos \alpha dS = \delta \cos \alpha \iint_{S_2} (h-z) dS.$$

再注意到 (2) 式，类似地可计算得

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (h-z) dS &= \iint_{S_2} \left[h + \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{b}{2} + x \sin \alpha \right) \right] dS \\ &= \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \pi a^2. \end{aligned}$$

于是，

$$X_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha,$$

$$Z_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha.$$

4073. 求均匀的圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$ 对质点 $P(0, 0, b)$ 的引力，设圆柱的质量等于 M ，而点的质量等于 m 。

解 根据对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影等于零，故只要计算引力在 Oz 轴上的射影 F_z 。今取圆环，其体积为

$$dV = 2\pi r dr dz,$$

则相应的质量为

$$dM = \frac{2\pi r M dr dz}{\pi a^2 h} = \frac{2Mr}{a^2 h} dr dz,$$

吸引质点 P 的引力

$$dF_z = -\frac{2krmM(b-z)}{a^2h\sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}}drdz.$$

于是, 所求的引力

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{2kmM}{a^2h} \int_0^h \int_0^a \frac{r(b-z)}{\sqrt{[r^2+(b-z)^2]^3}} dr dz \\ &= -\frac{2kmM}{a^2h} \left[\int_0^h \operatorname{sgn}(b-z) dz \right. \\ &\quad \left. - \int_0^h \frac{b-z}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}} dz \right] \\ &= -\frac{2kmM}{a^2h} [|b| - |b-h| + \sqrt{a^2+(b-h)^2} \\ &\quad - \sqrt{a^2+b^2}], \end{aligned}$$

其中 h 为引力常数.

4074. 物体在椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

上压力的分布由公式

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

所给出, 求物体在此面上的平均压力.

解 物体在椭圆面上的平均压力

$$p_{\text{av}} = \frac{1}{\pi ab} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 p_0(1-r^2) ab r dr \\
&= \frac{4}{\pi ab} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p_0 ab}{4} = \frac{p_0}{2}.
\end{aligned}$$

4075. 草地的形状为以 a 和 b 为边的矩形, 均匀地盖上密度为 p 千克/平方米的砍倒的草. 假设运送 P 千克重到距离为 r 远的地方所化的功为 kPr ($0 < k < 1$). 要把所有的干草聚集在草地的中心, 最少必须化多少功?

解 不妨将坐标原点取在矩形的中心, Ox 轴平行于 a 边, Oy 轴平行于 b 边. 由于将面积 $dx dy$ 上的草移到中心要化的功为

$$dW = kp\sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

并利用对称性, 便知所要求的功为

$$\begin{aligned}
W &= 4kp \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
&= 4kp \left[\int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} \int_0^{\frac{a}{2 \cos \varphi}} r^2 dr d\varphi \right. \\
&\quad \left. + \int_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{b}{2 \sin \varphi}} r^2 dr d\varphi \right] \\
&= \frac{kp}{6} \left[a^3 \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3 \varphi} d\varphi \right. \\
&\quad \left. + b^3 \int_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 \varphi} d\varphi \right].
\end{aligned}$$

但是,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3 \varphi} d\varphi &= \left[\frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right] \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} \quad *) \\
 &= \frac{b \sqrt{a^2 + b^2}}{2a^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \\
 \int_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 \varphi} d\varphi &= \left[-\frac{\cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \right] \Big|_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \quad **) \\
 &= \frac{a \sqrt{a^2 + b^2}}{2b^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b},
 \end{aligned}$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{k\rho}{12} \left(2ab \sqrt{a^2 + b^2} + a^3 \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right. \\
 &\quad \left. + b^3 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right).
 \end{aligned}$$

*) 利用2000题的结果.

**) 利用1999题的结果.

§6. 三重积分

1° 三重积分的直接算法 设函数 $f(x, y, z)$ 是连续的,

且有界域 V 由下列不等式确定出来:

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

$$z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y),$$

其中 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ 皆为连续函数, 则函数 $f(x, y, z)$ 展布于域 V 内的三重积分可按公式

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

来计算. 有时采用下面的公式也很方便

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz, \end{aligned}$$

其中 $S(x)$ 是用平面 $X=x$ 截域 V 所得的截断面.

2° 三重积分中的变量代换 若 $Oxyz$ 空间的有界三维闭域 V 借助于下列连续可微分的函数双方单值地反应到 $Ouvw$ 空间的域 V'

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

并且当 $(u, v, w) \in V'$ 时,

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0,$$

则下面的公式成立

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |I| du dv dw. \end{aligned}$$

在特殊情况下, 有: 1) 圆柱坐标系 φ, r, h , 其中

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h,$$

及

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, h)} = r,$$

2) 球坐标系 φ, ψ, r , 其中

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi,$$

及

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi.$$

计算下列三重积分:

4076. $\iiint_V xy^2z^3 dx dy dz$, 此处 V 是由曲面 $z = xy$, $y = x$,

$x = 1$, $z = 0$ 所界的区域.

解
$$\begin{aligned} \iiint_V xy^2z^3 dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz \\ &= \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

4077. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 此处 V 是由曲面 $x+y+z=1$,

$x=0$, $y=0$, $z=0$ 所界的区域.

解
$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \right] \Big|_0^{1-x-y} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{1}{8} y - \frac{1}{2(1+x+y)} \right] \Big|_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx \\
&= \left[-\frac{3}{8} x + \frac{1}{16} x^2 + \frac{1}{2} \ln(1+x) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

4078. $\iiint_V xyz dx dy dz$, 此处 V 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所界的区域.

解
$$\begin{aligned}
&\iiint_V xyz dx dy dz \\
&= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2) dy \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

4079. $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, 此处 V 是由曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所界的区域.

解 设 P_x , Q_y , R_z 分别表示立体 V 与平面 $x = \text{常数}$, $y = \text{常数}$, $z = \text{常数}$ 所截部分在 Oyz , Ozx , Oxy 平面上的射影, 则有

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz \\ &= \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \iint_{P_x} dy dz + \int_{-b}^b \frac{y^2}{b^2} dy \iint_{Q_y} dz dx \\ &+ \int_{-c}^c \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{R_z} dx dy \\ &= \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx + \frac{\pi ac}{b^2} \int_{-b}^b y^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy \\ &+ \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^c z^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz \\ &= 3 \cdot \frac{4\pi abc}{15} = \frac{4\pi abc}{5}. \end{aligned}$$

*) P_x 在平面 $X = x$ 上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} = 1,$$

故其面积为

$$\pi b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Q_y 及 R_z 的面积类推.

4080. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 V 是由曲面

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1$$

所界的区域.

解 曲面在 Oxy 平面上的射影 Q 为圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$.
于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz \\ &= \iint_Q dx \, dy \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} [\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)] \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r - r^2) r \, dr = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

于下列三重积分内用各种方法来配置积分的限:

$$4081. \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) \, dz.$$

解 有界域 V 如图 8.52 所示.

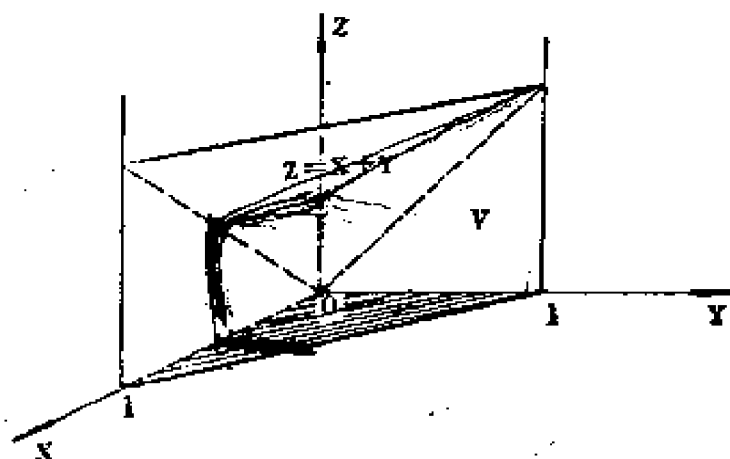


图 8.52

如果先对 x 积分, 再对 z 、 y 积分, 如图8.53所示, 则积分域在 Oyz 平面上的射影域由诸直线

$$\begin{aligned} z=0, \quad z=x+y, \\ y=0, \quad y=1-x \\ (x \text{ 固定}) \end{aligned}$$

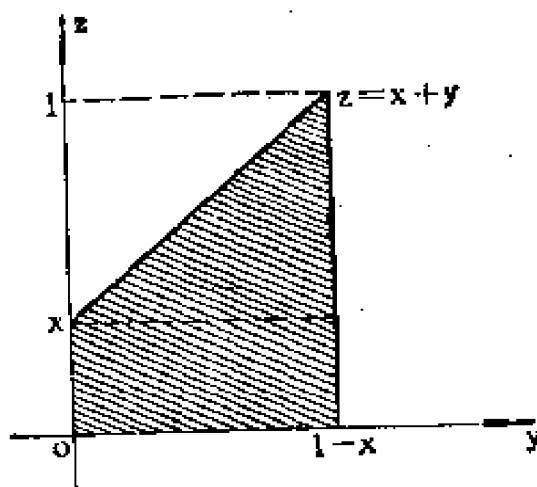


图 8.53

围成. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \left\{ \int_0^x dz \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy \right. \\ & \quad \left. + \int_x^1 dz \int_{x-z}^{1-x} f(x, y, z) dy \right\}^{*}) \end{aligned}$$

如果先对 x 积分, 再对 y 、 z 积分, 如图8.54所示, 则有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^x dy \int_{x-y}^{1-y} f(x, y, z) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_x^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right\}. \end{aligned}$$

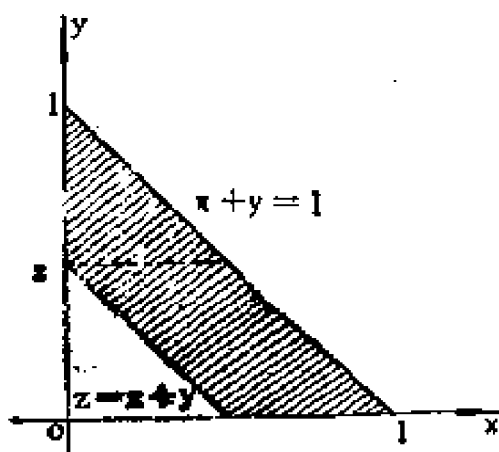


图 8.54

*) 这里用的公式为 $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$

$$= \int_a^b dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

4082. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$

解 有界域 V 如图 8.55 所示.

如果先对 y 积分, 再对 z 、 x 积分, 如图 8.56 所示, 则积分域在 Oyz 平面上的射影域由不等式

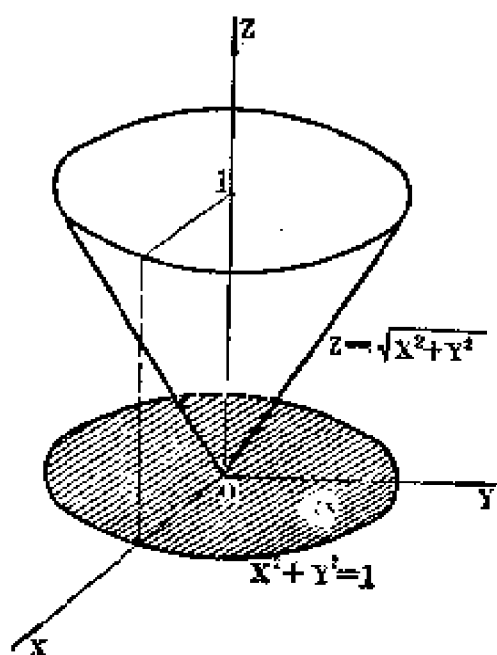


图 8.55

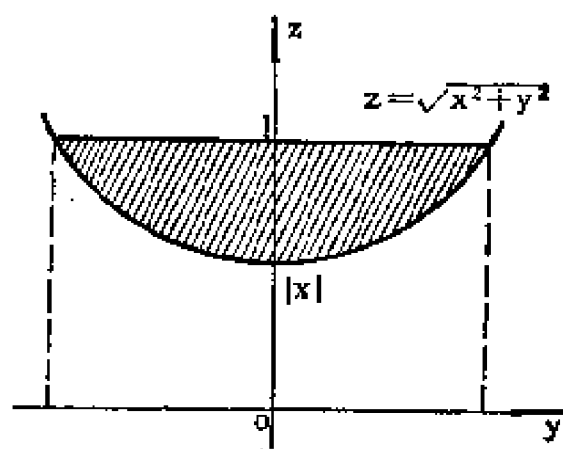


图 8.56

$|x| \leq z \leq 1, -\sqrt{z^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2}$ (x 固定) 给出. 于是, 我们有

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}$$

$$f(x, y, z) dy.$$

如果先对 x
积分, 再对 y 、
 z 积分, 如图 8.57
所示, 则有

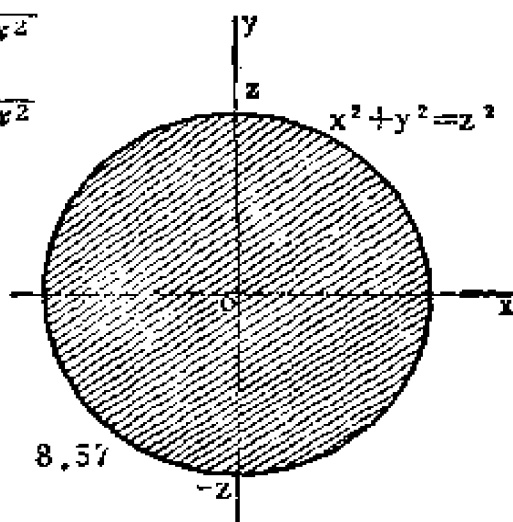


图 8.57

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

$$4083. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$$

解 如果先对 y 积分, 再对 z 、 x 积分, 则积分域在 Oxy 平面上的射影域*¹ 由方程

$$x=1, z=0, z=x^2$$

及

$$x=0, x=1, z=x^2, z=x^2+1$$

所表示的线围成. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \left[\int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy \right. \end{aligned}$$

$$+\int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \Big].$$

如果先对 x 积分, 再对 z 、 y 积分, 不难由轮换对称关系得出结果.

如果先对 x 积分, 再对 y 、 z 积分, 则积分域在 Oyz 平面上的射影域由方程

$$y=1, z=0, y=\sqrt{z}$$

及

$$y=0, y=1, y=\sqrt{z}, y=\sqrt{z-1}$$

所表示的线围成. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dz \left[\int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right] \\ & \quad + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

*) 这里采用的投影方式与前两题不同, 系用结果

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_S dx dz \int_{y_1}^{y_2} f(x, y, z) dy.$$

用一重积分以代替三重积分:

$$4034. \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta = \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\zeta \int_\zeta^\xi f(\zeta) d\eta \\
 &= \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\zeta) (\xi - \zeta) d\zeta \\
 &= \int_0^x d\zeta \int_\zeta^x f(\zeta) (\xi - \zeta) d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^x f(\zeta) (x - \zeta)^2 d\zeta.
 \end{aligned}$$

4085. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz.$

解 化为先对 y 积分, 再对 x, z 积分, 可将原积分表示成如下两部分:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dz \left[\int_z^1 dx \int_0^1 f(z) dy + \int_0^z dx \int_{x-z}^1 f(z) dy \right] \\
 &= \int_0^1 dz \int_z^1 f(z) dx + \int_0^1 dz \int_0^z f(z) (1 - z + x) dx \\
 &= \int_0^1 f(z) (1 - z) dz + \int_0^1 f(z) (1 - z) z dz \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 f(z) z^2 dz \\
 &= \int_0^1 f(z) \left(1 - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 f(z) (2 - z^2) dz, \\
 & \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 dx \int_{x-z}^1 f(z) dy \\
 &= \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 f(z) (1 - z + x) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 \left[f(z)(1-z)x + \frac{1}{2}f(z)x^2 \right] \Big|_{x=1}^1 dz \\
&= \int_1^2 f(z) \left[1-z + (z-1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-1)^2 \right] dz \\
&= \frac{1}{2} \int_1^2 f(z)(z-2)^2 dz,
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(z)(2-z^2) dz \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_1^2 f(z)(2-z)^2 dz.
\end{aligned}$$

4086. 设 $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$ 及 a, b, c, A, B, C 为常数, 求:

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^G f(x, y, z) dz.$$

解
$$\begin{aligned}
&\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^G f(x, y, z) dz \\
&= \int_a^A dx \int_b^B [F'''_{xz}(x, y, C) - F'''_{xz}(x, y, c)] dy \\
&= \int_a^A [F'_x(x, B, C) - F'_x(x, b, C) - F'_x(x, B, c) \\
&\quad + F'_x(x, b, c)] dx \\
&= F(A, B, C) - F(a, B, C) - F(A, b, C) \\
&\quad + F(a, b, C) - F(A, B, c) + F(a, B, c) \\
&\quad + F(A, b, c) - F(a, b, c).
\end{aligned}$$

变换为球坐标以计算积分:

4087. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 此处 V 是由曲面

$$x^2 + y^2 + z^2 = z$$

所界的区域.

解 令 $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$, 则曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 化为 $r = \sin \psi$. 从而

$$V: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \sin \psi.$$

$$|I| = r^2 \cos \psi.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sin \psi} r \cdot r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi \cos \psi d\psi = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

$$4088. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

解 变换为球坐标, 积分域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}.$$

于是,

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cos\psi \cdot r^2 \sin^2\psi dr \\
&= \frac{1}{5} 4\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin^2\psi d\psi \\
&= \frac{\pi}{5} 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \sin^3\psi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

4089. 于积分中变换为球坐标

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz,$$

此处 V 是由曲面 $z=x^2+y^2$, $x=y$, $x=1$, $y=0$, $z=0$ 所界的区域.

解 引用球坐标, 由
 $x=y$, $x=1$, $y=0$

知: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

(图3.58).

又从原点引半射线, 由曲面 $z=x^2+y^2$ 穿进, 平面 $x=1$ 穿出, 于是, 得 r 的下

限为 $r = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$, r 的

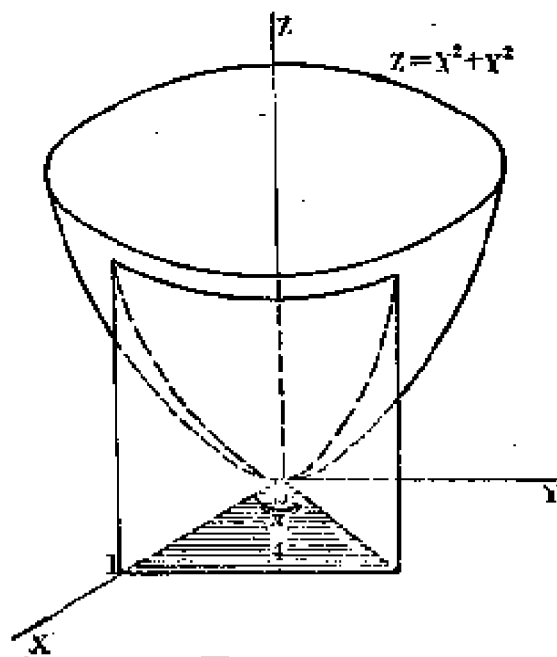


图 8.58

上限为 $r = \frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$. 而 ψ 的变化域由 $z=0$ 到 $z=x^2+y^2$, $x=1$ 所决定, 即

$$0 \leq \psi \leq \arctg \frac{1}{\cos\varphi}. \quad *)$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\arctg \frac{1}{\cos\varphi}} \cos\psi d\psi \int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 f(r) dr. \end{aligned}$$

*) 因为 $x=1$ 对应 $r = \frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$, $z=x^2+y^2$ 对应

$$r = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}, \text{ 故 } \frac{1}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}, \text{ 即 } \psi = \arctg \frac{1}{\cos\varphi}.$$

4090. 进行适当的变量代换, 以计算三重积分

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz,$$

此处 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的内部.

解 作变量代换

$$x = a r \cos\varphi \cos\psi, \quad y = b r \sin\varphi \cos\psi, \quad z = c r \sin\psi, \text{ 则}$$

有 $|I| = abc r^2 \cos\psi$, 且对于 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分有

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 & \iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz \\
 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi \sqrt{1 - r^2} dr \\
 &= 4\pi \int_0^1 abc r^2 \sqrt{1 - r^2} dr = 4\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \\
 &= \frac{\pi abc}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi^2 abc}{4}.
 \end{aligned}$$

4091. 变换为圆柱坐标, 以计算积分

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

此处 V 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$ 所界的区域.

解 令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$, 则 $x^2 + y^2 = 2z$ 化为 $r^2 = 2z$, 积分域

$$V: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2.$$

$$|I| = r.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \cdot r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz \\
 &= \frac{16\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

4092. 计算积分

$$\iiint_V x^2 dx dy dz$$

此处 V 是由曲面 $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$ ($0<a<b$), $z=\alpha x$, $z=\beta x$ ($0<\alpha<\beta$), $z=h$ ($h>0$) 所界的区域.

解 作变换 $\frac{z}{y^2}=u$, $\frac{z}{x}=v$, $z=w$, 则 $x=\frac{w}{v}$,

$y=\sqrt{\frac{w}{u}}$, $z=w$. 从而积分域变为

$$V: a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta, 0 \leq w \leq h,$$

且雅哥比行列式

$$I = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{w}{v^2} & \frac{1}{v} \\ -\frac{\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{uw}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-w\sqrt{w}}{2u\sqrt{u}v^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \iiint_V x^2 dx dy dz &= \int_0^h w^{\frac{7}{2}} dw \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{v^4} dv \int_a^b \frac{1}{2u\sqrt{u}} du \\ &= \frac{2}{27} \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}. \end{aligned}$$

4093. 求积分

$$\iiint_V xyz dx dy dz,$$

其中 V 位于 $x>0$, $y>0$, $z>0$ 这一卦限内且由下列曲面所界:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad xy = a^2, \quad xy = b^2,$$

$$y = \alpha x, \quad y = \beta x \quad (0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad 0 < m < n).$$

解 作变换 $\frac{z}{x^2+y^2}=u$, $xy=v$, $\frac{y}{x}=w$, 则 $x=\sqrt{\frac{v}{w}}$,

$y=\sqrt{vw}$, $z=uv\left(w+\frac{1}{w}\right)$, 且

$$J = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2w\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ v\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & uv\left(1-\frac{1}{w^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{v}{2w}\left(w+\frac{1}{w}\right),$$

$$V: \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, \quad a^2 \leq v \leq b^2, \quad \alpha \leq w \leq \beta.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V xyz dx dy dz \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{u}{2} du \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} \left(w + \frac{1}{w^3} + \frac{2}{w}\right) dw \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) (b^8 - a^8) \left[(\beta^2 - \alpha^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right]. \end{aligned}$$

4094. 求函数

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 内的平均值.

解 域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 即

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4},$$

$$\text{其体积 } V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$$

$$\text{作变换: } x = r \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{2}, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi$$

$$+ \frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{2} + r \sin \psi, \quad \text{则有}$$

$$\begin{aligned} f_{\text{平均}} &= \frac{1}{V} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos \psi \cdot \left(\frac{3}{4} + r^2 \right. \\ &\quad \left. + r \sin \psi + r \cos \varphi \cos \psi + r \sin \varphi \cos \psi\right) dr \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos \psi \cdot \left(\frac{3}{4} + r^2\right) dr \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sqrt{3}}{20} \cos \psi d\psi \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \frac{3\sqrt{3}}{10} d\varphi \\ &= \frac{1}{V} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} \pi = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \cdot \frac{3\sqrt{3}\pi}{5} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

4095. 求函数

$$f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}$$

在域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 内的平均值.

解 由于域 $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 为 椭球, 其体积等于 $\frac{4}{3}\pi abc$, 故平均值

$$f_{\text{平均}} = \frac{3}{4\pi abc} \iiint_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} dx dy dz.$$

若作变换: $x = ar \cos \varphi \cos \psi$, $y = br \sin \varphi \cos \psi$, $z = cr \sin \psi$, 并利用对称性, 则

$$\begin{aligned} f_{\text{平均}} &= \frac{3}{4\pi abc} \cdot 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abce^r r^2 \cos \psi d\psi \\ &= 3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \right) \left(\int_0^1 r^2 e^r dr \right) \\ &= 3(e-2). \end{aligned}$$

4096. 利用中值定理, 估计积分

$$u = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

之值, 其中 $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$.

解 由积分中值定理, 有

$$u = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\xi-c)^2}} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3, \quad (1)$$

其中 $\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 \leq R^2$. 由于函数

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

代表点 (x, y, z) 与点 (a, b, c) 之间的距离, 显然在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 中此距离的最小值是 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R$, 最大值是 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R$, 并且只在一个点达到最小值, 也只有一个点达到最大值. 因此, 函数

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 中的最大值是 $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R}$, 最小值是 $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R}$, 并且只在一个点达到最

大值, 也只有一个点达到最小值. 我们证明(1)式中的中值不可能是函数的最大值, 也不可能是函数的最小值, 事实上, 例如, 若是最大值, 即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\xi-c)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R}, \end{aligned}$$

则由(1)式知

$$\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} f(x, y, z) dx dy dz = 0, \quad (2)$$

$$\text{其中 } f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\xi - c)^2}}.$$

显然, 在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 上 $f(x, y, z) \geq 0$ 且 $f(x, y, z)$ 为连续函数. 于是, 由 (2) 式知在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 上必有 $f(x, y, z) \equiv 0$, 这显然是不可能的. 因此,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R} &< \frac{1}{\sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\xi - c)^2}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R &< \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\xi - c)^2} \\ &< \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\xi - c)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \theta R, \end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$. 于是, 由 (1) 式得

$$u = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \theta R}.$$

4097. 证明: 若函数 $f(x, y, z)$ 于域 V 内是连续的且对于任何的域 $\omega \subset V$

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0,$$

则当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) \equiv 0$.

证 用反证法. 若当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) \neq 0$.

不失一般性, 设对于 V 的某内点 (x_0, y_0, z_0) , 有 $f(x_0, y_0, z_0) > 0$, 则由于 $f(x, y, z)$ 的连续性, 故存在点 (x_0, y_0, z_0) 的某个闭邻域 $\omega' \subset V$, 使当 $(x, y, z) \in \omega'$ 时,

$$f(x, y, z) > 0.$$

这样一来, 利用中值定理, 即有

$$\iiint_{\omega'} f(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot V_{\omega'} > 0,$$

其中 $(\xi, \eta, \zeta) \in \omega' \subset V$. 这与假设

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz \equiv 0$$

矛盾. 因此, 当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) \equiv 0$.

4098. 求 $F(t)$, 设,

$$(a) F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz, \text{ 其}$$

中 f 为可微分函数;

$$(b) F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1}} f(xyz) dx dy dz, \text{ 其中 } f \text{ 为可微分}$$

函数.

解 (a) 作球坐标变换得

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^1 f(r^2) r^2 dr \\
&= 4\pi \int_0^1 f(r^2) r^2 dr,
\end{aligned}$$

于是,

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

(6) 作变换 $x = t\xi$, $y = t\eta$, $z = t\zeta$ 得

$$\begin{aligned}
F(t) &= \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz \\
&= \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} f(t^3 \xi \eta \zeta) t^3 d\xi d\eta d\zeta,
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
F(t) &= 3 \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} t^2 f(t^3 \xi \eta \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\
&\quad + 3 \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} f(t^3 \xi \eta \zeta) t^6 \xi \eta \zeta d\xi d\eta d\zeta \\
&= \frac{3}{t} [F(t) + \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f'(xyz) xyz dx dy dz] \\
&\hspace{25em} (t > 0).
\end{aligned}$$

4099. 求

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz,$$

其中 m, n, p 为非负整数.

解 分两种情况:

i) 设 m, n, p 中至少有一个是奇数. 例如, 设 p 为奇数. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz \\ &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz \\ &\quad + \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \leq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

今在积分 I_2 中作变量代换 $x=u, y=v, z=-\omega$, 则

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, \omega)} = -1, \text{ 从而, 注意到 } p \text{ 为奇数, 可知}$$

$$I_2 = - \iiint_{\substack{u^2+v^2+\omega^2 \leq 1 \\ \omega \geq 0}} u^m v^n \omega^p du dv d\omega = -I_1$$

于是, $I = I_1 - I_1 = 0$.

ii) 设 m, n, p 均为偶数. 此时被积函数 $x^m y^n z^p$ 关于三个坐标平面皆对称. 于是,

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz$$

$$= 8 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz.$$

引用球坐标, $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$,
 $z = r \sin \psi$, 得

$$\begin{aligned} & \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+n+1} \psi \sin^p \psi d\psi \\ & \quad \cdot \int_0^1 r^{m+n+p+2} dr \\ &= \frac{1}{m+n+p+3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \\ & \quad \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)^{*})}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{4(m+n+p+3)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{4(m+n+p+3)} \cdot \frac{\frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{(p-1)!!}{2^{\frac{p}{2}}} \cdot \pi \sqrt{\pi}}{\frac{(m+n+p+1)!!}{2^{\frac{m+n+p+2}{2}}} \cdot \sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2(m+n+p+3)} \cdot \frac{(m-1)!! \cdot (n-1)!! \cdot (p-1)!!}{(m+n+p+1)!!},$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz \\ &= \frac{4\pi}{m+n+p+3} \cdot \frac{(m-1)!! \cdot (n-1)!! \cdot (p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}. \end{aligned}$$

*) 利用3856题的结果,

✓ 109. 计算迪里黑里积分

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz$$

$$(p > 0, q > 0, r > 0, s > 0),$$

此处 V 是由平面 $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所界的区域, 假定

$$x+y+z=\xi, \quad y+z=\xi\eta, \quad z=\xi\eta\zeta.$$

解 由假设知

$$x=\xi(1-\eta), \quad y=\xi\eta(1-\zeta), \quad z=\xi\eta\zeta.$$

在此变换下可求得 $|I|=\xi^2\eta$, 并且积分域 V 变为:

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz \\ &= \int_0^1 \xi^{p+q+r+2} (1-\xi)^s d\xi \int_0^1 \eta^{q+r+1} (1-\eta)^p d\eta \\ & \quad \cdot \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^s d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B(p+q+r+3, s+1) \cdot B(q+r+2, p+1) \\
&\quad \cdot B(r+1, q+1) \\
&= \frac{\Gamma(p+q+r+3) \cdot \Gamma(s+1) \cdot \Gamma(q+r+2) \cdot \Gamma(p+1) \cdot \Gamma(r+1) \cdot \Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4) \cdot \Gamma(p+q+r+3) \cdot \Gamma(q+r+2)} \\
&= \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(q+1) \Gamma(s+1) \Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.
\end{aligned}$$

§7. 利用三重积分计算体积法

域的体积 V 由下公式来表示

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

求由下列曲面所界的体积:

4101. $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$.

解 域 V 为

$$0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2,$$

故体积为

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6 \right) dx \\
&= \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{35}.
\end{aligned}$$

4102. $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

解 域 V 为

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x, \quad xy \leq z \leq x+y^{*}),$$

故体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y-xy) dy \\ &= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^3}{2} \right] dx = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

*) 因为 $0 \leq y \leq 1$, 故有 $xy \leq z \leq x+y$.

4103. $x^2 + z^2 = a^2, \quad x+y = \pm a, \quad x-y = \pm a.$

$$\begin{aligned} \text{解 } V &= 8 \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz \\ &= 8 \int_0^a (a-x) \sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= 8a \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right] \Big|_0^a \\ &\quad + \frac{8}{3} (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a \\ &= \frac{2a^3}{3} (3\pi-4). \end{aligned}$$

4104. $az = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0).$

解 对立体 V 在 Oxy 平面上的射影作极坐标变换

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

则域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a, \quad \frac{r^2}{a} \leq z \leq r,$$

且有 $|I|=r$. 于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{\frac{r^2}{a}}^r dz \\ &= 2\pi \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^3}{a} \right) dr = \frac{\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

4105. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$
($a>0$).

解 由 $az = a^2 - x^2 - y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所界的
体积为

$$\begin{aligned} V_1 &= \iiint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \left(\int_0^{\frac{a^2-x^2-y^2}{a}} dz \right) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{a^2-r^2}{a} r dr = \frac{\pi a^3}{8}. \end{aligned}$$

由 $z = a - x - y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所界的体积为

$$\begin{aligned} V_2 &= \iiint_{\substack{x+y+z \leq a \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz \\ &= \frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

于是, 所求的体积为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{a^3}{24} (3\pi - 4).$$

4106. $z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

解 引用圆柱坐标, 则域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad r \leq z \leq 6 - r^2.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^{6-r^2} dz \\ &= 2\pi \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

变换为球坐标或圆柱坐标, 以计算曲面所界的体积:

4107. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 \leq z^2.$

解 变换为圆柱坐标, 则有

$$r^2 + z^2 = 2az \text{ 及 } r^2 \leq z^2.$$

因而域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a, \quad r \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - r^2} \quad *).$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_r^{a + \sqrt{a^2 - r^2}} dz \\ &= 2\pi \int_0^a r(a + \sqrt{a^2 - r^2} - r) dr \\ &= 2\pi \left[\frac{ar^2}{2} - \frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_0^a = \pi a^3. \end{aligned}$$

*) 球面的方程应该是 $z = a \pm \sqrt{a^2 - r^2}$, 但因体积 V 的一部分为球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 的上半部, 故取

$$z = a + \sqrt{a^2 - r^2}.$$

4108. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$

解 变换为球坐标, 则域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq a\sqrt{\cos 2\psi}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\psi}} r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \psi \cdot (\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}} d\psi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}} d(\sin \psi) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt *) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

*) 作代换 $\sqrt{2}x = \sin t$.

4109. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

解 立体在第一, 第三, 第六及第八卦限内, 对于这些卦限分别有:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \quad x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0;$$

$$x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0; \quad x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$$

立体在这四个卦限内的各部分, 一对一对地对称于坐标轴之一。这是因为左端及右端当 x, y, z 中的任何两个同时变号时等式不变。

变换为球坐标, 计算得体积

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{3\cos^2\psi\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi}} r^2 \cos\psi dr \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi \sin\psi d\psi \\
 &= 4 \left(\frac{\sin^2\varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \cos^4\psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

4110. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$
 $(z \geq 0) (0 < a < b)$.

解 变换为球坐标, 得域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, a \leq r \leq b.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_a^b r^2 \cos\psi dr \\
 &= 2\pi \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \right) \left(\int_a^b r^2 dr \right) \\
 &= \frac{\pi(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)}{3}.
 \end{aligned}$$

在下列各例中最好利用普遍的极坐标

r, φ 及 ψ ($r \geq 0$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$),

根据下列各式来引入它们

$$x = a r \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi,$$

$$y = b r \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi,$$

$$z = c r \sin^\beta \psi$$

(a, b, c, α, β 为常数), 并且

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha \beta a b c r^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi.$$

计算下列曲面所界的体积:

$$4111. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}. \quad \text{A7}$$

解 令 $x = a r \cos \varphi \cos \psi$, $y = b r \sin \varphi \cos \psi$, $z = c r \sin \psi$,

则域的 $\frac{1}{4}$ 部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{a}{h} \cos \varphi \cos \psi}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h} \cos \varphi \cos \psi}} a b c r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{4 a^2 b c}{3 h} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi d\psi \right) \\ &= \frac{\pi a^2 b c}{3 h}. \end{aligned}$$

$$4112. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

解 令 $x = a r \cos \varphi \cos \psi$, $y = b r \sin \varphi \cos \psi$, $z = c r \sin \psi$,
并利用对称性, 即得体积

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos \psi} a b c r^2 \cos \psi dr \\ &= 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a b c}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \psi d\psi \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi abc}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} abc.$$

$$4113. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

解 令 $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, $z = z$, 则 r 满足方程

$$r^4 + r^2 - 1 = 0.$$

解得 $r = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. 于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} ab r dr \int_{cr^2}^{c\sqrt{1-r^2}} dz \\ &= 2\pi abc \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r(\sqrt{1-r^2} - r^2) dr \\ &= 2\pi abc \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right] \Big|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \\ &= \frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}. \end{aligned}$$

$$4114. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

解 令 $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, $z = z$, 则得体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab r dr \int_{-c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}^{c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}} dz \\ &= 4\pi abc \int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{1}{4}} dr \end{aligned}$$

$$= 4\pi abc \left[-\frac{2}{5} (1-r^2)^{\frac{5}{2}} \right] \Big|_0^1 = \frac{8}{5} \pi abc.$$

4115. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

解 令 $x = ar \cos \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \psi$, $y = br \sin \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \psi$, $z = cr \sin^{\frac{1}{2}} \psi$,

则有 $|I| = \frac{1}{2} abc r^2 \sin^{-\frac{1}{2}} \psi$, 且 $\frac{1}{8}$ 域 V (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

于是, 体积为

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \frac{1}{2} abc r^2 \sin^{-\frac{1}{2}} \psi dr$$

$$= \frac{2}{3} \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \psi d\psi$$

$$= \frac{2}{3} \pi abc \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^{*)}$$

$$= \frac{2}{3} \pi abc \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{3} \pi abc \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{3} \pi abc \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}}^{**})$$

$$= \frac{1}{3} abc \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

*) 利用3856题的结果.

**) 利用余元公式: $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

利用适当的变量代换, 以计算由曲面所界的体积 (假定参数是正的):

$$4116. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

解 令 $x = ar \cos^2 \varphi \cos^2 \psi$, $y = br \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$, $z = cr \sin^2 \psi$, 则有 $|I| = 4abcr^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi$, 且域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq r \leq \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi + \frac{b}{k} \sin^2 \varphi\right) \cos^2 \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi + \frac{b}{k} \sin^2 \varphi\right) \cos^2 \psi} 4abcr^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi dr \\ &= \frac{4}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{a}{h} \cos^2 \varphi + \frac{b}{k} \sin^2 \varphi\right)^3 d\varphi \\ &\quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \sin \psi d\psi \\ &= \frac{2}{15} abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{h^3} \cos^7 \varphi \sin \varphi d\varphi \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^3}{k^3} \cos \varphi \sin^7 \varphi d\varphi \\
& + 3 \cdot \frac{a^2 b}{h^2 k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \\
& + 3 \cdot \frac{ab^2}{hk^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin^5 \varphi d\varphi \Big) \\
& = \frac{2}{15} abc \left(\frac{a^3}{8h^3} + \frac{b^3}{8k^3} + 3 \cdot \frac{a^2 b}{h^2 k} \cdot \frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{ab^2}{hk^2} \cdot \frac{1}{24} \right)^{*}) \\
& = \frac{1}{60} abc \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right).
\end{aligned}$$

*) 利用3856题的结果.

$$4117. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{xyz}{abc} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

解 令 $x = ar \cos^2 \varphi \cos^2 \psi$, $y = br \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$,
 $z = cr \sin^2 \psi$, 则有 $|I| = 4abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi$,
 且域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^4 \psi \sin^2 \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned}
V &= 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^4 \psi \sin^2 \psi} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi dr \\
&= \frac{4}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \varphi \sin^7 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{15} \psi \sin^7 \psi d\psi \\
&= \frac{4}{3} abc \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(4) \Gamma(4)}{\Gamma(8)} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(8) \Gamma(4)}{\Gamma(12)}^{*})
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}abc \cdot \frac{3!3!}{7!} \cdot \frac{7! \cdot 3!}{11!} = \frac{abc}{554400}.$$

*) 利用3856题的结果.

$$4118. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

解 令 $x = a r \cos^2 \varphi \cos \psi$, $y = b r \sin^2 \varphi \cos \psi$, $z = c r \sin \psi$,
则有 $|I| = 2abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi$, 且域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi dr \\ &= \frac{2}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi = \frac{1}{3} abc. \end{aligned}$$

$$4119. \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 2(x^2 + y^2), \quad xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \\ x = 2y, \quad 2x = y \quad (x > 0, y > 0).$$

解 令 $z = u(x^2 + y^2)$, $xy = v$, $x = yw$, 则

$$x = \sqrt{vw}, \quad y = \sqrt{\frac{v}{w}}, \quad z = u\left(vw + \frac{v}{w}\right).$$

变换的雅哥比式为

$$I = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}} \\ vw + \frac{v}{w} & u\left(w + \frac{1}{w}\right) & u\left(v - \frac{v}{w^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2}\right),$$

而域 V 为

$$1 \leq u \leq 2, \quad a^2 \leq v \leq 2a^2, \quad \frac{1}{2} \leq w \leq 2.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 du \int_{a^2}^{2a^2} dv \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2} \right) dw \\ &= \frac{2a^4}{4} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{w^2} \right) dw \\ &= \frac{9a^4}{4}. \end{aligned}$$

4120. $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = b^2$, $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ($x > 0$).

解 令 $x = r \cos \varphi$, $y = y$, $z = r \sin \varphi$, 则域 V 为

$$\begin{aligned} a \leq r \leq b, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \\ -r\sqrt{\cos 2\varphi} \leq y \leq r\sqrt{\cos 2\varphi}. \end{aligned}$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{-r\sqrt{\cos 2\varphi}}^{r\sqrt{\cos 2\varphi}} dy \\ &= \frac{4}{3} (b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi \\ &= \frac{2}{3} (b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^{*})}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}. \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} (b^3 - a^3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right), \quad **)$$

*) 利用3856题的结果.

**) 利用余元公式有

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2} \pi.$$

$$4121. \quad (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^3 z^2}{x^2 + y^2}.$$

解 采用球坐标: $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$,

$z = r \sin \psi$, 则域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq a \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} \psi} r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi = \frac{4\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

$$4122. \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{z}{h} \cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

解 令 $x = a r \cos \varphi \cos \psi$, $y = b r \sin \varphi \cos \psi$, $z = c r \sin \psi$,

则域 V 的 $\frac{1}{4}$ 部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \left(\frac{c}{h} \sin \psi e^{-\sin^2 \psi} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

这是由于 $z \geq 0$, 故域 V 在 Oxy 平面的上方.

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{c}{h} \sin \psi e^{-\sin^2 \psi} \right)^{\frac{1}{3}}} abcr^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{4c^2 ab}{3h} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \cos \psi e^{-\sin^2 \psi} d\psi \\ &= -\frac{\pi abc^2}{3h} e^{-\sin^2 \psi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi abc^2}{3h} (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

$$4123. \quad \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right), \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$x=0, \quad x=c.$$

$$\text{解 令 } u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c},$$

则

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc},$$

且域 V 变为

$$0 \leq u \leq 1, \quad \frac{2}{\pi} \arcsin w \leq v \leq 1, \quad -1 \leq w \leq 1.$$

于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = abc$, 且体积为

$$\begin{aligned} V &= abc \int_0^1 du \int_{-1}^1 dw \int_{\frac{2}{\pi} w \arcsin w}^1 dv \\ &= 2abc \int_0^1 \left[1 - \frac{2}{\pi} w \arcsin w \right] dw \\ &= 2abc - \frac{2abc}{\pi} \int_0^1 \arcsin w d(w^2) \\ &= abc + \frac{2abc}{\pi} \int_0^1 w^2 (1 - w^2)^{-\frac{1}{2}} dw \\ &= abc + \frac{abc}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1 - t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= abc + \frac{abc}{\pi} L\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} abc. \end{aligned}$$

$$4124. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, \quad x=0, \quad z=0,$$

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

解 令 $u = \frac{x}{a}$, $v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, $w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$, 则

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{abc},$$

且域 V 变为

$$0 \leq u \leq w, \quad we^{-w} \leq v \leq w, \quad 0 \leq w \leq 1.$$

于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = abc$, 且体积为

$$\begin{aligned} V &= abc \int_0^1 dw \int_0^w du \int_{we^{-w}}^w dv \\ &= abc \int_0^1 (w^2 - w^2 e^{-w}) dw \\ &= abc \left(\frac{1}{3} - 2 + 5e^{-1} \right) \\ &= 5abc \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

4125. 求曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 将球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$ 分成两部分的体积的比.

~~解 曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 与球面 $x^2 + y^2 + (z - 2a)^2 = 4a^2$ 的交线为圆周~~

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2, \\ z = a, \end{cases}$$

且有公共的顶点 $(0, 0, 4a)$. 球内位于曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 下方部分的体积为

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^a dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 4az - z^2} dx dy \\ &\quad + \int_a^{4a} dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 4a^2 - az} dx dy \\ &= \int_0^a \pi(4az - z^2) dz + \int_a^{4a} \pi(4a^2 - az) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi a^3 - 12\pi a^3 - \frac{15}{2}\pi a^3 \\
&= -\frac{37}{6}\pi a^3.
\end{aligned}$$

从而, 另一部分的体积

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 - \frac{37}{6}\pi a^3 = \frac{27}{6}\pi a^3.$$

于是, 球被曲面所分的两部分体积之比为

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{37}{27}.$$

4126. 求由曲面

$$x^2 + y^2 = az, \quad z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0)$$

所界的体积和表面积.

解 两曲面的交线为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = a, \end{cases}$$

又曲面 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ 的顶点为 $(0, 0, 2a)$. 于是, 体积为

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^a dz \iint_{x^2 + y^2 \leq az} dx dy + \int_a^{2a} dz \iint_{x^2 + y^2 \leq (2a - z)^2} dx dy \\
&= \int_0^a \pi az dz + \int_a^{2a} \pi (2a - z)^2 dz \\
&= \frac{\pi a^3}{2} + \frac{\pi a^3}{3} = \frac{5\pi a^3}{6}.
\end{aligned}$$

由两曲面方程分别可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{a},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

于是, 曲面的表面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &\quad + \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} a^2 r dr + \sqrt{2} \pi a^2 \\ &= \frac{\pi a^2}{6} (6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

4127. 求由平面

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = \pm h_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = \pm h_2,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = \pm h_3.$$

所界平行六面体的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

解 令

$$a_1x + b_1y + c_1z = u,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = v,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = w,$$

则有 $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \Delta$. 于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\Delta}$, 且体积为

$$V = \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{1}{|\Delta|} dw = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

4128. 求由曲面

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$$

所界的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

解 令

$$a_1x + b_1y + c_1z = u,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = v,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = w,$$

则有 $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \Delta$. 于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\Delta}$, 且体积为

$$V = \frac{1}{|\Delta|} \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq h^2} du dv dw = \frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

4129. 求曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \quad (n > 1)$$

所界的体积.

解 令 $x = ar \cos \varphi \cos \psi$, $y = br \sin \varphi \cos \psi$, $z = cr \sin \psi$,

则有 $|I| = abcr^2 \cos \psi$, 且域 V 的 $\frac{1}{4}$ 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{c}{h} \cdot \frac{\sin \psi \cos^{2n-4} \psi}{\cos^{2n} \psi + \sin^{2n} \psi}}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{c}{h} \cdot \frac{\sin \psi \cos^{2n-4} \psi}{\cos^{2n} \psi + \sin^{2n} \psi}}} abcr^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{2}{3h} \pi abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \psi \cos^{2n-3} \psi d\psi}{\cos^{2n} \psi + \sin^{2n} \psi} \\ &= \frac{2}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{t^{2n} + (1-t^2)^n} \\ &= -\frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{t^{2n-4} d(1-t^2)}{t^{2n} + (1-t^2)^n} \\ &= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-2} dx}{(1-x)^n + x^n} \\ &= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{\frac{1}{(1-x)^2} dx}{1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{\frac{2}{n}}} \quad *) = \frac{1}{3h} \pi abc^2 \cdot \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} \quad **) \\
 &= \frac{\pi^2}{3n \sin \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{abc^2}{h}.
 \end{aligned}$$

*) 作代换 $t = \frac{x}{1-x}$.

**) 利用3851题的结果.

4130. 求在正卦限 $Oxyz$ ($x>0, y>0, z>0$) 内由曲面

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1 \quad (m>0, n>0, p>0)$$

$$x=0, y=0, z=0$$

所界的体积.

解 令

$$x = ar^{\frac{2}{m}} \cos^{\frac{2}{m}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi,$$

$$y = br^{\frac{2}{n}} \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{p}} \psi,$$

$$z = cr^{\frac{2}{p}} \sin^{\frac{2}{p}} \psi,$$

则

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \frac{8abc}{mnp} r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} - 1} \cos^{\frac{2}{m} - 1} \varphi$$

$$\cdot \sin^{\frac{2}{n} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1} \psi \sin^{\frac{2}{p} - 1} \psi.$$

于是, 体积为

$$V = \frac{8abc}{mnp} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{n} - 1} \varphi d\varphi$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1} \psi \sin^{\frac{2}{p} - 1} \psi d\psi \int_0^1 r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} - 1} dr \\
& = \frac{8abc}{mnp} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \frac{1}{p}\right) \\
& \quad \cdot \frac{1}{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p}} \quad *) \\
& = \frac{8abc}{mnp} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{1}{2} \\
& \quad \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)} \\
& \quad \cdot \frac{mnp}{2(mn + np + mp)} \\
& = \frac{abc}{mn + np + mp} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

*) 利用3856题的结果。

§ 8. 三重积分在力学上的应用

1° 物体的质量 若一物体占有体积 V , $\rho = \rho(x, y, z)$ 为在点 (x, y, z) 的密度, 则该物体的质量等于

$$M = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz.$$

2° 物体的重心 物体的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) 按下列公式来计算

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho x \, dx \, dy \, dz, \\ y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho y \, dx \, dy \, dz, \\ z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho z \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

若物体是均匀的, 则在公式 (1) 中可令 $\rho = 1$.

3° 转动惯量 积分

$$I_{xy} = \iiint_V \rho z^2 \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_V \rho x^2 \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_{zx} = \iiint_V \rho y^2 \, dx \, dy \, dz$$

分别称为物体对于坐标平面的转动惯量.

积分

$$I_l = \iiint_V \rho r^2 dx dy dz$$

(其中 r 为物体的动点 (x, y, z) 与轴 l 的距离) 称为 物体对于某轴 l 的转动惯量。特别是, 对于坐标轴 Ox, Oy, Oz 分别有

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

积分

$$I_0 = \iiint_V \rho(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

称为物体对于坐标原点的转动惯量。

显而易见, 有

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

4° 引力场的位 积分

$$u(x, y, z) = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

(其中 V 为物体的体积, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ 为物体的密度及

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2})$$

称为物体在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿位。

质量为 m 的质点被物体吸引的力在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的射影 X, Y, Z 等于

$$X = km \frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint_V \rho \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Y = km \frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint_V \rho \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Z = km \frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint_V \rho \frac{\xi - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

其中 k 为引力定律常数.

4131. 设物体在点 $M(x, y, z)$ 的密度由公式 $\rho = x + y + z$ 所给出, 求占有单位体积 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ 之物体的质量.

解 质量以 M 表示, 则按题设有

$$M = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz = \frac{3}{2}.$$

4132. 若物体的密度按规律 $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (其中 $\rho_0 > 0$ 及 $k > 0$ 为常数) 而变更, 求占有无限域 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ 的物体的质量.

解 若令 $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$, 则质量为

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_1^{+\infty} r^2 \rho_0 e^{-kr} \cos \psi dr \\ &= 4\pi \rho_0 \int_1^{+\infty} r^2 e^{-kr} dr \\ &= -\frac{4\pi \rho_0}{k} \int_1^{+\infty} r^2 d e^{-kr} \\ &= -\frac{4\pi \rho_0}{k} r^2 e^{-kr} \Big|_1^{+\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4\pi\rho_0}{k} \int_1^{+\infty} 2re^{-kr} dr \\
& = \frac{4\pi\rho_0}{k} e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2} \int_1^{+\infty} rde^{-kr} \\
& = \frac{4\pi\rho_0}{k} e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2} re^{-kr} \Big|_1^{+\infty} \\
& \quad + \frac{8\pi\rho_0}{k^2} \int_1^{+\infty} e^{-kr} dr \\
& = 4\pi\rho_0 e^{-k} \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right).
\end{aligned}$$

求由下列曲面所界的均匀物体的重心坐标:

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z=c.$

解 若令 $x=ar \cos \varphi$, $y=br \sin \varphi$, $z=z$, 则质量为

$$M = ab \int_0^c dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} r dr = \frac{\pi abc}{3}.$$

设重心坐标为 x_0, y_0, z_0 , 由对称性知 $x_0 = y_0 = 0$, 而

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{ab}{M} \int_0^c z dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} r dr \\
&= \frac{3}{\pi abc} \cdot \frac{\pi abc^2}{4} = \frac{3c}{4}.
\end{aligned}$$

于是, 重心为点 $\left(0, 0, \frac{3c}{4}\right)$.

4134. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

解 物体的质量为

$$M = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{1}{6}a^4.$$

重心的横坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= \frac{6}{a^4} \cdot \frac{a^5}{15} = \frac{2a}{5}. \end{aligned}$$

同理可求得 $y_0 = \frac{2a}{5}$, 而

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z dz \\ &= \frac{1}{M} \int_0^a \left(\frac{a^5}{10} - \frac{1}{2} a^4 x + \frac{4}{3} a^3 x^2 \right. \\ &\quad \left. - 2a^2 x^3 + 2ax^4 - \frac{14}{15} x^5 \right) dx \\ &= \frac{6}{a^4} \cdot \frac{7}{180} a^6 = \frac{7}{30} a^2. \end{aligned}$$

于是, 重心的坐标为 $x_0 = y_0 = \frac{2}{5} a$, $z_0 = \frac{7}{30} a^2$.

4135. $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, $z = 0$.

解 物体的质量为

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz \\
 &= \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{p^3}{28}.
 \end{aligned}$$

重心的坐标为

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} x dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz \\
 &= \frac{p^4}{72} \cdot \frac{28}{p^3} = \frac{7}{18} p. \\
 y_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = 0. \\
 z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} z dz \\
 &= \frac{p^4}{704} \cdot \frac{28}{p^3} = \frac{7}{176} p.
 \end{aligned}$$

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$

解 若令

$$\begin{aligned}
 x &= ar \cos \varphi \cos \psi, \quad y = br \sin \varphi \cos \psi, \\
 z &= cr \sin \psi,
 \end{aligned}$$

则质量为

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi dr$$

$$= \frac{1}{6} \pi abc.$$

于是,

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi \\ &\quad \cdot ar \cos \varphi \cos \psi dr \\ &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi d\psi \int_0^1 a^2 b c r^3 dr \\ &= \frac{1}{16} \pi a^2 b c \cdot \frac{6}{\pi abc} = \frac{3}{8} a. \end{aligned}$$

利用对称性知重心的坐标为 $x_0 = \frac{3}{8} a$, $y_0 = \frac{3}{8} b$,

$$z_0 = \frac{3}{8} c.$$

4137. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ ($z > 0$).

解 物体的质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^a dz \int_{-\sqrt{a^2 - z^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2 - z^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2}} dx \\ &= 4 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \frac{8a^3}{3}. \end{aligned}$$

于是,

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^a dz \int_{-\sqrt{a^2 - z^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2 - z^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2}} x dx = 0.$$

同理可得 $y_0 = 0$, 而

$$\begin{aligned}
 z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^a z dz \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} dx \\
 &= a^4 \cdot \frac{3}{8a^3} = \frac{3}{8}a.
 \end{aligned}$$

于是, 重心的坐标为 $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = \frac{3}{8}a$.

4138. $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

解 由 $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$ 所围成的立体在平面 $z = 0$ 上的投影为圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

若引用代换

$$x = 1 + r \cos \theta, \quad y = 1 + r \sin \theta,$$

则质量为

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1+r(\cos \theta + \sin \theta) + \frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos \theta + \sin \theta)} dz \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) r dr = \pi.
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \\
 &\quad \int_{1+r(\cos \theta + \sin \theta) + \frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos \theta + \sin \theta)} (1 + r \cos \theta) dz \\
 &= \frac{1}{M} \left[\pi + \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) dr \right] \\
 &= \frac{\pi}{M} = 1.
 \end{aligned}$$

同理可得 $y_0 = 1$ ，而

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+(\cos\theta+\sin\theta)} z dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left[3 + (\sin\theta + \cos\theta)(2r - r^3) - \frac{1}{4}r^4 - r^2 \right] r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{10\pi}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

于是，重心坐标为 $x_0 = y_0 = 1$ ， $z_0 = \frac{5}{3}$ 。

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

解 作代换： $x = ar \cos \varphi \cos \psi$ ， $y = br \sin \varphi \cos \psi$ ， $z = cr \sin \psi$ ，则物体的质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos\varphi \sin\varphi \cos^2\psi \sin\psi} abc r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{1}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 \psi \sin^3 \psi d\psi \\ &= \frac{1}{3} abc \cdot \frac{1}{2} B(2, 2) \cdot \frac{1}{2} B(4, 2) \\ &= \frac{1}{12} abc \cdot \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} \cdot \frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)} \\ &= \frac{abc}{1440}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -\frac{1}{M} a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \\
 &\quad \int_0^{\cos\varphi \sin\varphi \cos^2\psi \sin\psi} r^3 \cos^2\psi \cos\varphi dr \\
 &= -\frac{a^2 bc}{4M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi \sin^4\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10}\psi \sin^4\psi d\psi \\
 &= -\frac{a^2 bc}{4M} \cdot \frac{1}{4} B\left(3, \frac{5}{2}\right) B\left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right) \\
 &= -\frac{a^2 bc}{4M} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(3) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(8)} \\
 &= -\frac{18a^2 bc \pi}{16 \cdot 16 \cdot 7!} \cdot \frac{1440}{abc} = -\frac{9\pi}{448} a.
 \end{aligned}$$

由对称性知, 重心坐标为 $x_0 = -\frac{9\pi}{448} a$,

$$y_0 = -\frac{9\pi}{448} b, \quad z_0 = -\frac{9\pi}{448} c.$$

4140. $z = x^2 + y^2$, $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x + y = \pm 1$,

$$x - y = \pm 1.$$

解 作代换: $x - y = u$, $x + y = v$, 则有

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{v-u}{2},$$

$$z = \frac{u^2 + v^2}{4} \quad \text{及} \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2},$$

且 $|I| = \frac{1}{2}$ 及域 V 为: $-1 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$,

$\frac{u^2+v^2}{4} \leq z \leq \frac{u^2+v^2}{2}$. 于是,

$$M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} dz = \frac{1}{3}.$$

$$x_0 = \frac{1}{4M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} (u+v) dz = 0,$$

$$y_0 = \frac{1}{4M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} (v-u) dz = 0,$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} z dz \\ &= \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 (u^4 + 2u^2v^2 + v^4) dv \\ &= \frac{3}{64M} \int_{-1}^1 \left(2u^4 + \frac{4u^2}{3} + \frac{2}{5} \right) du \\ &= \frac{7}{20}, \end{aligned}$$

即重心坐标为 $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = \frac{7}{20}$.

$$4141. \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

$$(n > 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0).$$

解 作代换:

$$x = ar \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi, \quad y = br \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi,$$

$$z = cr \sin^{\frac{2}{n}} \psi,$$

$$\text{则有 } |I| = \frac{4}{n^2} abc r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{4}{n}-1} \psi$$

$\cdot \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi$. 于是,

$$M = \frac{4}{n^2} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi$$

$$\cos^{\frac{4}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi dr$$

$$= \frac{4}{n^2} abc \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

重心坐标为

$$x_0 = \frac{1}{M} \cdot \frac{4}{n^2} a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi$$

$$\cdot \int_0^1 r \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi$$

$$\cdot \cos^{\frac{4}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi dr$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{4}{n}-1} \varphi d\varphi \\
&\quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{6}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi d\psi \\
&= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{n^2} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{4n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} \\
&= \frac{3n^2}{abc} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{a^2 bc}{4n^2} \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} a,
\end{aligned}$$

同理可求得

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} b,$$

$$z_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} \cdot c.$$

4142. 求形状为立方体:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

的物体的重心坐标, 设此物体在点 (x, y, z) 的密度等于

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$.

解 物体的质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha} x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\beta}{\beta} y^{\frac{\beta}{1-\beta}} \Big|_0^1 \\ &\quad \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

于是, 重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}+1} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \\ &\quad \cdot \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}.$$

$$\cdot (1-\alpha) \frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma} = \alpha,$$

同理可求得 $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$.

求由下列曲面 (参变量是正的) 所界均匀物体对于坐标平面的转动惯量:

4143. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{解 } I_{xy} &= \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} z^2 dz \\ &= \frac{c^3}{3} \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^3 dy \\ &= -\frac{bc^3}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^4 \Big|_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx \\ &= -\frac{bc^3}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 dx \\ &= \frac{abc^3}{60}. \end{aligned}$$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}, \quad I_{zx} = \frac{ab^3c}{60}.$$

4144. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

解 若令 $x = ar \cos \varphi \cos \psi$, $y = br \sin \varphi \cos \psi$,

$z = cr \sin \psi$, 则有

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= abc^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^4 \cos \psi \sin^2 \psi dr \\
 &= \frac{abc^3}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi \sin^2 \psi d\psi \\
 &= \frac{abc^3}{15} \cdot 2\pi \cdot \sin^3 \psi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{4}{15} \pi abc^3.
 \end{aligned}$$

利用对称性可得

$$I_{yz} = -\frac{4}{15} \pi a^3 bc, \quad I_{zx} = -\frac{4}{15} \pi ab^3 c.$$

4145. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c.$

解 若令 $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, 则有

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr dr \int_c^c z^2 dz \\
 &= \frac{1}{5} \pi abc^3, \\
 I_{yy} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr dr \int_c^c (ar \cos \varphi)^2 dz \\
 &= a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 (1-r)r^3 dr \\
 &= \frac{1}{20} \pi a^3 bc.
 \end{aligned}$$

利用对称性可得

$$I_{xx} = \frac{1}{20} \pi a b^3 c.$$

$$4146. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$$

解 若令 $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, 则得域 V 为

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \cos \varphi,$$

$$-c\sqrt{1-r^2} \leq z \leq c\sqrt{1-r^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} abrd r \int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}} z^2 dz \\ &= \frac{2}{3} abc^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} r dr \\ &= \frac{2}{15} abc^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 - (\sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}] d\varphi \\ &= \frac{4}{15} abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^5 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{4}{15} abc^3 \left(\varphi + \cos \varphi - \frac{2}{3} \cos^3 \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \cos^5 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2abc^3}{225} (15\pi - 16). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{xz} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} abrd r \int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}} (\arccos \varphi)^2 dz \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi} \sqrt{1-r^2} r^3 dr \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \left\{ \int_0^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} d\varphi \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{2}{15} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} \cos^2 \varphi d\varphi \\
&= 2a^3bc \left\{ \frac{\pi}{15} \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(- \int_0^0 \sin^2 t \cos^3 t dt \right) \cos^2 \varphi d\varphi \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^0 \sin^2 t \cos^3 t dt \right) \cos^2 \varphi d\varphi \right\} \\
&= 2a^3bc \left\{ \frac{\pi}{15} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \varphi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \cos^2 \varphi d\varphi \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \cos^2 \varphi d\varphi \Big\} \\
& = 2a^3bc \left(-\frac{\pi}{15} - \frac{92}{1575} \right) \\
& = \frac{2a^3bc}{1575} (105\pi - 92),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} abrd r \int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{c\sqrt{1-r^2}} (br \sin \varphi)^2 dz \\
&= 2cb^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} \sqrt{1-r^2} r^3 \sin^2 \varphi dr \\
&= 2cb^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|
\end{aligned}$$

$$\cdot \sin t \cos^3 t dt$$

$$\begin{aligned}
&= 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{2}{15} \right. \\
& \quad \left. + \int_0^0 |\sin t| \cdot \sin t \cos^3 t \cdot dt \right\} \sin^2 \varphi d\varphi \\
&= 2ab^3c \left\{ -\frac{\pi}{15} + \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \varphi \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \sin^2 \varphi d\varphi \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \sin^2 \varphi d\varphi \right\}
\end{aligned}$$

$$= 2ab^3c \left(-\frac{\pi}{15} - \frac{272}{1575} \right)$$

$$= \frac{2ab^3c}{1575} (105\pi - 272).$$

$$4147. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

解 两曲面在 Oxy 平面上的投影为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a}$

$- 2\frac{y}{b} = 0$, 即 $\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 = 2$. 若令

$$\frac{x}{a} = 1 + r \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} = 1 + r \sin \varphi,$$

则得域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2},$$

$$c \left[1 + \frac{r^2}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \right]$$

$$\leq z \leq c[2 + r(\cos \varphi + \sin \varphi)].$$

于是,

$$I_{11} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} abrd r$$

$$\int_{c[1 + \frac{r^2}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi)]}^{c[2 + r(\cos \varphi + \sin \varphi)]} z^2 dz$$

$$= \frac{1}{3} abc^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \left[8 + 12r(\cos \varphi + \sin \varphi) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 6r^2(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 - \left(1 + \frac{r^2}{2}\right)^3 \\
& - 3\left(1 + \frac{r^2}{2}\right)^2 r(\cos \varphi + \sin \varphi) \\
& - 3\left(1 + \frac{r^2}{2}\right) r^2(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 \Big] dr \\
& = \frac{7}{2} \pi a^3 b c^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} a^3 b r (1 + r \cos \varphi)^2 dr \\
&\quad \int_c^{c[2+r(\cos \varphi + \sin \varphi)]} dz \\
&\quad \int_c^{c[1+\frac{r^2}{2}+r(\cos \varphi + \sin \varphi)]} dz \\
&= a^3 b c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r(1 + 2r \cos \varphi \\
&\quad + r^2 \cos^2 \varphi) \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) dr \\
&= \frac{4}{3} \pi a^3 b c.
\end{aligned}$$

利用对称性得 $I_{xx} = \frac{4}{3} \pi a b^3 c$.

求由下列曲面所界均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量:

4148. $z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$, $z = 0$.

解 曲面所界的均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量记以 I_z , 则

$$I_z = I_{xx} + I_{yy}.$$

若令 $x + y = u$, $x - y = v$, 则有

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I| = \frac{1}{2}$. 于是,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_0^{\frac{u^2+v^2}{2}} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{u-v}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{u+v}{2} \right)^2 \right\} dz \\ &= \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 \frac{(u^2+v^2)^2}{8} dv = \frac{14}{45}. \end{aligned}$$

4149. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$).

解 若令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 则有

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r \leq z \leq \sqrt{2-r^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} r^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 \sqrt{2-r^2} - r^4) dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8\sqrt{2}-7}{15} - \frac{1}{5} \right) d\varphi^{*)} \\ &= \frac{4\pi}{15} (4\sqrt{2}-5). \end{aligned}$$

*) 作代换 $r = \sqrt{2} \sin t$.

4150. 设球在动点 $P(x, y, z)$ 的密度与该点至球心距离成

比例, 求质量为 M 的非均匀球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 对于其直径的转动惯量.

解 不失一般性, 取 Oz 轴在球内的一段作为直径. 若令

$x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$, 则质量为

$$M = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2 \cos \psi \cdot k r dr = k\pi R^4,$$

由此得 $k = \frac{M}{\pi R^4}$. 从而密度 $\rho = \frac{Mr}{\pi R^4}$. 于是, 所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2 \cos^2 \psi \cdot \frac{Mr^3}{\pi R^4} \cos \psi dr \\ &= \frac{2M}{R^4} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi d\psi \right) \left(\int_0^R r^5 dr \right) = \frac{4MR^2}{9}. \end{aligned}$$

4151. 证明等式

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

其中 I_l 为物体对于某轴 l 的转动惯量, I_{l_0} 为对于平行于 l 并通过物体重心的轴 l_0 的转动惯量, d 为轴与轴之间的距离及 M 为物体的质量.

证 以重心为坐标原点 O , z 轴与 l_0 重合, l 与 Oxy 平面的交点为 $(\xi, \eta, 0)$, 如图 8.59 所示, 则

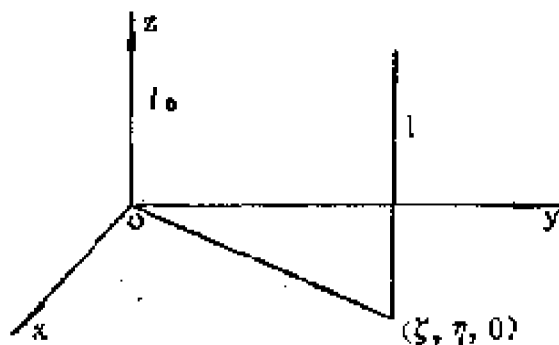


图 8.59

$$\begin{aligned}
I_l &= \iiint_V [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \rho \, dv \\
&= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho \, dv + (\xi^2 + \eta^2) \\
&\quad \cdot \iiint_V \rho \, dv - 2\xi \iiint_V x \rho \, dv - 2\eta \iiint_V y \rho \, dv \quad (1)
\end{aligned}$$

由于重心在原点, 故 $x_0 = y_0 = 0$, 即

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho \, dv = 0$$

及 $y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho \, dv = 0,$

并且 $M = \iiint_V \rho \, dv$, $d^2 = \xi^2 + \eta^2$, 代入 (1) 式, 最后得

$$I_l = I_{l_0} + M d^2.$$

4152. 证明: 体积为 V 的物体对于过其重心 $O(0,0,0)$ 并与坐标轴成角 α, β, γ 的轴 l 的转动惯量等于

$$\begin{aligned}
I_l &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta \\
&\quad + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\
&\quad - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{xz} \cos \alpha \cos \gamma.
\end{aligned}$$

其中 I_x, I_y, I_z 为物体对于坐标轴的转动惯量及

$$K_{xy} = \iiint_V \rho xy \, dx \, dy \, dz,$$

$$K_{xz} = \iiint_V \rho xz \, dx \, dy \, dz,$$

$$K_{yz} = \iiint_V \rho yz \, dx \, dy \, dz$$

为离心距.

证 如图8.60所示, 距离

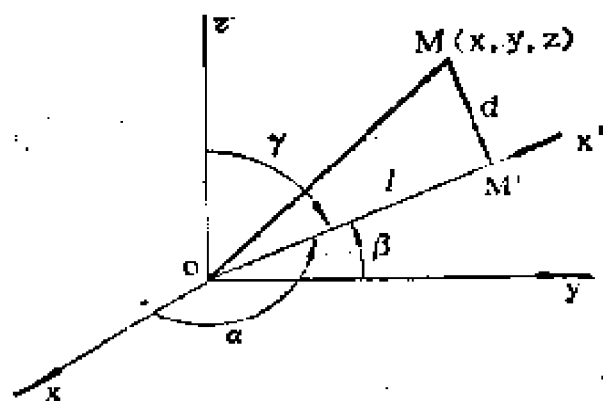


图 8.60

$$d = \frac{|\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OM'}|}{|\overrightarrow{OM'}|}$$

$$= \frac{1}{r} \sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ r \cos \beta & r \cos \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ r \cos \gamma & r \cos \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ r \cos \alpha & r \cos \beta \end{vmatrix}^2}$$

其中 $r = |\overrightarrow{OM}|$. 由于 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 故有

$$\begin{aligned} d^2 &= (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma + (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha \\ &\quad + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta - 2xy \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \alpha \cos \gamma. \end{aligned}$$

于是,

$$I_1 = \iiint_V \rho d^2 \cdot dx \, dy \, dz$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \gamma \iiint_V \rho \cdot (x^2 + y^2) dx dy dz \\
&\quad + \cos^2 \alpha \iiint_V \rho \cdot (y^2 + z^2) dx dy dz \\
&\quad + \cos^2 \beta \iiint_V \rho \cdot (x^2 + z^2) dx dy dz \\
&\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \iiint_V \rho xy dx dy dz \\
&\quad - 2 \cos \beta \cos \gamma \iiint_V \rho yz dx dy dz \\
&\quad - 2 \cos \gamma \cos \alpha \iiint_V \rho xz dx dy dz \\
&= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \\
&\quad - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma \\
&\quad - 2K_{xz} \cos \gamma \cos \alpha,
\end{aligned}$$

证毕.

4153. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = \pm h$ 对于直线 $x = y = z$ 的转动惯量.

解 直线 $x = y = z$ 通过圆柱的重心 $O(0, 0, 0)$ 且具有方向余弦 $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 若取极坐标, 则有

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) dz \\
&= \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho_0,
\end{aligned}$$

$$I_y = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 (r^2 \cos^2 \varphi + z^2) dz$$

$$= \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho_0,$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r^2 dz = \pi h a^4 \rho_0,$$

$$K_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r^2 \cos \varphi \sin \varphi dz = 0,$$

$$K_{yz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r \sin \varphi \cdot z dz = 0,$$

$$K_{zx} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 \cdot r \cos \varphi \cdot z dz = 0,$$

于是, 根据4152题结果即得

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma$$

$$- 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

$$- 2K_{zx} \cos \alpha \cos \gamma$$

$$= \frac{\rho_0}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 + \frac{1}{2} \pi a^4 h \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 + \pi a^4 h \right) = \frac{2}{3} \pi \rho_0 a^2 h \left(a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right)$$

$$= \frac{M}{3} \left(a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right),$$

其中 $M = 2\pi\rho_0 a^2 h$ 为圆柱的质量.

4154. 求密度为 ρ_0 , 由曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

所界的均匀物体对于坐标原点的转动惯量.

解 若令 $x=r \cos \varphi \cos \psi, y=r \sin \varphi \cos \psi, z=r \sin \psi$,
则对坐标原点的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a \cos \psi} \rho_0 \cdot r^2 \cdot r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{4\pi \rho_0 a^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \psi d\psi \\ &= \frac{4\pi \rho_0 a^5}{5} \cdot \frac{5\pi}{32}^{*)} = \frac{\pi^2 a^5 \rho_0}{8}. \end{aligned}$$

*) 利用2282题的结果.

4155. 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 在点 (x, y, z) 的牛顿位.

解 由对称性显然可知, 所求的牛顿位与 ξ, η, ζ 轴取的方向无关. 今取 $O\xi$ 轴通过点 $P(x, y, z)$, 即得牛顿位

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2} \rho_0 \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}} \\ &= \rho_0 \int_{-R}^R d\zeta \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2 - \zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}}, \end{aligned}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

积分之, 得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= 2\pi \rho_0 \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - 2r\zeta + r^2} - |\zeta - r|) d\zeta. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
& \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - 2r\xi + r^2} d\xi \\
&= \frac{1}{3r} [(R+r)^3 - |R-r|^3] \\
&= \begin{cases} \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{1}{r} + 2rR, & (r > R) ; \\ \frac{2}{3} r^2 + R^2, & (r \leq R) , \end{cases}
\end{aligned}$$

及

$$\int_{-R}^R |\xi - r| d\xi = \begin{cases} 2Rr & (r > R) , \\ r^2 + R^2 & (r \leq R) . \end{cases}$$

因而, 最后得

$$u(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4}{3r} \pi R^3 \rho_0 & (r > R), \\ 2\pi \rho_0 \cdot \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) & (r \leq R). \end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论:

1. 在球外一点上的牛顿位, 与将球的全部质量集中在它的中心处时一样;

2. 如考察一个内半径为 R_1 而外半径为 R_2 的空心球, 则它在位于其空隙处的一点 ($r < R$) 上的牛顿位可表示成差

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_2(x, y, z) - u_1(x, y, z) \\
&= \left(R_2^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) 2\pi \rho_0
\end{aligned}$$

$$-\left(R_1^2 - \frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0$$

$$=2\pi(R_2^2 - R_1^2)\rho_0.$$

它与 r 无关, 故空心球体在其空隙范围内的位势保持一个常数值.

4156. 设密度 $\rho = f(R)$, 其中 f 为已知函数, 且 $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, 求球壳层 $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2$ 在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿位.

解 取 $O\xi$ 轴通过点 $P(x, y, z)$, 即得牛顿位

$$u(x, y, z) = \iiint_{R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2} f(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}) \cdot \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\xi - r)^2}},$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

若引入球坐标, 即得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \cos \psi \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \sin \psi}} \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 f(\rho) \cdot \frac{\cos \psi d\psi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \sin \psi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \\
&\quad \cdot \left(-\frac{1}{\rho r} \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \sin \psi} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho \\
&= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \left\{ -\frac{1}{\rho r} [|\rho - r| - (\rho + r)] \right\} d\rho \\
&= \begin{cases} 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho f(\rho) d\rho, & \text{当 } \rho > r; \\ 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{r} f(\rho) d\rho, & \text{当 } \rho \leq r. \end{cases}
\end{aligned}$$

合并之，最后得

$$u(x, y, z) = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho) \min \left(\frac{\rho^2}{r}, \rho \right) d\rho.$$

4157. 求有固定密度 ρ_0 的圆柱 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2$, $0 \leq \zeta \leq h$ 在点 $P(0, 0, z)$ 的牛顿位.

解 若引用柱坐标，即得

$$\begin{aligned}
&u(x, y, z) \\
&= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h d\zeta \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2}} \\
&= 2\pi \rho_0 \int_0^h \left[\sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2} \right]_0^a d\zeta \\
&= 2\pi \rho_0 \int_0^h \{ \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} - |\zeta - z| \} d\zeta \\
&= 2\pi \rho_0 \left[\frac{(\zeta - z)}{2} \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a^2}{2} \ln |(\zeta - z) + \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2}| \\
& - \frac{(\zeta - z)|\zeta - z|}{2} \Big]_0^h \\
& = \pi \rho_0 \left\{ (h - z) \sqrt{a^2 + (h - z)^2} + z \sqrt{a^2 + z^2} \right. \\
& \quad - [(h - z)|h - z| + z|z|] \\
& \quad \left. + a^2 \ln \left| \frac{h - z + \sqrt{a^2 + (h - z)^2}}{-z + \sqrt{a^2 + z^2}} \right| \right\}.
\end{aligned}$$

4158. 半径为 R 和质量为 M 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 以怎样的力吸引质量为 m 的质点 $P(0, 0, a)$?

解 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零, 即 $X = Y = 0$, 而在 Oz 轴上的射影为

$$\begin{aligned}
Z &= k \rho_0 m \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2} \frac{(\zeta - a) d\xi d\eta d\zeta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= km \rho_0 \int_{-R}^R (\zeta - a) d\zeta \\
&\quad \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2 - \zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= km \rho_0 \int_{-R}^R (\zeta - a) d\zeta \\
&\quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - \zeta^2}} \frac{r dr}{[r^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi k m \rho_0 \int_{-R}^R (\zeta - a) \left(\frac{1}{|\zeta - a|} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \right) d\zeta \\
&= 2\pi k m \rho_0 \int_{-R}^R \operatorname{sgn}(\zeta - a) d\zeta \\
&\quad - 2\pi k m \rho_0 \int_{-R}^R \frac{(\zeta - a) d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}},
\end{aligned}$$

其中 $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}$.

分别求上述两个积分:

当 $a \geq R$ 时,

$$\int_{-R}^R \operatorname{sgn}(\zeta - a) d\zeta = - \int_{-R}^R d\zeta = -2R,$$

当 $a < R$ 时,

$$\int_{-R}^R \operatorname{sgn}(\zeta - a) d\zeta = - \int_{-R}^a d\zeta + \int_a^R d\zeta = -2a,$$

而

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^R \frac{(\zeta - a) d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \\
&= - \frac{1}{2a} \int_{-R}^R \frac{R^2 + a^2 - 2a\zeta - (R^2 + a^2)}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} d\zeta \\
&\quad - a \int_{-R}^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \\
&= - \frac{1}{2a} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta} d\zeta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{R^2 + a^2}{2a} - a \right) \int_{-R}^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta}} \\
& = -\frac{1}{2a} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta} d\zeta \\
& + \frac{R^2 - a^2}{2a} \int_{-R}^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta}},
\end{aligned}$$

当 $a \geq R$ 时, 将上式右端分别积分, 得结果:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{4a^2} (R^2 + a^2 - 2a\zeta)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{R^2 - a^2}{2a} \left(-\frac{1}{2a} \right) \right. \\
& \quad \left. \cdot 2\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta} \right] \Big|_{-R}^R \\
& = \frac{1}{6a^2} [(a-R)^3 - (a+R)^3] \\
& \quad - \frac{R^2 - a^2}{2a^2} [(a-R) - (a+R)] \\
& = \frac{2R^3}{3a^2} - 2R,
\end{aligned}$$

当 $a < R$ 时, 积分得结果:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6a^2} [(R-a)^3 - (a+R)^3] \\
& \quad - \frac{R^2 - a^2}{2a^2} [(R-a) - (R+a)] \\
& = -\frac{4a}{3}.
\end{aligned}$$

于是, 当 $a \geq R$ 时, 则

$$Z = 2 \pi k m \rho_0 \left(-2R - \frac{2R^3}{3a^2} + 2R \right)$$

$$= -\frac{4}{3a^2} \pi k m \rho_0 R^3 = -\frac{kMm}{a^2},$$

当 $a < R$ 时, 则

$$Z = 2 \pi k m \rho_0 \left(-2a + \frac{4a}{3} \right)$$

$$= -\frac{4}{3} \pi a k m \rho_0 = -\frac{kMm}{R^3} a.$$

从以上结果可以得到两个推论:

1. 位于球外的一点 ($a \geq R$) 因球体而受到的吸引力相当于将球体的全部质量 $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0$ 集中在它的中心处时受到的引力, 引力的方向朝向球心;

2. 对于在球里面的一点 ($a < R$) 来说, 吸引力与 R 无关, 其大小与 $R = a$ 时的情况一样, 即在点 P 外面的球壳部分对 P 点的引力为零.

4159. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2$, $0 \leq \zeta \leq h$ 对具有单位质量的质点 $P(0, 0, z)$ 的吸引力.

解 由对称性知, 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零, 即 $X = Y = 0$. 若引用柱坐标, 即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$\begin{aligned} Z &= k \rho_0 \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq a^2} d\xi d\eta \int_0^h \frac{(\zeta - z) d\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= k \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_0^h \frac{(\zeta - z) d\zeta}{[r^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi k\rho_0 \int_0^a r \left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}} \right] dr \\
&= 2\pi k\rho_0 [\sqrt{a^2+z^2} - \sqrt{a^2+(h-z)^2} \\
&\quad - |z| + |h-z|].
\end{aligned}$$

易知,

当 $0 \leq z < \frac{h}{2}$ 时, $z > 0$, 此时吸引力朝着向上的铅垂线;

当 $\frac{h}{2} < z \leq h$ 时, $z < 0$, 此时吸引力朝着向下的铅垂线;

当 $Z = \frac{h}{2}$ 时, $Z = 0$, 引力为零.

4160. 求密度为 ρ_0 的均匀球锥体对于在其顶点为一单位质量的质点的吸引力, 设球的半径为 R , 而轴截面的扇形的角等于 2α .

解 由对称性知, 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零, 即 $X=Y=0$. 若引用球坐标, 即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$\begin{aligned}
Z &= \iiint_V \frac{k\rho_0 z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dx dy dz \\
&= k\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_0^R dr \\
&= k\pi R\rho_0 \sin^2\alpha.
\end{aligned}$$

§ 9. 二重和三重广义积分

1° 无界限域的情形 若二维的域 Ω 是无界的及函数 $f(x, y)$ 在域 Ω 上连续, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

其中 Ω_n 为域 Ω 中可求积的有界封闭子域中的任意序列, 这个序列可以盖满域 Ω . 若在右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关, 则对应的积分称为收敛的; 在相反的情形称为发散的.

同样定义出连续函数展布在无界的三维域上的三重广义积分.

2° 不连续函数的情形 若函数 $f(x, y)$ 在有界封闭域 Ω 内除了点 $P(a, b)$ 面外处处是连续的, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega - U_{\epsilon}} f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

其中 U_{ϵ} 是点 P 的 ϵ 邻域, 当极限存在的情形, 所研究的积分称为收敛的; 在相反的情形称为发散的.

假定在点 $P(a, b)$ 的邻近有等式

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^a},$$

其中函数 $\varphi(x, y)$ 的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间, 且

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

则 1) 当 $\alpha < 2$ 时, 积分 (2) 收敛; 2) 当 $\alpha \geq 2$ 时, 积分 (2) 发散.

若函数 $f(x, y)$ 有不连续的线, 同样可定义出广义积分 (2),

不连续函数的广义积分定义易于引伸到三重积分的情形.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性 ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$):

$$4161. \quad \iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy.$$

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x, y)|}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$$

与积分 $\iint_{x^2+y^2>1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dx dy$ 同时收敛同时发

散. 由于 $\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$ 是正的, 故引用极坐标, 得

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2>1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{+\infty} \frac{r}{r^{2p}} dr = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1}, & \text{若 } p > 1; \\ +\infty, & \text{若 } p \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

由此可知, 原积分 $\iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$ 当 $p>1$

时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

$$4162. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$$

解 由于被积函数是正的, 并且关于 Ox 轴和 Oy 轴都对称, 故

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} \\ &= 4 \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q} \right). \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \cdot \frac{1}{1+x^p} = 1$, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散, $p=1$ 时显然也发散 ($\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = +\infty$). 因此,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} = \begin{cases} \text{有限数, 当 } p>1 \text{ 时;} \\ +\infty, \text{ 当 } p \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

同理有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q} = \begin{cases} \text{有限数, 当 } q>1 \text{ 时;} \\ +\infty, \text{ 当 } q \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此可知, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 仅当 $p>1$

且 $q > 1$ 时收敛，其它情形均发散。

$$4163. \iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy.$$

解 仿4161题，可知积分 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy$

与积分 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$ 同时收敛同时发散。由

于被积函数是正的，故

$$\begin{aligned} & \iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p} \\ &= \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \\ &= 2 \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}; \end{aligned}$$

由于，当 $0 \leq y \leq 1$ 时，有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (\text{若 } p \geq 0), \\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} &\geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \\ &\geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (\text{若 } p < 0), \end{aligned}$$

故

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} \leq \iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p} \\ \leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (p \geq 0),$$

若 $p < 0$, 则有相反的不等式.

对于 $a > 0$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p} \frac{1}{(a^2 + x^2)^p} = 1.$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^p}$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, $p < \frac{1}{2}$ 时发

散. 实际上, 此积分当 $p = \frac{1}{2}$ 时也发散, 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \Big|_0^{+\infty} = +\infty.$$

由此可知: 积分 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$, 从而积分

$\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 当

$p \leq \frac{1}{2}$ 时发散.

$$4164. \quad \iint_{|x|+|y| \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$$

解 由对称性及被积函数的非负性, 有

$$\begin{aligned} \iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p+|y|^q} &= 4 \iint_{\substack{x\geq 0, y\geq 0 \\ x+y\geq 1}} \frac{dx dy}{x^p+y^q} \\ &= 4 \iint_{\Omega_1} \frac{dx dy}{x^p+y^q} + 4 \iint_{\Omega_2} \frac{dx dy}{x^p+y^q}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\Omega_1 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq 1, x^p+y^q \leq 2\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \geq 1, x^p+y^q \geq 2\}$, 令 $\Omega_3 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^p+y^q \geq 2\}$, 易知, 当 $x \geq 0, y \geq 0, x^p+y^q \geq 2$ 时必有 $x+y \geq 1$ (因若 $x+y < 1$, 则必有 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$, 从而 $0 \leq x^p < 1, 0 \leq y^q < 1$, 这就会得出 $x^p+y^q < 2$), 故 $\Omega_2 = \Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界闭区域, 故 (1) 式右端第一个积分为常义积分, 因此广义积分

$$\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p+|y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分 $\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy}{x^p+y^q}$ 的敛散性, 在此

积分中作变量代换

$$x = r^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \theta, \quad y = r^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta,$$

则易知

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{4}{pq} r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1} \sin^{\frac{2}{q}-1} \theta \cos^{\frac{2}{p}-1} \theta.$$

于是, 注意到被积函数是非负的, 得

$$\iint_{Q_3} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = \frac{4}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \theta \cos^{\frac{2}{p}-1} \theta d\theta \\ \cdot \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr.$$

由3856题的结果知, 右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \theta \cos^{\frac{2}{p}-1} \theta d\theta \quad (p > 0, q > 0)$$

恒收敛, 且其值为 $\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right)$, 而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr$$

当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 < -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$) 时收敛, 当

$\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 \geq -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$) 时发散.

综上所述, 可知广义积分

$$\iint_{|x|+|y|>1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$$

仅当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ 时收敛.

4165. $\iint_{x+y>1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx dy.$

解 设此积分收敛, 以 I 表其值. 先设 $p < 1$.

令 $\Omega_n = \{(x, y) | 1 \leq x + y \leq 2n\pi, \\ -2n\pi \leq x - y \leq 2n\pi\},$

$$\Omega'_n = \{(x, y) \mid 1 \leq x+y \leq 2n\pi - \frac{\pi}{4},$$

$$-2n\pi \leq x-y \leq 2n\pi\},$$

$$\omega_n = \{(x, y) \mid 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq x+y \leq 2n\pi,$$

$$-2n\pi \leq x-y \leq 2n\pi\},$$

其中 $n = 1, 2, 3, \dots$, 则显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx dy = I,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx dy = I.$$

从而

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\iint_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx dy \right. \\ & \quad \left. - \iint_{\Omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^2} dx dy \right] \\ &= I - I = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

由于 $\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$, 今在 (1) 式左端的积分中作变量代换 $x+y=u$, $x-y=v$ (即 $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$), 并注意到

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -\frac{1}{2}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} du \int_{-2n\pi}^{2n\pi} \frac{\cos v - \cos u}{u^p} dv \\ &= -n\pi \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du; \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{du}{u^p} \\ & \geq \begin{cases} \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^p}, & \text{当 } p > 0 \text{ 时;} \\ \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{当 } p \leq 0 \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

由此可知 (注意前面假定 $p < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = -\infty,$$

此显然与 (1) 式矛盾.

现设 $p \geq 1$. 令

$$\begin{aligned} \omega'_n = \{ (x, y) \mid 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq x+y \leq 2n\pi, \\ -2\pi n^{(p)+2} \leq x-y \leq 2\pi n^{(p)+2} \}, \end{aligned}$$

仿上, 应有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = 0. \quad (2)$$

但另一方面，和上面一样，作代换 $x+y=u$ ，
 $x-y=v$ 后，有

$$\begin{aligned} & \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy \\ &= -\pi n^{1+p+2} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du. \end{aligned}$$

同样，由

$$\int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du \geq \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^p},$$

即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = -\infty,$$

此显然与 (2) 式矛盾。

综上所述，可知：不论 p 为何值，积分

$$\iint_{x+y \neq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy$$

都发散。

4166. 证明：若连续函数 $f(x, y)$ 不为负及 $S_n (n=1, 2, \dots)$ 为有界闭域的任一叙列，这个叙列可以盖满域 S ，则

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

证 取定一有界闭域的叙列 S'_n , 它盖满 S 并且 $S'_1 \subset S'_2 \subset \cdots \subset S'_n \subset \cdots \subset S$. 由于 $f(x, y)$ 在 S 上非负, 故积分叙列 $\iint_{S'_n} f(x, y) dx dy$ 是递增的, 从而极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

存在 (是有限数或是 $+\infty$). 我们要证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy = I. \quad (2)$$

先设 I 为有限数. 任给 $\varepsilon > 0$, 由 (1) 式知, 存在 N , 使当 $n \geq N$ 时, 恒有

$$I - \varepsilon < \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy < I + \varepsilon. \quad (3)$$

又存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, $S_n \supset S'_N$. 从而, 根据 $f(x, y)$ 的非负性以及 (3) 式, 得

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \geq \iint_{S'_N} f(x, y) dx dy > I - \varepsilon.$$

另一方面, 对每个固定的 $n \geq n_0$, 又必存在某个充分大的 $k_n (\geq N)$ 使 $S'_{k_n} \supset S_n$. 于是, 再由 (3) 式得

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \leq \iint_{S'_{k_n}} f(x, y) dx dy < I + \varepsilon.$$

由此可知, 当 $n \geq n_0$ 时, 恒有

$$I - \varepsilon < \iint_{S_n} f(x, y) dx dy < I + \varepsilon,$$

故 (2) 式成立.

次设 $I = +\infty$. 任给 $M > 0$, 由 (1) 式知, 存在 N_1 , 使

$$\iint_{S'_{N_1}} f(x, y) dx dy > M.$$

又存在 n_1 , 使当 $n \geq n_1$ 时, 恒有 $S_n \supset S'_{N_1}$, 从而此时

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \geq \iint_{S'_{N_1}} f(x, y) dx dy > M,$$

故 (2) 式成立. 证毕.

4167. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2n\pi} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0$$

(n 为自然数).

证 利用极坐标, 我们有

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2 + y^2 \leq 2n\pi} \sin(x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2n\pi}} r \sin r^2 dr \end{aligned}$$

$$= \pi(1 - \cos 2n\pi) = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq 2\pi n} \sin(x^2+y^2) dx dy = 0.$$

但由对称性，有

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2+y^2) dx dy \\ &= 4 \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} \sin(x^2+y^2) dx dy \\ &= 4 \int_0^\pi dy \int_0^\pi (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) dx \\ &= 4 \left(\int_0^\pi \cos y^2 dy \right) \left(\int_0^\pi \sin x^2 dx \right) \\ &\quad + 4 \left(\int_0^\pi \cos x^2 dx \right) \left(\int_0^\pi \sin y^2 dy \right) \\ &= 8 \left(\int_0^\pi \cos x^2 dx \right) \left(\int_0^\pi \sin x^2 dx \right). \end{aligned}$$

根据3830题的结果，可知

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \sin x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

从而，得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

4168. 证明纵使累次积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

及 $\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$

收敛, 但积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

发散.

证 先证两个累次积分收敛. 我们有

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{2y} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2} - \int_1^{+\infty} \frac{y}{2} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{x^2}{2y(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^{y=+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2 + y^2)} \\ & \quad + \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^{y=+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{dy}{2(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{x^2}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dy}{x^2+y^2} \\
 & = \frac{x^2-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2+1},
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 & \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \\
 & = -\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{\pi}{4};
 \end{aligned}$$

同理 (利用已算得的结果)

$$\begin{aligned}
 & \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \\
 & = -\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \\
 & = -\int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{y^2+1} \right) dy = \frac{\pi}{4},
 \end{aligned}$$

故两个累次积分都收敛.

次证积分

$$\iint_{x>1, y>1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx dy \quad (1)$$

发散. 为此只要证积分

$$\iint_{x>1, 1 \leq y \leq x} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx dy \quad (2)$$

发散即可 (因为如果积分 (1) 收敛, 则绝对值积分

$$\iint_{x>1, y>1} \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx dy \quad (3)$$

必收敛，从而在小一点的区域上的积分

$$\iint_{x>1, 1\leq y\leq x} \left| -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx dy$$

更收敛。由此可知，积分（2）收敛）。由于，

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{\substack{1\leq x\leq n \\ 1\leq y\leq x}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx dy \\ &= \int_1^n dx \int_1^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy, \end{aligned}$$

仿上，利用部分积分法，容易算得

$$\begin{aligned} &\int_1^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \\ &= -\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)} \Big|_{y=1}^{y=x} - \int_1^x \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2+y^2)} \\ &\quad + \frac{y}{2(x^2+y^2)} \Big|_{y=1}^{y=x} - \int_1^x \frac{dy}{2(x^2+y^2)} \\ &= -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2x}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n \left(-\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2x} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \arctg n + \frac{1}{2} \ln n \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

由此可知积分（2）发散。

注意，也可用反证法证明积分（1）发散。假定

积分 (1) 收敛, 于是积分 (3) 收敛, 但恒有

$$\begin{aligned} & \iint_{x>1, y>1} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy \\ &= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dy \\ &= \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx, \end{aligned} \quad (4)$$

故 (4) 式中两个累次积分都收敛, 又由前面已证不取绝对值的两个累次积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

与

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

都收敛, 故知

$$\begin{aligned} & \iint_{x>1, y>1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{x>1, y>1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

这是不可能的。证毕。

计算下列积分:

$$4169. \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q}.$$

解 由于被积函数非负, 故

$$I = \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q}.$$

而当 $q > 1$ 时,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q} = \frac{x^{q-1}}{q-1}.$$

(注意, 当 $q \leq 1$ 时, 此积分发散, 从而 $I = +\infty$);
又当 $p > q$ 时,

$$I = \frac{1}{q-1} \int_1^{+\infty} x^{q-p-1} dx = \frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

(注意, 当 $p \leq q$ 时, 此积分发散, $I = +\infty$).

综上所述, 可知: 当 $p > q > 1$ 时,

$$\iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

$$4170. \iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$$

解 由于被积函数非负, 故

$$I = \iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$$

$$= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p}.$$

当 $p > 1$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p} \\ &= -\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{(x+y)^{p-1}} \Big|_{y=1-x}^{y=+\infty} = \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

(注意, 当 $p \leq 1$ 时, 积分发散, $I = +\infty$), 故

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{p-1} = \frac{1}{p-1} \quad (\text{当 } p > 1 \text{ 时}).$$

4171.
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

解 采用极坐标. 由于被积函数非负, 故有

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ &= 2\pi (-\sqrt{1-r^2}) \Big|_{r=0}^{r=1} = 2\pi. \end{aligned}$$

4172.
$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p}.$$

解 采用极坐标. 由于被积函数非负, 故有

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{p-1}, & \text{当 } p > 1 \text{ 时;} \\ +\infty, & \text{当 } p \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

4173. $\iint_{y \geq x^2+1} \frac{dx dy}{x^4+y^2}.$

解 由于被积函数非负, 故

$$\begin{aligned} I &= \iint_{y \geq x^2+1} \frac{dx dy}{x^4+y^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4+y^2} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4+y^2}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4+y^2} &= \frac{1}{x^2} \arctg \frac{y}{x^2} \Big|_{y=x^2+1}^{y=+\infty} \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right], \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] dx \\ &= -\frac{2}{x} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \end{aligned}$$

$$+ 2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3}}{1 + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2} dx$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}},$$

$$\text{其中 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{2}{x^3}}{1 + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{x}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} \right) = 0.$$

下面计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}$. 为简单计, 记

$$a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{则}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - (\sqrt{2} - 1)x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x^2+b)^2 - (ax)^2} \\
&= \frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)} \\
&= \frac{1}{2ab} \left[\frac{x+a}{x^2+ax+b} - \frac{x-a}{x^2-ax+b} \right] \\
&= \frac{1}{4ab} \left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b} + \frac{a}{x^2+ax+b} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2x-a}{x^2-ax+b} + \frac{a}{x^2-ax+b} \right].
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4ab} \int_0^{+\infty} \left[\frac{2x+a}{x^2+ax+b} - \frac{2x-a}{x^2-ax+b} \right] dx \\
&\quad + \frac{1}{4b} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x^2+ax+b} + \frac{1}{x^2-ax+b} \right] dx \\
&= \frac{1}{4ab} \left(\ln \frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b} \right) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\
&\quad + \frac{1}{4b} \left(\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \operatorname{arc tg} \frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \operatorname{arc tg} \frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}} \right) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\
&= 0 + \frac{1}{4b} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}} = \frac{\pi}{2b\sqrt{4b-a^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2} - 1)}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2} + 1}} \\
&= \frac{\pi \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2} + 1} \sqrt{\sqrt{2} - 1}} \\
&= \frac{\pi \sqrt{\sqrt{2} - 1} \sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}}{2},
\end{aligned}$$

故

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} = \pi \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}.$$

4174. $\iint_{0 \leq x < y} e^{-(x+y)} dx dy.$

解 由于被积函数非负, 故

$$\begin{aligned}
\iint_{0 \leq x < y} e^{-(x+y)} dx dy &= \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} e^{-(x+y)} dy \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

变换为极坐标而计算积分:

4175. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$

解 由于被积函数非负, 故采用极坐标就有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=+\infty} = \pi.\end{aligned}$$

4176. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy.$

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)},$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ 收敛 (参看4175题),

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy$ 收敛. 从

而, 采用极坐标就有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \cos r^2 dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt \\ &= \pi \left(\frac{\sin t - \cos t}{(-1)^2 + 1^2} e^{-t} \right) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

4177. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy.$

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)},$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ 收敛 (参看4175题),

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy$ 收敛.

从而, 采用极坐标就有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \sin r^2 dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt \\ &= \pi \left(\frac{-\sin t - \cos t}{(-1)^2 + 1^2} e^{-t} \right) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

计算积分:

$$4178. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f} dx dy,$$

其中 $a < 0$, $ac - b^2 > 0$.

解 我们有(令 $\delta = ac - b^2 > 0$, $t = x + \frac{b}{a}y$)

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= a \left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2 \right) \\ &\quad + \frac{ac - b^2}{a}y^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= a \left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= at^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2d \left(t - \frac{b}{a}y \right) + 2ey + f \\ &= a \left(t^2 + \frac{2d}{a}t + \frac{d^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2}{a} + \frac{\delta}{a} \left[y^2 + \frac{2}{\delta} (ae - bd) y \right. \\
& \left. + \frac{(ae - bd)^2}{\delta^2} \right] - \frac{(ae - bd)^2}{a\delta} + f \\
& = a \left(t + \frac{d}{a} \right)^2 + \frac{\delta}{a} \left(y + \frac{ae - bd}{\delta} \right)^2 + \beta,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta &= f - \frac{d^2}{a} - \frac{(ae - bd)^2}{a\delta} \\
&= \frac{1}{a\delta} [af(ac - b^2) - d^2(ac - b^2) \\
&\quad - (ae - bd)^2] \\
&= \frac{1}{\delta} (acf - b^2f - cd^2 - ae^2 + 2bde) = \frac{\Delta}{\delta},
\end{aligned}$$

这里

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

今作变量代换

$$\begin{cases} u = \sqrt{-a} x + \frac{b\sqrt{-a}}{a} y + \frac{d\sqrt{-a}}{a}, \\ v = \sqrt{-\frac{\delta}{a}} y + \sqrt{-\frac{\delta}{a}} \cdot \frac{ae - bd}{\delta}, \end{cases} \quad (1)$$

则 $\varphi(x, y) = -u^2 - v^2 + \beta$. 又

$$\begin{aligned}\frac{D(x, y)}{D(u, v)} &= \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} \sqrt{-a} & \frac{b}{a}\sqrt{-a} \\ 0 & \sqrt{-\frac{\delta}{a}} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} > 0,\end{aligned}$$

故线性变换 (1) 是非退化的, 它将 (x, y) 平面的点与 (u, v) 平面的点一一对应. 于是, 利用 4175 题的结果, 得

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi(x, y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - v^2 + \beta} \frac{1}{\sqrt{\delta}} du dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2 + v^2)} du dv \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}}.\end{aligned}$$

$$4179. \quad \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy.$$

解 作广义极坐标变换

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta,$$

由于被积函数非负，故

$$\begin{aligned} & \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} ab r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi ab \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=1}^{r=+\infty} = \frac{\pi}{e} ab. \end{aligned}$$

4180. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\varepsilon \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \quad (0 < |\varepsilon| < 1).$

解 作广义极坐标变换

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta,$$

则有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\varepsilon \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} a^2 b^2 r^3 \sin 2\theta e^{-r^2(1+\varepsilon \sin 2\theta)} dr d\theta. \quad (1) \end{aligned}$$

由于 $|r^3 \sin 2\theta e^{-r^2(1+\varepsilon \sin 2\theta)}| \leq r^3 e^{-r^2(1-|\varepsilon|)},$

而积分

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-|\varepsilon|)} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-|\varepsilon|)} dr \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-|\varepsilon|)} dr < +\infty, \end{aligned}$$

故 (1) 式中的二重广义积分收敛. 于是,

$$I = \frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \sin 2\theta \, d\theta \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1+\varepsilon \sin 2\theta)} dr. \quad (2)$$

但是

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1+\varepsilon \sin 2\theta)} dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-t(1+\varepsilon \sin 2\theta)} dt \\ &= -\frac{1}{2(1+\varepsilon \sin 2\theta)} \left[t e^{-t(1+\varepsilon \sin 2\theta)} \right]_{t=0}^{t=+\infty} \\ & \quad - \int_0^{+\infty} e^{-t(1+\varepsilon \sin 2\theta)} dt \\ &= \frac{1}{2(1+\varepsilon \sin 2\theta)} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+\varepsilon \sin 2\theta)} dt \\ &= \frac{1}{2(1+\varepsilon \sin 2\theta)^2}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon \sin 2\theta)^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\theta}{(1+\varepsilon \sin 2\theta)^2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{(1+\varepsilon \sin u)^2} du \\ &= \frac{1}{4} a^2 b^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{(1+\varepsilon \sin u)^2} du \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin u}{(1 + e \sin u)^2} du \\
& + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin u}{(1 + e \sin u)^2} du \\
& + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin u}{(1 + e \sin u)^2} du \Big] \\
& = \frac{1}{2} a^2 b^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 + e \sin u)^2} \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 - e \sin u)^2} \right]. \tag{3}
\end{aligned}$$

但是(作代换 $u = \frac{\pi}{2} - v$)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 + e \sin u)^2} \\
& = \frac{1}{e} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1 + e \sin u} - \frac{1}{(1 + e \sin u)^2} \right] du \\
& = \frac{1}{e} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1 + e \cos v} - \frac{1}{(1 + e \cos v)^2} \right] dv,
\end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 - e \sin u)^2} \\
& = -\frac{1}{e} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1 - e \cos v} - \frac{1}{(1 - e \cos v)^2} \right] dv.
\end{aligned}$$

根据 2028 题 (a) 和 2063 题的结果, 可知 (当 $0 < |\varepsilon| < 1$ 时)

$$\int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2} \\ &= -\frac{\varepsilon \sin x}{(1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos x)} \\ &+ \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctg \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned} \quad (5)$$

(注意, 2028 题 (a) 和 2063 题中假定 $0 < \varepsilon < 1$, 但从其推导过程可以看出公式 (4)、(5) 当 $-1 < \varepsilon < 0$ 时也成立)。

于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \, du}{(1 + \varepsilon \sin u)^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctg \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \arctg \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \right], \\ & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \, du}{(1 - \varepsilon \sin u)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} - \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right].$$

从而, 由 (3) 式得

$$I = \frac{1}{\varepsilon} a^2 b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right].$$

但对任何的 $x > 0$, 有

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

故最后得

$$I = \frac{1}{\varepsilon} a^2 b^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \cdot \frac{\pi}{2} \\ = - \frac{\pi \varepsilon a^2 b^2}{2 (1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

研究不连续函数的二重广义积分的收敛性 ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$),

4181. $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$, 式中域 Ω 是由条件 $|y| \leq x^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$

所确定.

解 显然, Ω 为图 8.61 中的阴影部分. 由于对称性以

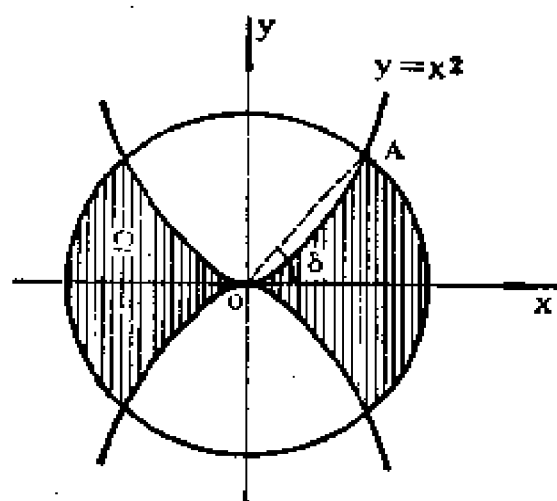


图 8.61

及被积函数的非负性，采用极坐标就有

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2} \\ &= 4 \int_0^\delta d\theta \int_{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}}^1 \frac{dr}{r} = 4 \int_0^\delta \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta, \end{aligned}$$

其中 δ 表图 8.61 中射线 OA 与 Ox 轴之间的夹角，抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程为 $r = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$ 。由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow +0} \theta^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos \theta \cdot \frac{\ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}}{\left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}}} = 0, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^\delta \ln \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} d\theta$ 收敛，从而原积分

$$\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2} \text{ 收敛.}$$

$$4182. \quad \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + xy + y^2)^p} dx dy.$$

解 由于

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x + y)^2 > 0$$

(当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时),

故

$$\begin{aligned} \frac{m}{(x^2 + xy + y^2)^p} &\leq \frac{|\varphi(x, y)|}{(x^2 + xy + y^2)^p} \\ &\leq \frac{M}{(x^2 + xy + y^2)^p} \quad (\text{当 } (x, y) \neq (0, 0) \text{ 时}), \end{aligned}$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{x^2 + xy + y^2} dx dy \text{ 与积分}$$

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + xy + y^2)^p} \text{ 同时收敛或同时发散.}$$

由于 $\frac{1}{(x^2 + xy + y^2)^p} > 0$ (当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时),

采用极坐标即得

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2 + xy + y^2)^p}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^p} \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}},$$

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^p}$ 为常义积分, 其值为有限数,

而

$$\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-p)}, & \text{当 } p < 1 \text{ 时;} \\ +\infty, & \text{当 } p \geq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此可知: 原积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+xy+y^2)^p} dx dy$

当 $p < 1$ 时收敛, 当 $p \geq 1$ 时发散.

4183. $\iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$

解 由对称性及被积函数的非负性, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \\ &= 4 \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \frac{dx dy}{x^p + y^q} \\ &= 4 \iint_{\Omega_1} \frac{dx dy}{x^p + y^q} + 4 \iint_{\Omega_2} \frac{dx dy}{x^p + y^q}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\Omega_1 = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, x^p + y^q \geq 2^{-p-q}\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0,$

由3856题的结果知右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{p}-1} \theta \cos^{\frac{2}{q}-1} \theta d\theta \quad (p > 0, q > 0)$$

恒收敛, 且其值为 $\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$; 而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3} dr$$

当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 > -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$) 时收敛, 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 \leq -1$ (即 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} \leq 1$) 时发散.

综上所述, 可知原积分 $\iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$ 当

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ 时收敛, 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ 时发散.

4184. $\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x-y|^p} dx dy.$

解 由于

$$\frac{m}{|x-y|^p} \leq \frac{|\varphi(x, y)|}{|x-y|^p} \leq \frac{M}{|x-y|^p},$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 可知积分

$\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x-y|^p} dx dy$ 与积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 同时收敛或

同时发散. 由对称性及被积函数的非负性, 可知

$$\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p} = 2 \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 < y < x}} \frac{dx dy}{(x-y)^p}. \quad (1)$$

当 $p < 1$ 时,

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 < y < x}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} &= \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p} \\ &= \int_0^a \frac{x^{1-p}}{1-p} dx = \frac{a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}. \end{aligned}$$

从而, 由 (1) 式知

$$\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p} = \frac{2a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

因此, 当 $p < 1$ 时积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 收敛.

现设 $p \geq 1$. 首先, 我们有

$$\begin{aligned} &\iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 < y < x}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\varepsilon \leq x \leq a \\ 0 < y < x-\varepsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p}. \end{aligned} \quad (2)$$

若 $p = 1$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{\varepsilon \leq x \leq a \\ 0 < y < x-\varepsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} &= \int_{\varepsilon}^a dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{x-y} \\ &= \int_{\varepsilon}^a (\ln x - \ln \varepsilon) dx = a \ln a - a + \varepsilon - a \ln \varepsilon, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\varepsilon < x < a \\ 0 < y < x-\varepsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (a \ln a - a + \varepsilon - a \ln \varepsilon) = +\infty. \end{aligned}$$

由此可知, 此时 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 发散; 若 $p=2$, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{\varepsilon < x < a \\ 0 < y < x-\varepsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^2} = \int_{\varepsilon}^a dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{(x-y)^2} \\ &= \int_{\varepsilon}^a \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{a}{\varepsilon} - 1 - \ln a + \ln \varepsilon, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\varepsilon < x < a \\ 0 < y < x-\varepsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{a + \varepsilon \ln \varepsilon}{\varepsilon} - 1 - \ln a \right) = +\infty. \end{aligned}$$

由此可知, 此时积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 发散; 最后, 若 $p > 1$, $p \neq 2$, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{\varepsilon < x < a \\ 0 < y < x-\varepsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = \int_{\varepsilon}^a dx \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{(x-y)^p} \\ &= \frac{1}{p-1} \int_{\varepsilon}^a (e^{1-p} - x^{1-p}) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(p-1)\varepsilon^{p-1}} \left(a - \frac{p-1}{p-2} \varepsilon \right) \\ + \frac{1}{(p-1)(p-2)a^{p-2}}.$$

从而,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\varepsilon \leq x \leq a \\ 0 < y \leq x - \varepsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} = +\infty.$$

由此可知, 此时积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 发散.

综上所述, 可知积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 当 $p < 1$ 时收敛, $p \geq 1$ 时发散.

4185. $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy.$

解 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x, y)|}{(1-x^2-y^2)^p} \\ \leq \frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy \text{ 与积分}$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^p} \text{ 同时收敛同时发散. 采用极}$$

坐标, 由于被积函数 $\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}$ 是正的, 故

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^p} dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{(1-r)^p (1+r)^p}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^p \cdot \frac{r}{(1-r)^p (1+r)^p} = 2^{-p},$$

故积分 $\int_0^1 \frac{r dr}{(1-r)^p (1+r)^p}$ 当 $p < 1$ 时收敛, $p > 1$ 时发散; 当 $p = 1$ 时, 有

$$\int_0^1 \frac{r dr}{1-r^2} = -\frac{1}{2} \ln(1-r^2) \Big|_0^1 = +\infty,$$

故积分也发散. 由此可知, 积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy \text{ 当 } p < 1 \text{ 时收敛, 当}$$

$p \geq 1$ 时发散.

4186. 证明, 如果, 1) 函数 $\varphi(x, y)$ 在有界域 $a \leq x \leq A$, $b \leq y \leq B$ 内是连续的, 2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $a \leq x \leq A$ 上连续; 3) $p < 1$, 则积分

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$$

收敛.

证 首先注意, 由于 $p < 1$, 故积分 $\int_b^B \frac{dy}{|f(x)-y|^p}$ 对每个固定的 $x \in [a, A]$ 恒收敛 (若 $f(x) \in (b, B)$, 此为瑕积分, 点 $f(x)$ 是瑕点, 由于 $p < 1$, 它收敛; 若 $f(x) \in [b, B]$, 则为常义积分, 当然收敛). 再根据 $\varphi(x, y)$ 的有界性, 即知: 对每个固定的 $x \in [a, A]$, 积分 $\int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x)-y|^p} dy$ 都收敛. 令

$$F(x) = \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x)-y|^p} dy \quad (a \leq x \leq A).$$

下面我们证明 $F(x)$ 是 $a \leq x \leq A$ 上的连续函数. 若已获证, 则积分

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x)-y|^p} dy = \int_a^A F(x) dx$$

显然是收敛的 (右端为常义积分), 于是本题即获证. 令 $c = \max_{a \leq x \leq A} |f(x)|$. 今将函数 $\varphi(x, y)$ 连续地延拓到有界闭矩形 $R(a \leq x \leq A, b-2c \leq y \leq B+2c)$ 上 (只要规定

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, B), & \text{当 } a \leq x \leq A, \\ & B < y \leq B+2c \text{ 时,} \\ \varphi(x, b), & \text{当 } a \leq x \leq A, \\ & b-2c \leq y < b \text{ 时} \end{cases}$$

即可). 延拓后的函数仍记为 $\varphi(x, y)$. 由于 $\varphi(x, y)$ 及 $|f(x)-y|^{1-p}$ 都在 R 上连续, 故有界且一致连续:

存在常数 M , 使对一切 $(x, y) \in R$, 有

$$|\varphi(x, y)| \leq M, \quad |f(x) - y|^{1-p} \leq M. \quad (1)$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ (取 $\delta_1 < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$), 使当 $|x_1 - x_2| < \delta_1$, $|y_1 - y_2| < \delta_1$ ($(x_1, y_1) \in R$, $(x_2, y_2) \in R$) 时, 恒有

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| < \varepsilon, \quad (2)$$

$$\left| |f(x_1) - y_1|^{1-p} - |f(x_2) - y_2|^{1-p} \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

又由 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上的一致连续性可知, 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 $|x_1 - x_2| < \delta_2$ ($x_1, x_2 \in [a, A]$) 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \delta_1. \quad (4)$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 于是, 由 (2) 式可知, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ ($x_1, x_2 \in [a, A]$) 时, 对一切 $b - c \leq y \leq B + c$, 恒有

$$|\varphi(x_1, y + f(x_1)) - \varphi(x_2, y + f(x_2))| < \varepsilon. \quad (5)$$

现设 $|x_1 - x_2| < \delta$, ($x_1, x_2 \in [a, A]$). 不失一般性, 设 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 我们有

$$\begin{aligned} & F(x_1) - F(x_2) \\ &= \int_b^B \frac{\varphi(x_1, y)}{|f(x_1) - y|^p} dy - \int_b^B \frac{\varphi(x_2, y)}{|f(x_2) - y|^p} dy \\ &= \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_1)} \frac{\varphi(x_1, u+f(x_1))}{|u|^p} du \\ &\quad - \int_{b-f(x_2)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2, u+f(x_2))}{|u|^p} du \\ &= \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_1, u+f(x_1)) - \varphi(x_2, u+f(x_2))}{|u|^p} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_1, u+f(x_1))}{|u|^p} du \\
& + \int_{b-f(x_1)}^{b-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2, u+f(x_2))}{|u|^p} du
\end{aligned}$$

$$= I_1 - I_2 + I_3, \quad (6)$$

其中 I_1, I_2, I_3 分别表上式中的三个积分. 易知 ($p < 1$)

$$\begin{aligned}
& \int_a^\beta \frac{du}{|u|^p} \\
& = \begin{cases} \frac{1}{1-p} [\beta^{1-p} - a^{1-p}], & \text{当 } 0 \leq a \leq \beta \text{ 时;} \\ \frac{1}{1-p} [(-a)^{1-p} - (-\beta)^{1-p}], & \text{当 } a \leq \beta \leq 0 \text{ 时;} \\ \frac{1}{1-p} [\beta^{1-p} + (-a)^{1-p}], & \text{当 } a < 0 < \beta \text{ 时.} \end{cases}
\end{aligned}$$

从而, 在任何情形下均有

$$\int_a^\beta \frac{du}{|u|^p} \leq \frac{1}{1-p} (|\beta|^{1-p} + |a|^{1-p}); \quad (7)$$

而当 a, β 同号时, 有

$$\int_a^\beta \frac{du}{|u|^p} = \frac{1}{1-p} \left| |\beta|^{1-p} - |a|^{1-p} \right|. \quad (8)$$

于是, 由 (5) 式、(1) 式及 (7) 式, 得

$$|I_1| \leq \varepsilon \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{1-p} (|B-f(x_2)|^{1-p} + |b-f(x_1)|^{1-p}) \\
&\leq \frac{2M\varepsilon}{1-p}. \quad (9)
\end{aligned}$$

下面估计 I_2 : 若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 同号, 则由 (1) 式、(8) 式及 (3) 式, 有

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \\
&= \frac{M}{1-p} \left| |B-f(x_2)|^{1-p} - |B-f(x_1)|^{1-p} \right| \\
&\leq \frac{M\varepsilon}{1-p},
\end{aligned}$$

若 $B-f(x_2)$ 与 $B-f(x_1)$ 异号, 即 $B-f(x_1) < 0 < B-f(x_2)$. 由于 $[B-f(x_2)] - [B-f(x_1)] = f(x_1) - f(x_2) < \delta_1$, 故有 $|B-f(x_1)| < \delta_1$, $|B-f(x_2)| < \delta_1$.

于是, 由 (7) 式并注意到 $\delta_1 < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$, 即得

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \\
&\leq \frac{M}{1-p} (|B-f(x_2)|^{1-p} + |B-f(x_1)|^{1-p}) \\
&< \frac{M}{1-p} (\delta_1^{1-p} + \delta_1^{1-p}) < \frac{M\varepsilon}{1-p}.
\end{aligned}$$

所以, 在任何情形下均有

$$|I_2| \leq \frac{M\varepsilon}{1-p}. \quad (10)$$

同理, 可得 (在任何情形下)

$$|I_3| \leq \frac{M\varepsilon}{1-p}. \quad (11)$$

于是, 由 (6) 式、(9) 式、(10) 式及 (11) 式, 即得

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &\leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \\ &\leq \frac{4M\varepsilon}{1-p}. \end{aligned}$$

由此可知, $F(x)$ 在 $a \leq x \leq A$ 上 (一致) 连续. 证毕.

计算下列积分:

$$4187. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

解 采用极坐标, 由于被积函数非负, 故有

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \ln \frac{1}{r} dr = -2\pi \int_0^1 r \ln r dr \\ &= -2\pi \left(\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2} dr \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$4188. \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \\ &= \int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx. \end{aligned}$$

作变量代换 $x=au$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx &= 2a \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= 2a B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2a \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \\ &= 2a \cdot \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi a. \end{aligned}$$

4189. $\iint_{\Omega} \ln \sin(x-y) dx dy$, 这里域 Ω 是由直线 $y=0$, $y=x$, $x=\pi$ 所界.

解 作变量代换 $x=u+v$, $y=u-v$, 则 Oxy 平面上的域 Ω 变为 uv 平面上的域 Ω' . 显然 Ω' 由直线 $u=v$, $v=0$, $u+v=\pi$ 所界. 又有 $-\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -2$.

于是, 再注意到被积函数非正, 即有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \ln \sin(x-y) dx dy \\ &= 2 \iint_{\Omega'} \ln \sin 2v du dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_v^{\pi-v} \ln \sin 2v \, du \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin 2v \, dv \\
&= 2 \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \, dv \\
&\quad + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v \, dv \\
&\quad + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \cos v \, dv \\
&= \pi^2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v \, dv \\
&\quad + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \ln \sin t \, dt \\
&= \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin v \, dv \\
&= \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right)^{*}) = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2.
\end{aligned}$$

*) 利用2353题(a)的结果.

4190.
$$\iint_{x^2+y^2 \leq \pi} \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

解 由关于 Ox 轴的对称性与被积函数的非负性, 采用极坐标, 有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq \pi} \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq x \\ y \geq 0}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2.
\end{aligned}$$

研究下列三重积分的收敛性:

4191. $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$, 这里 $0 < m$
 $\leq |\varphi(x, y, z)| \leq M$.

解 由于

$$\begin{aligned}
\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p} &\leq \frac{|\varphi(x, y, z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p} \\
&\leq \frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},
\end{aligned}$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 可知积分

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz \text{ 与积分}$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} \text{ 同时收敛或同时发散.}$$

由于被积函数 $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 是正的, 采用球坐标

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi,$$

得

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}} \\
&= 4\pi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}.
\end{aligned}$$

显然, $\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散;

由此可知, $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$

当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散.

4192. $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$, 这里 $0 < m$

$$\leq |\varphi(x, y, z)| \leq M.$$

解 和4191题完全类似 (请参看4191题的解题过程), 易得

$$\begin{aligned}
&\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}} \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}.
\end{aligned}$$

显然, $\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p < \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时发散;

故 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$ 当 $p < \frac{3}{2}$ 时

收敛, 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时发散.

4193. $\iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} \quad (p>0, q>0, r>0).$

解 由对称性及被积函数的非负性, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} \\ &= 8 \iiint_{\substack{x>0, y>0, z>0 \\ x+y+z>1}} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r} \\ &= 8 \iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r} + 8 \iiint_{\Omega_2} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}. \end{aligned}$$

其中 $\Omega_1 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z > 1, x^p + y^q + z^r \leq 3\}$, $\Omega_2 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z > 1, x^p + y^q + z^r > 3\}$.

令 $\Omega_3 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^p + y^q + z^r > 3\}$. 由于当 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^p + y^q + z^r > 3$ 时必有 $x+y+z > 1$ (否则, $x+y+z \leq 1$, 就有 $x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1$, 从而 $x^p \leq 1, y^q \leq 1, z^r \leq 1$, 于是 $x^p + y^q + z^r \leq 3$), 故 $\Omega_2 = \Omega_3$.

显然, $\iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}$ 为常义积分, 故积分

$\iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ 的敛散性取决于

$\iiint_{\Omega_3} \frac{dx dy dz}{x^p+y^q+z^r}$ 的敛散性. 对此积分, 作变量代换

$$x=R^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi\cos^{\frac{2}{r}}\psi,$$

$$y=R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi\cos^{\frac{2}{r}}\psi,$$

$$z=R^{\frac{2}{r}}\sin^{\frac{2}{r}}\psi,$$

则易知

$$\begin{aligned} & \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} \\ &= \frac{8}{pqr} R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1} \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi \\ & \quad \cdot \sin^{\frac{2}{r}-1}\psi \cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi. \end{aligned}$$

于是, 由被积函数的非负性, 并利用3856题的结果, 得

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_3} \frac{dx dy dz}{x^p+y^q+z^r} \\ &= \frac{8}{pqr} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{r}-1}\psi \cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi d\psi \\ & \quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi d\varphi \\ & \quad \cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3} dR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{pqr} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR \\
&= \frac{2}{pqr} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \\
&\quad \cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR.
\end{aligned}$$

由于积分 $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR$ 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 < -1$

(即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$) 时收敛, 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 \geq -1$

时发散, 故积分 $\iiint_{\Omega_3} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}$ (从而积分

$$\iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}) \text{ 当 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

< 1 时收敛, 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ 时发散.

4194. $\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{2}}},$ 其中 $0 < m$

$\leq |f(x, y, z)| \leq M$, 而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是在闭区间 $[0, a]$ 上的连续函数.

解 由于

$$\frac{m}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{2}}}$$

$$\leq \frac{|f(x, y, z)|}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$

$$\leq \frac{M}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分 $\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$ 与积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$
 同时收敛或同

时发散。由被积函数 $\frac{1}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$ 的非负性，我们有

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$

$$= \int_0^a F(x) dx,$$

其中

$$F(x) = \int_0^a \int_0^a \frac{dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$

$$(0 \leq x \leq a).$$

作变量代换

$$u = y - \varphi(x), \quad v = z - \psi(x) \quad (x \text{ 固定}),$$

则

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(y, z)}} = 1.$$

从而, 有

$$F(x) = \iint_{\substack{-\varphi(x) \leq u \leq a-\varphi(x) \\ -\psi(x) \leq v \leq a-\psi(x)}} \frac{du dv}{(u^2+v^2)^p}. \quad (1)$$

先设 $p < 1$. 令 $c = \max_{0 \leq x \leq a} (|\varphi(x)| + |\psi(x)|)$,

则由 (1) 式知

$$\begin{aligned} 0 < F(x) &\leq \iint_{\substack{-c \leq u \leq a+c \\ -c \leq v \leq a+c}} \frac{du dv}{(u^2+v^2)^p} \\ &\leq \iint_{u^2+v^2 \leq 2(a+c)^2} \frac{du dv}{(u^2+v^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}(a+c)} \frac{dr}{r^{2p-1}} \\ &= \frac{\pi}{1-p} [\sqrt{2}(a+c)]^{2-2p}, \end{aligned}$$

即 $F(x)$ 有界 (实际上, 仿 4186 题的证明过程还可证明 $F(x)$ 在 $0 \leq x \leq a$ 上连续), 从而 $\int_0^a F(x) dx$ 是常义积分, 显然收敛. 由此可知, 此时积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y-\varphi(x)]^2 + [z-\psi(x)]^2\}^p} \quad (2)$$

收敛.

次设 $p \geq 1$, 这时积分 (2) 可能收敛也可能发散, 分两种情况讨论:

i) 若不存在这样的 $x \in [0, a]$ 使 $0 \leq \varphi(x) \leq a$, $0 \leq \psi(x) \leq a$ 同时成立 (例如, $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 的值完

全位于 $[0, a]$ 之外；这时，对一切 $0 \leq x \leq a$ ， $0 \leq y \leq a$ ， $0 \leq z \leq a$ ，均有：连续函数 $\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p > 0$ 。从而，积分(2)收敛（这时是常义积分）。

ii) 若存在这样的点 $x \in [0, a]$ 使 $0 < \varphi(x) < a$ ， $0 < \psi(x) < a$ 同时成立；由 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的连续性，必存在正数 ε 及闭区间 $I_0 \subset [0, a]$ ，使当 $x \in I_0$ 时，恒有 $\varepsilon \leq \varphi(x) \leq a - \varepsilon$ ， $\varepsilon \leq \psi(x) \leq a - \varepsilon$ ，从而由(1)式知：当 $x \in I_0$ 时，有

$$\begin{aligned} F(x) &\geq \iint_{\substack{-\varepsilon \leq u \leq \varepsilon \\ -\varepsilon \leq v \leq \varepsilon}} \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^p} \\ &\geq \iint_{u^2 + v^2 \leq \varepsilon^2} \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r^{2p-1}} \\ &= 2\pi \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r^{2p-1}} = +\infty \quad (\text{注意 } p \geq 1), \end{aligned}$$

即当 $x \in I_0$ 时恒有 $F(x) = +\infty$ ，由此可知，积分 $\int_0^a F(x) dx$ 发散。于是，积分(2)发散。

综上所述，可知：积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$

当 $p < 1$ 时收敛；当 $p \geq 1$ 时，若不存在 $x \in [0, a]$

使 $0 \leq \varphi(x) \leq a$, $0 \leq \psi(x) \leq a$, 则收敛; 若存在 $x \in [0, a]$, 使 $0 < \varphi(x) < a$, $0 < \psi(x) < a$, 则发散.

$$4195. \iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}.$$

解 我们有 (注意被积函数的非负性)

$$\begin{aligned} & \iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p} \\ &= 2 \iiint_{\substack{|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 \\ x+y-z \geq 0}} \frac{dx dy dz}{(x+y-z)^p} \\ &= 2 \iint_{\substack{|x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ -1 \leq x+y \leq 1}} dx dy \int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{(x+y-z)^p} \\ &\quad + 2 \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \geq 1}} dx dy \int_{-1}^1 \frac{dz}{(x+y-z)^p} \\ &= 2I_1 + 2I_2, \end{aligned}$$

其中 I_1 表第一个积分, I_2 表第二个积分.

若 $p < 1$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{(x+y-z)^p} &= \frac{(x+y+1)^{1-p}}{1-p}, \\ \int_{-1}^1 \frac{dz}{(x+y-z)^p} & \end{aligned}$$

$$= \frac{(x+y+1)^{1-p} - (x+y-1)^{1-p}}{p-1} \quad (x+y \geq 1),$$

故

$$I_1 = \frac{1}{1-p} \iint_{\substack{|x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ -1 \leq x+y \leq 1}} (x+y+1)^{1-p} dx dy,$$

$$I_2 = \frac{1}{1-p} \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \geq 1}} [(x+y+1)^{1-p} - (x+y-1)^{1-p}] dx dy.$$

显然, I_1 与 I_2 均为常义 (二重) 积分, 当然收敛.

因此, 积分 $\iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}$ 收敛.

若 $p \geq 1$, 则当 $x+y > -1$ 时,

$$\int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{(x+y-z)^p} = +\infty,$$

故 $I_1 = +\infty$, 又显然有 $I_2 \geq 0$, 故此时积分

$$\iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}$$

发散.

计算积分:

$$4196. \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r}.$$

解 由于被积函数非负, 故

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \int_0^1 \frac{dy}{y^q} \int_0^1 \frac{dz}{z^r} \\
&= \frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)} \quad (\text{若 } p < 1, q < 1, r < 1).
\end{aligned}$$

注意, 若 $p \geq 1$ 或 $q \geq 1$ 或 $r \geq 1$, 则

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} = +\infty.$$

4197.
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

解 采用球坐标. 由于被积函数的非负性, 有

$$\begin{aligned}
& \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^4} \\
&= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

4198.
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$$

解 采用球坐标. 由于被积函数的非负性, 有

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr.
\end{aligned}$$

作代换 $t=r^2$, 则当 $p < 1$ 时有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{r^2}{(1-r^2)^p} dr &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-p} dt \\
&= \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).
\end{aligned}$$

从而, 当 $p < 1$ 时有

$$\begin{aligned}
&\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} \\
&= 2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right).
\end{aligned}$$

注意, 若 $p \geq 1$, 则 $\int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-p} dt = +\infty$, 故

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = +\infty.$$

4199. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$

解 采用球坐标. 由被积函数的非负性, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr \\
&= 4\pi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr.
\end{aligned}$$

作代换 $r^2 = t$, 则

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz = \pi^{\frac{3}{2}}.$$

4200. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

其中 $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 为正定形.

解 用 A 表矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

由于二次型 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ 是正定的, 故由高等代数

中关于二次型的理论知：存在正交矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\text{使 } B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$ ；也即在线性(正交)变换

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3 \\ x_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3 \\ x_3 = b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3 \end{cases} \quad (3)$$

之下，二次型 $P(x_1, x_2, x_3)$ 化为平方和：

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \bar{x}_i x_j \\ &= \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2. \end{aligned} \quad (4)$$

注意，由于 B 是正交矩阵，故 $B^{-1} = B'$ (B' 表 B 的转置矩阵)，从而 $|B| = |b_{ij}| = \pm 1$ 。显然，

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x'_1, x'_2, x'_3)} = |b_{ij}| = \pm 1.$$

由(4)式，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2 - \lambda_2 x_2'^2 - \lambda_3 x_3'^2} dx_1' dx_2' dx_3'. \quad (5)$$

再作变量代换 $x_1' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} u_1$, $x_2' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} u_2$,

$$x_3' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} u_3, \quad \text{则} \quad \frac{D(x_1', x_2', x_3')}{D(u_1, u_2, u_3)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}.$$

于是 (注意 4199 题的结果)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2 - \lambda_2 x_2'^2 - \lambda_3 x_3'^2} dx_1' dx_2' dx_3' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} du_1 du_2 du_3 \\ &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}. \end{aligned} \quad (6)$$

但由 (2) 式知 (记 $\Delta = |a_{ij}| = |A|$, 注意, 由于 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ 是正定的, 故 $\Delta > 0$)

$$\Delta = |A| = |B^{-1}| \cdot |A| \cdot |B| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (7)$$

于是, 根据 (5), (6), (7) 诸式, 最后得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}. \end{aligned}$$

§10. 多重积分

1° 多重积分的直接算法 若函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在由下列不等式所确定的有界域 Ω 内是连续的:

[illegible]

其中 x_1' 和 x_1'' 为常数及 $x_2'(x_1)$, $x_2''(x_1)$, \dots , $x_n'(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $x_n''(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ 为连续函数, 则对应的多重积分可按下列公式来计算:

$$\begin{aligned} & \int \int \cdots \int_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \cdots \\ & \quad \int_{x_n'(x_1, \dots, x_{n-1})}^{x_n''(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned}$$

2° 重积分中的变量代换 若 1) 函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在有界可测的域 Ω 内是均匀连续的; 2) 连续可微分的函数

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

把 Ox_1, x_2, \dots, x_n 空间的域 Ω 双方单值地映射成 $O\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 空间内的有界域 Ω' ; 3) 在域 Ω' 内雅哥比式

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \neq 0,$$

则下面的公式正确

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \iint_{\Omega'} \dots \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) |I| d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

特别是, 根据公式

$$x_1 = r \cos \varphi_1,$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1},$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}$$

变换成极坐标时 $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$, 有

$$\begin{aligned} I &= \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} \\ &= r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}. \end{aligned}$$

4201. 设 $K(x, y)$ 为域 $R[a \leq x \leq b; a \leq y \leq b]$ 内的连续函数及

$$\begin{aligned} K_n(x, y) &= \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \dots \\ &\quad \cdot K(t_n, y) dt_1 dt_2 \dots dt_n, \end{aligned}$$

证明:

$$K_{n+n+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_n(t, y) dt.$$

证

$$\begin{aligned}
 K_{n+m+1}(x, y) &= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \\
 &\cdots K(t_n, t) K(t, z_1) K(z_1, z_2) \cdots K(z_m, y) dt_1 dt_2 \\
 &\cdots dt_n dt dz_1 dz_2 \cdots dz_m \\
 &= \int_a^b \left\{ \left[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \right. \right. \\
 &\left. \cdots K(t_n, t) dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right] \\
 &\cdot \left[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(t, z_1) K(z_1, z_2) \right. \\
 &\left. \cdots K(z_m, y) dz_1 dz_2 \cdots dz_m \right] \Big\} dt \\
 &= \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt.
 \end{aligned}$$

4202. 设 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为域 $0 \leq x_i \leq x$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 内的连续函数, 证明等式

$$\begin{aligned}
 &\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n \\
 &= \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1 \quad (n \geq 2).
 \end{aligned}$$

证 考虑下面三个有界闭域:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq x, \\ i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 \leq x, \\ 0 \leq x_2 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq x_{n-1}\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_n \leq x,$$

$$x_n \leq x_{n-1} \leq x, \dots, x_2 \leq x_1 \leq x\}.$$

由假定 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在域 Ω 上连续, 显然, $\Omega_1 \subset \Omega$, $\Omega_2 \subset \Omega$, 故 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在 Ω_1 与 Ω_2 上连续. 根据化 n 重积分为累次积分的公式, 我们有

$$\begin{aligned} & \iint \dots \int_{\Omega_1} f \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f \, dx_n, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \iint \dots \int_{\Omega_2} f \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \dots \int_{x_2}^x f \, dx_1. \end{aligned} \quad (2)$$

下证 $\Omega_1 = \Omega_2$, 事实上, 若 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1$, 则

$$0 \leq x_1 \leq x, \quad 0 \leq x_2 \leq x_1, \quad \dots, \quad 0 \leq x_n \leq x_{n-1}, \quad (3)$$

从而

$$0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq x_{n-2} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 \leq x. \quad (4)$$

于是,

$$0 \leq x_n \leq x, \quad x_n \leq x_{n-1} \leq x, \quad \dots, \quad x_2 \leq x_1 \leq x. \quad (5)$$

由此可知 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2$. 反之, 若 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2$, 则 (5) 式成立, 从而, (4) 式显然成立, 由此又知 (3) 式成立, 故 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1$, 于是 $\Omega_1 = \Omega_2$ 获证. 由此, 再根据 (1) 式与 (2) 式, 即得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f \, dx_n$$

$$= \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1.$$

证毕.

4203. 证明

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n, \end{aligned}$$

其中 f 为连续函数.

证 证法一

我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n \\ &= \int_0^t f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \\ & \quad \cdots \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n. \end{aligned}$$

令 $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$. 由于 f 是连续函数, 故

$F'(s) = f(s)$. 我们有 (注意到 $F(0) = 0$)

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} \end{aligned}$$

$$= \int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1}) F'(t_{n-1}) dt_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} [F(t_{n-1})]^2 \Big|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=t_{n-2}}$$

$$= \frac{1}{2} [F(t_{n-2})]^2,$$

由此

$$\int_0^{t_{n-3}} f(t_{n-2}) dt_{n-2} \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1}$$

$$\int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$= \int_0^{t_{n-3}} \frac{1}{2} [F(t_{n-2})]^2 F'(t_{n-2}) dt_{n-2}$$

$$= \frac{1}{3!} [F(t_{n-3})]^3,$$

.....

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} [F(t_1)]^{n-1}.$$

于是，

$$\int_0^t f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} [F(t_1)]^{n-1} f(t_1) dt_1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t [F(t_1)]^{n-1} F'(t_1) dt_1 \\
&= \frac{1}{n!} [F(t)]^n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n \\
&= \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n. \text{ 证毕.}
\end{aligned}$$

证法二

用归纳法证明所述公式. 当 $n=1$ 时此公式显然成立, 今设 $n=k$ 时成立, 要证 $n=k+1$ 时也成立. 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \\
&= \int_0^t f(t_1) \left[\int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \right] dt_1.
\end{aligned}$$

由于假定公式当 $n=k$ 时成立, 故

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \\
&= \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right\}^k.
\end{aligned}$$

从而 (令 $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$, 则 $F'(s) = f(s)$)

$$\begin{aligned}
& \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \\
&= \int_0^t f(t_1) \cdot \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right\}^k dt_1 \\
&= \frac{1}{k!} \int_0^t [F(t_1)]^k F(t_1) dt_1 \\
&= \frac{1}{(k+1)!} [F(t)]^{k+1} \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^{k+1},
\end{aligned}$$

因此, 所述公式当 $n=k+1$ 时成立. 于是, 由归纳法知所述公式对一切自然数 n 均成立. 证毕.

计算下列多重积分:

4204. (a) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n;$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

解 (a) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$
 $= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_n$
 $= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots$
 $+ x_{n-1}^2 + \frac{1}{3}) dx_{n-1}$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots \right. \\
&\quad \left. + x_{n-2}^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) dx_{n-2} \\
&= \cdots \cdots \\
&= \frac{n}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad &\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 [(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \\
&\quad + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3 \\
&\quad + \cdots + x_2 x_n + x_3 x_4 + \cdots + x_3 x_n + \cdots \\
&\quad + x_{n-1} x_n)] dx_n \\
&= \frac{n}{3}^{*)} + 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 [(x_1 x_2 + \cdots \\
&\quad + x_1 x_n) + (x_2 x_3 + \cdots + x_2 x_n) \\
&\quad + \cdots + x_{n-1} x_n] dx_n \\
&= \frac{n}{3} + 2 \left(\frac{n-1}{4} + \frac{n-2}{4} + \cdots + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{n(3n+1)}{12}.
\end{aligned}$$

*) 利用本题 (a) 的结果.

$$4205. \quad I_n = \int\limits_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0} \int\limits_{x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a} \cdots \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

解 解法一:

化为累次积分, 有

$$I_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \\ \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n,$$

我们又知

$$\begin{aligned} & \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n \\ &= \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} (a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1}) dx_{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} (a-x_1-\cdots \\ & \quad -x_{n-2}-x_{n-1})^2 \Big|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} (a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2, \\ & \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \\ & \quad \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n \\ &= \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}} \frac{1}{2} (a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2 dx_{n-2} \\ &= \frac{1}{3!} (a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3, \\ & \cdots \cdots \cdots \end{aligned}$$

这样继续下去，显然有

$$\begin{aligned} & \int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-x_1-x_2} dx_3 \\ & \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} (a-x_1)^{n-1}. \end{aligned}$$

于是，

$$I_n = \int_0^a \frac{1}{(n-1)!} (a-x_1)^{n-1} dx_1 = \frac{a^n}{n!}.$$

解法二：

我们有

$$I_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n.$$

在右端的逐次积分中作代换：

$$x_1 = a\xi_1, \quad x_2 = a\xi_2, \quad \cdots, \quad x_n = a\xi_n,$$

即得

$$\begin{aligned} I_n &= a^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}} d\xi_n \\ &= a^n \int \int \cdots \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leq 1}} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \\ &= a^n \cdot I_n(1), \end{aligned}$$

其中 $I_n(1)$ 表示当 $a=1$ 时积分 I_n 的值。

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
I_n(1) &= \int_0^1 d\xi_n \iint \cdots \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1} \leq 1 - \xi_n}} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-1} \\
&= I_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - \xi_n)^{n-1} d\xi_n \\
&= \frac{I_{n-1}(1)}{n}.
\end{aligned}$$

反复运用上述循环公式, 可得

$$I_n(1) = \frac{1}{n!},$$

于是, 最后得

$$I_n = \frac{a^n}{n!}.$$

4206. $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n.$

$$\begin{aligned}
&\text{解} \quad \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n \\
&= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{1}{2} x_1 x_2 \cdots x_{n-1}^2 dx_{n-1} \\
&= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x_1 x_2 \cdots x_{n-2}^3 dx_{n-2} \\
&= \cdots \cdots \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{2(n-1)} \int_0^1 x_1^{2^{n-1}} dx_1 \\
&= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{1}{2^n \cdot n!}.
\end{aligned}$$

注：也可利用4203题的结果直接得

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n \\ = \frac{1}{n!} \left(\int_0^1 \tau d\tau \right)^n = \frac{1}{n! 2^n}.$$

4207.
$$\iiint \dots \int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

[illegible]

则由 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$ 知

$$0 \leq u_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

且有

$$I = \begin{vmatrix} 1-u_2 & u_2(1-u_3) \cdots u_2 u_3 \cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_2 u_3 \cdots u_n \\ -u_1 & u_1(1-u_3) \cdots u_1 u_3 \cdots u_{n-1}(1-u_n) & u_1 u_3 \cdots u_n \\ 0 & -u_1 u_2 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & u_1 u_2 \cdots u_{n-2}(1-u_n) & u_1 \cdots u_{n-2} u_n \\ 0 & 0 & \dots & -u_1 \cdots u_{n-1} & u_1 \cdots u_{n-1} \end{vmatrix}$$

如在每一列的元素上加上所有以后各列相应的元素，
则在对角线下面的全部元素都等于零，而在对角线上

的元素就等于 $1, u_1, u_1 u_2, \dots, u_1 \cdots u_{n-1}$. 因此, 得

$$I = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \cdots u_{n-1}.$$

于是, 最后得

$$\begin{aligned} & \iiint_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \cdots \int \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 u_1^{n-1} u_2^{n-2} \cdots u_{n-1} du_1 du_2 \cdots du_{n-1} du_n \\ &= \frac{2}{(n-1)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

4208. 求由平面

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

所界的 n 维平行 $2n$ 面体的体积, 这里设 $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$.

解 令 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \xi_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$, 即得 $2n$ 面体的体积

$$\begin{aligned} V &= \int_{-h_1}^{h_1} \int_{-h_2}^{h_2} \cdots \int_{-h_n}^{h_n} \frac{1}{|\Delta|} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \\ &= \frac{2^n h_1 \cdots h_n}{|\Delta|}. \end{aligned}$$

4209. 求 n 维角锥

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$(a_i > 0, \quad i=1, 2, \dots, n)$$

的体积.

解 令 $x_i = a_i \xi_i$, ($i=1, 2, \dots, n$), 即得体积

$$V = a_1 a_2 \cdots a_n \int \int \cdots \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \dots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leq 1}} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \\ = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!} \quad *)$$

*) 利用4205题的结果.

4210. 求由曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n$$

所界的 n 维锥的体积.

解 作代换:

$$x_1 = a_1 r \cos \varphi_1,$$

$$x_2 = a_2 r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n-2} = a_{n-2} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2},$$

$$x_{n-1} = a_{n-1} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2},$$

$$x_n = a_n x'_n,$$

则域 V 为

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq \pi, \quad \dots,$$

$$0 \leq \varphi_{n-3} \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi_{n-2} \leq 2\pi, \quad r \leq x'_n \leq 1,$$

并且 $|I| = a_1 a_2 \cdots a_n r^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_1 \sin^{n-4} \varphi_2 \sin \varphi_{n-3}.$

于是, 体积为

$$V = a_1 a_2 \cdots a_n \int_0^1 r^{n-2} dr \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1$$

$$\begin{aligned}
& \dots \int_0^x \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi_{n-2} \right] \dots d\varphi_n \\
& = \frac{2\pi a_1 a_2 \dots a_n}{n(n-1)} \int_0^x \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \\
& \quad \dots \int_0^x \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \\
& = \frac{2\pi a_1 a_2 \dots a_n}{n(n-1)} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \\
& \quad \dots 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \quad *) \\
& = \frac{2\pi a_1 a_2 \dots a_n}{n(n-1)} \\
& \quad \cdot B\left(-\frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(-\frac{n-3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
& \quad \dots B\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad **) \\
& = \frac{2\pi a_1 a_2 \dots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\Gamma\left(-\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{n-1}{2}\right)} \\
& \quad \cdot \frac{\Gamma\left(-\frac{n-3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{n-2}{2}\right)} \dots \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
& = \frac{2\pi a_1 a_2 \dots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-3}}{\Gamma\left(-\frac{n-1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
&= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
&= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \cdots a_n.
\end{aligned}$$

*) 利用等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \varphi \, d\varphi \quad (a > 0)$,

即得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \sin^{a-1} \varphi \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{a-1} \varphi \, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \varphi \, d\varphi \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi \, d\varphi.
\end{aligned}$$

**) 利用3856题的结果.

4211. 求 n 维球体

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2$$

的体积。

解 令 $x_i = a\xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，即得体积

$$V_n = \iiint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = a^n V_n(1),$$

其中 $V_n(1)$ 表示 $a = 1$ 时的 n 维球体的体积。但是，

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \iiint \cdots \int_{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \leq 1} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \\ &= \int_{-1}^1 d\xi_n \iiint \cdots \int_{\xi_1^2 + \cdots + \xi_{n-1}^2 \leq 1 - \xi_n^2} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-1} \\ &= V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - \xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n \\ &= 2V_{n-1}(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi d\varphi \\ &= 2V_{n-1}(1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \\ &= V_{n-1}(1) \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \end{aligned}$$

因为 $V_1(1) = 2$ ，故由上述循环公式可得

$$V_n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

因而，所求的体积为

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} a^n.$$

对于 n 为偶数及奇数，分别可得公式

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} a^{2m},$$

$$V_{2m+1} = \frac{2 \cdot (2\pi)^m}{(2m+1)!} a^{2m+1}.$$

特别是，对于 V_1, V_2, V_3 可求得熟知的值： $2a$,

$$\pi a^2, \quad \frac{4}{3} \pi a^3.$$

4212. 求 $\iiint_{\Omega} \cdots \int x_n^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ ，其中域 Ω 是由下列不等式所确定：

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \iiint_{\Omega} \cdots \int x_n^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_n^2 dx_n \iint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq a^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \\ &= \frac{h^3}{12} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a^{n-1} \quad *). \end{aligned}$$

*) 利用4211题的结果.

4213. 计算

$$\iint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \iint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}} \\ &= \iint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \\ & \quad \int_{-\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}} \frac{dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}} \\ &= \pi \iint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \\ &= \pi \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} \quad *) = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

*) 利用4211题的结果.

4214. 证明等式

$$\begin{aligned} & \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \int_0^x f(u) \cdot \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{证} \quad \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\
&= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \cdots \int_{x_2}^x dx_1 \quad *) \\
&= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \\
&\quad \cdots \int_{x_3}^x (x - x_2) dx_2 \\
&= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \\
&\quad \cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2} (x - x_3)^2 dx_3 \\
&= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \\
&\quad \cdots \int_{x_5}^x \frac{1}{2 \cdot 3} (x - x_4)^3 dx_4 \\
&= \cdots \cdots \cdots \\
&= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x \frac{1}{(n-2)!} (x - x_{n-1})^{n-2} dx_{n-1} \\
&= \int_0^x \frac{(x - x_n)^{n-1}}{(n-1)!} f(x_n) dx_n.
\end{aligned}$$

在上述积分中，将 x_n 代之以 u ，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$$

$$= \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.$$

*) 利用4202题的结果.

4215. 证明等式

$$\begin{aligned} & \int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du. \end{aligned}$$

证 利用4202题的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} \\ &= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \\ & \quad \cdots \int_{x_2}^x x_1 dx_1 \\ &= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \\ & \quad \cdots \int_{x_3}^x \frac{1}{2} (x^2 - x_2^2) x_2 dx_2 \\ &= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \\ & \quad \cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2^2 \cdot 2} (x^2 - x_3^2)^2 x_3 dx_3 \\ &= \cdots \cdots \cdots \\ &= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x \frac{1}{2^{n-1} (n-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (x^2 - x_{n+1}^2)^{n-1} x_n dx_n \\
& = \int_0^x \frac{1}{2^n n!} f(x_{n+1}) (x^2 - x_{n+1})^n dx_{n+1}.
\end{aligned}$$

于是, 将 x_{n+1} 代之以 u , 不影响积分的值, 故得

$$\begin{aligned}
& \int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} \\
& = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.
\end{aligned}$$

4216. 证明迪里黑里公式

$$\begin{aligned}
& \iint \cdots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \\
& \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
& = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 1)} \\
& \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0).
\end{aligned}$$

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n = 1$ 时, 公式显然成立, 即

$$\int_{0 \leq x_1 \leq 1} x_1^{p_1-1} dx_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1 + 1)}.$$

其次, 设公式对 $n-1$ 成立, 今证公式对 n 也成立. 为此, 将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1} dx_n \iint \cdots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq 1 - x_n}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

在里面的 $n-1$ 重积分中进行代换:

$$x_1 = (1 - x_n) \xi_1, \quad x_2 = (1 - x_n) \xi_2, \quad \dots, \\ x_{n-1} = (1 - x_n) \xi_{n-1},$$

$$\begin{aligned} \text{即得} & \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + 1)} \\ & \cdot \int_0^1 x_n^{p_n-1} (1 - x_n)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}} dx_n \\ & = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1)} \\ & \quad \cdot B(p_n, p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1) \\ & = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1)} \\ & \quad \cdot \frac{\Gamma(p_n) \cdot \Gamma(p_1 + \cdots + p_{n-1} + 1)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n + 1)} \\ & = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 1)}. \end{aligned}$$

这样一来, 我们得知公式对 n 重积分也正确. 而对 n 为任意的自然数时, 迪里黑里公式均成立.

4217. 证明柳维耳公式

$$\begin{aligned}
& \iint \cdots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\
& \cdot x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
& = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n)} \\
& \cdot \int_0^1 f(u) u^{p_1 + p_2 + \dots + p_n - 1} du \\
& \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0),
\end{aligned}$$

式中 $f(u)$ 为连续函数.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n = 1$ 时, 公式显然成立. 当 $n = 2$ 时, 公式也成立, 即

$$\begin{aligned}
& \iint_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 1}} f(x_1 + x_2) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2 \\
& = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1 + p_2 - 1} du.
\end{aligned}$$

事实上, 令 Ω 表域: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 1$. 作代换:

$$x_1 = \xi_1, \quad x_1 + x_2 = \xi_2, \quad \text{及} \quad t = \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

则有

$$\iint_{\Omega} f(x_1 + x_2) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^{\xi_2} \xi_1^{p_1-1} (\xi_2 - \xi_1)^{p_2-1} d\xi_1 \\
&= \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^1 t^{p_1-1} (1-t)^{p_2-1} \xi_2^{p_1+p_2-1} dt \\
&= \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)} \int_0^1 f(\xi_2) \xi_2^{p_1+p_2-1} d\xi_2 \\
&= \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2-1} du.
\end{aligned}$$

其次，设公式对于 $n-1$ 成立，今证对于 n 公式也成立。为此，将公式左端写为

$$\begin{aligned}
&\iint \cdots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 dx_2 \\
&\quad \cdots dx_n \int_0^{1-(x_1+x_2+\dots+x_{n-1})} f(x_1+x_2+\dots+x_n) \\
&\quad \cdot x_n^{p_n-1} dx_n.
\end{aligned}$$

如令

$$\psi(t) = \int_0^{1-t} f(t+x_n) x_n^{p_n-1} dx_n$$

代入上式，并利用公式对 $n-1$ 成立的假定，得知上式为

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_{n-1})} \\
&\quad \cdot \int_0^1 \psi(t) t^{p_1+p_2+\dots+p_{n-1}-1} dt.
\end{aligned}$$

利用上面已证的 $n = 2$ 时的公式，于是即得

$$\begin{aligned}
 & \iiint \cdots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\
 & \quad \cdot x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
 &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \int_0^1 dt \int_0^{1-t} f(t+x_n) \\
 & \quad \cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1} x_n^{p_n-1} dx_n \\
 &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \iiint_{\substack{t, x_n \geq 0 \\ t+x_n \leq 1}} f(t+x_n) \\
 & \quad \cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1} x_n^{p_n-1} dt dx_n \\
 &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \\
 & \quad \cdot \frac{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \\
 & \quad \cdot \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du \\
 &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \\
 & \quad \cdot \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du,
 \end{aligned}$$

即公式对于 n 成立。从而，公式对于任意自然数均成立。

4218† 將展布于域 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$ 上的 n 重积分
($n \geq 2$)

$$\iiint_{\Omega} \cdots \int f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

化为单积分, 其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 作代换:

$$x_1 = Rr \cos \varphi,$$

$$x_2 = Rr \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

.....

$$x_{n-1} = Rr \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1},$$

$$x_n = Rr \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1},$$

则有

$$I = R^n r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \cdots \int f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= R^n \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \\ & \quad \cdot \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \\ &= 2\pi R^n \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
& \cdot \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr^{*}) \\
& = R^n \frac{2\pi \cdot \pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr \\
& = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 (r^2)^{\frac{n}{2}-1} f(Rr) d(r^2) \\
& = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1} f(R\sqrt{u}) du.
\end{aligned}$$

*) 参看4210题的计算过程.

4219. 计算半径为 R , 密度为 ρ_0 的均匀球对自己的位, 即求积分

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \cdot \iiint\limits_{\substack{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq R^2}} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

解 我们有

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint\limits_{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$\iiint_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}.$$

由4155题的结果可知

$$\iiint_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}} = 2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中 $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. 于是 (利用球坐标)

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq R^2} \left(2\pi R^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3}\pi r_1^2 \right) dx_1 dy_1 dz_1 \\ &= \frac{\rho_0}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \\ &\quad \cdot \int_0^R \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r^2 \right) r^2 dr \\ &= \frac{16}{15}\pi^2 \rho_0^2 R^5. \end{aligned}$$

4220. 设 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij}=a_{ji}$) 为正定形, 计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

解 作变量代换

$$x_i = y_i + \alpha_i \quad (i=1, 2, \cdots, n), \quad (1)$$

其中诸常数 α_i 以下再确定. 于是易得 (注意到 $a_{ij}=a_{ji}$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) + b_i \right] y_i \\ & \quad + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i \alpha_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + c. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ 是正定形, 故必有 $\delta = |a_{ij}| > 0$, 从而线性方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j + b_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

有唯一的一组解 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. 今取变换 (1) 式中的诸 α_i 即为方程组 (2) 的解. 于是,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + c', \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } c' &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + c \\ &= - \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + c \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + c. \end{aligned} \quad (4)$$

下面我们用诸 a_{ij} 和 b_i 及 c 来表出 c' ，令

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \vdots & b_n \\ b_1 & \vdots & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} & b_n \\ b_1 \cdots b_n & c \end{vmatrix}$$

($n+1$ 阶行列式，即 $|a_{ij}|$ 的加边行列式)。将此行列式的第一列乘上 α_1 ，第二列乘上 α_2 ， \cdots ，第 n 列乘上 α_n 都加到第 $n+1$ 列上去，并注意到 (2) 式与 (4) 式，得

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{1j} & \vdots & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & \vdots & b_n \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1j} & \vdots & \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i + b_j \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & \vdots & \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i + c \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{1j} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & \vdots & 0 \\ b_j & \vdots & c \end{vmatrix} = c |a_{ij}| = c' \delta, \end{aligned}$$

故

$$c' = -\frac{\Delta}{\delta}. \quad (5)$$

由于 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j$ 是正定二次型，故由高等代数中二次型的理论知，存在正交矩阵

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

使在线性变换

$$y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} z_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

下，二次型变为平方和：

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2, \quad (7)$$

其中 $\lambda_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$)，也即

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 。由于 P 为正交矩阵，

故 $P^{-1} = P'$ (P' 表 P 的转置矩阵)，且 $|P| = |p_{ij}| = \pm 1$ 。由 (8) 式又知

$$\delta = |a_{ij}| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (9)$$

根据 (1) 式与 (6) 式，可知

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = 1,$$

$$\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(z_1, \dots, z_n)} = |p_{ij}| = |P| = \pm 1.$$

于是，利用广义 n 重积分的变量代换公式，并注意到被积函数的非负性，得（注意 (3) 式、(5) 式与 (7) 式）

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + c' \right\}} \\
&\quad \left| \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} \right| dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\
&= e^{-\frac{A}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j \right\}} dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\
&= e^{-\frac{A}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2} \\
&\quad \left| \frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(z_1, \cdots, z_n)} \right| dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\
&= e^{-\frac{A}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2} dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\
&= e^{-\frac{A}{\delta}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 z_1^2} dz_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_2 z_2^2} dz_2 \right) \\
&\quad \cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_n z_n^2} dz_n \right).
\end{aligned}$$

作代换 $z_i = \frac{u}{\sqrt{\lambda_i}}$ (i 固定), 得

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_i z_i^2} dz_i &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}$$

以此代入上式, 并注意到 (9) 式, 最后得

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \right\}} \\ \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ = e^{-\frac{A}{\delta}} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}} e^{-\frac{A}{\delta}}.$$

§11. 曲线积分

1° 第一型的曲线积分 若 $f(x, y, z)$ 在平滑曲线 C ,

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

的各点上有定义并且是连续的函数, ds 为弧的微分, 则

$$\int_C f(x, y, z) ds \\ = \int_{t_0}^T f[x(t), y(t), z(t)] \\ \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

这个积分的特性在于它与曲线 C 的方向无关.

2° 第一型曲线积分在力学方面的应用 若 $\rho = \rho(x, y, z)$ 为曲线 C 在流动点 (x, y, z) 的线密度, 则曲线 C 的质量等于

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

此曲线的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) 由下面的公式来表示

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds,$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds.$$

3° 第二型的曲线积分 若函数 $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ 在曲线 (1) 上的各点上连续的, 这曲线的方向是使参数 t 增加的方向, 则

$$\begin{aligned} & \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_{t_0}^T \{ P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) \\ & \quad + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) \\ & \quad + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) \} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

当曲线 C 环行的方向变更时此积分的符号也变更. 在力学上积分 (2) 是当其作用点描绘出曲线 C 时 变力 $\{P, Q, R\}$ 所作的功.

4° 全微分的情形 若

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = du,$$

式中 $u = u(x, y, z)$ 为域 V 内的单值函数, 则与完全位于域 V 内的曲线 C 的形状无关, 而有:

$$\begin{aligned} & \int_C P dx + Q dy + R dz \\ &= u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1), \end{aligned}$$

式中 (x_1, y_1, z_1) 为路径的始点, (x_2, y_2, z_2) 为路径的终点. 最简单的情况是域 V 是单联通的而函数 P, Q, R 有连续的一级偏导函数, 对于此事的充分而且必要的条件为: 在域 V 内, 下列条件恒满足:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时, 函数 u 可按下面的公式来求得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx \\ & + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy \\ & + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz, \end{aligned}$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为域 V 内某一固定的点.

在力学上这个情况对应于位力所作的功.

计算下列第一型的曲线积分:

4221. $\int_C (x+y) ds$, 其中 C 为以 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ 和 $B(0, 1)$ 为顶点的三角形围线.

$$\begin{aligned} \text{解 } & \int_C (x+y) ds \\ &= \int_{OA} (x+y) ds + \int_{AB} (x+y) ds + \int_{BO} (x+y) ds \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \sqrt{2} dx + \int_0^1 y dy = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

4222. $\int_C y^2 ds$, 其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一拱.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2a \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C y^2 ds &= 2a^3 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} (1-\cos t)^2 dt \\ &= 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt = 32a^3 \int_0^{\pi} \sin^5 u du \\ &= \frac{256}{15} a^3. \end{aligned}$$

4223. $\int_C (x^2 + y^2) ds$, 其中 C 为曲线 $x=a(\cos t + t \sin t)$, $y=a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t} dt = at dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} &\int_C (x^2 + y^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} [a^2 (\cos t + t \sin t)^2 \\ &\quad + a^2 (\sin t - t \cos t)^2] at dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} a^3 t (1+t^2) dt = 2\pi^2 a^3 (1+2\pi^2).$$

4224. $\int_C xy ds$, 其中 C 为双曲线 $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$ ($0 \leq t \leq t_0$) 的弧.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2 \operatorname{ch}^2 t} dt = a \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C xy ds &= a^3 \int_0^{t_0} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{t_0} \operatorname{sh} 2t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt \\ &= \frac{a^3}{4} \int_0^{t_0} \sqrt{\operatorname{ch} 2t} d(\operatorname{ch} 2t) \\ &= \frac{a^3}{6} (\sqrt{\operatorname{ch}^3 2t_0} - 1). \end{aligned}$$

4225. $\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, 其中 C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的弧.

解 方法一

按直角坐标方程计算, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx.$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int_c (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds \\
&= 4 \int_0^a [x^{\frac{4}{3}} + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^2] \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx \\
&= 4a^{\frac{7}{3}} \int_0^2 (2x + a^{\frac{4}{3}} x^{-\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}) dx = 4a^{\frac{7}{3}}.
\end{aligned}$$

方法二

按参数方程计算. 若令 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, 则

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\
&= 3a \cos t \sin t dt \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int_c (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds \\
&= 4a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \cdot 3a \cos t \sin t dt \\
&= 24a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t d(\sin t) = 4a^{\frac{7}{3}}.
\end{aligned}$$

4226. $\int_c e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 C 为由曲线 $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$

(r 和 φ 为极坐标) 所界的凸围线.

解 凸围线由三段组成, 分别是: 直线段 $\varphi=0$

$(0 \leq r \leq a)$; 圆弧段 $r=a$ $(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$; 直线段

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ $(0 \leq r \leq a)$, 弧长的微分相应地是: $ds = dr$;

$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = a d\varphi$; $ds = dr$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds \\ &= \int_0^a e^r dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\varphi + \int_0^a e^r dr \\ &= 2(e^a - 1) + \frac{\pi a e^a}{4}. \end{aligned}$$

4227. $\int_C |y| ds$, 其中 C 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 的弧.

解 双纽线的极坐标方程为 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C |y| ds &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \\ &= 4a^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2 (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4228. $\int_C x ds$, 其中 C 为对数螺线 $r = ae^{k\varphi}$ ($k > 0$) 在圆

$r=a$ 内的部分,

解 弧长的微分为

$$ds = ae^{k\varphi} \sqrt{1+k^2} d\varphi \quad (-\infty < \varphi < 0),$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C x ds &= \int_{-\infty}^0 e^{k\varphi} \cos \varphi \cdot ae^{k\varphi} \sqrt{1+k^2} d\varphi \\ &= a^2 \sqrt{1+k^2} \frac{2k \cos \varphi + \sin \varphi}{1+4k^2} e^{2k\varphi} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{2ka^2 \sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}. \end{aligned}$$

4229. $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ax$.

解 对于上半圆周, 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{a-2x}{2y}\right)^2} dx = \frac{a}{2y} dx \\ &= \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dx \quad (0 \leq x \leq a). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{x^2+y^2} ds &= 2 \int_0^a \sqrt{ax} \cdot \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dx \\ &= a\sqrt{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2a^2. \end{aligned}$$

4230. $\int_C \frac{ds}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{ds}{y^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\operatorname{sh} \frac{x}{a}\right)}{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{sh} \frac{x}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

求下列空间曲线的弧长 (参数是正的),

4231. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = 3(2t^2 + 1) dt.$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^1 3(2t^2 + 1) dt = 5.$$

4232. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $Z=e^{-t}$, 当 $0 < t < +\infty$.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}} dt \\ &= \sqrt{3} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

于是, 弧长为

$$s = \sqrt{3} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \sqrt{3}.$$

4233. $y = a \arcsin \frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a-x}{a+x}$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到

$A(x_0, y_0, z_0)$.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{4(a^2 - x^2)^2}} dx \\ &= \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)} dx \quad (|x_0| \leq a). \end{aligned}$$

于是, 当 $x_0 \geq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x_0} \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)} dx \\ &= \frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} + x_0 = |z_0| + |x_0|; \end{aligned}$$

当 $x_0 < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_0}^0 \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)} dx \\ &= -\frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} - x_0 = |z_0| + |x_0|. \end{aligned}$$

总之, 当 $|x_0| \leq a$, 有 $s = |z_0| + |x_0|$.

4234. $(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到

$A(x_0, y_0, z_0)$.

解 由 $(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ 可解得

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^4} + \sqrt[3]{\frac{9a}{8}} \sqrt[3]{z^2} \right],$$

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^4} - \sqrt[3]{\frac{9a}{8}} \sqrt[3]{z^2} \right].$$

由于

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \\ &= \frac{8}{9a^2} \sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^4} \sqrt[3]{z^2} + \frac{2}{9} \sqrt[3]{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^{-2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} \sqrt[3]{z^2} + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \sqrt[3]{z^{-2}}, \end{aligned}$$

故弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} \sqrt[3]{z^2} + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \sqrt[3]{z^{-2}} + 1} dz \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \frac{1}{t} + 1} \\ &\quad \cdot \frac{3\sqrt{t}}{2} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} t^2 + t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{a}} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{3}} \right) dt \\ &= \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{3z_0^4}{a}} + 2 \sqrt{\frac{az_0^2}{3}} \right). \end{aligned}$$

4235. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

解 取曲线的参数方程为

$$x = \sqrt{cz} \cos \frac{z}{c}, \quad y = \sqrt{cz} \sin \frac{z}{c}, \quad z = z,$$

则弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \left[\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} \cos \frac{z}{c} - \sqrt{\frac{z}{c}} \sin \frac{z}{c} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} \sin \frac{z}{c} + \sqrt{\frac{z}{c}} \cos \frac{z}{c} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} dz \\ &= \sqrt{\frac{c}{4z} + \frac{z}{c} + 1} dz \\ &= \frac{2z+c}{\sqrt{4cz}} dz. \end{aligned}$$

于是, 弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{z_0} \frac{2z+c}{\sqrt{4cz}} dz \\ &= \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{z}{c}} dz + \int_0^{z_0} \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} dz \\ &= \sqrt{cz_0} \left(1 + \frac{2z_0}{3c} \right). \end{aligned}$$

4236. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right) = a$ 从

点 $A(a, 0, 0)$ 到点 $B(x, y, z)$.

解 令 $x = \sqrt{a^2 - z^2} \cos \varphi$, $y = \sqrt{a^2 - z^2} \sin \varphi$, 不妨设 $z > 0$, 则有

$$\begin{aligned}
 z &= \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \\
 &= \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}\right)} = a \operatorname{th} \varphi.
 \end{aligned}$$

而 $\sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{th}^2 \varphi)} = \frac{a}{\operatorname{ch} \varphi}$, 故

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad y = \frac{a \sin \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad z = a \operatorname{th} \varphi$$

为曲线的参数方程. 弧长的微分为

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \\
 &= a \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \varphi + \operatorname{sh}^2 \varphi + 1}{\operatorname{ch}^4 \varphi}} d\varphi \\
 &= \sqrt{2} a \frac{d\varphi}{\operatorname{ch} \varphi}.
 \end{aligned}$$

于是, 弧长为

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{\varphi} \sqrt{2} a \frac{d\varphi}{\operatorname{ch} \varphi} = \sqrt{2} a \int_0^{\varphi} \frac{2}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} d\varphi \\
 &= 2\sqrt{2} a \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 + (e^{\varphi})^2} d(e^{\varphi}) \\
 &= 2\sqrt{2} a \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\varphi} \Big|_0^{\varphi} \\
 &= 2\sqrt{2} a \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\pi}{4} \right)^{*}) \\
 &= \sqrt{2} a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}. \quad ***)
 \end{aligned}$$

容易推证, 当 $z \leq 0$ 时, 弧长为

$$s = \sqrt{2} a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-z}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

总之, 最后得

$$s = \sqrt{2} a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{|z|}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

*) 由 $z = a \operatorname{th} \varphi$ 知:

$$z(e^\varphi + e^{-\varphi}) = a(e^\varphi - e^{-\varphi}),$$

$$z(e^{2\varphi} + 1) = a(e^{2\varphi} - 1),$$

从而

$$e^{2\varphi} = \frac{a+z}{a-z} \quad \text{或} \quad e^\varphi = \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

**) 由于

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}} \right) \\ &= \frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z}, \end{aligned}$$

故在主值范围内有

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+z}{\sqrt{a^2 - z^2}} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \arctg \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

计算沿空间曲线所取的第一型曲线积分:

4237. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 C 为螺旋线 $x = a \cos t$,
 $y = a \sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一段.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt \\ &= \frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

4238. $\int_C x^2 ds$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

解 方法一

作代换:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}, \\ w &= \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

则圆周 C 化为

$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2, \quad w = 0.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_c x^2 ds &= \int_c \left(-\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}} \right)^2 ds \\ &= \int_c \left(-\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} \right)^2 ds \\ &= \frac{1}{6} \int_c (3u^2 + v^2) ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_c uv ds \\ &= \frac{1}{6} \int_c a^2 ds + \frac{1}{3} \int_c u^2 ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_c uv ds \\ &= \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^2 \varphi d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} a^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

方法二

由对称性知:

$$\int_c x^2 ds = \int_c y^2 ds = \int_c z^2 ds.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_c x^2 ds &= \frac{1}{3} \int_c (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \frac{a^2}{3} \int_c ds = \frac{2\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

4239. $\int_C z \, ds$, 其中 C 为圆锥螺线 $x = t \cos t$, $y = t \sin t$,
 $z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$).

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \sqrt{2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C z \, ds &= \int_0^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{3} [(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}]. \end{aligned}$$

4240. $\int_C z \, ds$, 其中 C 为曲线 $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ 上从点
 $O(0, 0, 0)$ 到点 $A(a, a, a\sqrt{2})$ 的弧.

解 由曲线方程得

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-\frac{y^4}{a^2} + y^2} \\ &= \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2}. \end{aligned}$$

从而, 曲线的参数方程可取为

$$x = \frac{y^2}{a}, \quad y = y, \quad z = \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2}.$$

弧长的微分为

$$ds = \sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2y^2 + a^2}{a\sqrt{y^2 + a^2}}\right)^2} dy$$

$$= \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2y^2 + 2a^4}{a^2(y^2 + a^2)}} dy.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_C z \, ds \\ &= \int_0^a \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2} \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2y^2 + 2a^4}{a^2(y^2 + a^2)}} dy \\ &= \frac{\sqrt{8}}{a^2} \int_0^a y \sqrt{y^4 + \frac{9}{8}a^2y^2 + \frac{1}{4}a^4} dy \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right)^2 - \frac{17a^4}{16^2}} \\ & \quad \cdot d\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \left[\frac{y^2 + \frac{9a^2}{16}}{2} \sqrt{y^4 + \frac{9}{8}a^2y^2 + \frac{1}{4}a^4} \right. \\ & \quad \left. - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln\left(y^2 + \frac{9a^2}{16}\right) \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{y^4 + \frac{9}{8}a^2y^2 + \frac{1}{4}a^4} \right] \Big|_0^a \\ &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \left[\left(\frac{25a^4}{64} \sqrt{\frac{19}{2}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{25a^2 + 8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{9a^4}{64} - \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{17a^2}{16}\right) \Bigg] \\
& = \frac{\sqrt{2}}{a^2} \cdot \frac{25a^4 \sqrt{38} - 18a^4}{128} \\
& \quad + \frac{\sqrt{2}}{a^2} \cdot \frac{17a^4}{2 \cdot 16^2} \ln \frac{\frac{17a^2}{16}}{\frac{25a^2 + 8\sqrt{\frac{19}{2}}a^2}{16}} \\
& = \frac{a^2}{256\sqrt{2}} \left[100\sqrt{38} - 72 \right. \\
& \quad \left. - 17 \ln \frac{25 + 4\sqrt{38}}{17} \right].
\end{aligned}$$

4241† 设曲线 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 在点 (x, y) 的线密度等于 $\rho = |y|$, 求其质量.

解 质量 $m = \int_C |y| ds$, 其中 C 为椭圆 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

先设 $a > b$. 这时

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\
&= a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt,
\end{aligned}$$

其中 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 于是,

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^\pi ab \sin t \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt \\
&\quad + \int_\pi^{2\pi} a(-b \sin t) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -ab \int_0^x \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} d(\cos t) \\
&\quad + ab \int_x^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 t} d(\cos t) \\
&= ab \int_{-1}^1 \sqrt{1-\varepsilon^2 u^2} du + ab \int_{-1}^1 \sqrt{1-\varepsilon^2 u^2} du \\
&= 4ab \int_0^1 \sqrt{1-\varepsilon^2 u^2} du \\
&= \frac{4ab}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \varepsilon u \sqrt{1-\varepsilon^2 u^2} + \frac{1}{2} \arcsin(\varepsilon u) \right] \Big|_{u=0}^{u=1} \\
&= 2b^2 + 2ab \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

次设 $a < b$. 这时

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\
&= a \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 t} dt,
\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 仿前, 有

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^x ab \sin t \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 t} dt \\
&\quad + \int_x^{2\pi} a(-b \sin t) \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 t} dt \\
&= 4ab \int_0^1 \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 u^2} du \\
&= \frac{4ab}{\varepsilon_1} \left[\frac{1}{2} \varepsilon_1 u \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 u^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon_1 u + \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 u^2}) \Big|_{u=0}^{u=1} \\
& = 2b^2 + 2ab \frac{\ln(\varepsilon_1 + \sqrt{1 + \varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}.
\end{aligned}$$

最后, 若 $a=b$, 则椭圆退化成圆, 这时 $ds=adt$, 故

$$m = \int_0^{\pi} a^2 \sin t \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-a \sin t) a \, dt = 4a^2$$

综上所述, 可知

$$m = \begin{cases} 2b^2 + 2ab \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}, & \text{若 } a > b, \\ 2b^2 + 2ab \frac{\ln(\varepsilon_1 + \sqrt{1 + \varepsilon_1^2})}{\varepsilon_1}, & \text{若 } a < b, \\ 4a^2, & \text{若 } a = b, \end{cases}$$

$$\text{其中 } \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (a > b),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \quad (a < b).$$

4242. 求曲线 $x=at$, $y=\frac{a}{2}t^2$, $z=\frac{a}{3}t^3$ ($0 \leq t \leq 1$)

的弧之质量, 其密度依规律 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ 而变化.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{a^2 + a^2 t^2 + a^2 t^4} \, dt \\
&= a \sqrt{1 + t^2 + t^4} \, dt,
\end{aligned}$$

而密度 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}} = t$. 于是, 质量为(作代换 $u = t^2$)

$$\begin{aligned} m &= \int_c \sqrt{\frac{2y}{a}} ds = a \int_0^1 t \sqrt{1+t^2+t^4} dt \\ &= \frac{a}{2} \int_0^1 \sqrt{1+u+u^2} du \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{u + \frac{1}{2}}{2} \sqrt{1+u+u^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \ln \left(u + \frac{1}{2} + \sqrt{1+u+u^2} \right) \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{a}{8} \left[(3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \right]. \end{aligned}$$

4243. 计算均匀的曲线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 从点 $A(0, a)$ 到点 $B(b, h)$ 的弧的重心的坐标.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx.$$

质量为

$$m = \rho_0 \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \rho_0 \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \rho_0 \sqrt{h^2 - a^2}. \quad *)$$

于是, 重心的坐标为

$$x_0 = \frac{\rho_0}{m} \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho_0}{m} \left[ab \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a^2 \left(\operatorname{ch} \frac{b}{a} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left[b \sqrt{h^2 - a^2} - a^2 \left(\frac{h}{a} - 1 \right) \right] \\
&= b - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{\rho_0}{m} \int_0^b y \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{a\rho_0}{m} \int_0^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx \\
&= \frac{a\rho_0}{m} \int_0^b \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} dx \\
&= \frac{a\rho_0}{m} \left[\frac{x}{2} + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \right] \Big|_0^b \\
&= \frac{a\rho_0}{m} \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2b}{a} \right) \\
&= \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left(\frac{b}{2} + \frac{h}{2} \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a} \right) \\
&= \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}}.
\end{aligned}$$

*) 由 $h = a \operatorname{ch} \frac{b}{a}$ 知: $\operatorname{ch} \frac{b}{a} = \frac{h}{a}$. 从而

$$\operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}.$$

4244. 求摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

的弧的重心.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} dt \\ &= 2a \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

质量为

$$m = 2a\rho_0 \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 4a\rho_0.$$

于是, 重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \int_0^\pi \rho_0 a(t - \sin t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{a}{2} \int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} dt - \frac{a}{2} \int_0^\pi \sin t \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -at \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi + a \int_0^\pi \cos \frac{t}{2} dt \\ &\quad + \frac{a}{4} \int_0^\pi \left(\cos \frac{3t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) dt \\ &= -\frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{m} \int_0^\pi \rho_0 a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{a}{2} \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt \\ &\quad - \frac{a}{4} \int_0^\pi \left(\sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) dt \\ &= \frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

4245. 计算球面上的三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 的围线的重心的坐标.

解 作球坐标变换:

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi,$$

$$z = r \sin \psi,$$

则球面上的三角形三条曲边的方程分别是:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$x = a \cos \psi, \quad y = 0, \quad z = a \sin \psi, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$x = 0, \quad y = a \cos \psi, \quad z = a \sin \psi, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

又因围线的周长为

$$s = 3 \cdot \frac{\pi a}{2} = \frac{3\pi a}{2}.$$

于是, 重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \varphi \cdot a d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \psi \cdot a d\psi}{\frac{3\pi a}{2}} \\ &= \frac{2a^2}{\frac{3\pi a}{2}} = \frac{4a}{3\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{利用对称性知: } x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}.$$

4246. 求均匀的弧 $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ ($-\infty < t \leq 0$) 的重心的坐标.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} dt \\ &= \sqrt{3} e^t dt. \end{aligned}$$

质量为

$$m = \int_{-\infty}^0 \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3}.$$

于是, 重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^0 e^t \cos t \cdot \sqrt{3} e^t dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} \cos t dt \\ &= \frac{2 \cos t + \sin t}{5} e^{2t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^0 e^t \sin t \cdot \sqrt{3} e^t dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} \sin t dt \\ &= \frac{2 \sin t - \cos t}{5} e^{2t} \Big|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^0 e^t \cdot \sqrt{3} e^t dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4247. 求螺旋线 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \frac{h}{2\pi} t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一枝对于坐标轴的转动惯量.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt. \end{aligned}$$

于是, 转动惯量为

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt \\ &= \frac{a^2}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \pi \\ &\quad + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3 \\ &= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_C (x^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} dt \\ &= \frac{a^2}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \pi \\ &\quad + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (x^2 + y^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} dt \\ &= a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}. \end{aligned}$$

4248. 计算第二型的曲线积分

$$\int_{OA} x dy - y dx,$$

式中 O 为坐标原点, A 点的坐标为 $(1, 2)$ 并设:

(a) OA 为直线段; (b) OA 为抛物线, 其轴为 Oy ;
(c) OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的
线段 BA 所组成的折线.

解 (a) 直线段的方程为 $y = 2x$. 于是,

$$\int_{OA} x dy - y dx = \int_0^1 (2x - 2x) dx = 0.$$

(b) 抛物线的方程为 $y = 2x^2$. 于是,

$$\int_{OA} x dy - y dx = \int_0^1 (4x^2 - 2x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

(c) 线段 OB 的方程为 $y = 0$, BA 的方程为 $x = 1$.
于是,

$$\int_{OA} x dy - y dx = \int_0^1 0 \cdot dx + \int_0^2 dy = 2.$$

4249. 对于上题中所指示的路径 (a), (b), (c), 计算

$$\int_{OA} x dy + y dx.$$

解 (a) $\int_{OA} x dy + y dx = \int_0^1 (2x + 2x) dx = 2.$

(b) $\int_{OA} x dy + y dx = \int_0^1 (4x^2 + 2x^2) dx = 2.$

(c) $\int_{OA} x dy + y dx = \int_0^2 dy = 2.$

在参数增加的方向, 沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分:

4250. $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 C 为抛物线 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$).

解 由题设 $y = x^2$, 从而 $dy = 2x dx$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy \\ &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x^3) + 2x(x^4 - 2x^3)] dx \\ &= -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

4251. $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, 其中 C 为曲线 $y = 1 - |1 - x|$ ($0 \leq x \leq 2$).

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y = 1 - (1 - x) = x$, 从而 dy

$=dx$; 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $y=1-(x-1)=2-x$, 从而 $dy=-dx$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy \\ &= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 [x^2 + (2-x)^2 - x^2 + (2-x)^2] dx \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

4252. $\oint_C (x+y)dx + (x-y)dy$, 其中 C 为依反时针方向通过的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 利用椭圆的参数方程

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

则有

$$\begin{aligned} & \oint_C (x+y)dx + (x-y)dy \\ &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t + b \sin t)(-a \sin t) \\ & \quad + (a \cos t - b \sin t)b \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(ab \cos 2t - \frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2t \right) dt = 0. \end{aligned}$$

4253. $\int_C (2a-y)dx + x dy$, 其中 C 为摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的一拱.

解 由题设知: $dx = a(1 - \cos t)dt$, $dy = a \sin t dt$.
于是,

$$\begin{aligned} & \int_C (2a - y)dx + x dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ [2a - a(1 - \cos t)] a(1 - \cos t) \right. \\ & \quad \left. + a(t - \sin t) a \sin t \right\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 t \sin t dt \\ &= -a^2 (t \cos t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

4254. $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为依反时针方向通过的圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解 利用圆的参数方程

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

则有

$$\begin{aligned} & \oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-(a \cos t + a \sin t)a \sin t - (a \cos t - a \sin t)a \cos t}{a^2} dt \\ &= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi. \end{aligned}$$

4255. $\oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, 其中 $ABCD$ 为以 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$ 为顶点的正方形的

围线.

解 正方形各边的方程分别为

$$AB: y=1-x; \quad BC: y=1+x;$$

$$CD: y=-1-x; \quad DA: y=-1+x.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|} \\ &= \int_{AB} \frac{dx+dy}{x+y} + \int_{BC} \frac{dx+dy}{-x+y} \\ & \quad + \int_{CD} \frac{dx+dy}{-x-y} + \int_{DA} \frac{dx+dy}{x-y} \\ &= \int_1^0 (1-1)dx + \int_0^{-1} 2dx \\ & \quad + \int_{-1}^0 (1-1)dx + \int_0^1 2dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

4256. $\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$, 其中 AB 为界于点 $A(0, \pi)$ 和点 $B(\pi, 0)$ 之间的直线段.

解 AB 的方程为 $y=\pi-x$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_{AB} \sin y dx + \sin x dy \\ &= \int_0^\pi \sin(\pi-x) dx - \sin x dx \\ &= \int_0^\pi (\sin x - \sin x) dx = 0. \end{aligned}$$

注：原题为 $\int_{AB} dx \sin y + dy \sin x$ ，若把它理解为

$\int_{AB} d(x \sin y) + d(y \sin x)$ ，其值仍为零，与原答案

也符合。

4257. $\oint_{OmA nO} \arctg \frac{y}{x} dy - dx,$

其中 OmA 为抛物线段 $y=x^2$ ， OnA 为直线段 $y=x$ 。

解 如图8.62所示。我们有

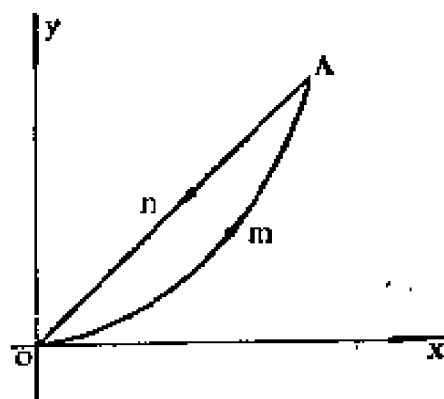


图 8.62

$$\begin{aligned}
 & \oint_{OmA nO} \arctg \frac{y}{x} dy - dx \\
 &= \int_{OmA} \arctg \frac{y}{x} dy - dx + \int_{AnO} \arctg \frac{y}{x} dy - dx \\
 &= \int_0^1 2x \arctg x dx - \int_0^1 dx \\
 &\quad + \int_1^0 (\arctg 1 - 1) dx \\
 &= x^2 \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
 &\quad - 1 + \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) x \Big|_1^0 \\
 &= \frac{\pi}{4} - (x - \arctg x) \Big|_0^1 - 1 - \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1.$$

注：原题为 $\oint_{O \rightarrow A \rightarrow O} dy \arctg \frac{y}{x} - dx$ ，若把它理解为

$\oint_{O \rightarrow A \rightarrow O} d\left(y \arctg \frac{y}{x}\right) - dx$ ，则其值为零，与原答案不符。

验证被积函数为全微分，并计算下列曲线积分：

$$4258. \int_{(-1, 2)}^{(2, 3)} x dy + y dx.$$

解 显然， $x dy + y dx = d(xy)$ 是全微分。于是，

$$\begin{aligned} & \int_{(-1, 2)}^{(2, 3)} x dy + y dx \\ &= \int_{(-1, 2)}^{(2, 3)} d(xy) = xy \Big|_{(-1, 2)}^{(2, 3)} = 8. \end{aligned}$$

$$4259. \int_{(0, 1)}^{(3, -4)} x dx + y dy.$$

解 显然， $x dx + y dy = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ 是全微分。

于是，

$$\begin{aligned} & \int_{(0, 1)}^{(3, -4)} x dx + y dy \\ &= \int_{(0, 1)}^{(3, -4)} d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \\ &= \frac{x^2 + y^2}{2} \Big|_{(0, 1)}^{(3, -4)} = 12. \end{aligned}$$

$$4260. \int_{(0, 1)}^{(2, 3)} (x+y)dx + (x-y)dy.$$

解 显然, 我们有

$$\begin{aligned} & (x+y)dx + (x-y)dy \\ &= (y dx + x dy) + (x dx - y dy) \\ &= d(xy) + d\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right) \\ &= d\left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right), \end{aligned}$$

即是全微分. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_{(0, 1)}^{(2, 3)} (x+y)dx + (x-y)dy \\ &= \int_{(0, 1)}^{(2, 3)} d\left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right) \\ &= \left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right) \Big|_{(0, 1)}^{(2, 3)} = 4. \end{aligned}$$

$$4261. \int_{(1, -1)}^{(1, 1)} (x-y)(dx-dy).$$

解 显然, $(x-y)(dx-dy) = d\frac{(x-y)^2}{2}$ 是全微分. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_{(1, -1)}^{(1, 1)} (x-y)(dx-dy) \\ &= \int_{(1, -1)}^{(1, 1)} d\frac{(x-y)^2}{2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{(1, -1)}^{(1, 1)} = -2.$$

4262. $\int_{(0, 0)}^{(a, b)} f(x+y)(dx+dy)$, 其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 令 $F(x, y) = \int_0^{x+y} f(u)du$. 由于 $f(u)$ 连续, 故

$F'_x(x, y) = f(x+y)$, $F'_y(x, y) = f(x+y)$,
并且它们都是 x, y 的连续函数. 因此, $F(x, y)$ 可微, 且

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy \\ &= f(x+y)(dx+dy), \end{aligned}$$

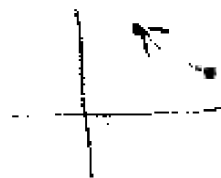
故 $f(x+y)(dx+dy)$ 是全微分, 并且

$$\begin{aligned} &\int_{(0, 0)}^{(a, b)} f(x, y)(dx+dy) \\ &= F(a, b) - F(0, 0) = \int_0^{a+b} f(u)du. \end{aligned}$$

4263. $\int_{(2, 1)}^{(1, 2)} \frac{y dx - x dy}{x^2}$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径. ($\pi \neq 0$)

解 显然, 当 $x \neq 0$ 时,

$$\frac{y dx - x dy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right)$$



是全微分. 于是,

$$\int_{(2, 1)}^{(1, 2)} \frac{y dx - x dy}{x^2}$$

$$= \int_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x} \Big|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{3}{2}.$$

4264. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 沿着不通过坐标原点的路径.

解 显然, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2})$$

是全微分. 于是,

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \int_{(1,0)}^{(6,8)} d(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9.$$

4265. $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$, 其中 φ 和 ψ 为连续函数.

解 由于 φ, ψ 是连续函数, 故显然有

$$\varphi(x) dx + \psi(y) dy$$

$$= dF(x) + dG(y) = d[F(x) + G(y)],$$

其中 $F(x) = \int_{x_1}^x \varphi(u) du$, $G(y) = \int_{y_1}^y \psi(v) dv$. 于

是, $\varphi(x) dx + \psi(y) dy$ 是函数 $F(x) + G(y)$ 的全微分, 从而有

$$\begin{aligned}
& \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy \\
&= [F(x) + G(y)] \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \\
&= [F(x_2) + G(y_2)] - [F(x_1) + G(y_1)] \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(u) du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v) dv.
\end{aligned}$$

4266. $\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy.$

解 $P = x^4 + 4xy^3$, $Q = 6x^2y^2 - 5y^4$.

显然, P, Q 在全平面上具有连续偏导数, 并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2,$$

故 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 由于全平面是单连通区域, 故在整个平面上表达式 $P dx + Q dy$ 是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并且线积分 $\int_c P dx + Q dy$ 与路径无关, 因而可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分, 得

$$\begin{aligned}
& \int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy \\
&= \int_{-2}^3 (x^4 + 4x \cdot 0^3) dx + \int_{-1}^0 [6(-2)^2 y^2 - 5y^4] dy \\
&= 55 + 7 = 62.
\end{aligned}$$

注: 也可利用简单的技巧求出函数 $u(x, y)$ 来. 我们有

$$\begin{aligned}
 & (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy \\
 &= d\left(\frac{x^5}{5}\right) + 2y^3d(x^2) + 2x^2d(y^3) - d(y^5) \\
 &= d\left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right),
 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 & \int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy \\
 &= \left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right)\Big|_{(-2, -1)}^{(3, 0)} = 62.
 \end{aligned}$$

4267. $\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2}$ 沿着不与直线 $y=x$ 相交的路径.

解 $P = -\frac{y}{(x-y)^2}, Q = \frac{x}{(x-y)^2} \quad (x \neq y).$

容易验证

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x+y}{(x-y)^3} \quad (x \neq y).$$

考虑平面上的区域 $\Omega = \{(x, y) | x > y\}$. 由于 Ω 是单连通区域且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故在 Ω 上, $P dx + Q dy$ 是某函数 $u = u(x, y)$ 的全微分, 从而在 Ω 上线积分 $\int_C P dx + Q dy$ 与路径无关. 因此, 可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分, 得

$$\begin{aligned}
& \int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2} \\
&= \int_0^1 \frac{-(-1)dx}{(x+1)^2} + \int_{-1}^0 \frac{dy}{(1-y)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

注：也可利用简单的技巧求出函数 $u(x, y)$ 来。我们有

$$\begin{aligned}
\frac{x dy - y dx}{(x-y)^2} &= \frac{(x-y)dy - yd(x-y)}{(x-y)^2} \\
&= d\left(\frac{y}{x-y}\right),
\end{aligned}$$

从而

$$\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2} = \frac{y}{x-y} \Big|_{(0, -1)}^{(1, 0)} = 1.$$

4268. $\int_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$ 沿

着不与 Oy 轴相交的路径。

解 当 $x \neq 0$ 时，有

$$P = 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}, \quad Q = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}$$

$$= -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}.$$

考虑右半平面 $\Omega = \{(x, y) \mid x > 0\}$. 由于 Ω 是单连通区域, 且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故在 Ω 上必是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 且可取

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx \\ &\quad + \int_x^y (\sin y + y \cos y) dy \\ &= \left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) \Big|_1^x + y \sin y \Big|_x^y \\ &= x - 1 + y \sin \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} &\int_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx \\ &\quad + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy \\ &= \left(x - 1 + y \sin \frac{y}{x}\right) \Big|_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} = \pi + 1. \end{aligned}$$

4269. $\int_{(0,0)}^{(\pi, \pi)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$

解 显然, 有

$$e^x (\cos y dx - \sin y dy) = d(e^x \cos y),$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y \, dx - \sin y \, dy) \\ &= \int_{(0,0)}^{(a,b)} d(e^x \cos y) = (e^x \cos y) \Big|_{(0,0)}^{(a,b)} \\ &= e^a \cos b - 1. \end{aligned}$$

4270. 证明: 若 $f(u)$ 为连续函数且 C 为逐段光滑的封闭曲线, 则

$$\oint_C f(x^2 + y^2) (x \, dx + y \, dy) = 0.$$

证 令 $F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(u) \, du$. 由于 $f(u)$ 是连续函数, 故

$$F'_x(x, y) = x f(x^2 + y^2),$$

$$F'_y(x, y) = y f(x^2 + y^2),$$

并且显然 $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ 都是 x, y 的连续函数. 因此, $F(x, y)$ 可微, 且

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= F'_x(x, y) \, dx + F'_y(x, y) \, dy \\ &= f(x^2 + y^2) (x \, dx + y \, dy). \end{aligned}$$

于是, 任取 C 上一点 (x_0, y_0) , 有

$$\begin{aligned} & \oint_C f(x^2 + y^2) (x \, dx + y \, dy) \\ &= F(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} \\ &= F(x_0, y_0) - F(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

证毕.

求原函数 z ，设

$$4271. \quad dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad z &= \int_0^x (x^2 + 2xy - y^2)dx \\ &\quad + \int_0^y (0 - 0 - y^2)dy + C \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C. \end{aligned}$$

$$4272. \quad dz = \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad z &= \int_0^x \frac{y dx}{3x^2 - 2xy + 3y^2} + \int_1^y 0 dy + C \\ &= \frac{y}{3} \int_0^x \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{8y^2}{9}} + C \\ &= \frac{y}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}y} \arctg \frac{3\left(x - \frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}y} \Big|_0^x + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{3x - y}{2\sqrt{2}y} + C_1. \end{aligned}$$

$$4273. \quad dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x+y)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad z &= \int_0^x \frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{(x+y)^3} dx \\ &\quad + \int_1^y \frac{0 - 0 + y^2}{(0+y)^3} dy + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \frac{(x+y)^2 + 4y^2}{(x+y)^3} dx + \int_1^y \frac{dy}{y} + C \\
&= [\ln|x+y|] \Big|_0^x - \frac{2y^2}{(x+y)^2} \Big|_0^x \\
&\quad + [\ln|y|] \Big|_1^y + C \\
&= \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C_1.
\end{aligned}$$

4274. $dz = e^x [e^y(x-y+2) + y]dx + e^x [e^y(x-y) + 1]dy.$

$$\begin{aligned}
\text{解 } z &= \int_0^x [(x-y+2)e^{x+y} + ye^x]dx \\
&\quad + \int_0^y (1 - ye^y)dy + C \\
&= [(x-y+1)e^{x+y} + ye^x] \Big|_0^x \\
&\quad + [y - ye^y + e^y] \Big|_0^y + C \\
&= (x-y+1)e^{x+y} + ye^x + C_1.
\end{aligned}$$

4275. $dz = \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1} \partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n \partial y^{m+1}} dy.$

解 因为

$$\begin{aligned}
dz &= \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1} \partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n \partial y^{m+1}} dy \\
&= d \left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial y^m} \right)
\end{aligned}$$

故有

$$z = \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^n \partial y^m} + C.$$

$$4276. \quad dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx \\ - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dy, \text{ 其中 } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

解 易知 (当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{r^2 - 2x^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{r^2 - 2y^2}{r^4},$$

故 (当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时)

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = 0. \quad (1)$$

令

$$P = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right),$$

$$Q = -\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right),$$

则当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 由 (1) 式知

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) + -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] = 0.$$

因此，在任何不含原点 $(0, 0)$ 的单连通区域中， $P dx + Q dy$ 都是某函数 z 的全微分，并且对上半平面的点 (x, y) (即 $y > 0$)，可取

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \int_0^x P(x, y) dx + \int_1^y Q(x, y) dy + C \\ &= \int_0^x \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx \\ &\quad - \int_1^y \left[\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} dy + C \\ &= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \\ &\quad - \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} \\ &\quad - \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} \\ &\quad + \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{y=1} + C \\ &= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} \right) \\ &\quad - \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m-1}} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}} \left(-\frac{x}{r^2} \right) + C_1 \\
&= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) + C_1 \\
&= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) + C_1,
\end{aligned}$$

其中 $C_1 = \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} + C$ 是任意常数.

同理, 对下半平面的点 (x, y) (即 $y < 0$), 可取

$$z(x, y) = \int_0^x P(x, y) dx + \int_{-1}^y Q(0, y) dy + C.$$

经过和前面完全类似的计算, 可得

$$z(x, y) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right) + C_2,$$

其中

$$C_2 = \left[\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{\substack{x=0 \\ y=-1}} + C'$$

也是任意常数.

4277. 证明下面的估计对于曲线积分是正确的:

$$\left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq LM,$$

式中 L 为积分路径的长及 $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ (在弧 C 上).

证 由于

$$\begin{aligned} & \left| \int_c P dx + Q dy \right| \\ &= \left| \int_c (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds \right| \\ &\leq \int_c |P \cos \alpha + Q \sin \alpha| ds, \end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned} & (P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 \\ &= P^2 \cos^2 \alpha + Q^2 \sin^2 \alpha + 2PQ \sin \alpha \cos \alpha, \\ &0 \leq (P \sin \alpha - Q \cos \alpha)^2 \\ &= P^2 \sin^2 \alpha + Q^2 \cos^2 \alpha - 2PQ \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

故有 $(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 \leq P^2 + Q^2$. 从而

$$|P \cos \alpha + Q \sin \alpha| \leq \sqrt{P^2 + Q^2} \leq M.$$

于是,

$$\left| \int_c P dx + Q dy \right| \leq M \int_c ds = LM.$$

4278. 估计积分.

$$I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

证明 $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

解 在圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上, 有

$$P^2 + Q^2 = \frac{y^2}{(x^2 + xy + y^2)^4}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} \\
& = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} \\
& = \frac{R^2}{(R^2 + xy)^4} \leq \frac{R^2}{(R^2 - |xy|)^4} \\
& \leq \frac{R^2}{\left(R^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^4} \\
& = \frac{16}{R^6}.
\end{aligned}$$

于是, $M \leq \frac{4}{R^3}$. 利用4277题的结果, 即得 I_R 的估计式:

$$|I_R| \leq \frac{4}{R^3} \cdot 2\pi R = \frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知: $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

计算沿空间曲线所取的线积分 (假定坐标系是右手的):

4279. $\int_C (y^2 - z^2)dx + 2yz dy - x^2 dz$, 式中 C 为依参数增加的方向进行的曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ ($0 \leq t \leq 1$).

$$\begin{aligned}
\text{解 } & \int_C (y^2 - z^2)dx + 2yz dy - x^2 dz \\
& = \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \frac{1}{35}.$$

4280. $\int_C y dx + z dy + x dz$, 式中 C 为依参数增加方向进行的纽形螺线 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

$$\begin{aligned} \text{解 } & \int_C y dx + z dy + x dz \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin t \sin t + ab t \cos t + ab \cos t) dt \\ &= \left(-\frac{at^2}{2} + \frac{a^2 \sin 2t}{4} + ab t \sin t \right. \\ & \quad \left. + ab \cos t + ab \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= -\pi a^2. \end{aligned}$$

4281. $\int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 式中 C 为圆

$$\text{周 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x \operatorname{tg} \alpha$$

($0 < \alpha < \pi$), 若从 Ox 轴的正向看去, 这圆周是沿逆时针方向进行的.

解 如图 8.63 所示, 利用球面的

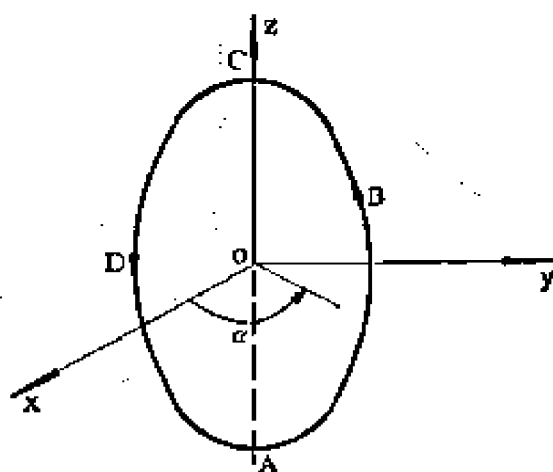


图 8.63

参数方程 $x = a \cos \varphi \cos \psi$, $y = a \sin \varphi \cos \psi$, $z = a \sin \psi$.
在 \widehat{ABC} 上, $\varphi = \alpha$, 因而有

$$x = a \cos \alpha \cos \psi, \quad dx = -a \cos \alpha \sin \psi d\psi,$$

$$y = a \sin \alpha \cos \psi, \quad dy = -a \sin \alpha \sin \psi d\psi,$$

$$z = a \sin \psi, \quad dz = a \cos \psi d\psi,$$

且

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{ABC}} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-(\sin \alpha \cos \psi - \sin \psi) \cos \alpha \sin \psi \right. \\ & \quad \left. - (\sin \psi - \cos \alpha \cos \psi) \sin \alpha \sin \psi \right. \\ & \quad \left. + (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \cos \psi) \cos \psi \right] d\psi \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\psi = \pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= \sqrt{2} a^2 \pi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right). \end{aligned}$$

在 \widehat{CDA} 上, $\varphi = \alpha + \pi$. 同样可得

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{CDA}} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= -a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \alpha - \cos \alpha) d\psi \\ &= \sqrt{2} \pi a^2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right). \end{aligned}$$

于是, 最后得

$$\int_c (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

4282. $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 式中 C 为维维安尼曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ ($z \geq 0$, $a > 0$), 若从 Ox 轴的正的部分 ($x > a$) 看去, 此曲线是沿逆时针方向进行的.

解 柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 可变为

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

故若令 $x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cos t$, $y = \frac{a}{2} \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$),

则

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{a^2 - \left[\frac{a^2(1 + \cos t)^2}{4} + \frac{a^2 \sin^2 t}{4} \right]} \\ &= a \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

从而, 曲线的参数方程为

$$\begin{aligned} x &= \frac{a(1 + \cos t)}{2}, \quad y = \frac{a \sin t}{2}, \\ z &= a \sin \frac{t}{2} \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \end{aligned}$$

于是,

$$\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a^3 \sin^3 t}{3} + \frac{a^3 \sin^2 \frac{t}{2} \cos t}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^3 \cos^3 \frac{t}{2}}{2} \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) \\
&\quad + \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{2} \cos t dt \\
&\quad + a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2} \right) d\left(\sin \frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{a^3}{3} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&\quad + \frac{a^3}{4} \left[\sin t - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \right] \Big|_0^{2\pi} \\
&\quad + a^3 \left(\sin \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= -\frac{\pi a^3}{4}.
\end{aligned}$$

4283. $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 式中 C 为球面的一部分 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 的围线, 当沿着它的正向进行时该曲面的外面保持在左方.

解 围线在 Oxy 平面部分的方程为

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad z = 0 \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

根据轮换对称性知，只要沿这部分计算线积分，再三倍之，便得要求的结果，即

$$\begin{aligned} & \int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 \varphi \cdot (-\sin \varphi) - \cos^2 \varphi \cdot \cos \varphi] d\varphi \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) \\ &= 3 \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \sin \varphi + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -4. \end{aligned}$$

利用全微分计算下列曲线积分：

$$4284. \int_{(1, 1, 1)}^{(2, 3, -4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz.$$

$$\begin{aligned} & \int_{(1, 1, 1)}^{(2, 3, -4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} z^4 \right) \Big|_{(1, 1, 1)}^{(2, 3, -4)} \\ &= -53 \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

$$4285. \int_{(1, 2, 3)}^{(6, 1, 1)} yz dx + xz dy + xy dz,$$

$$\text{解} \quad \int_{(1, 2, 3)}^{(6, 1, 1)} yz dx + xz dy + xy dz$$

$$= xyz \Big|_{(1, 2, 3)}^{(6, 1, 1)} = 0.$$

$$4286. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ 其中点 } (x_1, y_1, z_1)$$

位于球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 之上, 而点 (x_2, y_2, z_2) 位于球 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 之上 ($a > 0, b > 0$).

解 由题设知:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2, \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = b^2.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\ &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ &= b - a. \end{aligned}$$

$$4287. \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz, \text{ 式中 } \varphi, \psi,$$

χ 为连续函数.

解 因为

$$\begin{aligned} & \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz \\ &= d \left(\int_{x_1}^x \varphi(u) du + \int_{y_1}^y \psi(v) dv + \int_{z_1}^z \chi(w) dw \right), \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
 & \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz \\
 &= \left(\int_{x_1}^{x_2} \varphi(u) du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v) dv \right. \\
 & \quad \left. + \int_{z_1}^{z_2} \chi(w) dw \right) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(u) du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v) dv + \int_{z_1}^{z_2} \chi(w) dw.
 \end{aligned}$$

4288. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$, 其中 f 为连续函数.

解 令 $F(x, y, z) = \int_0^{x+y+z} f(u) du$. 由于 $f(u)$ 是连

续函数, 故

$$F'_x(x, y, z) = f(x+y+z),$$

$$F'_y(x, y, z) = f(x+y+z),$$

$$F'_z(x, y, z) = f(x+y+z),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此, $F(x, y, z)$ 可微, 且

$$\begin{aligned}
 & dF(x, y, z) \\
 &= F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy \\
 & \quad + F'_z(x, y, z)dz \\
 &= f(x+y+z)(dx+dy+dz).
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz) \\
&= F(x, y, z) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\
&= F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1) \\
&= \int_0^{x_2+y_2+z_2} f(u)du - \int_0^{x_1+y_1+z_1} f(u)du \\
&= \int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)du.
\end{aligned}$$

4289. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x dx + y dy + z dz)$,
 式中 f 为连续函数.

解 令 $F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v}) dv$. 由于
 f 是连续函数, 故

$$F'_x(x, y, z) = x f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

$$F'_y(x, y, z) = y f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

$$F'_z(x, y, z) = z f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此, $F(x, y, z)$ 可微, 且

$$\begin{aligned}
& dF(x, y, z) \\
&= F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy \\
&\quad + F'_z(x, y, z)dz \\
&= f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x dx + y dy + z dz).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\
& \quad \cdot (x dx + y dy + z dz) \\
& = F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1) \\
& = \frac{1}{2} \int_{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}^{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} f(\sqrt{v}) dv^*) \\
& = \int_{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} u f(u) du,
\end{aligned}$$

*) 这里已作代换 $\sqrt{v} = u$ ($v = u^2$, $dv = 2u du$) .

求原函数 u , 若:

$$4293. \quad du = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad du &= (x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz) \\
&\quad - 2(yz dx + xz dy + xy dz) \\
&= d\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz\right).
\end{aligned}$$

于是,

$$u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C.$$

$$4294. \quad du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad du &= dx + \left(-\frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy\right) \\
&\quad + \frac{1}{z}(y dx + x dy) - \frac{xy}{z^2}dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=dx+\left[-\frac{1}{y}dx+x\,d\left(-\frac{1}{y}\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{z}d(xy)+xy\,d\left(\frac{1}{z}\right) \\
&=dx+d\left(-\frac{x}{y}\right)+d\left(\frac{xy}{z}\right) \\
&=d\left(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}\right).
\end{aligned}$$

于是,

$$u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C.$$

$$4292. \quad du=\frac{(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}.$$

解 由于

$$\begin{aligned}
&(x+y-z)dx+(x+y-z)dy+(x+y+z)dz \\
&=(x\,dx+y\,dy)+(y\,dx+x\,dy)+(x+y)dz \\
&\quad -z(dx+dy)+z\,dz \\
&=\frac{1}{2}d[(x^2+y^2+2xy)+z^2] \\
&\quad +(x+y)dz-z\,d(x+y),
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
du &= \frac{1}{2} \frac{d[(x+y)^2+z^2]}{(x+y)^2+z^2} \\
&\quad + \frac{(x+y)dz-z\,d(x+y)}{(x+y)^2+z^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} d \ln [(x+y)^2 + z^2] \\
&\quad + d \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{x+y} \right) \\
&= d \left[\ln \sqrt{(x+y)^2 + z^2} \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{x+y} \right].
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
u &= \ln \sqrt{(x+y)^2 + z^2} \\
&\quad + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z}{x+y} + C.
\end{aligned}$$

4293. 求当质量为 m 的点从位置 (x_1, y_1, z_1) 移动到位置 (x_2, y_2, z_2) 时, 重力所产生的功 (Oz 轴的方向垂直向上).

解 设 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 为各坐标轴上的单位矢量, 则重力 $\vec{F} = -mg \vec{k}$, 而

$$d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}.$$

从而功的微分为

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -mg dz = d(-mgz).$$

于是, 重力的功为

$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} -mg dz$$

$$\begin{aligned}
 &= (-mgz) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\
 &= -mg(z_2 - z_1).
 \end{aligned}$$

4294[†] 弹性力的方向向着坐标原点，力的大小与质点距坐标原点的距离成比例，设此点依反时针方向描绘出椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正四分之一，求弹性力所作的功。

解 弹性力

$$\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j}),$$

功的微分为

$$\begin{aligned}
 dA &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\
 &= -k(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\
 &= -k(xdx + ydy) \\
 &= d\left[-\frac{k}{2}(x^2 + y^2)\right].
 \end{aligned}$$

于是，功为

$$\begin{aligned}
 A &= -k \int_{(a, 0)}^{(0, b)} xdx + ydy \\
 &= -\frac{k}{2}(x^2 + y^2) \Big|_{(a, 0)}^{(0, b)} \\
 &= \frac{k}{2}(a^2 - b^2).
 \end{aligned}$$

4295[†] 当单位质量从点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 移动到点

$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 时, 求作用于单位质量的引力 $F = \frac{k}{r^2}$ (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 所做的功.

解 引力指向坐标原点, 故它的方向余弦为

$$\cos \alpha = -\frac{x}{r}, \quad \cos \beta = -\frac{y}{r},$$

$$\cos \gamma = -\frac{z}{r},$$

而引力的射影为

$$X = -\frac{kx}{r^3}, \quad Y = -\frac{ky}{r^3},$$

$$Z = -\frac{kz}{r^3}.$$

于是, 功为

$$\begin{aligned} A &= -k \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3} \\ &= -\frac{k}{2} \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\ &= k \left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right). \end{aligned}$$

当然, 这里假设从 M_1 点到 M_2 点的路径是不经过原点的, 上式表明功与路径无关, 仅决定于起始点的坐标.

§12. 格林公式

1° 曲线积分与二重积分的关系 设 C 为逐段光滑的简单封闭围线，它围成单联通的有界域 S ，这围线的方向是这样的：域 S 保持在左边，函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 与它们自己的一阶偏导函数在域 S 内及其边缘上皆是连续的，则有格林公式

$$\begin{aligned} \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

若把域 S 的边界 C 了解为一切边界围线的和，而围线绕转的方向是选择来使得域 S 保持在左边，则公式 (1) 对于由几个简单围线所界的有界域 S 也真确。

2° 平面域的面积：由逐段光滑的简单围线 C 所界的面积 S 等于：

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

在这一节中，若没有相反的约定，则假定积分的封闭围线是简单的（无自交点），并选择它们的正方向使所界不含无穷远点的域是保持在曲线的左边。

4296. 利用格林公式变换曲线积分

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y [xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy,$$

式中围线 C 包含有界的域 S 。

解 此处 $P = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Q = xy^2 + y \ln(x$

$+ \sqrt{x^2 + y^2}$). 从而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y^2.$$

于是,

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S y^2 dx dy.$$

注: 这里应假定 C 不与 Ox 轴的左半部分 (即 $x \leq 0, y = 0$) 相交, 从而这时在 S 中 $x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

4297. 应用格林公式, 计算曲线积分

$$I = \oint_k (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy.$$

其中 k 依正方向经过以 $A(1, 1), B(3, 2), C(2, 5)$ 为顶点的三角形 ABC 的围线. 直接计算积分, 以验证所求得的结果.

解 如图 8.64 所示, AB , BC 及 CA 的方程分别为

$$y = \frac{1}{2}(x+1), \quad y = -3x$$

$$+ 11, \quad y = 4x - 3.$$

由于 $P = (x+y)^2$, $Q = -(x^2 + y^2)$, 故

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 2$$

$$\cdot (x+y) = -4x - 2y.$$

通过顶点 C 引直线垂直于 Ox 轴, 它把三角形域 S 分成 S_1 和 S_2 两部分. 于是,

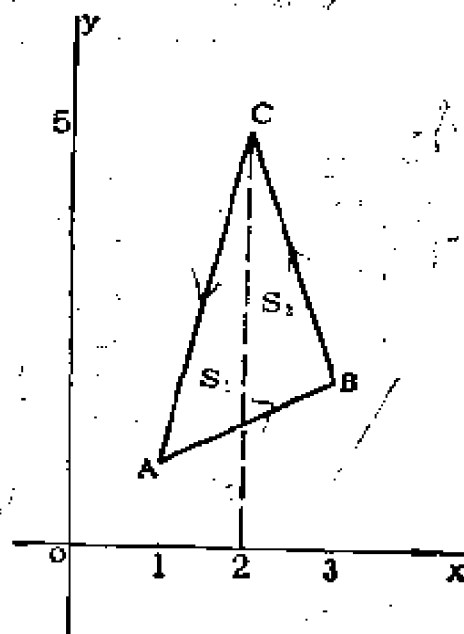


图 8.64

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S (-4x-2y) dx dy \\
&= \iint_{S_1} (-4x-2y) dx dy + \iint_{S_2} (-4x-2y) dx dy \\
&= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (-4x-2y) dy \\
&\quad + \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11} (-4x-2y) dy \\
&= \int_1^2 \left(-\frac{119}{4}x^2 + \frac{77}{2}x - \frac{35}{4} \right) dx + \int_2^3 \left(\frac{21}{4}x^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{49}{2}x - \frac{483}{4} \right) dx \\
&= -\frac{245}{12} - \frac{105}{4} = -46\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

如果直接计算, 则

$$\begin{aligned}
I &= \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \\
&= \int_1^3 \left[\left(x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] dx \\
&\quad + \int_3^2 \left[(x-3x+11)^2 - (-3)(x^2+9x^2 \right. \\
&\quad \left. -66x+121) \right] dx \\
&\quad + \int_2^1 \left[(x+4x-3)^2 - 4(x^2+16x^2-24x+9) \right] dx \\
&= \int_1^3 \left(\frac{13}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{8} \right) dx + \int_3^2 (34x^2 - 242x \\
&\quad + 484) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_2^1 (-43x^2 + 66x - 27) dx \\
& = \frac{58}{3} - \frac{283}{3} + \frac{85}{3} = -46\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

应用格林公式计算下列曲线积分:

4298. $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$, 式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解 由于 $P = -x^2 y$, $Q = xy^2$, 故有

$$\begin{aligned}
\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx &= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}.
\end{aligned}$$

如果直接计算, 可令 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, 则

$$\begin{aligned}
\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx &= a^4 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t \\
&\quad + \cos^2 t \sin^2 t) dt \\
&= \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{\pi a^4}{2}.
\end{aligned}$$

4299. $\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy$, 式中 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 由于 $P = x+y$, $Q = -(x-y)$, 故有

$$\begin{aligned}
\oint_C (x+y) dx - (x-y) dy &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} (-1-1) dx dy = -2\pi ab.
\end{aligned}$$

如果直接计算, 则

$$\begin{aligned}
 & \oint_C (x+y)dx - (x-y)dy \\
 &= \int_0^{2\pi} [(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - b\sin t) \\
 &\quad \cdot (b\cos t)]dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [(b^2 - a^2)\cos t \sin t - ab]dt = -2\pi ab.
 \end{aligned}$$

4300. $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy]$, 其中 C 为域
 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$ 的正方向的围线.

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x(\sin y - y) - e^x \sin y = -ye^x,$$

故有

$$\begin{aligned}
 & \oint_C e^x[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy] \\
 &= - \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x}} ye^x dx dy = - \int_0^\pi e^x dx \int_0^{\sin x} y dy \\
 &= - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx = - \frac{1}{4} \left(\int_0^\pi e^x dx \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^\pi e^x \cos 2x dx \right) \\
 &= - \frac{1}{4} \left[(e^x - 1) - \frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5} e^x \right]_0^\pi \\
 &= - \frac{1}{5} (e^\pi - 1).
 \end{aligned}$$

$$4301. \oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy dx + \sin 2xy dy),$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= e^{-(x^2-y^2)}[(-2x \sin 2xy + 2y \cos 2xy) \\ &\quad - (2y \cos 2xy - 2x \sin 2xy)] = 0, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy dx + \sin 2xy dy) \\ = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 0 dx dy = 0. \end{aligned}$$

4302. 积分

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

和

$$I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

(其中 AmB 为连接点 $A(1, 1)$ 和点 $B(2, 6)$ 的直线, AnB 是其轴为垂直的抛物线, 并通过 A, B 及坐标原点) 相差多少?

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(x-y) - 2(x+y) = -4x,$$

故 I_1 与 I_2 之差为 (利用格林公式)

$$I_2 - I_1 = \oint_{AnBmA} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S (-4x) dx dy = \int_1^2 dx \int_{2x^2-x}^{5x-4} (-4x) dy \\
&= - \int_1^2 4x(-2x^2+6x-4) dx \\
&= (2x^4 - 8x^3 + 8x^2) \Big|_1^2 = -2,
\end{aligned}$$

或 $I_1 - I_2 = 2$.

4303. 计算曲线积分

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

其中 AmO 为由点 $A(a, 0)$ 至点 $O(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

解 在 Ox 轴上连接点 $O(0, 0)$ 与点 $A(a, 0)$, 这样, 便构成封闭的半圆形 $AmOA$, 且在线段 OA 上,

$$\int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = 0.$$

从而

$$\oint_{AmOA} = \int_{AmO} + \int_{OA} = \int_{AmO}.$$

另一方面, 利用格林公式可得

$$\begin{aligned}
&\oint_{AmOA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq ax} m dx dy = \frac{\pi m a^2}{8}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$$

$$= -\frac{\pi m a^2}{8}.$$

4304. 计算曲线积分

$$\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy,$$

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数, AmB 为连接点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 的任何路径, 但与线段 AB 围成已知大小为 S 的面积 $AmBA$.

解 首先, 我们有

$$\oint_{AmBA} = \int_{AmB} + \int_{BA},$$

而

$$\begin{aligned} \oint_{AmBA} [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy \\ = \iint_S m dx dy = mS. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_{BA} [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy \\ = \int_{BA} d[e^x \varphi(y)] - \int_{BA} m(y dx + dy) \\ = e^x \varphi(y) \Big|_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} - m \int_{x_2}^{x_1} \left[y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right. \\ \quad \left. \cdot (x - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right] dx \\ = e^{x_1} \varphi(y_1) - e^{x_2} \varphi(y_2) - m \left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (x_1 - x_2) + \frac{m}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_2 - x_1)^2 \\
& = e^{x_1} \varphi(y_1) - e^{x_2} \varphi(y_2) + m(y_2 - y_1) \\
& + \frac{m}{2} (x_2 - x_1)(y_2 + y_1).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int_{AMB} [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy \\
& = mS + e^{x_2} \varphi(y_2) - e^{x_1} \varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) \\
& - \frac{m}{2} (x_2 - x_1)(y_2 + y_1).
\end{aligned}$$

注: 利用此题的结果可计算 4303 题. 事实上, 由于 $\varphi(y) = \sin y$, $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 0$, $S = \frac{\pi a^2}{8}$,

代入即得

$$\int_{AMB} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

4305⁺ 求两个二次连续地可微分的函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$, 使得线积分

$$I = \oint_C P(x + \alpha, y + \beta)dx + Q(x + \alpha, y + \beta)dy$$

对于任何封闭的围线 C 与常数 α 和 β 无关.

解 由格林公式, 得

$$\begin{aligned}
I = \iint_S \left[\frac{\partial Q(x + \alpha, y + \beta)}{\partial x} - \frac{\partial P(x + \alpha, y + \beta)}{\partial y} \right] \\
\cdot dx dy = \tau. \quad (1)
\end{aligned}$$

由假定 τ 为一常数, 它与 α 、 β 无关 (只与围线 C 有关), 上式中的 S 表围线 C 所围成的闭区域. 由假定

P, Q 具有连续的二阶偏导数, 故 (1) 式中二重积分的被积函数具有关于 α, β 的一阶连续偏导数, 因此, 可以在积分号下关于 α, β 求偏导数, 得

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial y} \right] \cdot dx dy = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tau = 0. \quad (2)$$

$$\iint_S \left[\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial y} \right] \cdot dx dy = \frac{\partial}{\partial \beta} \tau = 0. \quad (3)$$

于是, (2) 式和 (3) 式对任何 α, β 以及任何 S 都成立. 再注意到 (2) 式和 (3) 式中二重积分的被积函数都是连续的, 故被积函数必恒为零 (参看 4097 题, 此题对二重积分也成立);

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial y} \equiv 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial x} - \frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial y} \equiv 0 \quad (5)$$

(对任何 x, y, α, β). 记 $x+\alpha=u, y+\beta=v$, 显然有

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial x} = \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \alpha \partial y} = \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial x} = \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial v \partial u},$$

$$\frac{\partial^2 P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial \beta \partial y} = \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial v^2}.$$

于是, (4) 式与 (5) 式为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right] \\ &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right] \\ &= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial v^2} = 0 \end{aligned}$$

(对任何 u, v), 由此可知:

$$\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} = k \text{ (常数)}.$$

将 u, v 改记为 x, y , 则上式为

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = k \text{ (常数)}. \quad (6)$$

令 $u(x, y) = \int_0^x P(t, y) dt$, 则 $u(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数, 且

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad (7)$$

由 (6) 式知:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} &= k + \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \\
&= k + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) \\
&= k + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

两端积分，得

$$Q(x, y) = kx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \varphi(y), \quad (8)$$

其中 $\varphi(y)$ 为具有二阶连续导数的任意函数。由 (7)，

(8) 两式又知 $u(x, y)$ 具有连续的三阶偏导数。

反之，若 $u(x, y)$ 是任一具有三阶连续偏导数的函数，而 $\varphi(y)$ 是任一具二阶连续导数的函数，则由 (7) 式和 (8) 式确定的 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 必具连续二阶偏导数，且使 (6) 式成立，从而使

$$\begin{aligned}
I &= \oint_C P(x+\alpha, y+\beta) dx + Q(x+\alpha, y+\beta) dy \\
&= \iint_S \left[\frac{\partial Q(x+\alpha, y+\beta)}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial P(x+\alpha, y+\beta)}{\partial y} \right] dx dy \\
&= \iint_S k dx dy = kS,
\end{aligned}$$

故 I 是与 α, β 无关的常数（对于任意固定的 C ）。

综上所述，可知：使线积分 I 对于任何封闭围线 C 与常数 α, β 无关的二阶连续地可微的函数 $P(x, y)$

与 $Q(x, y)$ 的全体由公式(7)与(8)给出, 其中 k 为常数, $u(x, y)$ 为三阶连续地可微的任一函数, $\varphi(y)$ 为二阶连续地可微的任意一个一元函数.

4306. 为了使线积分

$$\int_{AMB} F(x, y)(ydx + xdy)$$

与积分路径的形状无关, 则可微分函数 $F(x, y)$ 应满足怎样的条件?

解 由于 $P=yF(x, y)$, $Q=xF(x, y)$, 故由格林公式知所求的条件为

$$\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)],$$

即

$$xF'_x(x, y) = yF'_y(x, y).$$

4307. 计算

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

其中 C 为依正方向进行而不过坐标原点的简单封闭围线.

解 令 $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$. 易知, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论:

(1) 坐标原点在围线 C 之外, 这时, 在由 C 围成的有界闭区域 S 上, P 与 Q 以及它们的偏导数都连续,

故可应用格林公式，得

$$I = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

(2) 围线 C 包围坐标原点，这时，由于 P, Q 在原点无定义，故不能直接对由 C 围成的区域应用格林公式。今取 $a > 0$ 充分小，使中心在原点半径为 a 的圆周 L_a ($L_a: x^2 + y^2 = a^2$) 完全位于围线 C 之内。用 S_a 表界于 C 和 L_a 之间的环形闭区域。显然，在 S_a 上， P, Q 及其偏导数均连续，故可应用格林公式，得

$$\begin{aligned} & \left(\oint_C + \oint_{-L_a} \right) Pdx + Qdy \\ &= \iint_{S_a} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0, \end{aligned}$$

其中 $-L_a$ 表沿 L_a 的负方向（即顺时针方向）。

于是，

$$I = \oint_C Pdx + Qdy = \oint_{L_a} Pdx + Qdy,$$

其中 L_a 沿正方向（即逆时针方向），利用 L_a 的参数方程 $x = a \cos t, y = a \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)，即得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L_a} Pdx + Qdy = \oint_{L_a} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(a \cos t) - a \sin t(-a \sin t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

利用曲线积分计算由下列曲线所界的面积:

4308. 椭圆 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab. \end{aligned}$$

4309. 星形线 $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t) dt \\ &= \frac{3}{8} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \pi ab. \end{aligned}$$

4310. 抛物线 $(x+y)^2 = ax$ ($a > 0$) 和轴 Ox .

解 作代换 $y = tx$, 则原方程化为 $x^2(1+t)^2 = ax$.

从而得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a}{(1+t)^2}, \quad y = \frac{at}{(1+t)^2} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a, 0)$ 与 $(0, 0)$. 在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(a, 0)$ 的一段上, 有

$$x dy - y dx = 0.$$

在抛物线上, 有

$$x dy - y dx = \frac{a^2}{(1+t)^4} dt.$$

于是, 面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^4} \\
 &= -\frac{a^2}{6} \cdot \frac{1}{(1+t)^3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{a^2}{6}.
 \end{aligned}$$

4311. 笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$).

解 作代换 $y = tx$, 则得曲线的参数方程为

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$dx = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} dt, \quad dy = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} dt,$$

从而

$$x dy - y dx = \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt.$$

于是, 面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \\
 &= \frac{3a^2}{2} \left[-\frac{1}{1+t^3} \right] \Big|_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

4312. 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

解 利用极坐标 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 得双纽线的方程为 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, 故

$$x = a \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad y = a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

从而 $x dy - y dx = a^2 \cos 2\varphi d\varphi$. 于是, 面积为

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 .$$

4313. 曲线 $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ 及坐标轴.

解 作代换 $y = tx$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{1+t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{t(1+t^2)}{1+t^3} \quad (0 \leq t < +\infty) .$$

曲线的起点为 $(1, 0)$, 终点为 $(0, 1)$. 在曲线上,

$$x dy - y dx = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \quad (0 \leq t < +\infty) .$$

在 Ox 轴上从点 $(0, 1)$ 到点 $(0, 0)$ 一段, 以及在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 0)$ 一段上, 均有

$$x dy - y dx = 0 .$$

于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^3)^2} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} B \left(2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} B(1, 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} B \left(\frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3} \right) \right]^{*}) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\Gamma \left(2 - \frac{1}{3} \right) \Gamma \left(\frac{1}{3} \right)}{\Gamma(2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

*) 利用3853题的结果.

4314. 计算由曲线

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^ny^m \quad (a>0, n>0, m>0)$$

所界的面积.

解 作代换 $y=t x$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}}, \quad y = \frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

从而

$$x dy - y dx = -\frac{a^2 t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt \quad (0 \leq t < +\infty).$$

于是, 面积为

$$S = \frac{1}{2} \oint_c x dy - y dx = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt$$

$$= \frac{a^2}{2} B(2m+1, 2n+1). \quad *)$$

*) 利用3852题的结果.

4315. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a>0, b>0, n>0)$$

和坐标轴所界的面积.

解 作代换 $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, \quad y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}),$

即得

$$x dy - y dx = \frac{2ab}{n} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点 $(a, 0)$ 和点 $(0, b)$. 在 Oy 轴上, 从点 $(0, b)$ 到点 $(0, 0)$ 一段, 以及在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(a, 0)$ 一段上, 显然有

$$x dy - y dx = 0.$$

于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_c x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ab}{n} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \\ &= \frac{ab}{n} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)^{*}) = \frac{ab}{2n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}. \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

4316. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a > 0, b > 0, n > 0)$ 和坐标轴所界的面积.

解 作代换 $y = \frac{b}{a}t$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n}, \quad y = \frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n} \quad (0 < t < +\infty).$$

易知

$$xdy - ydx = ab \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt.$$

又在两坐标轴上, 显然有 $xdy - ydx = 0$. 于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{ab}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt \\ &= \frac{ab}{2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-2}}{(1+t^n)^2} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^n)^2} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^n)^2} dt \right] \\ &= \frac{ab}{2} \left[\frac{1}{n} B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} B(1, 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right) \right]^{*}) \\ &= \frac{ab}{n} \left[1 + B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{ab}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} \right] \\ &= \frac{ab}{n} \left[1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right]. \end{aligned}$$

*) 利用3853题的结果.

4317. 计算由纽形曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$$

($a > 0, b > 0, c > 0, n > 0$) 所界的面积.

解 作代换 $y = \frac{b}{a}xt$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{act^n}{1+t^{2n+1}}, \quad y = \frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

易知

$$x dy - y dx = \frac{abc^2 t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2} dt.$$

于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{abc^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2} dt \\ &= -\frac{abc^2}{2(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+t^{2n+1}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{abc^2}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

4318. 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆外面圆周滚动 (而不滑动) 时, 由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为外摆线. 假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数 ($n \geq 1$), 求外摆线所界的面积. 研究特殊情况 $r = R$ (心脏形线).

解 取定圆的中心 O 作坐标原点, 取 Ox 轴通过点 A , 点 A 是动点的始点, 即为两圆的公切点时的位置 (图 8.65). 当动圆滚到如图的新位置时, 点 A 移到点 M . 动点 M 的轨迹便是外摆线, 其方程推导如下: 设动圆的圆心为 C , 两圆的切点为 B , 记 $\angle MCB = t$ (运动开始时, 设 t 等于零). 切点在定圆上所移过的弧 \widehat{AB} 应等于它在动圆上所移过的弧 \widehat{MB} , 即

$$R \cdot \angle AOB = \frac{R}{n} \cdot \angle MCB = \frac{R}{n} t.$$

$$y = R\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)t.$$

若记 $\varphi = \frac{t}{n}$, 并注意到 $R = nr$, 则外摆线可用如下的参数方程表示:

$$x = (n+1)r \cos \varphi - r \cos(n+1)\varphi,$$

$$y = (n+1)r \sin \varphi - r \sin(n+1)\varphi.$$

由 $R = nr$ 知, 当动圆滚 n 圈后, 起点与终点重合, 即 φ 的变化范围为 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. 由于

$$x dy - y dx = r^2 (n+1)(n+2)(1 - \cos n\varphi) d\varphi,$$

故所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{r^2 (n+1)(n+2)}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos n\varphi) d\varphi \\ &= \pi r^2 (n+1)(n+2). \end{aligned}$$

特别是, 当 $r = R$ 时, 即 $n = 1$, 则得心脏形线的面积为 $S = 6\pi r^2$.

4319. 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆内面圆周滚动 (而不滑动) 时, 由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为内摆线. 假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数 ($n \geq 2$), 求内摆线所界的面积. 研究特殊情况 $r = \frac{R}{4}$ (星形线).

解 仿上题, 容易求得内摆线的参数方程为

$$x = R\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cos \frac{t}{n} + \frac{R}{n} \cos\left(1 - \frac{1}{n}\right)t,$$

$$y = R\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \sin\left(1 - \frac{1}{n}\right)t,$$

若以 $\varphi = \frac{t}{n}$ 为参数, 并注意到 $R = nr$, 则得

$$x = r(n-1)\cos\varphi + r\cos(n-1)\varphi,$$

$$y = r(n-1)\sin\varphi - r\sin(n-1)\varphi.$$

由于

$$x dy - y dx = r^2(n-1)(n-2)(1 - \cos n\varphi) d\varphi,$$

故面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{r^2(n-1)(n-2)}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos n\varphi) d\varphi \\ &= \pi r^2(n-1)(n-2). \end{aligned}$$

特别是, 当 $\frac{R}{r} = 4$ 时, 即 $n = 4$, 则得星形线所界的面积为 $S = 6\pi r^2$.

4320. 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 被曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截那部分的面积.

解 两曲面的交线为

$$x^2 + y^2 = ax, \quad z^2 = a^2 - ax.$$

若将 Oxy 平面上的圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 记以 C , 其弧长记以 s , 则所求的面积显然可表为

$$S = 2 \oint_C \sqrt{a^2 - ax} ds.$$

由于 $x^2 + y^2 = ax$ 即为 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, 故令

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \varphi, \quad y = \frac{a}{2} \sin \varphi,$$

从而弧长的微分为 $ds = \frac{a}{2} d\varphi$. 于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \oint_C \sqrt{a^2 - ax} \, ds = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{2}(1 - \cos \varphi)} \cdot \frac{a}{2} d\varphi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} a^2 \sin \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a^2. \end{aligned}$$

4321. 计算

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2},$$

若 $X = ax + by, Y = cx + dy$, 且 C 为包围坐标原点的简单的封闭围线 ($ad - bc \neq 0$).

解 首先注意, 由于 $ad - bc \neq 0$, 故只有原点 $(0, 0)$ 使 $X^2 + Y^2 = 0$. 易知

$$\begin{aligned} X dY - Y dX &= (ax + by)(cdx + ddy) \\ &\quad - (cx + dy)(adx + bdy) \\ &= (ad - bc)(xdy - ydx), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \end{aligned}$$

其中

$$P = - \frac{(ad - bc)y}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2},$$

$$Q = \frac{(ad-bc)x}{(ax+by)^2 + (cx+dy)^2}.$$

容易算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{(ad-bc)[(a^2+c^2)x^2 - (b^2+d^2)y^2]}{[(ax+by)^2 + (cx+dy)^2]^2}$$

((x, y) ≠ (0, 0) 时),

故由格林公式知

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$= \oint_{C'} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

其中 C' 可为包围原点 $(0, 0)$ 的任一位于 C 内的围线. 特别是, 可取 C' 为围线 $(ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = r^2$ (即 $X^2 + Y^2 = r^2$), $r > 0$ 充分小. 于是, 得 (利用格林公式)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} XdY - YdX \\ &= \frac{ad-bc}{2\pi r^2} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} xdy - ydx \\ &= \frac{ad-bc}{2\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} 2dx dy \\ &= \frac{ad-bc}{\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} \left| \frac{D(x, y)}{D(X, Y)} \right| dXdY. \end{aligned}$$

由于 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} = ad - bc$, 故 $\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}$
 $= \frac{1}{ad - bc}$. 于是, 代入上式得

$$\begin{aligned} I &= \frac{ad - bc}{\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} \frac{1}{|ad - bc|} dX dY \\ &= \frac{ad - bc}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{|ad - bc|} \cdot \pi r^2 = \operatorname{sgn}(ad - bc). \end{aligned}$$

4322. 若简单的围线 C 包围坐标原点, $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, 而曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 和 $\psi(x, y) = 0$ 在围线 C 内面有几个单交点, 计算积分 I (参阅前题).

解 设 $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ 在 C 内的交点为 $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). 首先注意, 本题应假定函数 $\varphi(x, y)$ 与 $\psi(x, y)$ 在 C 围成的区域内具有连续的二阶偏导数, 并且在各点 P_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 处有 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} = \varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x \neq 0$. 容易算得

$X dY - Y dX = (\varphi \psi'_y - \varphi'_y \psi) dx + (\varphi \psi'_x - \varphi'_x \psi) dy$,
 从而

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \end{aligned}$$

其中

$$P = \frac{\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi}{\varphi^2 + \psi^2}, \quad Q = \frac{\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi}{\varphi^2 + \psi^2}.$$

又可算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = & \frac{1}{(\varphi^2 + \psi^2)^2} [(\varphi\psi''_{xx} - \varphi''_{xx}\psi)(\varphi^2 + \psi^2) \\ & - (\varphi'_x\psi'_x + \varphi''_x\psi'_x)\varphi^2 + (\varphi'_y\psi'_x + \varphi''_y\psi'_x)\psi^2 \\ & + 2(\varphi'_x\varphi'_y - \psi'_x\psi'_y)\varphi\psi] \end{aligned}$$

$$((x, y) \neq (x_i, y_i) \quad (i=1, 2, \dots, m)).$$

围绕点 $P_i(x_i, y_i)$ 作围线 $C_i: [\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2 = r^2$ (即 $X^2 + Y^2 = r^2$), 取 $r > 0$ 充分小, 使诸 C_i 互不相交且都位于 C 内 (这是办得到的, 因为在各

点 $P_i, \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \neq 0$. 从而由连续性知在 P_i 的

某邻域内 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \neq 0$ 且保持定号, 于是根据隐

函数存在定理知变换 $X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y)$ 在点 $(x, y) = (x_i, y_i)$ 邻近及点 $(X, Y) = (0, 0)$

邻近是双方单值双方连续的) 并使 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ 在 P_i

的邻近 $X^2 + Y^2 \leq r^2$ (记为 S_i) 上保持定号, 将格林公式应用于诸围线 C, C_1, \dots, C_m 之间的区域, 可得

$$\begin{aligned} & \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \sum_{i=1}^m \oint_{C_i} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \oint_{c_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}. \quad (1)$$

但

$$\begin{aligned} & \oint_{c_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \oint_{c_i} XdY - YdX \\ &= \frac{1}{r^2} \oint_{c_i} (\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi)dx + (\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi)dy \\ &= \frac{1}{r^2} \iint_{\bar{S}_i} 2(\varphi'_x\psi'_y - \varphi'_y\psi'_x)dx dy \\ &= \frac{2}{r^2} \iint_{\bar{S}_i} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} dx dy \\ &= \frac{2}{r^2} \left(\operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{P_i} \iint_{\bar{S}_i} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} dx dy \\ &= \frac{2}{r^2} \left(\operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{P_i} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} dXdY \\ &= \frac{2}{r^2} \left(\operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{P_i} \cdot \pi r^2 \\ &= 2\pi \left(\operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right)_{P_i}, \end{aligned}$$

代入 (1) 式, 即得

$$I = \sum_{i=1}^n \left(\operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right)_{P_i},$$

或写为

$$I = \sum \operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)},$$

其中的 Σ 是对曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 与 $\psi(x, y) = 0$ 在 C 内的各交点相加.

注: 显然, 4321 题是 4322 题的特例. 这时, 曲线 $ax + by = 0$ 与 $cx + dy = 0$ 在 C 内只有一个交点, 即原点 $(0, 0)$, 而 $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = ad - bc$.

4323. 证明, 若 C 为封闭的围线且 \vec{l} 为任意的方向, 有

$$\oint_C \cos(\vec{l}, \vec{n}) ds = 0,$$

式中 n 为围线 C 的外法线.

证 如图 8.66 所示, 不妨规定 C 的方向为逆时针的, 以 \vec{l} 表示. 由于夹角

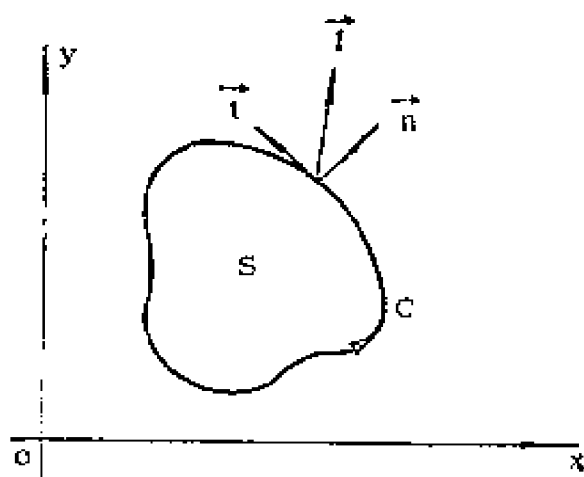


图 8.66

$$(\vec{l}, \vec{n}) = (\vec{l}, \vec{x}) - (\vec{n}, \vec{x}),$$

故得

$$\begin{aligned}\cos(\vec{l}, \vec{n}) &= \cos(\vec{l}, x) \cos(\vec{n}, x) \\ &+ \sin(\vec{l}, x) \sin(\vec{n}, x).\end{aligned}$$

$$\text{但 } \sin(\vec{n}, x) = \sin\left[(\vec{l}, x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(\vec{l}, x),$$

$$\cos(\vec{n}, x) = \cos\left[(\vec{l}, x) - \frac{\pi}{2}\right] = \sin(\vec{l}, x), \text{ 且}$$

$$\cos(\vec{l}, x) = \frac{dx}{ds}, \quad \sin(\vec{l}, x) = \frac{dy}{ds},$$

因此, 有

$$\cos(\vec{l}, \vec{n}) ds = \cos(\vec{l}, x) dy - \sin(\vec{l}, x) dx.$$

再利用格林公式, 并注意到 $\sin(\vec{l}, x)$ 和 $\cos(\vec{l}, x)$ 均为常数, 即得

$$\begin{aligned}& \oint_C \cos(\vec{l}, \vec{n}) ds \\ &= \oint_C [-\sin(\vec{l}, x) dx + \cos(\vec{l}, x) dy] \\ &= \iint_S 0 \, dx dy = 0.\end{aligned}$$

4324. 求积分

$$I = \oint_C [x \cos(\vec{n}, x) + y \cos(\vec{n}, y)] ds$$

之值, 式中 C 为包围有界域 S 的简单封闭曲线, n 为它的外法线.

解 如上题所述, 已知

$$\begin{aligned}\cos(\vec{n}, x) &= \cos\left[(\vec{l}, x) - \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \sin(\vec{l}, x) = \frac{dy}{ds},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{n}, y) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\vec{n}, x)\right] = \sin(\vec{n}, x) \\
&= \sin\left[(\vec{t}, x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(\vec{t}, x) \\
&= -\frac{dx}{ds}.
\end{aligned}$$

于是,

$$I = \oint_C x dy - y dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = 2S,$$

这里 S 表示有界域 S 面积的数值.

4325. 求:

$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (\vec{F}, \vec{n}) ds,$$

其中 S 为包含点 (x_0, y_0) 的围线 C 所界的面积, $d(S)$ 为域 S 的直径, \vec{n} 为围线 C 的外法线上的单位向量, $\vec{F}(x, y)$ 为在 $S+C$ 上连续地可微分的向量.

解 由4324题的推导过程中知, 矢量 \vec{n} 在坐标轴上的射影为

$$n_x = \cos(\vec{n}, x) = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = \cos(\vec{n}, y) = -\frac{dx}{ds}.$$

于是,

$$(\vec{F}, \vec{n}) ds = (Xn_x + Yn_y) ds = X dy - Y dx.$$

因此, 利用格林公式知

$$\begin{aligned}
\oint_C (\vec{F}, \vec{n}) ds &= \oint_C X dy - Y dx \\
&= \iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Big|_{(\xi, \eta)} \cdot S,$$

其中点 $(\xi, \eta) \in$ 域 S ，于是，

$$\begin{aligned} \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (\vec{F}, \vec{n}) ds &= \lim_{d(S) \rightarrow 0} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Big|_{(\xi, \eta)} \\ &= X'_x(x_0, y_0) + Y'_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

§13. 曲线积分的物理应用

4326. 均匀分布在圆 $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$ 的上半部的质量 M 以怎样的力吸引质量为 m 位于 $(0, 0)$ 的质点?

解 由对称性知，引力在 Ox 轴上的射影 $X=0$ ，故只要计算引力在 Oy 轴上的射影。

设圆心角为 θ ，由 $ds = a d\theta$ 知，对于长为 ds 一段圆弧吸引质量为 m 的质点的力在 Oy 轴上的射影为

$$\begin{aligned} dY &= \frac{km \frac{M}{\pi a}}{a^2} \sin \theta \cdot a d\theta \\ &= \frac{kmM}{\pi a^2} \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

其中 k 为引力常数。

于是，所求的引力在 Oy 轴上的射影为

$$\begin{aligned} Y &= \frac{kmM}{\pi a^2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2kmM}{\pi a^2}. \end{aligned}$$

4327. 计算单层的对数位

$$u(x, y) = \oint_C \kappa \ln \frac{1}{r} ds,$$

式中 $\kappa =$ 常数——密度, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$,
 设围线 C 是圆周 $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

解 由对称性知, 对数位

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2\kappa \int_0^\pi \ln \frac{1}{r} \cdot R d\theta \\ &= 2R\kappa \int_0^\pi \ln \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2R\rho \cos \theta + \rho^2}} d\theta \\ &= -R\kappa \int_0^\pi \ln R^2 \left[1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos \theta + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta, \end{aligned}$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\xi x + \eta y = R\rho \cos \theta$, 而 θ 是矢量
 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ 与 $\vec{r}_1 = \xi\vec{i} + \eta\vec{j}$ 的正向夹角.

利用3733题 (或2192题) 的结果, 可得

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \ln \left[1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos \theta + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \rho \leq R; \\ 2\pi \ln \frac{\rho}{R}, & \rho > R. \end{cases} \end{aligned}$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -2R\kappa \int_0^\pi \ln R d\theta \\ &\quad - R\kappa \int_0^\pi \left[1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos \theta + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 2\pi R\kappa \ln \frac{1}{R}, & \rho \leq R, \\ 2\pi R\kappa \ln \frac{1}{\rho}, & \rho > R. \end{cases}$$

4328. 采用极坐标系 ρ 和 φ , 计算单层的对数位

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi$$

和

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi,$$

式中 r 为点 (ρ, φ) 与动点 $(1, \psi)$ 间的距离, m 为自然数.

解 由于

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\rho \cos \varphi - \cos \psi)^2 + (\rho \sin \varphi - \sin \psi)^2} \\ &= \sqrt{1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2}, \end{aligned}$$

于是, 当 $\rho < 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln[1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2] d\psi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi} \cos(mu + m\varphi) \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi} \cos m\varphi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi} \sin m\varphi \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du. \end{aligned}$$

因为上述右端两个积分中被积函数均为以 2π 为周期的函数, 并注意到奇偶函数在对称区间上的积分

性质，则有

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2) du \\
 &\quad + \frac{\sin m\varphi}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2) du \\
 &= -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2) du \\
 &= -(\cos m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m} \rho^m \right) = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi \quad *) .
 \end{aligned}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln[1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2] d\psi \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{-\varphi+2\pi} \sin(mu+m\varphi) \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2) du \\
 &= -\frac{\cos m\varphi}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2) du \\
 &\quad - \sin m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2) du \\
 &= -\sin m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2) du \\
 &= -(\sin m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m} \rho^m \right) = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi .
 \end{aligned}$$

当 $\rho > 1$ 时，则有

$$I_1 = -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1-2\rho\cos u+\rho^2) du$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln \rho \left(1 - 2\frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du \\
&= -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln \left(1 - 2\frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du \\
&= -(\cos m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m\rho^m} \right) = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi \quad ** \quad .
\end{aligned}$$

同理，我们有

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\sin m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln \left(1 - 2\frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du \\
&= -(\sin m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m\rho^m} \right) = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi .
\end{aligned}$$

对于 $\rho = 0$ ，显然有

$$I_1 = I_2 = 0 .$$

现在来研究当 $\rho = 1$ 的情况。首先，积分

$$I_1 = \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du$$

对于 ρ 在区间 $[1, 1 + \delta]$ 上是一致收敛的，其中 δ 为很小的正数。事实上，对于充分小的 η ，当 u 在 $(0, \eta)$ 内取值时，有

$$\begin{aligned}
1 &\geq 1 - 2\rho \cos u + \rho^2 = (1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \cos u) \\
&\geq 2(1 - \cos u) > 0 .
\end{aligned}$$

于是，当 $1 \leq \rho \leq 1 + \delta$ ， $u \in (0, \eta)$ 时，有

$$|\cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2)| \leq |\ln 2(1 - \cos u)| .$$

而积分

$$\int_0^\eta |\ln 2(1 - \cos u)| du$$

是收敛的. 这是由于当 $0 < 2\beta < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow +0} u^{2\beta} |\ln 2(1 - \cos u)| \\ &= \lim_{u \rightarrow +0} -[2(1 - \cos u)]^\beta \ln[2(1 - \cos u)] \\ & \quad \cdot \frac{u^{2\beta}}{2^\beta (1 - \cos u)^\beta} \\ &= 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

于是, 积分

$$\int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du$$

在 $1 \leq \rho \leq 1 + \delta$ 上一致收敛, 故知积分

$$I_1 = \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du$$

在 $1 \leq \rho \leq 1 + \delta$ 上一致收敛. 从而, I_1 作为参数 ρ 的函数在 $\rho = 1$ 是右连续的. 由此, 根据上面已求出

$\rho > 1$ 时 $I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi$, 得知: 当 $\rho = 1$ 时,

$$I_1 = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi = \frac{\pi}{m} \cos m\varphi.$$

同理, 可得

$$I_2 = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi = \frac{\pi}{m} \sin m\varphi.$$

综上所述, 得

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi, \quad \text{当 } 0 \leq \rho \leq 1;$$

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi, \quad \text{当 } \rho > 1.$$

*) 参看 И. М. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著 “函数表

与积分表”3.765公式1.

$$\int_0^\pi \ln(1-2p\cos x+p^2)\cos \alpha x dx = -\frac{\pi}{\alpha} p^\alpha (p^2 < 1).$$

** 根据上面公式, 当 $p^2 > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \ln(1-2p\cos x+p^2)\cos \alpha x dx \\ &= \int_0^\pi \ln p^2 \left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos \alpha x dx \\ &= \int_0^\pi 2\ln p \cdot \cos \alpha x dx + \int_0^\pi \ln \left(1-2\frac{1}{p}\cos x\right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{p^2}\right)\cos \alpha x dx \\ &= \int_0^\pi \ln \left(1-2\frac{1}{p}\cos x+\frac{1}{p^2}\right)\cos \alpha x dx \\ &= -\frac{\pi}{\alpha} p^{-\alpha}, \end{aligned}$$

其中 α 为自然数.

4329. 计算高斯积分

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds,$$

式中 $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$ 为向量 \vec{r} 的长度, 此向量是连接点 $A(x, y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi, \eta)$ 而得的, (\vec{r}, \vec{n}) 为向量 \vec{r} 与在曲线 C 上 M 点的外法线 \vec{n} 所夹的角.

解 设 \vec{n} 与 Ox 轴的夹角为 α , \vec{r} 与 Ox 轴的夹角为 β , 则

$(\vec{r}, \vec{n}) = \alpha - \beta$. 于是,

$$\begin{aligned}\cos(\vec{r}, \vec{n}) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{\xi-x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta-y}{r}\sin\alpha.\end{aligned}$$

代入高斯积分, 得

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \oint_C \left(\frac{\eta-y}{r^2} \sin\alpha + \frac{\xi-x}{r^2} \cos\alpha \right) ds \\ &= \oint_C \frac{\xi-x}{r^2} d\eta - \frac{\eta-y}{r^2} d\xi.\end{aligned}$$

令

$$P = -\frac{\eta-y}{r^2}, \quad Q = \frac{\xi-x}{r^2},$$

则有

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{-(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{-(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{r^4},$$

因而 P 、 Q 的偏导数除去点 A (此处 $r=0$) 外, 在全平面上是连续的, 并且 $\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \eta}$. 于是, 利用格林公式知: 当点 A 在曲线 C 之外时, 有

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = 0.$$

当点 A 在曲线 C 之内时, 则在曲线 C 内以 A 为圆心, R 为半径作一圆 I , 即得

$$u(x, y) = \oint_I \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds$$

$$= \oint_C \frac{1}{R} ds = 2\pi.$$

当点 A 在曲线 C 上时, 不妨利用关系式

$$\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = d\varphi \quad *) ,$$

其中 $d\varphi$ 为从点 A 看曲线 C 上弧长的微分 ds 所张的角度. 今以 A 为圆心, r_1 为半径作一小圆, 交 C 于 B_1 及 B_2 两点, 将曲线 C 除去小圆内的部分记以 $\widehat{B_1 B_2}$, 则有

$$\int_{\widehat{B_1 B_2}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = \int_{\widehat{B_1 B_2}} d\varphi = \angle B_1 A B_2.$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds \\ &= \lim_{r_1 \rightarrow +0} \int_{\widehat{B_1 B_2}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds \\ &= \lim_{r_1 \rightarrow +0} \angle B_1 A B_2 = \pi. \end{aligned}$$

综上所述, 得高斯积分

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = \begin{cases} 0, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 外;} \\ \pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 上;} \\ 2\pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 内.} \end{cases}$$

*) 参看 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538 目.

4330. 采用极坐标系 ρ 和 φ , 计算双层的对数位

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} d\psi$$

和

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} d\psi,$$

式中 r 为点 $A(\rho, \varphi)$ 和动点 $M(1, \psi)$ 之间的距离, (r, n) 为方向 $\overrightarrow{AM} = \vec{r}$ 与从点 $O(0, 0)$ 所引的半径 $\overrightarrow{OM} = \vec{n}$ 二者之间的夹角, m 为自然数.

解 由题意知:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} \\ &= \frac{(\cos\psi - \rho\cos\varphi)\cos\psi + (\sin\psi - \rho\sin\varphi)\sin\psi}{(\cos\psi - \rho\cos\varphi)^2 + (\sin\psi - \rho\sin\varphi)^2} \\ &= \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)}. \end{aligned}$$

从而, 当 $\rho = 1$ 时, $\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} = \frac{1}{2}$. 又因 m 为自然数, 故此时有

$$K_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi = 0,$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin m\psi d\psi = 0.$$

当 $\rho < 1$ 时, 因为级数 (利用2958题的结果)

$$\frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi)$$

在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛, 乘 $\cos m(\psi - \varphi)$ 和 $\sin m(\psi - \varphi)$ 以后在 $[0, 2\pi]$ 上也一致收敛, 故可逐项积分. 于是

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^{2\pi} \cos m\psi \cdot \frac{1 - \rho \cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= \int_0^{2\pi} [\cos m(\psi - \varphi) \cos m\varphi - \sin m(\psi - \varphi) \sin m\varphi] \\
&\quad \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi) \right] d\psi \\
&= \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos m(\psi - \varphi) \rho^m \cos m(\psi - \varphi) d\psi \\
&= \rho^m \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 m(\psi - \varphi) d\psi \\
&= \pi \rho^m \cos m\varphi.
\end{aligned}$$

同理，容易求得

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_0^{2\pi} \sin m\psi \cdot \frac{1 - \rho \cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= \pi \rho^m \sin m\varphi.
\end{aligned}$$

当 $\rho > 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^{2\pi} \cos m\psi \cdot \frac{1 - \rho \cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \cdot \frac{2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \cdot \frac{[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)] + (1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \cdot \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\psi - \varphi)} d\psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \cdot \frac{(1-r^2) + [1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)]}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)} d\psi \\
&= -\int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1-r\cos(\psi-\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\psi-\varphi)} d\psi \\
&= -\pi r^m \cos m\varphi = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi,
\end{aligned}$$

其中 $r = \rho^{-1} < 1$.

同理, 可求得

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{1-\rho\cos(\psi-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\psi-\varphi)} d\psi \\
&= -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi .
\end{aligned}$$

综上所述, 得

$$K_1 = \pi \rho^m \cos m\varphi, K_2 = \pi \rho^m \sin m\varphi, \text{ 当 } \rho < 1,$$

$$K_1 = K_2 = 0, \quad \text{当 } \rho = 1,$$

$$K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi, K_2 = -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi, \text{ 当 } \rho > 1.$$

4331. 若 $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则称可微分两次的函数 $u = u(x, y)$ 为 调和函数. 证明: 当且仅当

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

(式中 C 为任意封闭围线, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿此围线之外法线的

导函数) 时, u 是调和函数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\vec{n}, x),$$

而 (参看 4324 题的推导)

$$\cos(\vec{n}, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \sin(\vec{n}, x) = -\frac{dx}{ds},$$

故利用格林公式 (注意, 题中应假定 $u(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数), 得

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \\ &= \iint_S (\Delta u) dx dy, \end{aligned}$$

其中 S 表由封闭围线 C 围成的区域. 由此式知:

$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (对任何封闭围线 C) 当且仅当 $\iint_S (\Delta u) \cdot dx dy = 0$ (对任何区域 S). 但易知这又相当于 $\Delta u \equiv 0$. 事实上, 若 $\Delta u \equiv 0$, 则对任何 S , 有 $\iint_S (\Delta u) \cdot dx dy = 0$; 反之, 若对任何 S , 有 $\iint_S (\Delta u) dx dy = 0$,

则必 $\Delta u \equiv 0$. 因为, 若不然, 在某点 (x_0, y_0) , $\Delta u \neq 0$. 例如, 设在此点, $\Delta u > 0$, 则由连续性可知, 必存在以 (x_0, y_0) 为中心, 半径为 r_0 (充分小) 的圆域 S_0 , 使在其上每一点, 都有 $\Delta u > 0$. 由

此可知, $\iint_{S_0} (\Delta u) dx dy > 0$. 矛盾. 证毕.

4332. 证明:

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &= - \iint_S u \Delta u dx dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds, \end{aligned}$$

式中光滑围线 C 包围着有界域 S .

证 由于

$$\begin{aligned} \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C u \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\vec{n}, x) \right] ds \\ &= \oint_C u \frac{\partial u}{\partial x} dy - u \frac{\partial u}{\partial y} dx \\ &= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_S u \Delta u dx dy + \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned} \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy &= - \iint_S u \Delta u dx dy \\ &\quad + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

4333. 证明: 在有界域 S 内及其周界 C 为调和的函数, 则此函数单值地由它在围线 C 上的数值确定 (参照习题

4332) .

证 由题意知, 我们只要证明: 如有界域 S 上的两个调和函数 u_1 和 u_2 , 在其周界 C 上有相同的数值, 则它们在整个域上恒等. 这也就是要证明: 若调和函数 $u = u_1 - u_2$ 在周界 C 上等于零, 则它在整个域上恒为零. 事实上, 利用4332题的结果, 得

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0,$$

于是, 在整个域 S 上, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

这表明, 在 S 上 u 为常数. 但在周界 C 上 $u = 0$, 故在域 S 上 $u \equiv 0$, 即 $u_1 = u_2$.

4334. 证明平面上的格林第二公式

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

式中光滑的围线 C 包围着有界域 S , $\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的导函数.

证 我们有

$$\begin{aligned} \oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C v \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\vec{n}, x) \right] ds \\ &= \oint_C v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
&= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S v \Delta u dx dy.
\end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
\oint_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds &= \oint_C u \frac{\partial v}{\partial x} dy - u \frac{\partial v}{\partial y} dx \\
&= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
&= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S u \Delta v dx dy.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds &= \oint_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \\
&= \iint_S v \Delta u dx dy - \iint_S u \Delta v dx dy \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy.
\end{aligned}$$

4335. 利用格林第二公式证明, 若 $u=u(x, y)$ 是有界闭域 S 内的调和函数, 则

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

式中 C 为域 S 的边界, \vec{n} 为围线 C 的外法线方向, (x, y) 为域 S 内的点, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 为点

(x, y) 与围线 C 上的动点 (ξ, η) 间的距离。

证 先证 $v = \ln r$ 为 (ξ, η) ($(\xi, \eta) \neq (x, y)$) 的调和函数。事实上，我们有

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\eta - y}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \frac{(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}.$$

因此，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0, \text{ 即 } \Delta v = 0.$$

今以点 (x, y) (当 $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ 时) 为中心， ρ 为半径画一圆 C_0 ，使此圆包含在围线 C 内， C_0 及 C 的正向如图 8.67 所示。曲线 C 的法线向外， C_0 的法线指向点 (x, y) 。因此，在 C_0 上，我们有

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right|_{r=\rho} &= - \left. \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right|_{r=\rho} \\ &= - \frac{1}{r} \Big|_{r=\rho} = - \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

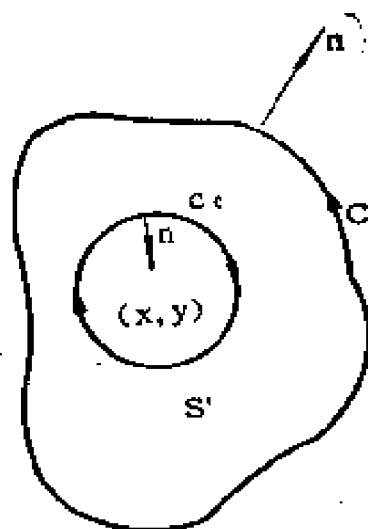


图 8.67

现将格林第二公式应用到由 C_0 及 C 所界的域 S' 上去, 即得

$$\iint_{S'} \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta \ln r \\ u & \ln r \end{vmatrix} d\xi d\eta = \oint_{C_0+C} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n} \\ u & \ln r \end{vmatrix} ds.$$

由于 $\Delta \ln r = 0$, $\Delta u = 0$, 故得

$$\oint_{C_0+C} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n} \\ u & \ln r \end{vmatrix} ds = 0.$$

将行列式展开, 并利用线积分性质, 即得

$$\begin{aligned} & \oint_C \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds \\ &= - \oint_{C_0} \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds. \end{aligned}$$

但由于

$$\begin{aligned} & \oint_{C_0} \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds \\ &= \oint_{C_0} \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} ds - \oint_{C_0} u \left(-\frac{1}{\rho} \right) ds \\ &= 0 \cdot \ln \rho^{**}) + \frac{1}{\rho} \oint_{C_0} u ds \\ &= \frac{1}{\rho} u(\xi', \eta') \oint_{C_0} ds^{**}) = 2\pi u(\xi', \eta'), \end{aligned}$$

其中 $u(\xi', \eta')$ 为 u 在圆 C_0 上某点的值, 故得

$$u(\xi', \eta') = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

两端令 $\rho \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到函数 u 在点 (x, y) 的连续性, 即得

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

*) 利用4331题的结果.

**) 利用第一型曲线积分的中值定理, 其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

4336.*) 证明对于调和函数 $u(M) = u(x, y)$ 的中值定理:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u(\xi, \eta) ds,$$

式中 C_ρ 是以 M 点为中心 ρ 为半径的圆周.

证 利用4335题的结果 (取 C 为 C_ρ), 得

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\rho} \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

但在 C_ρ 上, 有

$$r = \rho,$$

$$\left. \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right|_{r=\rho} = \left. \frac{\partial \ln r}{\partial r} \right|_{r=\rho} = \frac{1}{r} \Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho},$$

由此, 再注意到 $\oint_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (这是利用 4331 题的结果), 得

$$\begin{aligned} u(M) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\rho} \left(\frac{u}{\rho} - \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u ds - \frac{\ln \rho}{2\pi} \oint_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u(\xi, \eta) ds.$$

证毕.

*) 原题中漏掉了 ρ , 即应将 $\frac{1}{2\pi}$ 改为 $\frac{1}{2\pi\rho}$.

4337. 证明在有界闭域内是调和的且于此域内不为常数的函数 $u(x, y)$ 在此域的内点不能达到其最大或最小值 (极大值原则).

证 设有界闭域为 $\bar{\Omega}$, 它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明: 如果 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0, y_0)$ 达到其最大值或最小值 (例如, 设达到最大值), 则 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上必为常数. 下分三步证之.

i) 先证: 若圆域 $S_\rho = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho^2\}$ 完全属于 Ω , 则 $u(x, y)$ 在 S_ρ 上为常数.

对任何 $0 < r \leq \rho$, 用 C_r 表圆周 $\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$. 由 4336 题的结果可知

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} u(\xi, \eta) ds,$$

故

$$\frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds = 0. \quad (1)$$

但因 $u(x_0, y_0)$ 为最大值, 故在 C_r 上恒有

$$u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \geq 0.$$

由此, 根据 (1), 即易知在 C_r 上 $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \equiv 0$. 因为, 若有某点 $(\xi_0, \eta_0) \in C_r$ 使 $u(x_0, y_0)$

$-u(\xi_0, \eta_0) = \tau > 0$, 则由 $u(x, y)$ 的连续性可知, 必有以 (ξ_0, η_0) 为中心的某小圆域 σ 存在, 使当 $(\xi, \eta) \in \sigma$ 时, 恒有 $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \geq \frac{\tau}{2}$. 用 C_r 表 C_r 含于 σ 内的部分, 则

$$\oint_{C_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds \geq \int_{C_r'} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds \geq \int_{C_r'} \frac{\tau}{2} ds = \frac{1}{2} \tau l_r > 0,$$

其中 l_r 表圆弧 C_r' 之长, 此显然与 (1) 式矛盾.

于是, 在 C_r 上恒有 $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) = 0$. 再根据 r 的任意性 ($0 < r \leq \rho$), 即知对任何 $(\xi, \eta) \in S_\rho$, 都有 $u(\xi, \eta) = u(x_0, y_0)$. 换句话说, $u(x, y)$ 在 S_ρ 上是常数.

ii) 次证: 设 $P^*(x^*, y^*)$ 为 $\overline{\Omega}$ 的任一内点 (即 $P^* \in \Omega$), 则必 $u(x^*, y^*) = u(x_0, y_0)$.

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0, y_0)$ 与点 $P^*(x^*, y^*)$ 连接起来 (图 8.68). 用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之

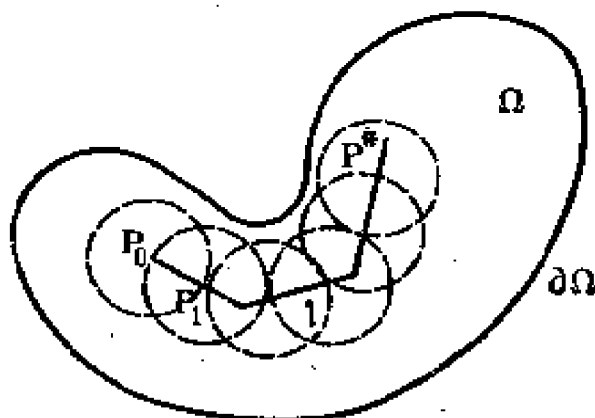


图 8.68

间的距离, 即 $\delta = \min \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, 其中的 \min 是对一切 $(x, y) \in \partial\Omega$, $(x', y') \in l$ 来取的 (由于 $\partial\Omega$, l 是互不相交的有界闭集, 可证 \min 一定能达到, 从而 $\delta > 0$). 取 $0 < \delta' < \delta$. 以点 P_0 为中心, δ' 为半径作一圆, 得圆域 $S_0 = \{(x, y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \delta'^2\}$, 此圆域完全含于 Ω 内, 由 i) 段已证的结论知 $u(x, y)$ 在 S_0 中为常数. 特别 $u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0)$, 这里点 $P_1(x_1, y_1)$ 代表圆周 $C_0 = \{(x, y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \delta'^2\}$ 与折线 l 的交点. 又以点 P_1 为中心, δ' 为半径作一圆, 得圆域 $S_1 = \{(x, y) \mid (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \leq \delta'^2\}$. 由于 $u(x, y)$ 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 也达到最大值, 而 S_1 完全含于 Ω 内, 故将 i) 段结果用于 S_1 可知 $u(x, y)$ 在 S_1 上为常数, 特别 $u(x_2, y_2) = u(x_1, y_1)$, 这里点 $P_2(x_2, y_2)$ 表圆周 $C_1 = \{(x, y) \mid (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = \delta'^2\}$ 与 l 的交点 (除 P_0 外的另一交点). 再以点 P_2 为中心, δ' 为半径作一圆域 S_2, \dots , 这样继续作下去, 显然, 至多经过 n 次 (n 表大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数, s 表 l 的长).

点 $F^*(x^*, y^*)$ 必属于 S_{n-1} , 从而

$$\begin{aligned} u(x^*, y^*) &= u(x_{n-1}, y_{n-1}) = \dots = u(x_1, y_1) \\ &= u(x_0, y_0). \end{aligned}$$

iii) 由 ii) 段的结果可知, $u(x, y)$ 在 Ω 上是常数, 根据 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的连续性, 通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限, 即知 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注: 从证明过程中看出, 需假定区域 Ω (从而 $\bar{\Omega}$)

是连通的, 事实上, 若 Ω 不连通, 则结论不一定成立. 例如, 设 $\overline{\Omega} = S_1 + S_2$, 其中 S_1 与 S_2 是两个互无公共点的闭圆域, 而令

$$u(x, y) = \begin{cases} c_1, & (x, y) \in S_1; \\ c_2, & (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

其中 $c_1 \neq c_2$ 是两个常数, 则显然 $u(x, y)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\overline{\Omega}$ 上不是常数, 但它却在其内点达到最大值与最小值.

4338. 证明黎曼公式

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

式中

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - c \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a, b, c 为常数), P 和 Q 为某些确定的函数, 围线 C 包围着有界域 S .

证 因为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} &= vL[u] - uM[v] \\ &= v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + av \frac{\partial u}{\partial x} + bv \frac{\partial u}{\partial y} + cuv \\ &\quad - u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + au \frac{\partial v}{\partial x} + bu \frac{\partial v}{\partial y} - cuv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + a \frac{\partial}{\partial x} (vu) \\
&\quad + b \frac{\partial}{\partial y} (uv) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + a uv \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - b uv \right),
\end{aligned}$$

故利用格林公式，即得

$$\iint_S \begin{vmatrix} L(u) & M(v) \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

其中

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x} - b uv, \quad Q = v \frac{\partial u}{\partial y} + a uv.$$

4339. 设 $u=u(x, y)$ 和 $v=v(x, y)$ 为液体的速度的分量。求在单位时间内流过以围线 C 为界的域 S 的液体的量（即液体流出量与流入量的差）。若液体不能压缩且在域 S 内没有源泉和漏孔，则函数 u 和 v 满足怎样的方程式？

解 设液体的速度为 \vec{W} ，则 $\vec{W} = u\vec{i} + v\vec{j}$ ，又 $d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ 。于是，所求的液体量

$$\begin{aligned}
Q &= \oint_C \vec{w} \cdot \vec{n} ds = \oint_C [u \cos(\vec{n}, x) + v \sin(\vec{n}, x)] ds \\
&= \oint_C u dy - v dx^*) = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,
\end{aligned}$$

其中 \vec{n} 表示曲线 C 的外法线上的单位矢量，并且此处已假定流体的面密度等于 1。若液体是不可压缩的，

且在域 S 内无源泉和漏孔, 则液体流出量与流入量的差 Q 应等于零, 即

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

又显然, 对于任意的围线 C , 上述结果均正确. 于是, 连续函数 u 、 v 应满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

*) 参看4323题的题解.

4340: 根据比奥沙伐耳 (Бю—Савар) 定律通过线元 ds 的电流 i 在空间的点 $M(x, y, z)$ 处产生一磁场, 其应力为

$$d\vec{H} = ki \frac{(\vec{r} \times d\vec{s})}{r^3},$$

其中 \vec{r} 为连接元素 $d\vec{s}$ 与点 M 的向量, k 为比例系数. 对于封闭导线 C 的情形求磁场 \vec{H} 在点 M 之应力的射影 H_x, H_y, H_z .

解 由题意知: 若设导线 C 上的动点为 (ξ, η, ζ) , 则

$$\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\zeta - z)\vec{k}.$$

又 $d\vec{s} = d\xi\vec{i} + d\eta\vec{j} + d\zeta\vec{k}$. 于是, 磁场强度

$$\vec{H} = ki \oint_C \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y) d\xi - (\xi - z) d\eta] \vec{i} \\
&+ ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - z) d\xi - (\xi - x) d\xi] \vec{j} \\
&+ ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x) d\eta - (\eta - y) d\xi] \vec{k},
\end{aligned}$$

从而射影

$$H_x = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y) d\xi - (\xi - z) d\eta],$$

$$H_y = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - z) d\xi - (\xi - x) d\xi],$$

$$H_z = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x) d\eta - (\eta - y) d\xi],$$

§14. 曲面积分

1° 第一型的曲面积分 若 S 为逐片光滑的双面曲面

$$\begin{aligned}
x &= x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \\
&((u, v) \in Q),
\end{aligned} \tag{1}$$

而 $f(x, y, z)$ 为在曲面 S 上的各点上有定义并且是连续的函数, 则

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_Q f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\
&\cdot \sqrt{EG - F^2} du dv,
\end{aligned} \tag{2}$$

式中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

特别情形, 若曲面的方程式的形状为

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in \sigma),$$

其中 $z(x, y)$ 为单值连续地可微分函数, 则

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) ds &= \iint_\sigma f(x, y, z(x, y)) \\ &\quad \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \end{aligned}$$

此积分与曲面 S 的方向的选择无关.

若把函数 $f(x, y, z)$ 当作曲面 S 在点 (x, y, z) 的密度, 则积分 (2) 是此曲面的质量.

2° 第二型的曲面积分 若 S 为平滑的双面曲面, S^+ 为它的正面, 由法线的方向 $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 所确定的一面, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ 为在曲面 S 上有定义而且连续的三个函数, 则

$$\begin{aligned} &\iint_{S^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \end{aligned} \quad (3)$$

若曲面 S 的方程为参数式 (1), 则法线 \vec{n} 的方向余弦

由下列公式来确定:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

其中 $A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)},$

$$C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

且方根前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面 S 的另一面 S^- 时, 积分(3)的符号变为相反的符号.

4341. 积分

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

和 $I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP,$

(式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的表面, P 为内接于此球的八面体 $|x| + |y| + |z| = a$ 的表面) 相差若干?

解 若令

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = a \sin \varphi \sin \theta, \quad z = a \cos \varphi,$$

则有

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} a^2 \cdot a^2 \sin \varphi d\theta$$

$$=4\pi a^4.$$

为求 I_2 , 只要注意到 $|z| = a - (|x| + |y|)$, 并利用对称性, 即得

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP = 8 \int_0^a dx \int_0^{a-x} \sqrt{3} \\ &\quad \cdot [x^2 + y^2 + (a-x-y)^2] dy \\ &= 16\sqrt{3} \int_0^a dx \int_0^{a-x} [x^2 + y^2 + xy + \frac{a^2}{2} \\ &\quad - a(x+y)] dy \\ &= 16\sqrt{3} \int_0^a [x^2(a-x) - \frac{1}{6}(a-x)^3 \\ &\quad - ax(a-x) + \frac{a^2}{2}(a-x)] dx \\ &= 16\sqrt{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) a^4 \\ &= 2\sqrt{3} a^4. \end{aligned}$$

于是, 两积分之差

$$I_1 - I_2 = 2(2\pi - \sqrt{3})a^4.$$

4342. 计算

$$\iint_S z dS, \quad \text{其中 } S \text{ 为 } x^2 + z^2 = 2az (a > 0) \text{ 被曲面 } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 所割下的部分.}$$

式中 S 为曲面 $x^2 + z^2 = 2az (a > 0)$ 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所割下的部分.

解 作变换

$$x = a \sin \theta, \quad y = y, \quad z = a + a \cos \theta,$$

则两曲面分别化为

$$r=1, \text{ 和 } y^2=2a^2\cos\theta(1+\cos\theta).$$

两曲面交线的参数方程为

$$x=a\sin\theta, \quad y=\pm\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)},$$

$$z=a+a\cos\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right).$$

于是,

$$\begin{aligned} \iint_S z dS &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}^{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}} (a+a\cos\theta) a dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}a^3\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3} d\theta \\ &= -4\sqrt{2}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}\sqrt{(1+\cos\theta)^3}}{\sin\theta} d(\cos\theta) \\ &= -4\sqrt{2}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}(1+\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos\theta}} d(\cos\theta) \\ &= 4\sqrt{2}a^3 \int_0^1 \left[t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} \right] dt \\ &= 4\sqrt{2}a^3 \left[B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{7}{2}\sqrt{2}\pi a^3. \end{aligned}$$

计算下列第一型曲面积分:

4343. $\iint_S (x+y+z) dS$, 式中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$,
 $z \geq 0$.

解 由于

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\iint_S (x+y+z) dS &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \\ &\quad \cdot [x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}] dy \\ &= \int_{-a}^a (\pi ax + 2a\sqrt{a^2-x^2}) dx \\ &= 4a \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= 4a \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^3.\end{aligned}$$

4344. $\iint_S (x^2+y^2) dS$, 式中 S 为体积 $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$ 的边界.

解 面积 S 由两部分组成. 一部分为 $S_1: z = \sqrt{x^2+y^2}$, 它在 Oxy 平面上的射影为 $x^2+y^2=1$; 另一部分为 $S_2: z=1$, 它在 Oxy 平面上的射影也是 $x^2+y^2=1$. 对于这两部分分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 1.$$

若利用极坐标, 则

$$\begin{aligned}
 \iint_S (x^2 + y^2) dS &= \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS \\
 &+ \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr \\
 &= \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, 式中 S 为四面体 $x+y+z \leq 1$,

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界.

解 曲面 S 由四部分组成, 分别为 $S_1: x+y+z=1, x>0, y>0, z>0$; $S_2: x=0$; $S_3: y=0$; $S_4: z=0$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned}
 \iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2} &= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
 &+ \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{dz}{(1+y)^2} + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2} \\
 &+ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
 &= (\sqrt{3} + 1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
 &+ 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dz}{(1+x)^2}
 \end{aligned}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)+2(1-\ln 2)$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2.$$

4346. $\iint_S |xyz| dS$, 式中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的部分.

解 由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)},$$

故利用极坐标, 并注意对称性, 即得

$$\iint_S |xyz| dS = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 \cos\varphi \sin\varphi \sqrt{1+4r^2} r dr$$

$$= 2 \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2} dr = \int_0^1 t^2 \sqrt{1+4t} dt \quad *)$$

$$= \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{32} (y^2-1)^2 y^2 dy \quad **)$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{y^7}{7} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

*) 作代换 $r^2=t$.

**) 作代换 $\sqrt{1+4t}=y$.

4347. $\iint_S \frac{dS}{\rho}$, 式中 S 为椭球表面, ρ 为椭球中心到与椭球表

面的元素 dS 相切的平面之间的距离.

解 设椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

则曲面上任一点 (x, y, z) 的法矢量为 $\left\{ \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right\}$.

从而, 由题设知: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos(\vec{n}, \vec{r})$,
其中 \vec{n} , \vec{r} 分别表示点 (x, y, z) 处的法矢量和矢径, 即

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

而法线与 Oz 轴夹角的余弦为

$$\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dS}{\rho} &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)}{|z|} dx dy \\ &= 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{c \left[\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right) + \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}} dx dy \\ &= 2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{c}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{c^2} - \frac{r^2}{c^2} \Big) ab r d\theta \quad *) \\
& = 2\pi abc \int_0^1 \left[-\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \sqrt{1-r^2} \right. \\
& \quad \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + 2 \frac{\sqrt{1-r^2}}{c^2} \Big] r dr \quad **) \\
& = -\pi abc \left[2 \sqrt{1-r^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{2}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right. \\
& \quad \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{4}{3c^2} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big] \Big|_0^1 \\
& = \frac{4\pi}{3} abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).
\end{aligned}$$

*) 作广义极坐标变换: $x = a \cos \theta$, $y = b r \sin \theta$.

**) 利用关系式: $\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \sqrt{1-r^2}$.

4348. $\iint_S z dS$, 式中 S 为螺旋面 $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$
 $(0 < u < a, 0 < v < 2\pi)$ 的一部分.

解 由于

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \\
&= \cos^2 v + \sin^2 v = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \\
&= u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2,
\end{aligned}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= -u \sin v \cos v + u \cos v \sin v = 0,$$

故得 $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + u^2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_S z dS &= \int_0^a du \int_0^{2\pi} u \sqrt{1 + u^2} dv \\ &= 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1 + u^2} du \\ &= 2\pi^2 \left[\frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi^2 [a \sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2})]. \end{aligned}$$

4349. $\iint_S z^2 dS$, 式中 S 为圆锥表面的一部分 $x = r \cos \varphi \sin \alpha$,
 $y = r \sin \varphi \sin \alpha$, $z = r \cos \alpha$ ($0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) 和
 α 为常数 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

解 由于

$$E = \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$G = r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha = r^2 \sin^2 \alpha,$$

$$F = (\cos \varphi \sin \alpha)(-r \sin \varphi \sin \alpha) + \sin \varphi \sin \alpha \cdot (r \cos \varphi \sin \alpha) = 0,$$

故得 $\sqrt{EG - F^2} = r \sin \alpha$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dS &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \cos^2 \alpha \cdot r \sin \alpha dr \\ &= \frac{\pi a^4}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

4350. $\iiint_S (xy + yz + zx) dS$, 式中 S 为圆锥曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所割下的部分.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \\ = \sqrt{2},$$

又曲面 S 在 Oxy 平面上的射影域为 $x^2 + y^2 \leq 2ax$.

于是, 利用极坐标, 即得

$$\begin{aligned} & \iint_S (xy + yz + zx) dS \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} [r^2 \cos\varphi \sin\varphi + r^2 (\cos\varphi \\ & \quad + \sin\varphi)] r dr \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} (2a\cos\varphi)^4 \cos\varphi d\varphi \\ &= 8\sqrt{2} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4. \end{aligned}$$

4351. 证明普阿桑公式

$$\begin{aligned} & \iint_S f(ax + by + cz) dS \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du, \end{aligned}$$

式中 S 是球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的表面.

证 取新坐标系 $Ouvw$, 其中原点不变, 平面 $ax + by + cz = 0$ 即为 Ovw 面, u 轴垂直于该面, 则有

$$u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

在新坐标系下，公式左端的积分可写为

$$\iint_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}) dS.$$

显然，球面 S 的方程为

$$u^2+v^2+w^2=1 \text{ 或 } v^2+w^2=(\sqrt{1-u^2})^2.$$

若表示成参数式，则为

$$u=u, \quad v=\sqrt{1-u^2}\cos\omega, \quad w=\sqrt{1-u^2}\sin\omega,$$

其中 $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$. 从而

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{EG-F^2} du d\omega \\ &= \sqrt{\frac{1}{1-u^2} \cdot (1-u^2) - 0} du d\omega = du d\omega. \end{aligned}$$

于是，最后得

$$\begin{aligned} \iint_S f(ax+by+cz) dS &= \iint_S f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}) dS \\ &= \int_0^{2\pi} d\omega \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}) du \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}) du. \end{aligned}$$

4352. 求抛物面壳

$$z = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \quad (0 \leq z \leq 1)$$

的质量，此壳的密度按规律 $\rho=z$ 而变更.

解 质量为

$$M = \iint_S \rho dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} z\sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2+y^2) \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2} dr \\
&= \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2} dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1+r^2} d(r^2) \\
&= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{5} (1+r^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} \right] \\
&= \frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}.
\end{aligned}$$

4353. 求密度为 ρ_0 的均匀球壳

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

对于 Oz 轴的转动惯量.

解 转动惯量为

$$\begin{aligned}
I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) \rho_0 dS \\
&= \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
&= a \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\
&= 2\pi a^4 \rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi a^4 \rho_0.
\end{aligned}$$

4354. 求密度为 ρ_0 的均匀锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

对于直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的转动惯量

解 设 (x, y, z) 为均匀锥面壳上的任一点, 它到直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的距离为

$$\begin{aligned} |d| &= \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} y-0 & z-b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-b & x-0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-0 & y-0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

又因

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

于是, 所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \left[\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2 + y^2 \right] \\ &\quad \cdot \rho_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[\left(\frac{b}{a}r - b \right)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \right] dr \\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}\rho_0}{a} \left[2\pi a^2 b^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi a^4}{4} \right] \\
&= \frac{\pi a \rho_0 (3a^2 + 2b^2) \sqrt{a^2+b^2}}{12}.
\end{aligned}$$

4355. 求均匀的曲面

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

被曲面 $x^2 + y^2 = ax$ 所割下部分的重心的坐标.

解 质量为

$$\begin{aligned}
M &= \iint_S \rho_0 dS = \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} dx dy \\
&= \sqrt{2} \rho_0 \left(\frac{a}{2} \right)^2 \pi = \frac{\sqrt{2} \pi a^2 \rho_0}{4}.
\end{aligned}$$

从而, 重心的坐标为

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} x dx dy \\
&= \frac{4}{\pi a^2} \int_0^a x dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} dy \\
&= \frac{8}{\pi a^2} \int_0^a x \sqrt{ax-x^2} dx \\
&= \frac{8}{\pi a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} + t \right) \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 - t^2} dt \quad *
\end{aligned}$$

$$= \frac{8}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - t^2} dt = \frac{a}{2}.$$

$$y_c = \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} y dy = 0.$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \iiint_{x^2+y^2 \leq ax} z dx dy$$

$$= \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr$$

$$= \frac{8a}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{16a}{9\pi},$$

即重心的坐标为 $\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{16a}{9\pi}\right)$.

*) 作变换 $t = x - \frac{a}{2}$.

4356. 求均匀曲面

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a)$$

的重心的坐标.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

所以,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

由对称性知，重心的横坐标与纵坐标相等，即

$$x_0 = y_0 = \frac{\iint_S x dS}{\iint_S dS} = \frac{\int_0^a \int_0^{a-x} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy}{\int_0^a \int_0^{a-x} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx}.$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^{a-x} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= a \int_0^a \left(-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a-y} dy \\ &= a \left[\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy - \int_0^a \sqrt{2ay - 2y^2} dy \right] \\ &= a \left[\frac{\pi a^2}{4} - \sqrt{2} \cdot \frac{\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2}{2} \right] *) \\ &= \frac{\pi a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^{a-x} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx \\ &= a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \\ &= -4a^2 \int_1^0 \frac{u}{(1+u^2)^2} \arcsin u du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2a^2 \left(\frac{\arcsin u}{1+u^2} \Big|_1^0 - \int_1^0 \frac{du}{(1+u^2)\sqrt{1-u^2}} \right) \\
&= 2a^2 \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}} \Big|_1^0 \right) ** \\
&= \pi a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right),
\end{aligned}$$

故有

$$x_0 = y_0 = \frac{\frac{\pi a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\pi a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

又由于

$$\begin{aligned}
\iint_S z dS &= \int_0^a \int_0^{a-x} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx \\
&= a \int_0^a (a-x) dx = \frac{a^3}{2},
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{\iint_S z dS}{\iint_S dS} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\pi a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)} \\
&= \frac{a}{\pi} (\sqrt{2} + 1),
\end{aligned}$$

即重心的坐标为 $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{\pi}(\sqrt{2} + 1) \right)$.

*) 由定积分的几何意义知:

$$\int_0^a \sqrt{y(a-y)} dy = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{a}{2}\right)^2} dy$$

$$= -\frac{\pi a^2}{8}.$$

**) 利用1257题的结果.

4357. 密度为 ρ_0 的均匀截圆锥面

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ &\quad 0 < b \leq r \leq a) \end{aligned}$$

以怎样的力吸引质量为 m 位于该曲面顶点的质点?

解 显然曲面顶点为原点 $O(0, 0, 0)$. 对应于半径 r 处取斜高为 ds 的锥面带, 其面积为

$$dS = 2\pi r ds = 2\sqrt{2}\pi r dr.$$

它与顶点 O 处质量为 m 的质点的引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影显见为零, 而在 Oz 轴上的射影为

$$\begin{aligned} dZ &= \frac{km \cdot 2\sqrt{2}\pi r dr \rho_0}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ &= \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r}. \end{aligned}$$

于是, 截圆锥面吸引质量为 m 的质点 (在顶点处) 的引力在坐标轴上的射影分别为

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

$$Z = \int_b^a \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r} = k\pi m \rho_0 \ln \frac{a}{b}.$$

4358. 求在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的密度为 ρ_0 的均匀球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的位, 即: 计算积分

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

解 记 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. 由对称性知, 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的位, 等于在点 $N_0(0, 0, r_0)$ 的位. 由余弦定理知, 球面上任一点 (x, y, z) 到点 N_0 的距离

$$r = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2r_0 a \cos \psi} \quad (0 \leq \psi \leq \pi),$$

而球面带 $dS = 2\pi a^2 \sin \psi d\psi$. 于是, 所求的位为

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r} = 2\pi a^2 \rho_0 \int_0^\pi \frac{\sin \psi d\psi}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2r_0 a \cos \psi}}.$$

令 $u^2 = a^2 + r_0^2 - 2r_0 a \cos \psi$, 则

$$2u du = 2r_0 a \sin \psi d\psi,$$

即

$$\sin \psi d\psi = -\frac{u}{r_0 a} du.$$

从而, 所求的位为

$$\begin{aligned} u &= \frac{2\pi a \rho_0}{r_0} \int_{|a-r_0|}^{a+r_0} du \\ &= \begin{cases} 4\pi a \rho_0, & \text{当 } r_0 < a, \\ \frac{4\pi a^2 \rho_0}{r_0}, & \text{当 } r_0 > a, \\ 4\pi a \rho_0, & \text{当 } r_0 = a. \end{cases} \end{aligned}$$

也即

$$u = 4\pi \rho_0 \min \left(a, \frac{a^2}{r_0} \right).$$

上述结果表明: 若 M_0 点在球壳内, 则位是个常量,

若 M_0 在球壳外, 则在该点球壳的位等于将球壳质量集中于球心的位; 当 M_0 点从球壳内通过球面时位具有连续性, 从而当 M_0 点在球面上时, 位也是个常量, 且等于球内任一点的位.

4359. 计算

$$F(t) = \iiint_{x+y+z=t} f(x, y, z) dS,$$

式中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{若 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

作出函数 $u = F(t)$ 的图形.

解 显然, 平面

$$x + y + z = \pm \sqrt{3}$$

是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的两个切平面, 于是,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{若 } |t| \leq \sqrt{3}, \\ 0 & \text{若 } |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

由方程组

$$\begin{cases} x + y + z = t, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

得椭圆方程

$$x^2 + y^2 + [t - (x + y)]^2 = 1,$$

或

$$x^2 + y^2 + xy - t(x + y) = -\frac{1 - t^2}{2}, \quad (1)$$

记该椭圆围成的区域为 Ω , 则

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \iint_{\Omega} \{1 - x^2 - y^2 - [t - (x+y)]^2\} \sqrt{\frac{1}{3}} dx dy \\
 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \iint_{\Omega} [1 - t^2 - 2(x^2 + y^2) - 2xy \\
 &\quad + 2t(x+y)] dx dy.
 \end{aligned}$$

作平移变换

$$x = x' + \frac{t}{3}, \quad y = y' + \frac{t}{3},$$

则方程 (1) 变为

$$x'^2 + y'^2 + x'y' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t^2}{3}\right), \quad (2)$$

记相应的区域为 Ω' , 而函数为

$$f = 1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) - 2x'y'.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \iint_{\Omega'} \left[1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) \right. \\
 &\quad \left. - 2x'y'\right] dx' dy'.
 \end{aligned}$$

再作旋转变换

$$x' = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}},$$

则方程 (2) 变为椭圆标准方程

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}\right)^2} = 1. \quad (3)$$

记相应的区域为 Ω'' , 而函数为

$$f = 1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2).$$

于是,

$$F(t) = \sqrt{3} \iint_{Q'} \left[1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2) \right] dx'' dy''.$$

最后, 作广义的极坐标变换, 即

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{t^2}{3}} r \cos \varphi,$$

$$y'' = \sqrt{1 - \frac{t^2}{3}} r \sin \varphi,$$

则有

$$\begin{aligned} F(t) &= \left(1 - \frac{t^2}{3} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{3} \right) (r - r^3) dr d\varphi \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{3} \right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2, \end{aligned}$$

其中 $|t| \leq \sqrt{3}$, 而当 $|t| > \sqrt{3}$, 则有

$$F(t) = 0.$$

考虑函数 $u = F(t)$ ($-\infty < t < +\infty$). 我们有

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2\pi}{9} (3 - t^2) t \quad (|t| < \sqrt{3}).$$

当 $t = \sqrt{3}$ 时, u 的左导数 $= -\frac{2\pi}{9} (3 - t^2) \Big|_{t=\sqrt{3}} = 0$,

u 的右导数显然为零 (因为 $t \geq \sqrt{3}$ 时, $u \equiv 0$),

故 $t = \sqrt{3}$ 时 u 的导数存在且等于零. 同理可证,

$t = -\sqrt{3}$ 时, u 的导数也存在且等于零. 于是, 曲线

$u = F(t)$ 在 $t = 0$ 处以及 $|t| \geq \sqrt{3}$ 的各 t 处切线都平

行于 Ot 轴. 又 $t = 0$ 处达极大值 $u = \frac{\pi}{2}$, 且为最大值.

由于

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{2\pi}{3}(1-t^2),$$

所以当 $t = \pm 1$ 时为拐点, 显然, 图形关于 Ou 轴是对称的, 函数 $u = F(t)$ 的图形, 如图 8.69 所示.

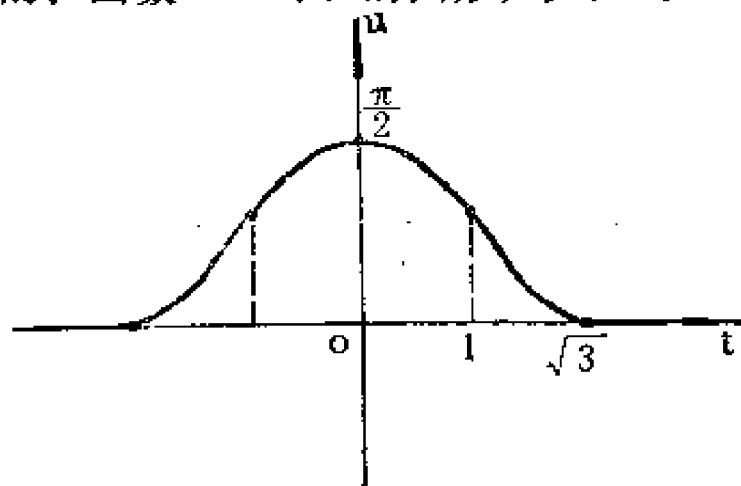


图 8.69

4360. 计算积分

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS,$$

式中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{若 } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; \\ 0, & \text{若 } z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

解 由球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}},$$

而由

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = t^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

可得

$$x^2 + y^2 = \frac{t^2}{2} = \left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

于是, 积分

$$\begin{aligned} F(t) &= \iint_{x^2 + y^2 + z^2 = t^2} f(x, y, z) dS \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} (x^2 + y^2) \cdot \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy \\ &= |t| \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\varphi. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \int \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr &= \frac{1}{2} \int \frac{t^2 - r^2 - t^2}{\sqrt{t^2 - r^2}} d(t^2 - r^2) \\ &= \frac{1}{3} (t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - t^2 \sqrt{t^2 - r^2} + C, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{t^3}{\sqrt{t^2-r^2}} dr &= \left[\frac{1}{3} (t^2-r^2)^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. - t^2 \sqrt{t^2-r^2} \right] \bigg|_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{-5\sqrt{2}}{12} |t|^3 + \frac{2}{3} |t|^3 \\ &= \frac{8-5\sqrt{2}}{12} |t|^3. \end{aligned}$$

于是, 最后得

$$\begin{aligned} F(t) &= |t| \int_0^{2\pi} \frac{8-5\sqrt{2}}{12} |t|^3 d\varphi \\ &= \frac{(8-5\sqrt{2})}{6} \pi t^4. \end{aligned}$$

4361. 计算积分

$$F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS,$$

其中 S 是变球

$$(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 = t^2,$$

且假定 $\sqrt{x^2+y^2+z^2} > a > 0$,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2; \\ 0, & \text{若 } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2. \end{cases}$$

解 记 $x^2+y^2+z^2=r^2$. 旋转坐标轴, 使点 $P(x, y, z)$ 位于 Oy 轴的正方向上的点 $P_0(0, 0, r)$, 如

图8.70所示.

显然, 当 $0 < t \leq r - a$ 及 $t \geq r + a$ 时, 整个球面上的点满足 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2$, 此时 $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$. 从而, 积分

$$\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= \iiint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $r - a < t < r + a$ 时, 则

$$\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= \iiint_{S'} dS', \end{aligned}$$

其中 S' 为 S 位于 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$ 内的部分. 从而, 我们有

$$\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} t^2 \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi t^2 (1 - \cos\alpha) \\ &= 2\pi t^2 \left(1 - \frac{t^2 + r^2 - a^2}{2rt} \right) \\ &= \frac{\pi t}{r} [a^2 - (r - t)^2]. \end{aligned}$$

计算下列第二型曲面积分: 高斯公式

4362. $\iiint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, 式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2$

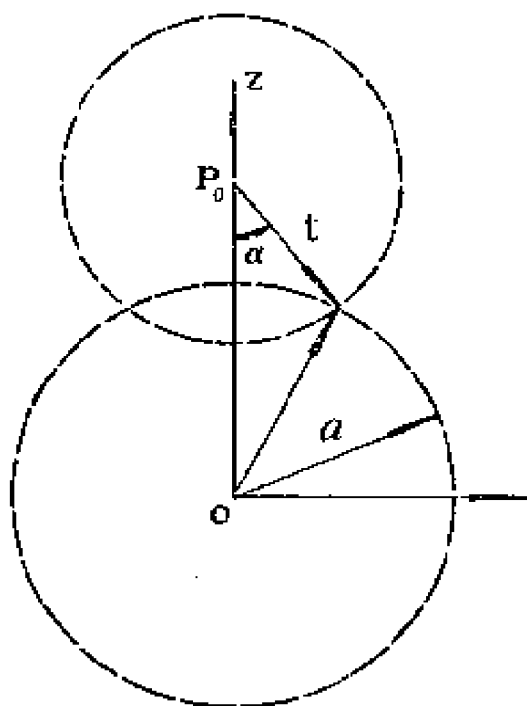


图 8.70

$=a^2$ 的外表面.

解 根据轮换对称, 只要计算 $\iint_S z dx dy$. 注意到上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取上侧, 下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取下侧, 则有

$$\begin{aligned} \iint_S z dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &\quad - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{4}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

于是, 积分

$$\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3.$$

4363. $\iint_S f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy$, 式中 $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ 为连续函数, S 为平行六面体 $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$ 的外表面.

解 只要计算任何一个积分, 其它两个可类似地写出结果. 例如, 下面计算 $\iint_S h(z) dx dy$. 由于六面体有四个面垂直于 Oxy 平面, 故面积分应为零, 从而

$$\iint_S h(z) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} h(c) dx dy - \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} h(0) dx dy$$

$$=abc \cdot \frac{h(c)-h(0)}{c}.$$

类似地, 可得到 $\iiint_S f(x) dy dz$ 及 $\iiint_S g(y) dx dz$ 的值.

于是, 所求的积分为

$$\begin{aligned} & \iiint_S f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy \\ &= abc \left[\frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} \right. \\ & \quad \left. + \frac{h(c)-h(0)}{c} \right]. \end{aligned}$$

4364. $\iiint_S (y-z) dy dz + (z-x) dx dz + (x-y) dx dy$, 式中 S 为圆锥曲面

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 \leq z \leq h)$$

的外表面.

解 方法一

记 S_1 、 S_2 分别为锥面的底面和侧面, 而 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 为锥面外法线的方向余弦. 一方面, 我们有

$$\begin{aligned} & \iiint_{S_1} (y-z) dy dz + (z-x) dx dz + (x-y) dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r^2 (\cos \varphi - \sin \varphi) dr \end{aligned}$$

$$= \frac{h^3}{3} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = 0.$$

另一方面，在侧面 S_2 上，对于任一点 (x, y, z) ，有

$$\frac{\cos \alpha}{x} = \frac{\cos \beta}{y} = \frac{\cos \gamma}{-z},$$

从而， dS 在各坐标面上的射影分别为

$$\cos \gamma dS = -d\sigma_{xy},$$

$$\cos \alpha dS = -\frac{x}{z} \cos \gamma dS = \frac{x}{z} d\sigma_{xz},$$

$$\cos \beta dS = -\frac{y}{z} \cos \gamma dS = \frac{y}{z} d\sigma_{yz}.$$

于是，

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2} (y-z) dy dz + (z-x) dx dz + (x-y) dx dy \\ &= \iint_{S_2} \left[(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma \right] dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} \left[-\frac{x}{z} (y-z) + \frac{y}{z} (z-x) - (x-y) \right] d\sigma_{xy} \\ &= -2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

综上所述，我们得

$$\begin{aligned} & \iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dx dz + (x-y) dx dy \\ &= \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 0. \end{aligned}$$

方法二

记曲面 S 在各坐标面的射影域分别为 S_{yz} , S_{xz} , 和 S_{xy} . 于是,

$$\begin{aligned} & \iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dx dz + (x-y) dx dy \\ &= \iint_S (y-z) dy dz + \iint_{S_{yz}} (z-x) dx dz \\ & \quad + \iint_S (x-y) dx dy \\ &= \left[\iint_{S_{yz}} (y-z) dy dz - \iint_{S_{yz}} (y-z) dy dz \right] \\ & \quad + \left[\iint_{S_{xz}} (z-x) dx dz - \iint_{S_{xz}} (z-x) dx dz \right] \\ & \quad + \left[\iint_{S_{xy}} (x-y) dx dy - \iint_{S_{xy}} (x-y) dx dy \right] \\ &= 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

4365. $\iint_S \frac{dy dz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dx dy}{z}$, 式中 S 为椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$+ \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外表面.

解 根据轮换对称, 只要计算一个积分. 例如, 计算

$\iint_S \frac{dx dy}{z}$. 利用广义极坐标, 即得

$$\iint_S \frac{dx dy}{z} = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= - \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{-1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy \\
&= \frac{2}{c} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy \\
&= \frac{2ab}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \\
&= \frac{4\pi ab}{c} [-\sqrt{1-r^2}] \Big|_0^1 = 4\pi \cdot \frac{ab}{c}.
\end{aligned}$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dx dy}{z} \\
&= 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \\
&= \frac{4\pi}{abc} (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2).
\end{aligned}$$

4366. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, 式中 S 为球壳

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

的外表面.

解 根据轮换对称, 只要计算 $\iint_S z^2 dx dy$.

注意到

$$z-c = \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2},$$

并利用极坐标, 即得

$$\begin{aligned}
\iint_S z^2 dx dy &= \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2} \\
&\quad [c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dx dy \\
&\quad - \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2} \\
&\quad [c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dx dy \\
&= 4c \iint_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leq R^2} \\
&\quad \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dx dy \\
&= 4c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr \\
&= 8\pi c \left[-\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^R = \frac{8}{3} \pi R^3 c.
\end{aligned}$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy \\
&= \frac{8}{3} \pi R^3 (a + b + c).
\end{aligned}$$

§15. 斯托克斯公式

若 $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ 为连续可微分的函数, C 为包围逐片光滑的有界双面曲面 S 的简单封闭逐段光滑的围线, 则有斯托克斯公式:

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

式中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为曲面 S 的法线的方向余弦, 此法线的方向是这样的, 围线 C 环绕着它依反时针方向(对于右旋坐标系)而回转.

4367. 应用斯托克斯公式, 计算曲线积分

$$\oint_C ydx + zdy + xdz,$$

式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, 若从 Ox 轴的正向看去, 这圆周是依反时针方向进行的.

用直接计算法检验结果.

解 平面 $x + y + z = 0$ 的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是,

$$\oint_C ydx + zdy + xdz$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$

$$\begin{aligned}
&= -\iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS \\
&= -\pi a^2 (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = -\sqrt{3} \pi a^2.
\end{aligned}$$

下面用直接计算法检验结果. 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$$

消去 z , 即得曲线 C 在 Oxy 平面上的射影

$$x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{2}.$$

作旋转变换

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

则方程化为

$$3x'^2 + y'^2 = a^2.$$

因而, 曲线 C 的参数方程可取为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right),$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right),$$

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

于是, 曲线积分为

$$\begin{aligned}
&\oint_C y dx + z dy + x dz \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right) \left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+\cos t\right) \\
& +\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}-\sin t\right)\Big]dt \\
& =\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)dt \\
& =\frac{a^2}{2}(-\sqrt{3})\cdot 2\pi=-\sqrt{3}\pi a^2.
\end{aligned}$$

可见，两种算法结果一样。

4338. 计算积分

$$\int_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz,$$

此积分是从点 $A(a, 0, 0)$ 至点 $B(a, 0, h)$ 沿着螺线

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi$$

上所取的。

解 连接 A, B 两点得线段 AB ，它与 AmB 组成封闭曲线并依正向进行，则由斯托克斯公式知：

$$\begin{aligned}
& \oint_{AmBA} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz \\
& = \iint_S 0\, dydz + 0\, dx dz + 0\, dx dy = 0.
\end{aligned}$$

于是，

$$\int_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$$

$$= \int_{AB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$$

$$= \int_0^h z^2 dz \stackrel{*)}{=} \frac{h^3}{3}.$$

*) 在线段 AB 上, $x=a$, $y=0$, $dx=dy=0$, 而 $0 \leq z \leq h$.

4369. 设 C 为位于平面 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ ($\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为平面之法线的方向余弦) 上并包围面积为 S 的封闭围线, 求

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中围线 C 是依正方向进行的.

解 若记

$$P = \begin{vmatrix} \cos \beta & \cos \gamma \\ y & z \end{vmatrix} = z \cos \beta - y \cos \gamma,$$

$$Q = \begin{vmatrix} \cos \gamma & \cos \alpha \\ z & x \end{vmatrix} = x \cos \gamma - z \cos \alpha,$$

$$R = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ x & y \end{vmatrix} = y \cos \alpha - x \cos \beta,$$

则得

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \oint_C P dx + Q dy + R dz$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= 2 \iint_S (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) dS \\
&= 2 \iint_S dS = 2S. \quad \begin{matrix} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \\ \text{单位法向量} \end{matrix}
\end{aligned}$$

应用斯托克斯公式，计算积分：

4370. $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ ，式中 C 为依参数 t 增大的方向通过的椭圆 $x = a \sin^2 t$ ， $y = 2c \sin t \cdot \cos t$ ， $z = a \cos^2 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)。

解 $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$

$$= \iint_S 0 dydz + 0 dx dz + 0 dx dy = 0.$$

4371. $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ ，式中 C 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2$ ， $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0$ ， $h > 0$)，若从 Ox 轴正向看去，此椭圆是依反时针方向进行的。

解 椭圆如图 8.71 所示。把平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ 上 C 所包围的区域记为 S ，则 S 的法线方向为 $\{h, 0, a\}$ 。注意到 S 的法线方向和曲线 C 的方向是正向联系的，即得

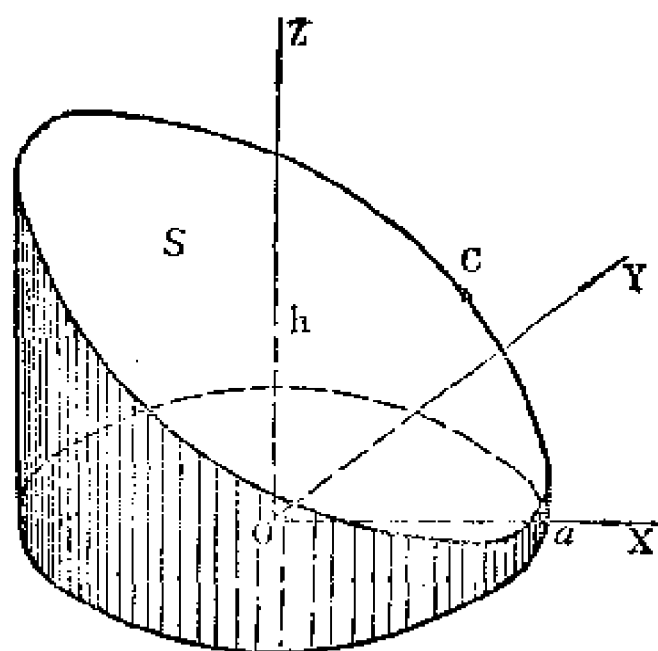


图 8.71

$$\begin{aligned}
 & \oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\
 &= -2 \iint_S dydz + dx dz + dx dy \\
 &= -2 (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \iint_S dS \\
 &= -2 \left(\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} + 0 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) \\
 &\quad \cdot \pi a \sqrt{a^2 + h^2} \\
 &= -2\pi a(a+h).
 \end{aligned}$$

1372. $\oint_C (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, 式中
 C 是曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R$,
 $z > 0$), 此曲线是如下进行的: 由它所包围在球 $x^2 +$

$y^2 + z^2 = 2Rx$ 外表面上的最小区域保持在左方.

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x-R}{R}, \quad \cos \beta = \frac{y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{R},$$

即得

$$\begin{aligned} & \oint_c (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz \\ &= 2 \iint_s [(y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta \\ & \quad + (x-y) \cos \gamma] dS \\ &= 2 \iiint_s \left[(y-z) \left(\frac{x}{R} - 1 \right) + (z-x) \frac{y}{R} \right. \\ & \quad \left. + (x-y) \frac{z}{R} \right] dS \\ &= 2 \iint_s (z-y) dS. \end{aligned}$$

由于曲面 S 关于 Oxy 平面对称, 故 $\iint_s y dS = 0$.

又

$$\iint_s z dS = \iint_s R \cos \gamma dS = R \cdot \pi r^2,$$

于是,

$$\begin{aligned} & \oint_c (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz \\ &= 2\pi R r^2. \end{aligned}$$

4373. $\oint_c (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 式中

C 为用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 切立方体 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 的表面所得的切痕. 若从 Ox 轴的正向看去, 是依反时针前进的方向的.

解 平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 含于立方体内的部分记为 S , 它在 Oxy 平面上的射影域记为 S_{xy} , 其面积显然等于 $\frac{3}{4}a^2$. 当平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 取上侧时, 法线方向的单位矢量为 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. 于是, 由斯托克斯公式知

$$\begin{aligned} & \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz \\ &= \iint_S \left[(-2y - 2z) \frac{1}{\sqrt{3}} + (-2z - 2x) \frac{1}{\sqrt{3}} \right. \\ & \quad \left. + (-2x - 2y) \frac{1}{\sqrt{3}} \right] dS \\ &= -4 \iint_S \underbrace{(x+y+z)}_{=\frac{3a}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} dS \\ &= -6a \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} dS = -6a \iint_{S_{xy}} dx dy \\ &= -6a \cdot \frac{3}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3. \end{aligned}$$

4374. $\oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz$, 式中 C 为依参数 t 增

大的方向进行的封闭曲线 $x = a \cos t$, $y = a \cos 2t$,
 $z = a \cos 3t$.

解 取 S 为由参数方程

$$\begin{aligned} x &= u \cos t, \quad y = u \cos 2t, \quad z = u \cos 3t \\ (0 &\leq u \leq a, \quad 0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

表示的曲面, 则所给曲线 C 为曲面 S 的边界.
 于是, 根据斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned} & \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz \\ &= 2 \iint_S x^2 (y - z) dy dz + y^2 (z - x) dz dx \\ & \quad + z^2 (x - y) dx dy \\ &= \pm 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a [u^2 \cos^2 t (u \cos 2t - u \cos 3t) \\ & \quad \cdot (y'_t z'_t - y'_t z'_t) + u^2 \cos^2 2t (u \cos 3t - u \cos t) \\ & \quad \cdot (z'_t x'_t - z'_t x'_t) + u^2 \cos^2 3t (u \cos t - u \cos 2t) \\ & \quad \cdot (x'_t y'_t - x'_t y'_t)] du dt \\ &= \pm 2 \int_0^a u^4 du \int_0^{2\pi} [\cos^2 t (\cos 2t - \cos 3t) \\ & \quad \cdot (2 \sin 2t \cos 3t - 3 \cos 2t \sin 3t) + \cos^2 2t (\cos 3t - \cos t) \\ & \quad \cdot (3 \sin 3t \cos t - \sin t \cos 3t) + \cos^2 3t (\cos t - \cos 2t) \\ & \quad \cdot (\sin t \cos 2t - 2 \sin 2t \cos t)] dt \\ &= \pm \frac{2}{5} a^5 \int_{-\pi}^{\pi} [\cos^2 t (\cos 2t - \cos 3t) (2 \sin 2t \cos 3t \\ & \quad - 3 \cos 2t \sin 3t) + \cos^2 2t (\cos 3t - \cos t) \\ & \quad \cdot (3 \sin 3t \cos t - \sin t \cos 3t) + \cos^2 3t (\cos t - \cos 2t) \end{aligned}$$

$$\cdot (\sin t \cos 2t - 2 \sin 2t \cos t) dt = 0,$$

上式中正负号应这样选取, 使得 S 的侧正好配合 C 的方向 (t 增大的方向), 积分 $\int_0^{2\pi}$ 可以换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 是因为被积函数 (t 的函数) 是周期为 2π 的函数, 而 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 等于零是因为被积函数为奇函数.

注: 本题若不用斯托克斯公式, 而直接计算线积分, 则较为简单:

$$\begin{aligned} & \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz \\ &= - \int_0^{2\pi} a^5 (\cos^2 2t \cos^2 3t \sin t + 2 \cos^2 t \cos^2 3t \sin 2t \\ & \quad + 3 \cos^2 t \cos^2 2t \sin 3t) dt \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} a^5 (\cos^2 2t \cos^2 3t \sin t + 2 \cos^2 t \cos^2 3t \sin 2t \\ & \quad + 3 \cos^2 t \cos^2 2t \sin 3t) dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

$\int_0^{2\pi}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 及 $\int_{-\pi}^{\pi} = 0$ 的理由同上.

4375. 有函数

$$W(x, y, z) = ki \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS \quad (k = \text{常数}),$$

其中 S 为由围线 C 所界的面积, \vec{n} 为曲面 S 的法线, \vec{r} 为连接空间的点 $M(x, y, z)$ 与曲面 S 上的动点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 所成之矢径, 证明此函数为通过围线 C

的电流 i 所产生磁场 \vec{H} 的位势 (参阅4340题)。

证 利用4340题指出的定律, 并注意到

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{k},$$

其中 $\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\xi - z)\vec{k}$, 即得

$$\begin{aligned} \vec{H} &= ki \oint_c \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{r^3} \\ &= ki \left[\left(\oint_c \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta \right) \vec{i} \right. \\ &\quad + \left(\oint_c \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi \right) \vec{j} \\ &\quad \left. + \left(\oint_c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi \right) \vec{k} \right]. \end{aligned}$$

利用斯托克斯公式, 并注意到

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi}$$

及 $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$, 从而

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

即得

$$H_z = ki \oint_S \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta$$

$$= ki \iint_S \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} \right) i - \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial y} j \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} k \right] \cdot \vec{n} dS$$

$$= ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) i + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) j + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) k \right) \cdot \vec{n} dS$$

$$= ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS.$$

同理,

$$H_y = ki \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS, \quad H_x = ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS.$$

$$H_z = ki \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS.$$

于是, 最后得

$$\vec{H} = \frac{\partial W}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \vec{k},$$

即函数 $W(x, y, z)$ 是磁场 \vec{H} 的位势.

§16. 奥斯特洛格拉德斯基公式

若 S 为包含体积 V 的逐片光滑曲面, $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ 和它们的一阶偏导函数均为域 $V+S$ 内的连续函数, 则奥斯特洛格拉德斯基公式真确:

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

$dx dy dz$, 式中 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

应用奥斯特洛格拉德斯基公式以变换下列曲面积分, 设光滑的曲面 S 包围着有界的体积 V , $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

4376. $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy.$

解 由于 $P=x^3$, $Q=y^3$, $R=z^3$, 从而

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iint_S x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy \\ &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz. \end{aligned}$$

4377. $\iint_S xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz.$

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

故得

$$\begin{aligned} & \iiint_S xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz \\ &= \iiint_V 0 dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

$$4378. \iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

解 由于

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

从而

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS \\ &= 2 \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

$$4379. \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$$

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u,$$

故得

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ = \iiint_V \Delta u dx dy dz. \end{aligned}$$

4380.
$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS.$$

解 记

$$P^* = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad Q^* = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$R^* = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

则易知:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\partial Q^*}{\partial y} + \frac{\partial R^*}{\partial z} = 0.$$

于是, 原面积分等于零.

4381. 证明: 若 S 为封闭的简单曲面而 \vec{l} 为任何的固定方向, 则

$$\iint_S \cos(\vec{n}, \vec{l}) dS = 0,$$

式中 \vec{n} 为曲面 S 的外法线。

证 因为

$$\cos(\vec{n}, \vec{l}) = \cos\alpha \cos(\vec{l}, x) + \cos\beta \cos(\vec{l}, y) + \cos\gamma \cos(\vec{l}, z),$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 \vec{n} 的方向余弦, 故有

$$\iint_S \cos(\vec{n}, \vec{l}) dS = \iint_S \cos(\vec{l}, x) dydz + \cos(\vec{l}, y) dx dz + \cos(\vec{l}, z) dx dy.$$

由于 \vec{l} 为固定方向, 从而 $\cos(\vec{l}, x), \cos(\vec{l}, y), \cos(\vec{l}, z)$ 均为常数, 于是,

$$\begin{aligned} \iint_S \cos(\vec{n}, \vec{l}) dS &= \iiint_V \left[\frac{\partial \cos(\vec{l}, x)}{\partial x} + \frac{\partial \cos(\vec{l}, y)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(\vec{l}, z)}{\partial z} \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V 0 dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

4382. 证明: 由曲面 S 所包围的体积等于

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) dS,$$

式中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦。

证 由奥氏公式, 有

$$\iint_S (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy \\
&= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dx dy dz \\
&= \iiint_V 3 dx dy dz = 3V,
\end{aligned}$$

由此可知

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS.$$

证毕.

4383. 证明, 由平滑的圆锥曲面 $F(x, y, z) = 0$ 和平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 所包围的锥体体积等于

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

式中 S 为位于已知平面上的锥底之面积, H 为锥的高.

证 方法一

不失一般性, 设坐标原点位于圆锥曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的顶点. 于是 $F(x, y, z)$ 是 x, y, z 的二次齐次函数. 因此, 根据尤拉定理知

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 2F(x, y, z). \quad (1)$$

由 4382 题的结果, 有

$$V = \frac{1}{3} \iint_{S+S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$$

$$= \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ + \frac{1}{3} \iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \quad (2)$$

其中 S 为锥底 (位于平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上), 而 S_1 是圆锥的侧面. 在锥面 S_1 (即 $F(x, y, z) = 0$) 上, 有

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

$$\cos \beta = \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

$$\cos \gamma = \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}.$$

于是, 注意到 (1) 式, 即知在 S_1 上有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{x F'_x + y F'_y + z F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} \\ = \frac{2F(x, y, z)}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = 0,$$

从而

$$\iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = 0. \quad (3)$$

又在平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上, 有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \vec{r} \cdot \vec{n} = H,$$

其中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 是从原点 $(0, 0, 0)$ 到点 (x, y, z) 的矢径, \vec{n} 为平面 (锥底) 的外法线单位向量, H 为从原点到平面的距离 (即锥的高). 于是,

$$\begin{aligned} & \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= H \iint_S dS = HS. \end{aligned}$$

由此, 再注意到 (2) 式与 (3) 式, 即得 $V = \frac{1}{3}SH$.

方法二

取坐标系 $Ox'y'z'$, 使圆锥的顶点在坐标原点, $Ox'y'$ 平面平行于圆锥的底面, 由于在 z' 处的圆锥的截面面积

$$S(z') = \frac{Sz'^2}{H^2},$$

故所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^H S(z') dz' \\ &= \int_0^H \frac{S}{H^2} z'^2 dz' = \frac{1}{3}SH. \end{aligned}$$

4384. 求由曲面, $z = \pm c$ 及

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, \\ y &= a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z &= c \sin u \end{aligned}$$

所界物体的体积.

解 方法一

我们有

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u, \quad (1)$$

以 $z=c\sin u$ 代入得

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2 = a^2, \quad (2)$$

故所界物体由平面 $z=c$, $z=-c$ 及曲面 (2) 围成. 利用 4382 题的结果, 即知所求的体积为

$$V = \frac{1}{3} \iint_{S_1 + S_2 + S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \quad (3)$$

其中 S_1, S_2 分别是平面 $z=c$, $z=-c$ 上的部分 (此时 $u=\frac{\pi}{2}$, $u=-\frac{\pi}{2}$, 从而 $x^2 + y^2 = b^2$, 故 S_1, S_2 为圆盘 $x^2 + y^2 \leq b^2$), S_3 表曲面 (2) 的部分, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 表外法线的方向余弦. 显然, 在 S_1 上,

$$\cos \alpha = \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = \frac{c}{|c|}, \quad \text{于是}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS &= \iint_{S_1} \frac{c^2}{|c|} dS \\ &= |c| \pi b^2. \end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_{S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = |c| \pi b^2.$$

此外

$$\iint_{S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{S_3} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\
&= \pm \int_0^{2\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(a \cos u \cos v + b \sin u \sin v) \\
&\quad \cdot (y'_v z'_v - y'_v z'_v) \\
&\quad + (a \cos u \sin v - b \sin u \cos v)(z'_v x'_v - z'_v x'_v) \\
&\quad + c \sin u (x'_v y'_v - x'_v y'_v)] du \\
&= \pm \int_0^{2\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ca^2 \cos u du = \pm 4\pi ca^2, \quad (4)
\end{aligned}$$

其中的正负号应这样选取，使对应于 S_3 的外侧。下面确定此正负号。由 (2)， S_3 的方程可写为 $F(x, y, z) = a^2$ ，其中 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2$ 是二次齐次函数。于是，在 S_3 上，有

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \\
\cos \beta &= \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \\
\cos \gamma &= \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},
\end{aligned}$$

其中正号对应于 S_3 的一侧，负号对应于 S_3 的另一侧。于是，根据齐次函数的尤拉定理，在 S_3 (外侧) 上有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x F'_x + y F'_y + z F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} = \frac{2F}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} \\
&= \frac{2a^2}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}. \quad (5)
\end{aligned}$$

但在 S_3 与 Oxy 平面的交线 (即 $x^2 + y^2 = a^2, z=0$) 的各点上, 对 S_3 的外侧, 显然有 (注意到曲面 (2) 关于 Oxy 坐标平面对称)

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \vec{r} \cdot \vec{n} > 0,$$

(这是因为此时向径 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 与外法线单位向量 \vec{n} 的方向一致), 由此可知, 在 (5) 式中应取正号, 于是

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\
&= \iint_{S_3} \frac{2a^2}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}} dS > 0.
\end{aligned}$$

从而, 由 (4) 式知

$$\iint_{S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = 4\pi |c| a^2.$$

综上所述, 最后得 (注意 (3) 式)

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} (4\pi |c| a^2 + |c| \pi b^2 + |c| \pi b^2) \\
&= \frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|.
\end{aligned}$$

方法二

不用面积分求体积的公式(3), 而直接计算体积较为简单. 由(1)式知, 平面 $z = \text{常数}$ (即 $u = \text{常数}$) 与曲面(2)的截面 $S(z)$ 是圆, 故所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a dz \iint_{S(z)} dx dy = \int_{-a}^a S(z) dz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) |c| d(\sin u) \\ &= |c| \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 u] d(\sin u) \\ &= \pi |c| \left[2a^2 + \frac{2}{3}(b^2 - a^2) \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|. \end{aligned}$$

4385. 求由曲面

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = -u + a \cos v \quad (u \geq 0)$$

及平面 $x = 0, z = 0$ ($a > 0$) 所界物体的体积.

解 方法一

用 S_1 表物体表面位于平面 $z = 0$ 上的那一部分, S_2 为物体表面由所给参数方程给出的曲面上那一部分, 此外, 物体表面在平面 $x = 0$ 上的那部分显然是一线段 $x = 0, y = 0, 0 \leq z \leq a$. 于是, 利用 4382 题的结果, 即知所求体积为

$$V = \frac{1}{3} \iint_{S_1 + S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \quad (1)$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是向外法线的方向余弦. 显然, 在 S_1 上, $\cos\alpha = 0, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -1, z = 0$, 故

$$\iint_{S_1} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS = 0. \quad (2)$$

另外, 我们有

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS \\ &= \iint_{S_2} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \pm \iint_D [u \cos v (y'_v z'_v - y'_z z'_v) + u \sin v (z'_v x'_v - z'_x x'_v) \\ &\quad + (-u + a \cos v) (x'_v y'_v - x'_x y'_x)] du dv \\ &= \pm \iint_D [u \cos v (u \cos v - a \sin^2 v) \\ &\quad + u \sin v (a \sin v \cos v + u \sin v) \\ &\quad + (-u + a \cos v) u] du dv \\ &= \pm \iint_D a u \cos v du dv = \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a \cos v} a u \cos v du \\ &= \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} a^3 \cos^3 v \right) dv = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 (1 - \sin^2 v) d(\sin v) \\ &= \pm a^3 \left(\sin v - \frac{\sin^3 v}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pm \frac{2}{3} a^3, \end{aligned}$$

其中的正负号应这样选取,使对应于 S_2 的外侧, D 为 u, v 的变化区域 (对应于 S_2)。由此,再注意到(1)

式与(2)式,即得 $V = \pm \frac{2}{9}a^3$ 。但体积恒为正 ($V > 0$),故必有 $V = \frac{2}{9}a^3$ 。

方法二

本题若不利用面积分计算体积的公式(1),而直接计算体积,则较为简单(下面 Ω 表物体在 Oxy 平面上的投影):

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = \iint_D (-u + a \cos v)$$

$$\cdot \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$$

$$= \iint_D (-u + a \cos v) u du dv$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a \cos v} (-u + a \cos v) u du$$

$$= \frac{a^3}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v) d(\sin v) = \frac{2}{9} a^3.$$

4386. 证明公式

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\
&= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS \\
&+ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t \geq 0).
\end{aligned}$$

证 证法一

作变量代换 $x=tu$, $y=tv$, $z=tw$ ($t \geq 0$ 固定),
则 (利用奥氏公式)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 f(tu, tv, tw, t) du dv dw \right\} \\
&= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} \left[t^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right. \\
&\quad \left. + 3t^2 f \right] du dv dw \\
&= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{\partial}{\partial x} (fx) + \frac{\partial}{\partial y} (fy) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial z} (fz) \right] + \frac{\partial f}{\partial t} \right\} du dv dw \\
&+ \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 \frac{\partial f}{\partial t} du dv dw
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \left[\frac{\partial}{\partial x}(fx) + \frac{\partial}{\partial y}(fy) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}(fz) \right] dx dy dz \\
&\quad + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \\
&= \frac{1}{t} \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta \\
&\quad + fz \cos \gamma) dS \\
&\quad + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0),
\end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 上向外法线的方向余弦. 显然

$$\cos \alpha = \frac{x}{t}, \cos \beta = \frac{y}{t}, \cos \gamma = \frac{z}{t},$$

故

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta + fz \cos \gamma) dS \\
&= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{t} dS \\
&= t \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f dS.
\end{aligned}$$

于是,最后得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\ &= \iint_{x^2+y^2+z^2 = t^2} f dS \\ &+ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0). \end{aligned}$$

证法二

不利用奥氏公式更简单些. 采用球坐标, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \left[\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. r \sin \psi, t) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi \right] dr \right\} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t \cos \varphi \cos \psi, t \sin \varphi \cos \psi, \\ & \quad t \sin \psi, t) t^2 \cos \psi d\psi d\varphi \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, \\ & \quad r \sin \psi, t) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \end{aligned}$$

$$= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS \\ + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz.$$

利用奥斯特洛格拉德斯基公式计算下列面积分：

4387. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, 式中 S 为立方体 $0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a$ 的边界的外表面.

解 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$

$$= 2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz$$

$$= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z) dz$$

$$= 6 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z dz = 3a^4.$$

4388. $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$, 式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外表面.

解 $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$

$$= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a r^4 \cos\psi dr$$

$$= 6\pi \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \right) \left(\int_0^a r^4 dr \right) = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

4389. $\iint_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dx dz + (z-x+y)$

$\cdot dx dy$, 式中 S 为曲面

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$$

的外表面.

解 $\iint_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dx dz$

$$+ (z-x+y)dx dy$$

$$= \iiint_V 3dx dy dz,$$

其中 V 为由曲面 $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1$ 围成的体积. 作变换

$$u = x - y + z, \quad v = y - z + x, \quad w = z - x + y,$$

则

即作变量变换

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = 4,$$

且由 $|u| + |v| + |w| = 1$ 围成的体积等于 $\frac{4}{3}$.*) 于是,

所求的积分

$$\begin{aligned}
& \iint_S (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx \\
& + (z-x+y)dx dy \\
& = \iiint_{|u|+|v|+|w|\leq 1} 3 \cdot \frac{1}{4} du dv dw \\
& = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.
\end{aligned}$$

*) 由 $|u| + |v| + |w| = 1$ 围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积, 其大小等于由平面 $u+v+w=1$, $u=0$, $v=0$, $w=0$ 所围成的四面体体积的 8 倍, 即为 $8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{4}{3}$.

4390. 计算

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

式中 S 为圆锥曲面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的一部分, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

解 并合平面 $S_1: z=h$, $x^2 + y^2 \leq h^2$ 的部分得一立体 V , 则 (利用奥氏公式)

$$\begin{aligned}
& \iint_{S+S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\
& = 2 \iiint_V (x+y+z) dx dy dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_0^h (r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z) dz \\
&= 2\pi \int_0^h (rh^2 - r^3) dr = \frac{\pi h^4}{2}.
\end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_1} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) dS \\
&= h^2 \iint_{x^2 + y^2 \leq h^2} dx dy = \pi h^4,
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\iint_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) dS \\
&= \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}.
\end{aligned}$$

4397. 证明公式

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS,$$

其中 S 为包围体积 V 的封闭曲面, \vec{n} 为封闭曲面 S 上的动点 (ξ, η, ζ) 处的外法线, 而

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

\vec{r} 为从点 (x, y, z) 到点 (ξ, η, ζ) 的矢径.

证 先设曲面 S 不包围点 (x, y, z) (即点 (x, y, z) 在 V 之外), 我们有

$$\begin{aligned}\cos(\vec{r}, \vec{n}) &= \cos(\vec{r}, x) \cos \alpha + \cos(\vec{r}, y) \cos \beta \\ &\quad + \cos(\vec{r}, z) \cos \gamma,\end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 \vec{n} 的方向余弦. 由于

$$\cos(\vec{r}, x) = \frac{\xi - x}{r}, \quad \cos(\vec{r}, y) = \frac{\eta - y}{r},$$

$$\cos(\vec{r}, z) = \frac{\xi - z}{r},$$

故

$$\begin{aligned}\cos(\vec{r}, \vec{n}) &= \frac{\xi - x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r} \\ &\quad \cdot \cos \beta + \frac{\xi - z}{r} \cos \gamma.\end{aligned}$$

于是, 利用奥氏公式, 得

$$\begin{aligned}\iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS &= \iiint_S \left(\frac{\xi - x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r} \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos \beta + \frac{\xi - z}{r} \cos \gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi - x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta - y}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi - z}{r} \right) \right] d\xi d\eta d\xi \\ &= \iiint_V \frac{2}{r} d\xi d\eta d\xi,\end{aligned}$$

故

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS.$$

次设曲面 S 包围点 (x, y, z) . 这时, 不能对 V 应用奥氏公式, 必须用一小区域将点 (x, y, z) 挖掉, 即以点 (x, y, z) 为中心, e 为半径作一开球域 V_e (e 充分小), 其边界 (球面) 以 S_e 表示. 对闭域 $V - V_e$ 应用奥氏公式, 仿上可得

$$\begin{aligned} & \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS + \iint_{S_e} \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS \\ &= \iiint_{V-V_e} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi-x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta-y}{r} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta-z}{r} \right) \right] d\xi d\eta d\zeta \\ &= 2 \iiint_{V-V_e} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}. \end{aligned}$$

但在 S_e 上, \vec{n} 的方向与 \vec{r} 的方向相反, 故 $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = -1$. 于是,

$$\iint_{S_e} \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS = -4\pi e^2.$$

由此可知, 在前式中令 $e \rightarrow +0$ 取极限, 即得

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{d\xi d\eta d\xi}{r} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \iiint_{V-V_\varepsilon} \frac{d\xi d\eta d\xi}{r} \\ &= \frac{1}{2} \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS. \end{aligned}$$

证毕.

4392. 计算高斯积分

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS,$$

式中 S 为包含体积 V 的简单封闭平滑曲面, \vec{n} 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ξ) 处的外法线, r 为连接点 (x, y, z) 和点 (ξ, η, ξ) 的矢径,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\xi - z)^2}.$$

研究两种情形: (a) 当曲面 S 不包围点 (x, y, z) ;

(b) 当曲面 S 包围点 (x, y, z) .

解 设法线 \vec{n} 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 则

$$\begin{aligned} \cos(\vec{r}, \vec{n}) &= \cos(\vec{r}, x) \cos\alpha + \cos(\vec{r}, y) \cos\beta \\ &\quad + \cos(\vec{r}, z) \cos\gamma \end{aligned}$$

$$= \frac{\xi - x}{r} \cos\alpha + \frac{\eta - y}{r} \cos\beta + \frac{\xi - z}{r} \cos\gamma.$$

因此, 高斯积分

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \iint_S \frac{\xi - x}{r^3} d\eta d\xi \\ &\quad + \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\xi + \frac{\xi - z}{r^3} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

这里 $P = \frac{\xi - x}{r^3}$, $Q = \frac{\eta - y}{r^3}$, $R = \frac{\zeta - z}{r^3}$. 于是,

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\eta - y)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5}.$$

它们仅在点 (x, y, z) 处不连续. 因此

(a) 当曲面 S 不包围点 (x, y, z) 时, 则

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0.$$

于是, 利用奥氏公式有

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = 0.$$

(b) 当曲面 S 包围点 (x, y, z) 时, 则我们以点 (x, y, z) 为中心, ε 为半径作一球 V , 包围在 S 内, 此球面记以 S_ε . 将奥氏公式用于 $V - V_\varepsilon$ 上, 即得

$$\iint_{S+S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = 0.$$

但因

$$\iint_{S_\varepsilon} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \iint_{S_\varepsilon} \left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) dS = -4\pi,$$

故得

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = 4\pi.$$

4393. 证明: 若

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

及 S 为包围有界体积 V 的光滑曲面, 则下列公式正确:

$$(a) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta u dx dy dz;$$

$$\begin{aligned} (b) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ + \iiint_V u \Delta u dx dy dz, \end{aligned}$$

式中 u 和它的直到二阶的偏导函数是在域 $V + S$ 内连续的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的导函数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

因此, 利用奥氏公式即得

$$\begin{aligned}
\iint_s \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iint_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\
&= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz \\
&= \iiint_V \Delta u dx dy dz.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad \iint_s u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iint_s \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha \right. \\
&\quad \left. + u \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + u \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\
&= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\
&= \iiint_V u \Delta u dx dy dz + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.
\end{aligned}$$

4394. 证明空间的格林第二公式

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz = \iint_s \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

式中体积 V 是由曲面 S 所包围的, \vec{n} 是曲面 S 的外法线方向, 而函数 $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$ 为域 $V+S$ 内可微分两次的函数.

$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad & \iint_S \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{array} \right| dS \\
 &= \iiint_V \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \beta \right. \\
 &\quad \left. + \left(v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos \gamma \right] dS \\
 &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\
 &= \iiint_V \left[v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] dx dy dz \\
 &= \iiint_V \left| \begin{array}{cc} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{array} \right| dx dy dz.
 \end{aligned}$$

4395. 函数 $u=u(x, y, z)$ 在某一域内具有直到二阶的连续导函数, 若

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

则 $u(x, y, z)$ 在这个域内称为调和函数。

证明：若 u 是被平滑曲面 S 所包围的有界闭域 V 内的调和函数，则下列公式是正确的。

$$(a) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0;$$

$$(6) \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

式中 \vec{n} 为曲面 S 的外法线。

试用公式 (6)，证明在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定。

证 (a) 由于 $\Delta u = 0$ ，故利用 4393 题 (a) 的结果，即得

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V 0 dx dy dz = 0.$$

(6) 利用 4393 题 (6) 的结果，即得

$$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V u \cdot 0 dx dy dz \\ + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

$$= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

与 4333 题一样，只要证明：若在界限 S 上调和函数 $u=0$ ，则它在域 V 上也恒有 $u=0$ 。事实上，利用本题 (6)，得

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 0.$$

因此，

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0,$$

即在域 V 上 $u \equiv$ 常数。但在 S 上 $u=0$ ，故在域 V 上 $u=0$ 。这就是证明：在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定。

4396. 证明：若函数 $u=u(x, y, z)$ 是在由光滑曲面 S 所包围着的有界闭域 V 内的调和函数，则

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS,$$

式中 \vec{r} 是从域 V 的内面的点 (x, y, z) 引至曲面 S 上的动点 (ξ, η, ζ) 的矢径，而

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

\vec{n} 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 的外法线向量。

证 在 4394 题中令 $v = \frac{1}{r}$ ，则当 $(\xi, \eta, \zeta) \neq (x, y,$

$z)$ 时，有 $\Delta v = 0$ 。现以点 $P(x, y, z)$ 为中心， ρ 为

半径作一球面 S_ρ 含于曲面 S 内, 再将 4394 题应用到由曲面 $S + S_\rho$ 所包围的体积 V 内, 即得

$$\iint_{S+S_\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right) dS = 0,$$

或

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right) dS \\ &= - \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right) dS. \end{aligned}$$

显然, S 上的法线是向外的, 而 S_ρ 上的法线是指向球心的, 即指向半径减少一方. 因此,

$$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} = - \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} \bigg|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho^2}.$$

于是, 我们有

$$\iint_{S_\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{u}{\rho^2} \right) dS = - \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right) dS.$$

但

$$\iint_{S_\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\rho} \iint_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

又利用中值定理, 得

$$\iint_{S_\rho} \frac{u}{\rho^2} dS = \frac{1}{\rho^2} u(x', y', z') \cdot 4\pi\rho^2$$

$$= 4\pi u(x', y', z'),$$

其中 $u(x', y', z')$ 为函数 u 在球面 S_ρ 上某点之值. 从而

$$u(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

上式右端与 ρ 无关, 而 $\lim_{\rho \rightarrow +0} u(x', y', z') = u(x, y, z)$.
因而, 令 $\rho \rightarrow +0$, 即得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) dS.$$

又由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial r}{\partial \eta} \cos \beta + \frac{\partial r}{\partial \zeta} \cos \gamma \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\xi - x}{r} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r} \cos \beta + \frac{\zeta - z}{r} \cos \gamma \right) \\ &= -\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}, \end{aligned}$$

故最后得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{u \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

4397. 证明: 若 $u=u(x, y, z)$ 为在以 R 为半径, 以点 (x_0, y_0, z_0) 为球心的球 S 内的调和函数, 则

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS$$

(中值定理)。

证 在球 S 上应用 4396 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \iint_S \left(\frac{u \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{u}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS^* \end{aligned}$$

*) 利用 4395 题的结果, 有

$$\frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

4398. 证明, 在有界闭域 V 内连续且在其内部是调和的函数 $u=u(x, y, z)$, 若它不是常数, 则在域内的点函数不能达到最大和最小的值 (极大值原则)。

证 证明与 4337 题 (平面情形) 完全类似. 设有界闭域为 $\bar{\Omega}$, 它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明: 如果 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 达到其最大值或最小值 (例如, 设达到最大值), 则 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上必为常数, 下分三步证明:

(1) 先证: 若球域 $V_\rho = \{(x, y, z) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leq \rho^2\}$ 完全属于 Ω , 则 $u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上必为常数.

对任何的 $0 < r \leq \rho$, 用 S_r 表球面 $\{(x, y, z) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2\}$. 由4397题的结果知

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} u(x, y, z) dS,$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} [u(x_0, y_0, z_0) \\ - u(x, y, z)] dS = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

但因 $u(x_0, y_0, z_0)$ 是最大值, 故在 S_r 上恒有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \geq 0.$$

由此, 根据(1), 即易知在 S_r 上 $u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \equiv 0$. 因为, 若有某点 $(x_1, y_1, z_1) \in S_r$ 使

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x_1, y_1, z_1) = \tau > 0,$$

则由 $u(x, y, z)$ 的连续性知, 必有以 (x_1, y_1, z_1) 为中心的某小球域 σ 存在, 使当 $(x, y, z) \in \sigma$ 时, 恒有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \geq \frac{\tau}{2}.$$

用 S'_r 表 S_r 含于 σ 内的部分, 则

$$\iint_{S'_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS$$

$$\begin{aligned} &\geq \iint_{S_r'} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS \\ &\geq \iint_{S_r'} \frac{\tau}{2} dS = \frac{1}{2} \tau D_r > 0, \end{aligned}$$

其中 D_r 表 S_r' 的面积. 此显然与(1)式矛盾. 于是, 在 S_r 上有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \equiv 0.$$

再根据 r 的任意性 ($0 < r \leq \rho$), 即知对任何 $(x, y, z) \in V_\rho$, 都有 $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$; 换句话说, $u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上是常数.

(2) 次证: 设 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 为 $\overline{\Omega}$ 的任一内点 (即 $P^* \in \Omega$), 则必有

$$u(x^*, y^*, z^*) = u(x_0, y_0, z_0).$$

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 与点 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 连接起来. 用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的距离, 即

$$\delta = \min \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

其中的 \min 是对一切 $(x, y, z) \in \partial\Omega$, $(x', y', z') \in l$ 来取的 (由于 $\partial\Omega$, l 是互不相交的有界闭集, 可证 \min 一定能达到, 从而 $\delta > 0$). 取 $0 < \delta' < \delta$. 以点 P_0 为中心, δ' 为半径作一球, 得球域 $V'_0 = \{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq \delta'^2\}$. 此球域完全含于 Ω 内, 由(1)段已证的结果知, $u(x, y, z)$ 在 V_0 中为常数. 特别是 $u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0)$. 这里点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 代表球面 $S_0 = \{(x, y,$

$z) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \delta^2 \}$ 与折线 l 的交点 (参看 4337 题的图). 又以点 P_1 为中心, δ' 为半径作一球, 得球域 $V_1 = \{(x, y, z) | (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 \leq \delta'^2\}$. 于是, V_1 也完全含于 Ω 内. 由于 $u(x, y, z)$ 也在点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 达到最大值, 故将 (1) 段的结果用于 V_1 , 可知 $u(x, y, z)$ 在 V_1 上是常数. 特别是 $u(x_2, y_2, z_2) = u(x_1, y_1, z_1)$. 这里点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为球面 $S_1 = \{(x, y, z) | (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = \delta'^2\}$ 与 l 的交点 (除 P_0 外的另一交点). 再以点 P_2 为中心, δ' 为半径作一球域 V_2 , ... 这样继续作下去. 显然,

至多经过 n 次 (n 为大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数, s 表折线 l 的长), 点 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 必属于 V_{n-1} , 从而

$$\begin{aligned} u(x^*, y^*, z^*) &= u(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = \cdots \\ &= u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

(3) 由 (2) 段的结果知, $u(x, y, z)$ 在 Ω 上是常数. 根据 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的连续性, 通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限, 即知 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注: 从证明过程中看出, 需假定区域 Ω (从而 $\bar{\Omega}$) 是连通的. 事实上, 若 Ω 不连通, 则结论不一定成立. 例如, 设 $\bar{\Omega} = V_1 + V_2$, 其中 V_1 与 V_2 是两个互无公共点的闭球域, 而令

$$u(x, y, z) = \begin{cases} C_1, & (x, y, z) \in V_1, \\ C_2, & (x, y, z) \in V_2, \end{cases}$$

其中 $C_1 \neq C_2$ 是两个常数, 则 $u(x, y, z)$ 显然是 $\overline{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\overline{\Omega}$ 上不是常数, 但它却在其内点达到最大值与最小值.

4399. 物体 V 全部浸溺于液体中, 从巴斯葛耳定律出发, 证明液体的浮力等于物体同体积液体之重而方向垂直向上 (阿基米德定律).

证 将 Oxy 坐标面取在液面上, 而 Oz 轴垂直液面向下. 设液体比重为 ρ , 浸入液体的物体 V 的表面积为 S . 若对应于面积元素 dS 液体的深度为 z , 则在 dS 上所受的压力为 $\rho z dS$. 由于此压力总是垂直于 dS 面的, 故压力在各坐标轴上的射影为

$$-\rho z \cos \alpha dS, \quad -\rho z \cos \beta dS, \quad -\rho z \cos \gamma dS.$$

利用奥氏公式, 即得作用于物体整个表面的总压力在各坐标轴上的射影

$$P_x = -\rho \iint_S z \cos \alpha dS = -\rho \iiint_V 0 dx dy dz = 0,$$

$$P_y = -\rho \iint_S z \cos \beta dS = -\rho \iiint_V 0 dx dy dz = 0,$$

$$P_z = -\rho \iint_S z \cos \gamma dS = -\rho \iiint_V dx dy dz = -\rho V.$$

因此, 压力的主向量即合力, 朝着垂直向上的方向, 其大小等于被物体排出的液体的重量. 这就是阿基米德定律.

4400. 设 S_t 是变动的球 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\xi - z)^2 = t^2$, 而函数 $f(\xi, \eta, \xi)$ 是连续的, 证明函数

*

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS,$$

满足波动方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初值条件 $u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(x, y, z).$

证 首先指出, 本题应设 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 具有连续的二阶偏导函数. 先验证函数 u 满足初值条件 $u|_{t=0} = 0$

(意即 $\lim_{t \rightarrow +0} u = 0$) 及 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(x, y, z)$ (意即

$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z)$). 今固定 (x, y, z) . 由连

续性知, 存在常数 $M > 0$, 使当 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \leq 1$ 时恒有

$$|f(\xi, \eta, \zeta)| \leq M, \quad |f'_\xi(\xi, \eta, \zeta)| \leq M,$$

$$|f'_\eta(\xi, \eta, \zeta)| \leq M, \quad |f'_\zeta(\xi, \eta, \zeta)| \leq M.$$

当 $0 < t < 1$ 时, 我们有

$$|u(x, y, z, t)| \leq \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t} |f(\xi, \eta, \zeta)| dS,$$

$$\leq \frac{1}{4\pi t} \iint_S M dS = \frac{1}{4\pi t} \cdot M 4\pi t^2$$

$$= Mt,$$

由此可知, $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, y, z, t) = 0$.

又作变量代换 $\xi = x + ut, \eta = y + vt, \zeta = z + wt$, 则有

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) \cdot t dS, \quad (1)$$

其中 S 是单位球面 $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) t dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} u + \frac{\partial f}{\partial \eta} v + \frac{\partial f}{\partial \zeta} w \right) t dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) dS \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2)$$

显然, 当 $0 < t < 1$ 时,

$$|I_1| \leq \frac{t}{4\pi} \iint_S 3M dS = 3Mt,$$

故 $\lim_{t \rightarrow +0} I_1 = 0$. 又显然 (由于连续性)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} I_2 &= \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x, y, z) dS \\ &= \frac{f(x, y, z)}{4\pi} \iint_S dS = f(x, y, z). \end{aligned}$$

因此, 得

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z).$$

下面再验证 u 满足波动方程. 由 (2) 式, 利用奥氏公式, 有 (V 为球体 $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, V_t 为球体 $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \leq t^2$)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{t}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \cos \gamma \right) dS \\ &= \frac{t^2}{4\pi} \iiint_V \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) f(x+ut, y+vt, z+wt) du dv dw \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iiint_{V_t} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) f(x+u_1, y+v_1, z+w_1) du_1 dv_1 dw_1 \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iiint_{V_t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x+u_1, y+v_1, z+w_1) du_1 dv_1 dw_1 \\ &= \frac{1}{4\pi t} \Delta \left(\iiint_{V_t} f(x+u_1, y+v_1, z+w_1) du_1 dv_1 dw_1 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi t} \Delta \left(\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+r \cos \psi \cos \varphi, y+r \cos \psi \sin \varphi, z+r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{I_3}{4\pi t},$$

其中 $\cos\alpha=u$, $\cos\beta=v$, $\cos\gamma=w$ 为 S 的外法线的方向余弦, 又由 (2) 式及 (1) 式, 有

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4\pi t} \iint_S f(x+ut, y+vt, z+wt) t dS \\ &= \frac{u}{t}, \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t} \quad (t > 0).$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \left(\frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} \quad (t > 0). \end{aligned} \quad (3)$$

但

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} \left(\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+r\cos\psi\cos\varphi, y \right. \\ &\quad \left. + r\cos\psi\sin\varphi, z+r\sin\psi) r^2 \cos\psi d\psi d\varphi dr \right) \\ &= \mathcal{A} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+r\cos\psi\cos\varphi, y \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \Big] \\
& = \Delta \left(\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + t \cos \psi \cos \varphi, y \right. \\
& \quad \left. + t \cos \psi \sin \varphi, z + t \sin \psi) t^2 \cos \psi d\psi d\varphi \right) \\
& = \Delta \left(\iint_{S_t} f(\xi, \eta, \zeta) dS_t \right)
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{4\pi t} \Delta \left(\iint_{S_t} f(\xi, \eta, \zeta) dS_t \right) \\
&= \Delta \left(\frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t \right) \\
&= \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (t > 0).
\end{aligned}$$

证毕。

§17. 场论初步

1° 梯度 若 $u(\vec{r}) = u(x, y, z)$ (其中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$) 是连续可微分的数量场, 则称向量

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

为 $u(\vec{r})$ 的梯度, 或简记为 $\text{grad } u = \nabla u$, 其中 $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}$

$\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$. 于已知点 (x, y, z) 场 u 的梯度的方向是与过此点的等位面 $u(x, y, z) = C$ 的法线方向一致, 对于场的每一点此向量给出函数 u 变化之最大速度的大小

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

与方向.

在某方向 $\vec{l} \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 上场 u 的导数等于

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \vec{l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

2° 场的散度与场的旋度 若

$$\vec{a}(\vec{r}) = a_x(x, y, z) \vec{i} + a_y(x, y, z) \vec{j} + a_z(x, y, z) \vec{k}$$

是连续可微分的向量场, 则称数量

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

名为场的旋度.

3° 穿过曲面的流量 若向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 在域 Ω 内产生向量场, 则称积分

$$\iint_S \vec{a} n dS = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$$

为穿过位于域 Ω 内的已知曲面 S 的流向法线上单位向量 $\vec{n} \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ 所指的那一面的流量。在向量的论述中奥斯特洛格拉德斯基公式具有下面的形状：

$$\iint_S \vec{a} n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz,$$

式中 S 为包围体积 V 的曲面， \vec{n} 为曲面 S 的外法线单位向量。

4° 向量的环流数

$$\int_C \vec{a} d\vec{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

称为向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 沿某曲线 C 所取的线积分（场作的功）。

若围线 C 是封闭的，则称线积分为向量 \vec{a} 沿围线 C 的环流。

在向量的形式上斯托克斯公式为

$$\oint_C \vec{a} d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{a} dS,$$

式中 C 为包围曲面 S 的封闭围线，并且对曲面 S 的法线 \vec{n} 之方向应当这样来选择：使得立于曲面 S 上的观察者，以头向着法线的方向，围线 C 的回绕是依反时针前进的方向作成的（对于右旋坐标系）。

5° 有势场 向量场 $\vec{a}(\vec{r})$ 是某数量 u 的梯度即 $\operatorname{grad} u$

$=\vec{a}$, \vec{a} 名为有势场, 而数量 u 名为场的势.

若势 u 为单值函数, 则

$$\int_{AB} \vec{a} d\vec{r} = u(B) - u(A).$$

特别是, 在这个情形向量 \vec{a} 的环流等于零.

给定在单联通域内的场 \vec{a} 为有势场的充要条件, 是条件 $\text{rot} \vec{a} = \vec{0}$ 满足, 就是说, 这样的场应当是无旋场.

4401. 求场

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

在: (a) $O(0, 0, 0)$; (б) $A(1, 1, 1)$; (в) $B(2, 1, 1)$ 诸点梯度的大小和方向. 在怎样的点, 梯度等于零?

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 3, \frac{\partial u}{\partial y} = 4y + x - 2, \frac{\partial u}{\partial z} = 6z - 6.$

(a) 在 O 点, 有

$$\text{grad } u = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}, \quad |\text{grad } u| = 7,$$

方向: $\cos \alpha = \frac{3}{7}, \cos \beta = -\frac{2}{7}, \cos \gamma = -\frac{6}{7};$

(б) 在 A 点, 有

$$\text{grad } u = 6\vec{i} + 3\vec{j}, \quad |\text{grad } u| = 3\sqrt{5},$$

方向: $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \gamma = 0;$

(в) 在 B 点, 有

$$\text{grad } u = 7\vec{i}, \quad |\text{grad } u| = 7,$$

方向: $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$.

一般地说, 我们有

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{(2x+y+3)^2 + (4y+x-2)^2 + (6z-6)^2}.$$

要 $|\operatorname{grad} u| = 0$, 只要

$$\begin{cases} 2x+y+3=0, \\ 4y+x-2=0, \\ 6z-6=0. \end{cases}$$

解之, 得 $x = -2$, $y = 1$, $z = 1$, 即在点 $(-2, 1, 1)$ 梯度为零.

4402. 在空间 $Oxyz$ 的那些点, 场

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

的梯度 (a) 垂直于 Oz 轴; (b) 平行于 Oz 轴; (B) 等于零? 2 2 1

解 $\operatorname{grad} u = (3x^2 - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (3z^2 - 3xy)\vec{k}.$

(a) 要 $\operatorname{grad} u \perp Oz$, 只要 $\operatorname{grad} u \cdot \vec{k} = 0$, 即 $3z^2 - 3xy = 0$ 或 $z^2 = xy$. 因此, 在满足 $z^2 = xy$ 的点 (x, y, z) , 其梯度垂直于 Oz 轴.

(b) 要 $\operatorname{grad} u \parallel Oz$, 只要

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0, \\ 3y^2 - 3xz = 0. \end{cases}$$

解之, 得 $x = y = 0$ 及 $x = y = z$. 因此, 在点 $(0, 0, z)$ 及 (x, y, z) (其中 $x = y = z$), 其梯度平行于 Oz 轴.

(B) 要 $|\operatorname{grad} u| = 0$, 只要

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0, \\ 3y^2 - 3xz = 0, \\ 3z^2 - 3xy = 0. \end{cases}$$

解之，得 $x=y=z$ ，因此，在满足 $x=y=z$ 的点 (x, y, z) ，其梯度等于零。

4403. 已给数量场

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ 。在空间 $Oxyz$ 的哪些点下面等式成立

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^2}.$

于是，

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} u| &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{r^4}[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]} \\ &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

要 $|\operatorname{grad} u| = 1$ ，只要 $r = 1$ ，即在以点 (a, b, c) 为中心，1 为半径的球面上，均有

$$\left| \operatorname{grad} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right| = 1,$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ 。

4404. 作数量场

$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$
 的等位面, 求通过点 $M(9, 12, 28)$ 的等位面. 在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

解 等位面可由

$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$
 化简得到. 显然有

$u \geq \sqrt{(z+8)^2} + \sqrt{(z-8)^2} \geq z+8 - (z-8) = 16.$
 于是, 当 $u \geq 16$ 时, 有

$u - \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2}.$
 平方化简可得

$u^2 - 32z = 2u\sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2},$
 再平方化简, 即得等位面方程

$$\frac{4(x^2 + y^2)}{u^2 - 256} + \frac{4z^2}{u^2} = 1 \quad (u \geq 16),$$

这是绕 Oz 轴旋转的一个旋转面. 图形省略.

当 $x=9, y=12, z=28$ 时, $u=64$. 因此, 等位面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1.$$

在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ 内, 由于

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 16z + 64} \\ &\quad + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 16z + 64} \\ &\leq \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z} \quad (0 \leq z \leq 6), \end{aligned}$$

故函数 $f(z) = \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z}$ 在 $[0, 6]$ 上的

最大值即 u 的最大值。但是，

$$f(z) = 8 \left(\frac{1}{\sqrt{100+16z}} - \frac{1}{\sqrt{100-16z}} \right) < 0$$

$$(0 < z \leq 6),$$

故 $f(z)$ 在 $[0, 6]$ 上是严格减函数，从而

$$\max_{0 \leq z \leq 6} f(z) = f(0) = 20.$$

因此，有

$$\max u = 20.$$

4405. 求场

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

在点 $A(1, 2, 2)$ 及 $B(-3, 1, 0)$ 的梯度之间的夹角 θ 。

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

在 A, B 点的梯度分别为

$$\text{grad } u(A) = \frac{7}{81} \vec{i} - \frac{4}{81} \vec{j} - \frac{4}{81} \vec{k},$$

$$\text{grad } u(B) = -\frac{2}{25} \vec{i} + \frac{3}{50} \vec{j}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\operatorname{grad} u(A) \cdot \operatorname{grad} u(B)}{|\operatorname{grad} u(A)| \cdot |\operatorname{grad} u(B)|} \\ &= \frac{-\frac{4}{405}}{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10}} = -\frac{8}{9}\end{aligned}$$

4406. 设已知数量场

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

作出场的等位面 and 梯度的等模面.

在域 $1 < z < 2$ 内求 $\inf u$, $\sup u$, $\inf |\operatorname{grad} u|$, $\sup |\operatorname{grad} u|$.

解 将 $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 化简整理, 即得

$$x^2 + y^2 + \frac{u^2 - 1}{u^2} z^2 = 0,$$

其中显然有 $0 < |u| < 1$. 由此可知, 等位面是一个以原点为顶点, Oz 轴为旋转轴的圆锥, 但要去掉原点 $O(0, 0, 0)$. 因此, 它是一个圆锥孔, 又

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{yz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$-\frac{z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \text{ 故有}$$

$$|\text{grad } u| = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}. \text{ 令 } \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} = c,$$

显见此等模面是一个以 Oz 轴为旋转轴的旋转面。现在令 $y=0$, 得

$$x = cx^2 + cz^2 \text{ 或 } \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4c^2} (c \neq 0),$$

它是 Oxz 面上的圆。因此, 梯度的等模面是一个旋转环面。

当 $1 < z < 2$ 时, 显然有 $0 < u \leq 1$; 且当 $x=y=0$ 时, $u=1$, 而当 x^2+y^2 充分大时 u 可任意小, 故

$$\inf_{1 < z < 2} u = 0, \quad \sup_{1 < z < 2} u = 1.$$

另外, 显然

$$\inf_{1 < z < 2} |\text{grad } u| = \inf_{1 < z < 2} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

由于对于常数 $a > 0$, 函数 $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{t+a} (0 \leq t < +\infty)$

当 $t=a$ 时达最大值 $f(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ (这可从讨论 $f(t)$

简单地得知), 故对于固定的 z , $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}$ 的最

大值是 $\frac{1}{2\sqrt{z^2}} = \frac{1}{2z}$ ($z > 0$ 时), 由此可知

$$\sup_{1 < z < 2} |\operatorname{grad} u| = \sup_{1 < z < 2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}.$$

4407. 求在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处之二无限接近的等位面

$$u(x, y, z) = c \text{ 及 } u(x, y, z) = c + \Delta c$$

之间的距离准确到高阶无穷小, 其中 $u(x_0, y_0, z_0) = c$,

解 过点 M_0 作等位面 $u(x, y, z) = c$ 的垂线, 交等位面 $u(x, y, z) = c + \Delta c$ 于点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则显然二等位面 $u(x, y, z) = c$ 和 $u(x, y, z) = c + \Delta c$ 之间的距离 $d = |\overrightarrow{M_0 M_1}|$. 由于梯度垂直于等位面. 因此 $\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)$ 的方向与 $\overrightarrow{M_0 M_1}$ 的方向或者重合, 或者相反. 于是, 注意到 $u(x_0, y_0, z_0) = c$, $u(x_1, y_1, z_1) = c + \Delta c$, 知

$$\begin{aligned} \Delta c &= u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (x_1 - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \\ &\quad \cdot (y_1 - y_0) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (z_1 - z_0) \\ &= [\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)] \cdot \overrightarrow{M_0 M_1} \\ &= \pm |\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)| \cdot |\overrightarrow{M_0 M_1}| \\ &= \pm |\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)| d. \end{aligned}$$

由此可知 (准确到高阶无穷小)

$$d = \frac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)|}.$$

4408. 证明公式

$$(a) \operatorname{grad}(u+c)=\operatorname{grad} u \quad (c \text{ 为常数});$$

$$(b) \operatorname{grad} cu=c\operatorname{grad} u \quad (c \text{ 为常数});$$

$$(B) \operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v;$$

$$(r) \operatorname{grad} uv=v\operatorname{grad} u+u\operatorname{grad} v;$$

$$(A) \operatorname{grad}(u^2)=2u\operatorname{grad} u;$$

$$(e) \operatorname{grad} f(u)=f'(u)\operatorname{grad} u.$$

证 (a) 由于 $\frac{\partial(u+c)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(u+c)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\frac{\partial(u+c)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ 故得}$$

$$\operatorname{grad}(u+c)=\operatorname{grad} u.$$

$$(b) \text{ 由于 } \frac{\partial(cu)}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial(cu)}{\partial y}$$

$$= c \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial(cu)}{\partial z} = c \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ 故得}$$

$$\operatorname{grad} cu=c\operatorname{grad} u.$$

$$(B) \text{ 由于 } \frac{\partial(u+v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial(u+v)}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial(u+v)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}, \text{ 故得}$$

$$\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v.$$

$$(r) \text{ 由于 } \frac{\partial(uv)}{\partial x} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial(uv)}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial(uv)}{\partial z} = u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \text{故得}$$

$$\text{grad } uv = u \text{grad } v + v \text{grad } u.$$

(d) 在 (c) 中令 $v=u$, 即得

$$\text{grad}(u^2) = 2u \text{grad } u.$$

$$(e) \text{ 由于 } \frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(u)}{\partial z} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \text{故得}$$

$$\text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u.$$

4409. 计算: (a) $\text{grad } r$, (b) $\text{grad } r^2$, (B) $\text{grad } \frac{1}{r}$, 其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

解 (a) $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$ 于是,

$$\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{其中 } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$(b) \text{ grad}(r^2) = 2r \text{grad } r = 2r \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 2\vec{r},$$

$$(B) \text{ grad } \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \text{grad } r = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

4410. 求 $\text{grad } f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 $\text{grad } f(r) = f'(r) \text{grad } r = f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$

*) 利用 4408 题的结果.

**) 利用 4409 题的结果.

4411. 求 $\text{grad}(\vec{c} \cdot \vec{r})$, 其中 \vec{c} 为常向量, \vec{r} 为从坐标原点起的向径.

✓ 解 设 $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, 其中 c_x, c_y, c_z 为常数.

由于

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = c_x x + c_y y + c_z z$$

$$\text{及 } \frac{\partial(\vec{c} \cdot \vec{r})}{\partial x} = c_x, \quad \frac{\partial(\vec{c} \cdot \vec{r})}{\partial y} = c_y, \quad \frac{\partial(\vec{c} \cdot \vec{r})}{\partial z} = c_z,$$

$$\text{故 } \text{grad}(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c}.$$

4412. 求 $\text{grad}\{|\vec{c} \times \vec{r}|^2\}$ (\vec{c} 为常向量).

解 $|\vec{c} \times \vec{r}|^2 = (c_y z - c_z y)^2 + (c_z x - c_x z)^2 + (c_x y - c_y x)^2$. 于是,

$$\begin{aligned} \text{grad}\{|\vec{c} \times \vec{r}|^2\} &= [2c_z(c_z x - c_x z) - 2c_y(c_x y - c_y x)]\vec{i} \\ &\quad + [-2c_x(c_y z - c_z y) + 2c_z(c_x y - c_y x)]\vec{j} \\ &\quad + [2c_y(c_y z - c_z y) - 2c_x(c_z x - c_x z)]\vec{k} \\ &= 2[x(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) - c_x(c_x x + c_y y + c_z z)]\vec{i} \\ &\quad + 2[y(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) - c_y(c_x x + c_y y + c_z z)]\vec{j} \\ &\quad + 2[z(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) - c_z(c_x x + c_y y + c_z z)]\vec{k} \\ &= 2\vec{r}(\vec{c} \cdot \vec{c}) - 2\vec{c}(\vec{r} \cdot \vec{c}). \end{aligned}$$

4413. 证明公式

$$\text{grad } f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad } v.$$

证 由于

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z},$$

故有

$$\begin{aligned} \text{grad } f(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad } v. \end{aligned}$$

4474. 证明公式

$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2v + v\nabla^2u + 2\nabla u \nabla v,$$

其中
$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \nabla \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

证 由于 $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$, 故

$$\begin{aligned} \nabla^2(uv) &= \nabla(\nabla(uv)) = \nabla(u\nabla v + v\nabla u) \\ &= \nabla(u\nabla v) + \nabla(v\nabla u) \\ &= (u\nabla^2v + \nabla u \nabla v) + (v\nabla^2u + \nabla u \nabla v) \\ &= u\nabla^2v + v\nabla^2u + 2\nabla u \nabla v. \end{aligned}$$

4415. 证明: 若函数 $u=u(x, y, z)$ 在凸形域 Ω 内可微分且 $|\text{grad } u| \leq M$, 其中 M 为常数, 则对于 Ω 中任意两点 A, B 有:

$$|u(A) - u(B)| \leq M \rho(A, B),$$

式中 $\rho(A, B)$ 为 A 与 B 两点间之距离.

证 由于 Ω 为凸形域, 故线段 \overline{AB} 整个属于 Ω . 设 B 的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , A 的坐标为 (x_1, y_1, z_1) , 且令 $x_1 - x_0 = \Delta x$, $y_1 - y_0 = \Delta y$, $z_1 - z_0 = \Delta z$. 并考虑一元函数 $f(t) = u(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)$ ($0 \leq t \leq 1$), 显然 $f(0) = u(B)$, $f(1) = u(A)$, 且 $f(t)$ 在 $[0, 1]$ 可微, 并且

$$\begin{aligned} f'(t) = & u'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta x \\ & + u'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta y \\ & + u'_z(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)\Delta z. \end{aligned}$$

于是, 由微分学中值定理知

$$\begin{aligned} u(A) - u(B) &= f(1) - f(0) = f'(\xi) \\ &= u'_x(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)\Delta x \\ &\quad + u'_y(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)\Delta y \\ &\quad + u'_z(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)\Delta z \\ &= [\text{grad } u(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)] \cdot \overrightarrow{BA}, \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned} |u(A) - u(B)| &= |[\text{grad } u(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)] \cdot \overrightarrow{BA}| \\ &\leq |\text{grad } u(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)| \cdot |\overrightarrow{BA}| \\ &\leq M \rho(A, B). \end{aligned}$$

4416. 求场 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x, y, z)$ 沿此点的向径 \vec{r} 之方向的导数.

在什么情况下, 此导数将等于梯度的大小?

解 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$, 其中 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\cos \beta = \frac{y}{r}$, $\cos \gamma = \frac{z}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2x}{a^2} \cdot \frac{x}{r} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{y}{r} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{z}{r} = \frac{2u}{r}.$$

$$\text{又 } |\text{grad } u| = 2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

要 $|\text{grad } u| = \frac{\partial u}{\partial r}$, 只要 $\frac{u}{r} = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$, 即

只要 $a = b = c$, 此即所求之解.

4417. 求场 $u = \frac{1}{r}$ (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在方向 $\vec{l} \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ 上的导数.

在什么情况下, 此导数等于零?

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$. 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{x}{r^3} \cos \alpha - \frac{y}{r^3} \cos \beta - \frac{z}{r^3} \cos \gamma$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{r^2} [\cos(\vec{r}, x) \cos \alpha + \cos(\vec{r}, y) \cos \beta \\
&\quad + \cos(\vec{r}, z) \cos \gamma] \\
&= -\frac{\cos(\vec{l}, \vec{r})}{r^2}.
\end{aligned}$$

要 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 只要 $\cos(\vec{l}, \vec{r}) = 0$, 即 $\vec{l} \perp \vec{r}$, 此即所求之解.

4418. 求场 $u = u(x, y, z)$ 在场 $v = v(x, y, z)$ 的梯度方向的导数.

在什么情况下, 此导数等于零?

解 $\vec{l} = \text{grad } v$, $\vec{l}_0 = \frac{\text{grad } v}{|\text{grad } v|}$. 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \vec{l}_0 = \frac{\text{grad } u \cdot \text{grad } v}{|\text{grad } v|}.$$

要 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 只要 $\text{grad } u \perp \text{grad } v$, 此即所求之解.

4419⁺. 设:

$$u = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ 及 } \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k},$$

计算 $\vec{a} = \vec{c} \times \text{grad } u$.

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \left(-\frac{xz}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$= -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

于是,

$$\vec{a} = \vec{c} \times \text{grad } u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} [(x^2 + y^2 + yz)\vec{i} \\ - (x^2 + y^2 + xz)\vec{j} + (x - y)z\vec{k}].$$

4420. 确定向量场

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

的力线.

解 力线系这样的一条曲线 C , 在 C 上每一点的切线
与向量场在该点的方向重合. 因此, 有 $d\vec{r} \parallel \vec{a}$, 即

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z},$$

其中 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

今有 $a_x = x$, $a_y = y$, $a_z = 2z$, 故得

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}.$$

解之, 得 $y = c_1 x$, $z = c_2 x^2$.

4421. 用直接计算的方法证明向量 \vec{a} 的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系 $Oxyz$ (坐标轴方向的单位向量为 \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}) 外, 另有直角坐标系 $O'x'y'z'$ (坐标轴方向的单位向量为 \vec{i}' , \vec{j}' , \vec{k}'). 我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.$$

设

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos \alpha_1 \vec{i} + \cos \beta_1 \vec{j} + \cos \gamma_1 \vec{k}, \\ \vec{j}' = \cos \alpha_2 \vec{i} + \cos \beta_2 \vec{j} + \cos \gamma_2 \vec{k}, \\ \vec{k}' = \cos \alpha_3 \vec{i} + \cos \beta_3 \vec{j} + \cos \gamma_3 \vec{k}. \end{cases}$$

又设 $\vec{r}_0 = \vec{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. 于是, 空间一点 P 在两个坐标系中的坐标 (x, y, z) 与 (x', y', z') 之间的关系为 (令 $\vec{r} = \vec{OP}$, $\vec{r}' = \vec{O'P}$):

$$\begin{aligned} x' &= \vec{r} \cdot \vec{i}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{i}' \\ &= (x-a)\cos \alpha_1 + (y-b)\cos \beta_1 + (z-c)\cos \gamma_1, \\ y' &= \vec{r} \cdot \vec{j}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{j}' \\ &= (x-a)\cos \alpha_2 + (y-b)\cos \beta_2 + (z-c)\cos \gamma_2, \\ z' &= \vec{r} \cdot \vec{k}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k}' \end{aligned}$$

$$= (x-a)\cos\alpha_3 + (y-b)\cos\beta_3 + (z-c)\cos\gamma_3.$$

我们有

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_{x'}\vec{i} + a_{y'}\vec{j} + a_{z'}\vec{k}' \\ &= a_{x'}(\cos\alpha_1\vec{i} + \cos\beta_1\vec{j} + \cos\gamma_1\vec{k}) \\ &\quad + a_{y'}(\cos\alpha_2\vec{i} + \cos\beta_2\vec{j} + \cos\gamma_2\vec{k}) \\ &\quad + a_{z'}(\cos\alpha_3\vec{i} + \cos\beta_3\vec{j} + \cos\gamma_3\vec{k}).\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}a_x &= a_{x'}\cos\alpha_1 + a_{y'}\cos\alpha_2 + a_{z'}\cos\alpha_3 \\ a_y &= a_{x'}\cos\beta_1 + a_{y'}\cos\beta_2 + a_{z'}\cos\beta_3 \\ a_z &= a_{x'}\cos\gamma_1 + a_{y'}\cos\gamma_2 + a_{z'}\cos\gamma_3.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_x}{\partial x} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} \\ &= \left(\cos\alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x} + \cos\alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x} + \cos\alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x} \right) \cos\alpha_1 \\ &\quad + \left(\cos\alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + \cos\alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \cos\alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'} \right) \cos\alpha_2 \\ &\quad + \left(\cos\alpha_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + \cos\alpha_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + \cos\alpha_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'} \right) \cos\alpha_3.\end{aligned}$$

同理, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_y}{\partial y} &= \left(\cos\beta_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x} + \cos\beta_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x} + \cos\beta_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x} \right) \cos\beta_1 \\ &\quad + \left(\cos\beta_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + \cos\beta_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \cos\beta_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'} \right) \cos\beta_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\cos \beta_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial z} + \cos \beta_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial z} + \cos \beta_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial z} \right) \cos \beta_3, \\
\frac{\partial a_z}{\partial z} & = \left(\cos \gamma_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial x} + \cos \gamma_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial x} + \cos \gamma_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial x} \right) \cos \gamma_1 \\
& + \left(\cos \gamma_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial y} + \cos \gamma_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial y} + \cos \gamma_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial y} \right) \cos \gamma_2 \\
& + \left(\cos \gamma_1 \frac{\partial a_{x'}}{\partial z} + \cos \gamma_2 \frac{\partial a_{y'}}{\partial z} + \cos \gamma_3 \frac{\partial a_{z'}}{\partial z} \right) \cos \gamma_3.
\end{aligned}$$

将这三式相加，得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} & = (\vec{i} \cdot \vec{i}) \frac{\partial a_{x'}}{\partial x} \\
& + (\vec{j} \cdot \vec{i}) \frac{\partial a_{y'}}{\partial x} + (\vec{k} \cdot \vec{i}) \frac{\partial a_{z'}}{\partial x} \\
& + (\vec{i} \cdot \vec{j}) \frac{\partial a_{x'}}{\partial y} + (\vec{j} \cdot \vec{j}) \frac{\partial a_{y'}}{\partial y} + (\vec{k} \cdot \vec{j}) \frac{\partial a_{z'}}{\partial y} \\
& + (\vec{i} \cdot \vec{k}) \frac{\partial a_{x'}}{\partial z} + (\vec{j} \cdot \vec{k}) \frac{\partial a_{y'}}{\partial z} + (\vec{k} \cdot \vec{k}) \frac{\partial a_{z'}}{\partial z} \\
& = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

证毕。

4422. 证明

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{\delta(z) \rightarrow 0} \frac{1}{v} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS,$$

其中 S 为围绕着点 M 和界有体积 V 的封闭曲面, \vec{n} 为曲面 S 之外法线, $d(S)$ 为曲面 S 的直径.

证 由于

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 \vec{n} 之方向余弦. 应用奥氏公式以及积分中值定理, 得

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS &= \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint_V (\operatorname{div} \vec{a}) dx dy dz \\ &= \operatorname{div} \vec{a}(M_1) \cdot V, \end{aligned}$$

其中 M_1 是 V 中某点, 即

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_1) = \frac{1}{V} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS.$$

令 $d(S) \rightarrow 0$, 这时 V 缩向点 M , 从而点 $M_1 \rightarrow M$, 取极限, 即得

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS.$$

证毕.

4423. 求:

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{div} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} \\
 &= \operatorname{div} \left[\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) \vec{j} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

4424. 证明:

(a) $\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}$;

(b) $\operatorname{div}(u\vec{c}) = \vec{c} \cdot \operatorname{grad} u$ (\vec{c} 为常向量, u 为数量);

(B) $\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u$.

证 (a) 设 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

由于 $\frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial x}$, $\frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial y}$

$= \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial z}$, 故得

$$\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}.$$

(6) 设 $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, 其中 c_x, c_y, c_z 为常数.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{\partial(uc_x)}{\partial x} &= c_x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial(uc_y)}{\partial y} = c_y \frac{\partial u}{\partial y} \text{ 及 } \frac{\partial(uc_z)}{\partial z} \\ &= c_z \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ 故得} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(u\vec{c}) = \vec{c} \cdot \operatorname{grad} u.$$

$$(B) \text{ 由于 } \frac{\partial(ua_x)}{\partial x} = u \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial(ua_y)}{\partial y}$$

$$= u \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} \text{ 及 } \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = u \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ 故得}$$

$$\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u.$$

4425. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \Delta u \quad (\text{或记成 } \nabla^2 u). \end{aligned}$$

4426. 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 在什么情况下 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$?

解 由 4410 题的结果知,

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f'(r) \frac{x}{r} \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[f'(r) \frac{y}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[f'(r) \frac{z}{r} \right] \\
&= f''(r) \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right) + f'(r) \\
&\quad \left(\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \right) \\
&= f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).
\end{aligned}$$

要 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$, 只要 $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$.

将上述方程写成下述形式:

$$r f''(r) + 2 f'(r) = 0$$

或 $[r f''(r) + f'(r)] + f'(r) = 0$.

积分之, 即得

$$r f'(r) + f(r) = C \quad (C \text{ 为常数}).$$

再积分之, 得

$$r f(r) = Cr + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数}).$$

于是, 最后得

$$f(r) = C + \frac{C_1}{r},$$

此即所求之解.

4427. 计算: (a) $\operatorname{div} \vec{r}$; (b) $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r}$.

解 (a) $\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$

$$\begin{aligned} (6) \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) \\ &= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) \\ &= \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

4428. 计算 $\operatorname{div}[f(r)\vec{c}]$, 式中 \vec{c} 为常向量.

✓ 解 $\operatorname{div}[f(r)\vec{c}] = \vec{c} \cdot \operatorname{grad} f(r)^{*)}$

$$= \vec{c} \cdot f(r) \frac{\vec{r}}{r} = \frac{f(r)}{r} (\vec{c} \cdot \vec{r}).$$

*) 利用 4424 题 (6) 的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4429. 求 $\operatorname{div}[f(r)\vec{r}]$. 在什么情况下此向量的散度等于零?

✓ 解 $\operatorname{div}[f(r)\vec{r}] = f(r) \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} f(r)^{*)}$

$$= 3f(r) + \vec{r} \cdot f(r) \frac{\vec{r}}{r}^{**)}$$

$$= 3f(r) + rf'(r).$$

要 $\operatorname{div}[f(r)\vec{r}] = 0$, 只要 $3f(r) + rf'(r) = 0$, 即

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}.$$

积分之, 即得

$$f(r) = \frac{C}{r^3} \quad (C \text{ 为常数}),$$

此即所求之解.

*) 利用 4424 题(B)的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4430. 求: (a) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; (b) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (\text{a}) \quad \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) &= u \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u^* \\ &= u \Delta u + (\operatorname{grad} u)^2^{**}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{b}) \quad \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) &= u \operatorname{div}(\operatorname{grad} v) + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u^* \\ &= u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v^{**}) \end{aligned}$$

*) 利用 4424 题(B)的结果.

**) 利用 4425 题的结果.

4431. 物体以一定的角速度 ω 依逆时针方向绕 Oz 轴旋转.

求速度向量 \vec{v} 和加速度向量 $\vec{\omega}$ 在空间的点 $M(x, y, z)$ 和在已知时刻的散度.

解 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$, 微分之, 即得

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\omega}} &= \dot{\vec{\omega}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \dot{\vec{\omega}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \dot{\vec{\omega}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \dot{\vec{\omega}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}^*). \end{aligned}$$

为了计算 $\operatorname{div} \vec{v}$ 和 $\operatorname{div} \vec{\omega}$, 先计算 $\operatorname{div} (\vec{a} \times \vec{r})$, 此处 \vec{a} 为常向量. 由于

$$(\vec{a} \times \vec{r})_x = a_y z - a_z y, \quad (\vec{a} \times \vec{r})_y = a_z x - a_x z,$$

$$(\vec{a} \times \vec{r})_z = a_x y - a_y x,$$

故得

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(a_y z - a_z y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z x - a_x z) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(a_x y - a_y x) = 0.\end{aligned}$$

于是, 即得

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= \operatorname{div} \vec{v}_0 + \operatorname{div}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0, \\ \operatorname{div} \vec{\omega} &= \operatorname{div} \vec{\omega}_0 + \operatorname{div}(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \operatorname{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}_0) \\ &+ \operatorname{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega}] - \operatorname{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } \operatorname{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega}] &= \vec{\omega} \cdot \vec{r} \operatorname{div} \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \operatorname{grad}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^{**}) \\ &= \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}^{***}) = \omega^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{及 } \operatorname{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}] &= \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \\ &= 3\omega^2,\end{aligned}$$

从而, 最后得

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = \omega^2 - 3\omega^2 = -2\omega^2.$$

*) 利用向量代数中的公式(二重外积展开式):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

***) 利用 4424 题(B)的结果.

****) 利用 4411 题的结果.

4432. 求由引力中心的有限系统所产生的动力场之散度.

解 引力 $\vec{F} = \frac{k\vec{r}}{r^3}$ (k 为常数). 于是,

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ky}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kz}{r^3}\right) \\ &= k\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= k \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right]$$

$$= k \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0.$$

4433⁺ 求由极坐标 r 与 φ 所表的平面向量 $\vec{a} = \vec{a}(r, \varphi)$ 之散度的表示式.

解 设极坐标的 r 线与 φ 线的单位矢量为 \vec{e}_r 与 \vec{e}_φ , 且

$$\vec{a}(r, \varphi) = a_r(r, \varphi)\vec{e}_r + a_\varphi(r, \varphi)\vec{e}_\varphi.$$

这里自然假定 a_r, a_φ 都具有连续的偏导函数. 取面积元素 $\Delta S = r \Delta \varphi \Delta r$, 记其界线为 ΔC . 首先, 推导矢量 \vec{a} 经过界线 ΔC 的通量, 即矢流. 通量可分两部分: 一部分是经过 r 线的; 另一部分是经过 φ 线的. 它们分别是

$$\begin{aligned} & \int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r, \varphi + \Delta \varphi) dr - \int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r, \varphi) dr \\ &= \int_r^{r+\Delta r} [a_\varphi(r, \varphi + \Delta \varphi) - a_\varphi(r, \varphi)] dr \\ &\doteq \int_r^{r+\Delta r} \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Delta \varphi dr \\ &\doteq \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Delta \varphi \Delta r, \\ & \int_\varphi^{\varphi+\Delta \varphi} a_r(r + \Delta r, \varphi) (r + \Delta r) d\varphi - \int_\varphi^{\varphi+\Delta \varphi} a_r(r, \varphi) r d\varphi \\ &= \int_\varphi^{\varphi+\Delta \varphi} [a_r(r + \Delta r, \varphi) (r + \Delta r) - a_r(r, \varphi) r] d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} \frac{\partial[a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \Delta r d\varphi \\ &= \frac{\partial[a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \Delta r \Delta\varphi, \end{aligned}$$

且由于 a_r, a_φ 的偏导函数的连续性, 当 $\Delta r, \Delta\varphi$ 取得愈小时, 上述近似等式愈精确. 于是, 矢量 \vec{a} 经过 ΔC 的通量

$$\oint_{\Delta C} \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \left\{ \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial[a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \right\} \Delta\varphi \Delta r,$$

其中 \vec{n} 为曲线 ΔC 的外法线方向, 而且当 $\Delta r, \Delta\varphi$ 愈小时此近似等式愈精确.

于是, 根据散度的定义, 并注意到 ΔS 收缩为一点 (r, φ) 与 $\Delta r \rightarrow 0, \Delta\varphi \rightarrow 0$ 等价, 从而即得

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} \vec{a} \cdot \vec{n} ds}{\Delta S} \\ &= \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta\varphi \rightarrow 0}} \frac{\left\{ \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial[a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \right\} \Delta r \Delta\varphi}{r \Delta r \Delta\varphi} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial[a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned}$$

4434. 设

$$x = f(u, v, w), y = g(u, v, w), z = h(u, v, w),$$

用直交曲线坐标 u, v, w 表示 $\operatorname{div} \vec{a}(x, y, z)$.

作为特殊的情形, 求用柱坐标和球坐标表示 $\operatorname{div} \vec{a}$ 的表示式.

解 考虑向量 \vec{a} 通过由曲面 $u =$ 常数, $v =$ 常数, $w =$ 常数所界的小立体 (接近于长方体) V 的表面 S 的流量 (图 8.72), 我们有 $\vec{a} = a_u \vec{e}_1 + a_v \vec{e}_2 + a_w \vec{e}_3$.

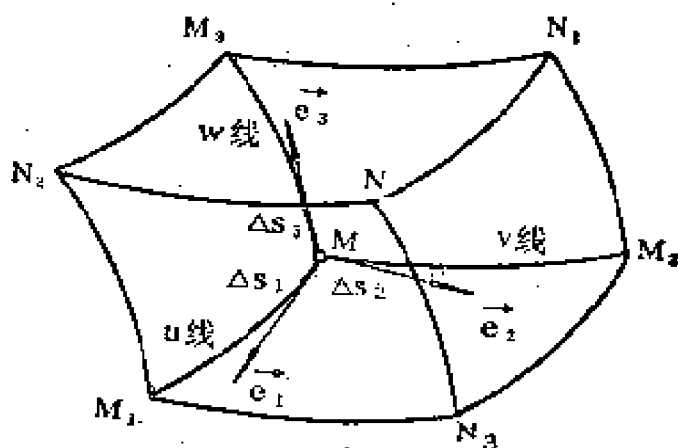


图 8.72

在 u 曲线上, 只有 u 变化 (v 和 w 都是常数), 故

$$d\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial u} du \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} du \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u} du \vec{k},$$

从而

$$ds_1 = |d\vec{r}| = L du,$$

$$\text{其中 } L = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},$$

ds_1 为 u 曲线上的弧元素. 同理可得

$$ds_2 = M dv, \quad ds_3 = N dw,$$

其中 ds_2, ds_3 分别为 v, w 曲线上的弧元素, 而

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}.$$

由于坐标曲线互相垂直, $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ 都很小, 故 V 接近于长方体. 因此, 其体积为

$$\begin{aligned} V &\doteq \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \doteq ds_1 ds_2 ds_3 \\ &= LMN du dv dw. \end{aligned}$$

现计算 \vec{a} 通过 V 的表面 S 向外的流量 $\iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$, S 共

包括六块小曲面 (图 8.72), 记垂直于 \vec{e}_1 方向的两块为 S_1 与 S_2 (即图中的 $MM_2N_1M_3$ 与 $M_1N_3NN_2$), 垂直于 \vec{e}_2 方向的两块为 S_3 与 S_4 , 垂直于 \vec{e}_3 方向的两块为 S_5 与 S_6 . 显然, 由于曲面很小, 有

$$\begin{aligned} &\iint_{S_2} \vec{a} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{a} \cdot d\vec{S} \\ &\doteq a_u \Delta S_2 \Delta S_3 |_{(u+\Delta u, v, w)} \\ &\quad - a_u \Delta S_2 \Delta S_3 |_{(u, v, w)} \\ &\doteq a_u MN dv dw |_{(u+\Delta u, v, w)} \\ &\quad - a_u MN dv dw |_{(u, v, w)} \\ &\doteq \frac{\partial (a_u MN dv dw)}{\partial u} du \\ &= \frac{\partial (MN a_u)}{\partial u} du dv dw. \end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_{S_4} \vec{a} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial (NL a_v)}{\partial v} du dv dw,$$

$$\iint_{s_6} a_n dS + \iint_{s_5} a_n dS = \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w} dudvdw.$$

相加即得

$$\begin{aligned} \iint_s a_n dS = & \left[\frac{\partial(MNa_u)}{\partial u} + \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v} \right. \\ & \left. + \frac{\partial(LMa_w)}{\partial w} \right] dudvdw. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\iint_s a_n dS}{V} = & \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u} (MNa_u) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial v} (NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w} (LMa_w) \right]. \end{aligned}$$

显然, 当小立体 V 愈缩向点 M (V 愈小) 时, 上述各近似等式都愈精确. 于是, 令 V 缩向 M (即 S 的直径 $d(S)$ 趋于零) 取极限, 利用 4422 题的结果, 得

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{\iint_s a_n dS}{V} \\ &= \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u} (MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v} (NLa_v) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial w} (LMa_w) \right]. \end{aligned}$$

特别是在柱坐标情形下, 有

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=z$$

$$(u=r, \quad v=\varphi, \quad w=z).$$

从而

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=r,$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}=1.$$

于是,

$$\operatorname{div} \vec{a}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right].$$

在球坐标情形下, 有

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z=\rho\cos\theta \quad (u=\rho, \quad v=\theta, \quad w=\varphi).$$

于是,

$$L=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}=1,$$

$$M=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}=\rho,$$

$$N=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=\rho\sin\theta.$$

由此可知

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{a} &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (a_\rho \rho^2 \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \rho \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\varphi \rho) \right] \\ &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} (a_\rho \rho^2) \right. \\ &\quad \left. + \rho \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \rho \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right].\end{aligned}$$

4435. 证明:

$$(a) \operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b};$$

$$(b) \operatorname{rot}(u\vec{a}) = u\operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} u \times \vec{a}.$$

证 (a) 设 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, 则有

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x + b_x & a_y + b_y & a_z + b_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}.\end{aligned}$$

$$(b) \operatorname{rot}_x(u\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial y}(ua_z) - \frac{\partial}{\partial z}(ua_y)$$

$$\begin{aligned}
&= u \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) + \left(a_x \frac{\partial u}{\partial y} - a_y \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\
&= u \operatorname{rot}_z \vec{a} + (\operatorname{grad} u \times \vec{a})_z,
\end{aligned}$$

同法可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}_y(u\vec{a}) &= u \operatorname{rot}_y \vec{a} + (\operatorname{grad} u \times \vec{a})_y, \\
\operatorname{rot}_x(u\vec{a}) &= u \operatorname{rot}_x \vec{a} + (\operatorname{grad} u \times \vec{a})_x.
\end{aligned}$$

于是,

$$\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} u \times \vec{a}.$$

4436. 求: (a) $\operatorname{rot} \vec{r}$; (b) $\operatorname{rot}[f(r)\vec{r}]$.

解 (a) $\operatorname{rot} \vec{r} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \vec{j}$
 $+ \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}.$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } \operatorname{rot}[f(r)\vec{r}] &= f(r) \operatorname{rot} \vec{r} + \operatorname{grad} f(r) \times \vec{r}^*) \\
&= \vec{0} + f'(r) \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} \\
&= \vec{0}.
\end{aligned}$$

*) 利用 4435 题(6)的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4437. 求: (a) $\operatorname{rot} \vec{c} f(r)$, (b) $\operatorname{rot}[\vec{c} \times f(r)\vec{r}]$ (\vec{c} 为定向量).

解 (a) $\operatorname{rot} \vec{c} f(r) = f(r) \operatorname{rot} \vec{c} + \operatorname{grad} f(r) \times \vec{c}$
 $= \frac{f'(r)}{r} (\vec{r} \times \vec{c}).$

$$\text{(b) } \operatorname{rot}[\vec{c} \times f(r)\vec{r}] = f(r) \operatorname{rot}(\vec{c} \times \vec{r})$$

+ grad $f(r) \times (\vec{c} \times \vec{r})$. 但是,

$$\text{rot}(\vec{c} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_y z - c_z y & c_x z - c_z x & c_x y - c_y x \end{vmatrix} = 2\vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{grad} f(r) \times (\vec{c} \times \vec{r}) &= \frac{f'(r)}{r} \vec{r} \times (\vec{c} \times \vec{r}) \\ &= \frac{f'(r)}{r} [(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{c} - (\vec{r} \cdot \vec{c}) \vec{r}], \end{aligned}$$

故最后得

$$\begin{aligned} \text{rot}[\vec{c} \times f(r) \vec{r}] &= 2f(r) \vec{c} + \frac{f'(r)}{r} [(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{c} \\ &\quad - (\vec{r} \cdot \vec{c}) \vec{r}] \end{aligned}$$

4438. 证明 $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}$.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \frac{\partial}{\partial x} (a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y} (a_z b_x - a_x b_z) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} (a_x b_y - a_y b_x) \\ &= b_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + b_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + b_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\ &\quad - a_x \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) - a_y \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$= a_x \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right)$$

$$= \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}.$$

4439. 求: (a) $\text{rot}(\text{grad } u)$; (b) $\text{div}(\text{rot} \vec{a})$.

解 (a) $\text{rot}(\text{grad } u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0}.$

$$(b) \text{div}(\text{rot} \vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = 0.$$

4440. 物体以一定的角速度 ω 围绕轴 $\vec{l} \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ 旋转. 求速度向量 \vec{v} 在空间的点 $M(x, y, z)$ 和在已知时刻的旋度.

解 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$. 从而有

$$v_x = v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z,$$

$$v_z = v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x.$$

由于 $\text{rot}_x \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x$, $\text{rot}_y \vec{v} = 2\omega_y$ 及 $\text{rot}_z \vec{v}$

$=2\omega_z$, 故 $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}$.

4441. 求向量 \vec{r} 的流量: (a) 穿过圆锥形 $x^2 + y^2 \leq z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的侧表面; (b) 穿过此圆锥形的底.

解 (a) 在侧面上, 点的向径的方向与圆锥的母线重合. 因此, 点的向径与圆锥在该点的法线互相垂直, 即 \vec{r} 在法线方向上的射影 $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$. 于是, 向量 \vec{r} 穿过侧面 D 的流量为

$$\iint_D \vec{r} \cdot d\vec{S} = 0.$$

(b) 在圆锥形的底面上, $r_n = h$. 于是, 所求的流量为

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq h^2} \vec{r} \cdot d\vec{S} = h \cdot \pi h^2 = \pi h^3.$$

4442. 求向量 $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ 的流量: (a) 穿过圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的侧表面; (b) 穿过此圆柱的全表面.

解 先求 (b), 由于

$$\iiint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{a} dV = \iiint_V 0 dV = 0,$$

故向量 \vec{a} 穿过圆柱的全表面的流量为零.

再求 (a), 又由于 $S = S_{\text{侧}} + S_{\text{上、下底}}$ 及在上、下底上 $a_n = xy$, 故有

$$\iint_{S_{\text{上、下底}}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} xy dx dy$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \sin\varphi \cos\varphi dr = 0.$$

于是,

$$\iint_{S_{\text{侧}}} a_n dS = 0,$$

即向量 \vec{a} 穿过侧面的流量也为零.

4443. 求向径 \vec{r} 穿过曲面

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq 1)$$

的流量

解 设 S 为所给的曲面 (锥), D 为锥的底面 (即 Oxy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$). 由于

$$\begin{aligned} \iint_S r_n dS + \iint_D r_n dS &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{r} dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} dz = \pi \end{aligned}$$

及在 D 上, $\vec{r} \perp \vec{n}$, 故 $r_n = 0$, $\iint_D r_n dS = 0$, 从而, 得

$$\iint_S r_n dS = \pi.$$

4444. 求向量 $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ 穿过球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 的正八分之一的流量.

解 设 S 为所给的曲面, S_1 , S_2 及 S_3 为球内三个坐标平面上的部分, 则有

$$\begin{aligned}
& \iint_S a_n dS = \iint_{S_1} a_n dS + \iint_{S_2} a_n dS + \iint_{S_3} a_n dS \\
& = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x>0, y>0, z>0}} \operatorname{div} \vec{a} dV = 2 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x>0, y>0, z>0}} (x+y+z) dx dy dz \\
& = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \cos\psi \cdot r (\cos\varphi \cos\psi \\
& \quad + \sin\varphi \cos\psi + \sin\psi) dr \\
& = 2 \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos\psi \sin\psi + \cos^2\psi (\cos\varphi + \sin\varphi)] d\psi \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} (\cos\varphi + \sin\varphi) \right] d\varphi \\
& = \frac{3}{8} \pi.
\end{aligned}$$

但在 $S_i (i=1, 2, 3)$ 上, 显然有 $\vec{a} \perp \vec{n}$, 故 $a_n = 0$, 从而 $\iint_{S_i} a_n dS = 0 (i=1, 2, 3)$. 于是, 所求的流量为

$$\iint_S a_n dS = \frac{3}{8} \pi.$$

4445. 求向量 $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ 穿过由诸平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$ ($a>0$) 所包围角锥的全表面的流量.

利用奥斯特洛格拉德斯基公式, 验证结果.

解 方法一

由于 $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, 故所求的流量为

$$\iint_S a_x dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = 0.$$

方法二

如图 8.73 所示.

在平面 $z=0$ (S_1) 上,
 $\vec{n} = \{0, 0, -1\}$; 在平面
 $y=0$ (S_2) 上, \vec{n}
 $= \{0, -1, 0\}$; 在平面
 $x=0$ (S_3) 上, \vec{n}
 $= \{-1, 0, 0\}$.

于是, 向量 \vec{a} 穿过曲
 面 S_1 的流量为

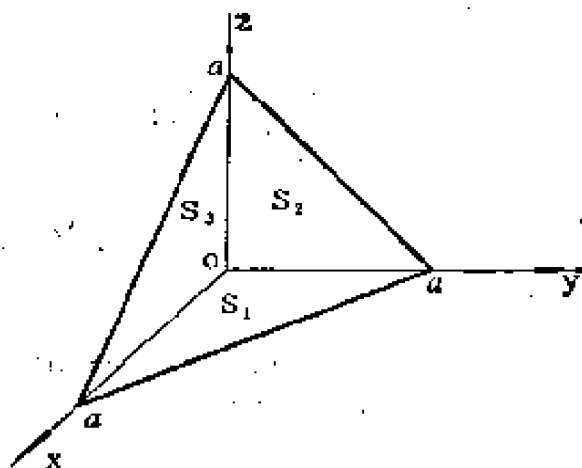


图 8.73

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} a_x dS &= \iint_{S_1} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\substack{x+y+z=a \\ x>0, y>0}} (-x) dx dy \\ &= -\frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

同法可求得向量 \vec{a} 穿过 S_2 及 S_3 面的流量也为 $-\frac{a^3}{6}$.

对于平面 $x+y+z=a$ (S_4), 其法向量为 \vec{n}
 $= \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$, 故流量为

$$\iint_{S_4} a_x dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{S_4} (y+z+x) dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{x+y \leq a \\ x \geq 0, y \geq 0}} a \cdot \sqrt{1^2+1^2+1^2} dx dy = \frac{a^3}{2}.$$

因此, 最后得向量 \vec{a} 穿过角锥全表面的流量为

$$\sum_{i=1}^4 \iint_{S_i} a_i dS = \frac{a^3}{2} + 3 \left(-\frac{a^3}{6} \right) = 0.$$

4446. 证明: 向量 \vec{a} 穿过由方程式 $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ ($(u, v) \in \Omega$) 所给出的曲面 S 的流量等于

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Omega} \left(\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

式中 \vec{n} 为曲面 S 的法线之单位向量.

证 设曲面 S 的方程为

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},$$

则有

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \vec{k}.$$

从而

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \vec{j} \\ + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k}.$$

因此, 易得

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2}.$$

又 $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ 的方向显然是法线 \vec{n} 的方向. 于是, 我们有

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_\sigma \vec{a} \cdot \sqrt{EG - F^2} \vec{n} du dv \\ = \iint_\sigma \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv \\ = \iint_\sigma \left(\vec{a} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv.$$

4447. 求向量 $\vec{a} = m \frac{\vec{r}}{r^3}$ (m 为常数) 穿过围绕坐标原点的封闭曲面 S 的流量.

解 所求的流量为

$$\iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = m \iint_S \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{n} dS = m \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS \\ = m \cdot 4\pi = 4\pi m.$$

*) 利用 4392 题(6)的结果.

4448. 已知向量

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a} \sum_{i=1}^n \operatorname{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right),$$

其中 e_i 为常数, r_i 为点 M_i (起点) 距动点 $M(\vec{r})$ 的距离. 求此向量穿过围绕点 M_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的封闭曲面 S 的流量.

解 首先, 我们有

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \operatorname{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{e_i \vec{r}_i}{4\pi r_i^3}.$$

其次, 我们考虑这样一个立体(V), 它由曲面 S 及包围点 M_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的 n 个小球所围成(这些小球的球心在点 M_i , 半径为 ρ_i). 由于 $\operatorname{div} \vec{a}$ 在 V 内为零, 故

$$\iint_S \vec{a}_n dS = \sum_{j=1}^n \iint_{S_j} \vec{a}_n dS,$$

其中 S_j 为第 j 个小球面, 但是

$$\iint_{S_j} \vec{a}_n dS = \iint_{S_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{e_i \vec{r}_i}{4\pi r_i^3} \right) \cdot \vec{n} dS.$$

由于

$$\begin{aligned} \iint_{S_j} \frac{1}{r_i^3} (\vec{r}_i \cdot \vec{n}) dS &= \iint_{S_j} \frac{\cos(\vec{r}_i, \vec{n})}{r_i^2} dS \\ &= \begin{cases} 0, & \text{当 } j \neq i \text{ 时, } *) \\ 4\pi, & \text{当 } j = i \text{ 时,} \end{cases} \end{aligned}$$

故得

$$\iint_{S_j} a_n dS = e_i.$$

从而

$$\iint_S a_n dS = \sum_{i=1}^n e_i.$$

*) 利用 4392 题的结果.

4449. 证明:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u dx dy dz,$$

其中曲面 S 包围体积 V .

证 参看 4393 题(a).

4450. 在单位时间内经过曲面元素 dS 而进入温度场 u 的热量等于

$$dQ = -k\vec{n} \cdot \text{grad } u dS,$$

其中 k 为内热的传导系数, \vec{n} 为曲面 S 的法线之单位向量. 求在单位时间内物体 V 所积累的热量. 研究温度上升的速度以推出为物体温度所满足的方程式 (热传导方程式).

解 由于

$$dQ = -k\vec{n} \cdot \text{grad } u dS = -k \text{grad}_n u dS,$$

故由奥氏公式, 即得

$$Q = - \iint_S k \text{grad}_n u dS = \iiint_V k \text{div}(\text{grad } u) dS.$$

因此，每单位时间内向立体内部流入的热量为

$$\iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dS, \quad (1)$$

这一热量引起立体内部温度的增加。现在我们从另一方面再来计算此热量。在时间 dt 内温度 u 增加

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

需要对体积元素 dV 输入热量

$$cdup dV = c \frac{\partial u}{\partial t} \rho dt dV,$$

其中 c 为物体在所考察的点处的热容量。于是，在时间 dt 内整个立体就要吸收热量

$$dt \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV,$$

而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV. \quad (2)$$

比较 (1) 式及 (2) 式，便得等式

$$\iiint_V \left\{ c \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) \right\} dV = 0.$$

由于上式对取在所考察境域内的任何立体 V 都适合，且被积函数显见连续，故根据 4097 题的结果，当点属于所考察的境域时，恒有

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u),$$

此即所求的热传导方程。

4451. 在运动中不可压缩的液体占有体积 V ，假定在域 V 内源泉和漏孔都不存在，试推出连续性的方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

式中 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 为液体密度， \vec{v} 为速度向量， t 为时间。

解 首先，我们已知：在每单位时间内自 V 中的任一立体 V' 的表面 S' 向外流出的流量 Q 为

$$Q = \iint_{S'} \rho v_n dS = \iiint_{V'} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV. \quad (1)$$

现在我们用另一法来计算 Q ，如考虑到在时间 dt 内密度 ρ 增加 $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ ，则立体元素 dV 的质量就增加 $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV$ ，而整个所考察的立体 V' 的质量就增加

$$dt \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

因此，每单位时间内 V' 中质量减少

$$- \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

由于 V 内无源泉和漏孔，故这个减少的质量正好就是从 V' 的表面 S' 流出的质量流量 Q ，即

$$Q = - \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2)$$

比较 (1) 式和 (2) 式，便得等式

$$\iiint_{V'} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right\} dV = 0.$$

由于上式对 V 中任一立体 V' 均成立, 且被积函数连续, 故根据 4097 题的结果, 当 $(x, y, z) \in V$ 时, 恒有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

4452. 求向量 $\vec{a} = \vec{r}$ 沿着螺线

$$\vec{r} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + b t \vec{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的一段的功效.

解 由于

$$d\vec{r} = (-a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b \vec{k}) dt,$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = b^2 t dt,$$

故所求的功效为

$$W = \int_0^{2\pi} b^2 t dt = 2\pi^2 b^2.$$

4453. 求向量 $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ (其中 f 是连续函数) 沿着弧 AB 的功效.

解 所求的功效为

$$W = \int_{r_A}^{r_B} f(r) \vec{r} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} f(r) \vec{r} \cdot \vec{t}^0 ds$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} f(r) r dr,$$

其中 \vec{t}^0 是单位切向量.

4454. 求向量

$$\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$$

(c 为常数) 的环流: (a) 沿着圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$;

(6) 沿着圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$.

解 (a) 圆 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 的向径 \vec{r} 适合方程

$$\vec{r} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 0 \vec{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

由于

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + c\vec{k})$$

$$\cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + 0 \vec{k}) dt$$

$$= dt,$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(6) 对于圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$, 有

$$\vec{r} = (2 + \cos t) \vec{i} + \sin t \vec{j} + 0 \vec{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

由于

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = (2\cos t + 1) dt,$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi} (2\cos t + 1) dt = 2\pi.$$

4455. 求向量 $\vec{a} = \text{grad}(\arctg \frac{y}{x})$ 沿着围线 C 的环流 Γ : (a)

C 不围绕 Oz 轴; (6) C 围绕 Oz 轴.

解 我们有

$$\vec{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}.$$

于是, 易知

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0} \quad (\text{除 } x=y=0, \text{ 即 } Oz \text{ 轴上的点}).$$

(a) 若 C 不围绕 Oz 轴, 则可于 C 上张一曲面 S , 使 S 与 Oz 轴不相交, 于是, 根据斯托克斯公式, 得

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} dS = 0.$$

(b) 若 C 围绕 Oz 轴. 先设 C 正好围绕 Oz 轴旋转一周, 取常数 $\tau < 0$ 充分小, 使 C 位于平面 $z = \tau$ 的上方. 在平面 $z = \tau$ 上围绕 Oz 轴取一圆周 C_r ($x^2 + y^2 = r^2$, $z = \tau$) 充分小, 使半径 r 小于 C 到 Oz 轴的距离. 以 C 与 C_r 为边界张上一曲面 S , 使 S 与 Oz 轴不相交. 由斯托克斯公式, 得

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_r} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} dS = 0,$$

其中 $-C_r$ 表示沿顺时针方向取向. 于是

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_r} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

但取 C_r 的参数方程 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = \tau$ 后, 得

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{r \sin \theta}{r^2} \right) (-r \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r \cos \theta}{r^2} \right) (r \cos \theta) \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

从而

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

现设 C 围绕 Oz 轴旋转了 n 圈. 为叙述简单起见, 假定 $n=2$. 在平面 Ozx 上引辅助线 (直线段), AB , 将 C 分解成两个只绕 Oz 轴转一周的闭曲线 $C_1 = ABMA$ 与 $C_2 = ANBA$ (图 8.74). 根据前面已证的结果可知

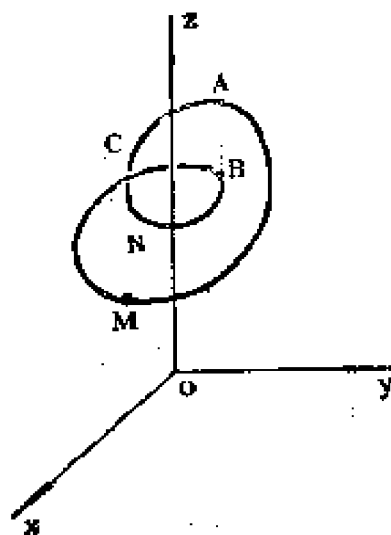


图 8.74

$$\oint_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 2\pi, \quad \oint_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

于是, 注意到 \overline{AB} 上的线积分 (第二型) 与 \overline{BA} 上的线积分相消, 即得

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 4\pi.$$

完全类似地, 可得一般情况 (C 围绕 Oz 轴转 n 圈) 时, 有

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = 2\pi n.$$

4456*) 平面的不可压缩稳流由速度向量

$$\vec{w} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$$

描写出来, 求出: (1) 经过包围域 S 的封闭围线 C 所

流出液体的量 Q (液体的消耗); (2) 速度向量沿着围线 C 的环流 Γ . 若流场无源泉、无漏孔且无旋度, 则函数 u 和 v 满足什么样的方程式?

解 (1) 考虑包含着点 $D(x, y)$ 的两边长分别为 Δx 与 Δy 的小矩形元

$ABCD$ (图8.75).

在单位时间内沿 Ox 轴方向从 AD 边流入的量为 $u(x, y) \cdot \Delta y$ (为简单起见, 设密度 $\rho = 1$), 而同时从 BC 边流出的量为 $u(x + \Delta x, y) \Delta y$.

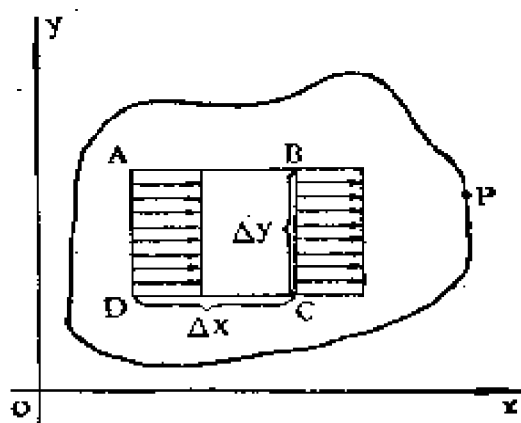


图 8.75

于是, 在单位时间内, 沿 Ox 轴方向从单位面积的小正方形内流出的量为

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x \Delta y} \Delta y.$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 此比值的极限 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 就是在点 (x, y) 沿

Ox 轴方向的发散强度. 类似地, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 就是在点 (x, y)

沿 Oy 轴方向的发散强度. 于是, 在点 (x, y) 处液体

的发散强度为 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, 而对于面积元 $dx dy$ 的流量

即为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy.$$

因此, 总的流量为

$$Q = \iint_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy.$$

另一解法: 令点 P 为围线 C 上的任一点, \vec{n} 为向外法线, 考虑曲线元素 ds . 单位时间内通过 ds 弧段的流量为

$$dQ = w_n ds,$$

其中 w_n 为点 P 处的流速 \vec{w} 在法向量 \vec{n} 上的投影: $w_n = \vec{w} \cdot \vec{n}$. 于是, 所求的通过曲线 C 的流量为

$$Q = \int_C w_n ds.$$

但是, $w_n = \vec{w} \cdot \vec{n} = u \cos(n, x) + v \cos(n, y) = u \frac{dy}{ds} - v$

$\frac{dx}{ds}$, 故得

$$Q = \int_C u dy - v dx.$$

应用格林公式, 即得

$$Q = \iint_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy.$$

(2) $d\Gamma = \vec{w} \cdot d\vec{r} = u dx + v dy$, 故

$$\Gamma = \int_C u dx + v dy = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

若流场无源泉无漏孔及无旋度，则对于流场中任何围线 C 及其所包围的域 S ，均有

$$Q = 0 \text{ 及 } \Gamma = 0.$$

于是，在流场中的每一点，均有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ 及 } \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\text{或 } \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{ 及 } -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

这就是 u, v 所应满足的方程。

*) 编者注：从原书答案来看，本题叙述有误。最后的问题中“流体是不可压缩”应改为“流场无源泉、无漏孔”，而在题目开始，应假定流体不可压缩。

**) 参看 4324 题的推导。

4457. 证明：场

$$\vec{a} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} \\ + xy(x + y + 2z)\vec{k}$$

是有势场，并求这个场的势。

解 由于对空间任一点 (x, y, z) 均有

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [xy(x + y + 2z)] \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial z} [xz(x + 2y + z)] \right\} \vec{i}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[yz(2x+y+z) \right] \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left[xy(x+y+2z) \right] \right\} \vec{j} \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[xz(x+2y+z) \right] \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left[yz(2x+y+z) \right] \right\} \vec{k} \\
& = \vec{0},
\end{aligned}$$

故 \vec{a} 为有势场.

又由于势 u 满足

$$\begin{aligned}
du &= \vec{a} \cdot d\vec{r} \\
&= yz(2x+y+z)dx + xz(x+2y+z)dy \\
&\quad + xy(x+y+2z)dz \\
&= xyz(dx+dy+dz) + (x+y+z) \\
&\quad \cdot (yzdx + zx dy + xy dz) \\
&= xyzd(x+y+z) + (x+y+z)d(xyz) \\
&= d[xyz(x+y+z)],
\end{aligned}$$

故势 $u = xyz(x+y+z) + C$, 其中 C 为任意常数.

4458. 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场

$$\vec{a} = -\frac{m}{r^3} \vec{r}$$

的势.

解 由于

$$du = \vec{a} \cdot d\vec{r} = -\frac{m}{r^3}(x dx + y dy$$

$$+ z dz) = -\frac{m}{2r^3}d(r^2)$$

$$= -\frac{m}{r^2}dr = d\left(-\frac{m}{r}\right),$$

故势 $u = \frac{m}{r} + C$ (C 为任意常数), 通常取 $u = \frac{m}{r}$ ($r \neq 0$).

4459. 求位置在 M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 各点的质量系 m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 所产生引力场的势.

解 引力场 $\vec{a} = -\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} \vec{r}_i$, 其中 r_i 为动点 M 与 M_i

之间的距离. 由于

$$du = \vec{a} \cdot d\vec{r} = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}\right),$$

故势 $u = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} + C$ (C 为任意常数), 通常取 $u = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$.

4460. 证明: 场 $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ (其中 $f(r)$ 是单值连续函数) 是有势场. 求这个场的势.

解 利用 4436 题(6)的结果, 即知 $\text{rot}(f(r)\vec{r}) = \vec{0}$, 故 \vec{a} 为有势场. 又由于

$$du = \vec{a} \cdot d\vec{r} = x f(r) dx + y f(r) dy + z f(r) dz$$

$$= \frac{1}{2} f(r) d(r^2) = r f(r) dr,$$

故势 $u = \int_{r_0}^r t f(t) dt$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4461. 证明公式

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_P \left\{ \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right\} = & - \iint_S \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r} \\ & + \iiint_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}, \end{aligned}$$

其中 S 为包含体积 V 的曲面, \vec{n} 为曲面 S 的外法线, r 为点 $P(x, y, z)$ 与点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 两点间的距离.

证 首先指出, 题中需假定 $\rho(Q)$ 在 V 上具有连续的导函数.

i) 先设点 $P(x, y, z)$ 在 V 之外. 令

$$f(x, y, z) = \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r}. \quad (1)$$

显然, 右端积分的被积函数对参变量 x, y, z 都具有连续的偏导函数, 故可在积分号下求导数, 得

$$\operatorname{grad}_P f = \iiint_V \rho(Q) \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} dV. \quad (2)$$

又由于

$$\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}, \quad \vec{r} = \vec{QP}.$$

代入 (2) 式, 得

$$\operatorname{grad}_P f = - \iiint_V \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} dV. \quad (3)$$

在公式 (4408 题(r))

$$\text{grad}_Q(\varphi\psi) = \varphi \text{grad}_Q\psi + \psi \text{grad}_Q\varphi$$

中, 令 $\varphi = \rho(Q)$, $\psi = \frac{1}{r}$, 再代入 (3) 式, 得

$$\begin{aligned} \text{grad}_P f = & - \iiint_V \text{grad}_Q \left(\frac{\rho(Q)}{r} \right) dV \\ & + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

根据奥氏公式, 有

$$\iiint_V \text{grad}_Q \left(\frac{\rho(Q)}{r} \right) dV = \iint_S \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r}. \quad (5)$$

将上式代入 (4) 式, 即得

$$\text{grad}_P f = - \iint_S \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}.$$

ii) 现设点 $P(x, y, z)$ 在 V 的内部. 仍按 (1) 式令 $f(x, y, z)$. 注意, 这时 (1) 式右端的积分为广义重积分 (点 P 为瑕点); 但易知它收敛, 因为在以 P 点为中心, e 为半径的球域 V_e 上的积分满足 ($M = \max_{Q \in V} |\rho(Q)|$)

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{V_e} \frac{\rho(Q)}{r} dV \right| & \leq \iiint_{V_e} \frac{|\rho(Q)|}{r} dV \leq M \iiint_{V_e} \frac{dV}{r} \\ & = M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^e \frac{r^2}{r} dr = 2 M \pi e^2 \rightarrow 0 \quad (\text{当} \end{aligned}$$

$e \rightarrow +0$ 时).

我们证明：这时仍可将 (1) 式的积分在积分号下求导数而得 (2) 式。事实上，由于

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{V_\varepsilon} \rho(Q) \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} dV \right| &\leq \iiint_{V_\varepsilon} \left| \rho(Q) \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} \right| dV \\ &= \iiint_{V_\varepsilon} \left| -\rho(Q) \frac{x-\xi}{r^3} \right| dV \leq M \iiint_{V_\varepsilon} \frac{dV}{r^2} \\ &= M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\varepsilon \frac{r^2}{r^2} dr = 4M\pi\varepsilon, \end{aligned}$$

故积分

$$\iiint_V \rho(Q) \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} dV$$

关于 x 一致收敛。于是，(1) 式右端的积分可在积分号下关于 x 求偏导函数，得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} dV. \quad (6)$$

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} dV, \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} dV. \quad (8)$$

由 (6), (7), (8) 三式，即得 (2) 式。仿 i) 段办法，可得 (3) 式与 (4) 式（注意，仿前，可知 (4) 式右端两

个积分都收敛).但不能直接对 V 应用奥氏公式而得 (5) 式, 因为有点 P , 但显然可对 $V - V_\epsilon$ 应用奥氏公式, 得

$$\iiint_{V-V_\epsilon} \text{grad}_c \left(\frac{\rho(Q)}{r} \right) dV = \iint_{S+S_\epsilon} \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r}, \quad (9)$$

其中 S_ϵ 为球域 V_ϵ 的边界 (球面), 在 S_ϵ 上的 \vec{n} 是指向点 P 的. 由于

$$\begin{aligned} \left| \iint_{S_\epsilon} \rho(\theta) \vec{n} \frac{dS}{r} \right| &\leq \sqrt{3} \iint_{S_\epsilon} |\rho(\theta)| \frac{dS}{r} \leq \sqrt{3} M \iint_{S_\epsilon} \frac{dS}{r} \\ &= \frac{\sqrt{3} M}{\epsilon} \iint_{S_\epsilon} dS = \frac{\sqrt{3} M}{\epsilon} \cdot 4\pi\epsilon^2 = 4\sqrt{3} \pi M \epsilon, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{S_\epsilon} \rho(\theta) \vec{n} \frac{dS}{r} = 0.$$

于是, 在 (9) 式两端令 $\epsilon \rightarrow +0$ 取极限, 即得 (5) 式. 以 (5) 式代入 (4) 式, 最后得所要证的公式

$$\begin{aligned} \text{grad}_P \left\{ \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right\} &= - \iint_S \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r} \\ &\quad + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}. \end{aligned}$$

证毕.

4462. 证明: 若 $\vec{a} = \text{grad } u$, 其中

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

$$\text{及 } r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

$$\text{则 } \operatorname{div} \vec{a} = \rho(x, y, z)$$

(假定对应的积分有意义)。

证 首先指出, 为保证题述的广义重积分 (既是无穷积分, 又是瑕积分) 的存在性以及下面要用到的积分号下求导数的合理性, 一般我们需假定: $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ 在全空间具有连续的偏导函数, 并且当 $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ 充分大时 ($R \geq R_0$), 有

$$|\rho(\xi, \eta, \zeta)| \leq \frac{M}{R^{2+\alpha}}, \quad (1)$$

其中 $M > 0$, $\alpha > 0$ 是两个常数。

考虑空间任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 用 V_0 表示以 P_0 为中心, 1 为半径的单位球域。我们先限制点 $P(x, y, z)$ 只在 V_0 中变动。又用 V_1 表示以 P_0 为中心, 2 为半径的球域, V_2 表示整个空间去掉 V_1 所剩下的部分 (无界域)。令

$$u_1(x, y, z) = \iiint_{V_1} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2)$$

$$u_2(x, y, z) = \iiint_{V_2} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (3)$$

于是,

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} [u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z)]. \quad (4)$$

(2) 式右端为瑕积分, 在 4461 题证明的第 ii) 段中已证它是收敛的; (3) 式右端为无穷积分, 下面证明它收敛. 令

$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, $R_1 = \max\{R_0, 2(r_0 + 1)\}$, 则当 $R \geq R_1$ 时, 有 $R \geq R_0$ (从而 (1) 式满足), 且 $R \geq 2(r_0 + 1)$. 以 Q 表示点 (ξ, η, ζ) , O 表示原点 $(0, 0, 0)$. 由于三角形两边之和大于第三边, 故 (注意 $P \in V_0$).

$$R = \overline{OQ} \leq \overline{OP} + \overline{PQ} \leq r_0 + 1 + r \leq \frac{R}{2} + r,$$

从而

$$\begin{aligned} & \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_1^2} \left| \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} \right| d\xi d\eta d\zeta \\ & \leq M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_1^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r R^{2+\alpha}} \\ & \leq 2M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_1^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{3+\alpha}} \\ & = 2M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{R_1}^{+\infty} \frac{R^2}{R^{3+\alpha}} dR \\ & = 2M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{R_1}^{+\infty} \frac{dR}{R^{1+\alpha}} \end{aligned}$$

$$= \frac{8M\pi}{aR_1^2} < +\infty, \quad (5)$$

故(3)式右端的无穷积分收敛.

由(4)式知 $u(x, y, z)$ 有定义. 由于 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$, 故我们只要证明

$$\Delta u = \rho(x, y, z). \quad (6)$$

我们证明(3)式右端的无穷积分可在积分号下求导数两次:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (8)$$

为此, 只要证明(7)式右端的积分和(8)式右端的积分都关于 $(x, y, z) \in V_0$ 一致收敛. 由于

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\xi - x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - x)^2}{r^5},$$

故仿(5)式之推导, 可得: 当 $R_2 > R_1 = \max\{R_0, 2(r_0 + 1)\}$ 时, 对一切 $(x, y, z) \in V_0$, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_2^2} \left| \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right| d\xi d\eta d\zeta \\ & \leq M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2 R_2^{2+\alpha}} \leq 4M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R_2^{4+\alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16M\pi}{(1+\alpha)R_2^{1+\alpha}}, \\
&\quad \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \left| \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right| d\xi d\eta d\zeta \\
&\leq 4M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^3 R_2^{2+\alpha}} \leq 32M \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R_2^{6+\alpha}} \\
&= \frac{128M\pi}{(2+\alpha)R_2^{2+\alpha}}.
\end{aligned}$$

由此可知, (7) 式右端的积分和 (8) 式右端的积分都关于 $(x, y, z) \in V_0$ 一致收敛. 因此, (7) 式与 (8) 式当 $(x, y, z) \in V_0$ 时成立. 同理可证, 当 $(x, y, z) \in V_0$ 时, 有

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (10)$$

将(8), (9), (10)三式相加, 即得(注意到 $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$)

$$\Delta u_2 = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\xi d\eta d\zeta = 0. \quad (11)$$

下面再求 $\Delta u_1 = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1)$. 由4461题的结果知

$$\operatorname{grad} u_1 = - \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\vec{n}}{r} dS + \iiint_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}, \quad (12)$$

其中 S_1 表示 V_1 的边界 (球面). 显然, 当 $P(x, y, z) \in V_0$ 时, (12) 式右端的第一个积分 (面积分) 的被积函数具有对于 x, y 及 z 的连续偏导函数, 故可在积分号下求对于 x, y 及 z 的偏导函数. 另外, 仿照 4461 题 ii) 段之证可知 (12) 式右端的第二个积分 (三重积分) 也可在积分号下求对于 x, y 及 z 的偏导函数. 于是, 得

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1) &= - \iint_{S_1} \operatorname{div}_P \left[\frac{\rho(Q) \vec{n}}{r} \right] dS \\ &\quad + \iiint_{V_1} \operatorname{div}_P \left[\frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \right] dV. \quad (13) \end{aligned}$$

利用公式 $\operatorname{div}(v\vec{a}) = v\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} v$ (4424 题(B)), 可知 (注意到 $\rho(Q)\vec{n}$ 及 $\operatorname{grad}_Q \rho(Q)$ 均与 P 无关)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_P \left[\frac{\rho(Q) \vec{n}}{r} \right] &= \rho(Q) \vec{n} \cdot \operatorname{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= -\rho(Q) \vec{n} \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) = -\rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right), \\ \operatorname{div}_P \left[\frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \right] &= \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= -\operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

代入 (13) 式, 得

$$\Delta u_1 = \iint_{s_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \iiint_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) dV. \quad (14)$$

由于

$$\operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \rho(Q) \Delta_Q \left(\frac{1}{r} \right) + \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right), \text{ 而 } \Delta_Q \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \ (Q \neq P), \text{ 故 (14)}$$

式可写为

$$\Delta u_1 = \iint_{s_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \iiint_{V_1} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV. \quad (15)$$

下面计算(15)式中的三重积分, 用 Ω_ϵ 表示以点 $P(x, y, z)$ 为中心, ϵ 为半径的球域, 其边界(球面)记为 S_ϵ . 对 $V_1 - \Omega_\epsilon$ 应用奥氏公式, 得

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_1 - \Omega_\epsilon} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV \\ &= \iint_{s_1 + s_\epsilon} \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_{s_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + \iint_{s_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS, \quad (16) \end{aligned}$$

其中 \vec{n} 是向外法线, 从而在 S_ε 上是指向点 $P(x, y, z)$ 的. 由中值定理知

$$\begin{aligned} \iint_{S_\varepsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS &= - \iint_{S_\varepsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ &= \iint_{S_\varepsilon} \rho(Q) \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon} \rho(Q) dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \rho(Q_\varepsilon) \cdot 4\pi\varepsilon^2 \\ &= 4\pi\rho(Q_\varepsilon), \end{aligned}$$

其中 Q_ε 是球面 S_ε 上的某一点, 代入(16)式, 得

$$\begin{aligned} &\iiint_{V_1 - \Omega_\varepsilon} \operatorname{div}_c \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_c \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV \\ &= \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + 4\pi\rho(Q_\varepsilon), \end{aligned}$$

两端令 $\varepsilon \rightarrow +0$ 取极限, 得

$$\begin{aligned} &\iiint_{V_1} \operatorname{div}_c \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_c \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV \\ &= \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + 4\pi\rho(P), \end{aligned}$$

再以此式代入(15)式, 得

$$\Delta u_1 = -4\pi\rho(x, y, z). \quad (17)$$

由(17)式, (11)式以及(4)式, 即得(6)式. 于是, (6)式对一切点 $P(x, y, z) \in V_0$ 成立. 由于 V_0 的中心 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是任意的 (可为空间任一点), 故知(6)式对空间任一点都成立, 证毕.